



SBI/IFUSP
BASE: 04
SYS Nº: 1080329

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

**QUANTAS MEDIDAS SÃO NECESSÁRIAS
PARA O CONHECIMENTO DE UMA
GRANDEZA FÍSICA?**

V.P. Likhachev, M.T.F. da Cruz, J. Mesa

Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil

Publicação IF - 1388/99

QUANTAS MEDIDAS SÃO NECESSÁRIAS PARA O CONHECIMENTO DE UMA GRANDEZA FÍSICA?

V.P. Likhachev, M.T.F. da Cruz, J. Mesa

1. INTRODUÇÃO

O objetivo inicial deste trabalho era apresentar, de forma clara, conceitos estatísticos essenciais para a representação correta de resultados de experimentos, para estudantes de áreas de cunho experimental. A discussão do assunto durante o preparo do texto, juntamente com os resultados das simulações que efetuamos, nos levou a rever temas que pareciam sedimentados, mas que agora recebem nova interpretação. Dessa forma, a motivação do trabalho se desdobrou, como explicamos a seguir.

A urgência em se utilizar ferramentas que possibilitem um tratamento mais sofisticado e completo de um assunto causa às vezes inversões, pois somos levados a utilizar a ferramenta antes mesmo de estudá-la em um curso adequado sobre o tema. Essa é uma situação comum, sucedendo tanto em cursos teóricos como nos laboratórios didáticos. No caso particular dos laboratórios didáticos, muitas vezes os estudantes começam a utilizar diversas ferramentas estatísticas antes sequer de se familiarizarem com o seu significado preciso e com o aparato matemático que as envolve.

Esse procedimento pode deixar deficiências na formação do estudante. Dentre as deficiências que encontramos estão a falta do entendimento e do uso corretos da linguagem estatística. Assim, a motivação didática deste trabalho é a de esclarecer para o estudante o significado de ferramentas estatísticas, como o desvio padrão da amostra e aquele da média.

Durante o preparo das simulações de medidas e exame das propriedades dos diferentes intervalos estatísticos, pudemos observar diretamente o efeito de se fazer um número reduzido N de medidas (*e.g.* $N \leq 5$) e também o que sucede em casos de N mais elevado. Muito embora a linguagem estatística não possua qualquer ambigüidade, os resultados dessas simulações têm aspectos essenciais, que permitem ilustrar que, ao expressarmos o nível de confiança (probabilidade) associado a um determinado intervalo, esse nível de confiança é um *valor médio*, tendo certa dispersão, associada à dispersão da média e à dispersão do desvio padrão do intervalo apresentado. A dispersão do nível de confiança será tão maior quanto menos medidas fizermos. Assim, por “conhecimento de uma grandeza física” nos referimos à obtenção de um intervalo (dado pelo melhor valor \pm desvio padrão) com um conteúdo de probabilidade que tenha uma dispersão pouco importante.

2. A LINGUAGEM ESTATÍSTICA

Nessa linguagem, os resultados obtidos em um experimento onde foram feitas N medidas da grandeza que chamaremos de Y , representam uma *amostra* dessa grandeza. Representaremos o conjunto desses resultados por $\{Y_i\}_N$. O conjunto de todos os resultados possíveis de serem obtidos para Y é chamado de *população*. Denominamos Y uma *variável*

aleatória e dizemos ainda que essa variável aleatória é regida por uma *função densidade de probabilidade*, $F(Y)$, cuja forma funcional pode ser ou não conhecida previamente [1].

Um ponto importante é como representar a amostra $\{Y_i\}_N$. Intuitivamente, o aluno/experimentador quer apresentar um melhor valor juntamente com alguma característica que indique a reprodutibilidade desses dados. A maneira adotada é apresentar-se o *valor médio*, \bar{Y} , e o *desvio padrão da média*, s_m . Este último é calculado a partir do desvio padrão da amostra, s , ambos definidos adiante. O que se está informando, dentro de uma linguagem *padronizada*, são os intervalos $[\bar{Y} - s, \bar{Y} + s]$ e $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$.

Costuma-se afirmar que os intervalos, centrados em \bar{Y} , estipulados pelo desvio padrão e pelo desvio padrão da média contém três tipos de informação, ou têm três conteúdos estatísticos:

1. $[\bar{Y} - s, \bar{Y} + s]$ encerra uma probabilidade conhecida de se obter uma particular medida Y_j em seu interior, *no caso de se repetir uma medida em condições idênticas*;
2. $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$ encerra uma probabilidade conhecida de se obter uma nova média Y' dentro dele, *no caso de se repetir todo o experimento em condições idênticas*. Isso significa que, tendo feito N medidas no primeiro experimento, sabemos a chance de que numa repetição de N medidas nas mesmas condições experimentais a nova média Y' esteja dentro do intervalo apresentado;
3. $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$ encerra também uma probabilidade conhecida de se achar o *valor verdadeiro* Y_0 de Y dentro do intervalo obtido, quando Y_0 existir. Aqui, a existência ou não do valor verdadeiro depende do que estamos medindo (*e.g.* podemos calcular o mesmo intervalo para as velocidades das moléculas de um gás à temperatura ambiente, mesmo não existindo o valor verdadeiro dessa velocidade, pois as variações obtidas durante as medidas não se devem apenas a flutuações estatísticas da grandeza em si ou àquelas introduzidas pelo processo de medida. Aqui, a principal origem das variações reside na distribuição Maxwelliana de velocidades, *i.e.*, há *de fato* moléculas movendo-se mais lentamente e outras mais rápidas).

O primeiro e segundo conteúdos representam como flutuam resultados obtidos dentro das condições do experimento. O terceiro não, pois ele é baseado na existência de um valor limite, Y_0 , para o qual convergirá a média de um número de medidas muito grande, com o concomitante estreitamento do intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$ ao redor dela. Este valor limite jamais será conhecido a não ser que a população seja finita e nós a conheçamos, o que é um caso muito especial.

Demonstraremos aqui, com o auxílio de simulações usando o método de Monte Carlo, que estes três conteúdos de fato coincidem no caso de um grande número de medidas, N , mas que os resultados são bem diferentes se fazemos poucas medidas e que, além disso, o primeiro e o segundo conteúdos probabilísticos deixam de fazer sentido e mesmo ter utilidade prática para N pequeno. Simulações de Monte Carlo permitem estudar diretamente a evolução desses três conteúdos com a diminuição do número das medidas. Isso se deve ao fato de que essa técnica nos permite inverter o problema: gerar resultados de medidas fixando o valor verdadeiro (*i.e.* fixando a média da população, Y_0) e o desvio

padrão da população, σ , e observar os conteúdos (1), (2) e (3) dos intervalos através da análise das distribuições de freqüências.

3. DEFINIÇÕES E MÉTODOS DE SIMULAÇÃO

Seguindo as prescrições estatísticas [1,2], devemos observar a diferença entre os parâmetros da população e aqueles da amostra (veja a Fig.1).

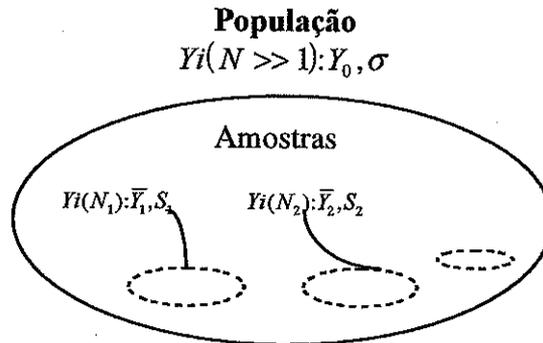


Fig. 1. Definição geral.

Vamos iniciar caracterizando a amostra, $\{Y_i\}_N$, de resultados de N medidas de uma grandeza através da sua média aritmética

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (1)$$

e da variância

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N - 1} \quad (2)$$

A raiz quadrada da variância é o desvio padrão, s, da amostra:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N - 1}} \quad (3)$$

este é uma *estimativa* do desvio padrão, σ , da população. Vamos introduzir também o desvio padrão do valor médio, s_m , que pode ser calculado através do desvio padrão da amostra:

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (4)$$

Vamos supor um caso típico: todos os dados são estatisticamente independentes e obedecem à distribuição normal, ou de Gauss, dada por

$$F(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(Y - Y_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5)$$

onde Y_0 e σ têm os significados apresentados. É fácil verificar direto de (5) que o desvio padrão da população, σ , é a meia largura da distribuição $F(Y)$ na ordenada $e^{-1/2} \cong 0,61$ do valor máximo da curva e que a área sob esta dentro do intervalo $[Y_0 - \sigma, Y_0 + \sigma]$ é $\approx 0,682$. Em outras palavras, a probabilidade de se achar um elemento da população dentro do intervalo de um desvio padrão é $\approx 68,2\%$.

A média introduzida no gerador de números aleatórios fará o papel do valor verdadeiro. A confiabilidade do gerador de números aleatórios é também uma questão importante, existindo toda uma literatura a respeito [3]. Para termos certeza de que os resultados obtidos estavam consistentes, utilizamos dois geradores independentes, como explicado a seguir: (1) foi preparado um programa em linguagem FORTRAN, utilizando o algoritmo de Box-Muller [3], eq.(6), com o qual são gerados dois números aleatórios, X_1 e X_2 , distribuídos uniformemente dentro do intervalo $[0,1]$. A transformação abaixo os converte no número Y_i , pertencente ao intervalo aberto $]-\infty, +\infty[$, distribuído de acordo com a curva de Gauss de média Y_0 e desvio padrão σ :

$$Y_i = Y_0 + \sigma \sqrt{-2 \cdot \ln X_1} \cdot \cos(2\pi \cdot X_2) \quad (6)$$

aqui, Y_0 e σ têm os papéis de valor verdadeiro e de desvio padrão da população; (2) foram preparadas rotinas de simulação, na linguagem da plataforma MATLAB® [4].

A qualidade destes geradores de números aleatórios de gaussianos foi estudada e um teste pode ser visto na Fig.2, para o caso dos cálculos em FORTRAN, onde foi produzido um histograma a partir da geração de 10000 números com distribuição normal, com parâmetros $Y_0 = 2,0$ e $\sigma = 0,3$.

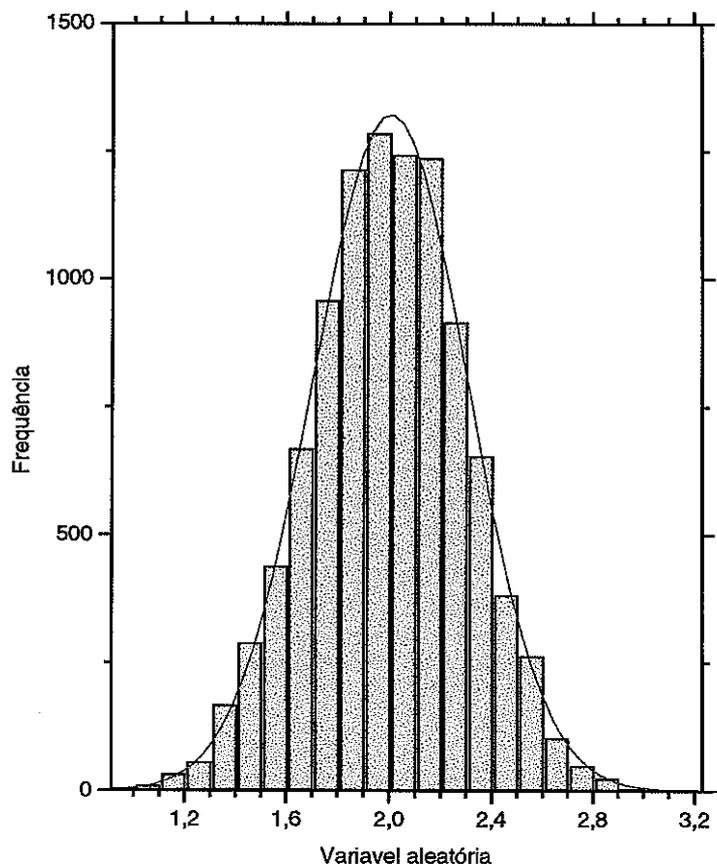


Fig.2. Histograma da distribuição de Y_i .

Os parâmetros da curva sólida foram obtidos através do ajuste dos dados da simulação e resultaram em $\bar{Y} = 2,0031$ e $s = 0,3011$. Efetuamos um teste similar com o gerador de números aleatórios gaussianos na plataforma MATLAB®, *randn*, produzindo $\bar{Y} = 1,9965$ e $s = 0,3012$.

4. ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DA POPULAÇÃO

Estudamos primeiramente o conteúdo probabilístico do desvio padrão do conjunto das medidas, s , no caso de um pequeno número de medidas, $N = 2$: fixamos $Y_0 = 2,0$ e $\sigma = 0,3$ e geramos apenas dois dados aleatórios Y_1 e Y_2 . Calculamos o valor médio \bar{Y} e o desvio padrão do conjunto, s , de acordo com as equações acima. Determinamos assim o intervalo $[\bar{Y} - s, \bar{Y} + s]$. Geramos em seguida $N' = 1000$ dados, $\{Y_i\}_{1000}$, e contamos o número ocasiões em que Y_i está contido no intervalo definido acima.

Repetimos este procedimento $N'' = 2000$ vezes e elaboramos um histograma da distribuição de frequências relativas para a fração de sucessos, que é a probabilidade ou o nível de confiança daquele intervalo. A Fig.3 representa os resultados desse tipo de

simulação para $N = 2, 3, 5, 10$ e 100 . Podemos ver que no caso $N = 2$ a distribuição de probabilidade é monotônica, quase uniforme, com um pequeno aumento da probabilidade para valores baixos da fração de sucessos. A frequência de se achar 10% do conjunto dentro do intervalo é só ~2 vezes maior do que aquela de se achar 90%. Podemos concluir que no caso $N = 2$ o intervalo $[\bar{Y} - s, \bar{Y} + s]$ não tem um nível de confiança bem definido.

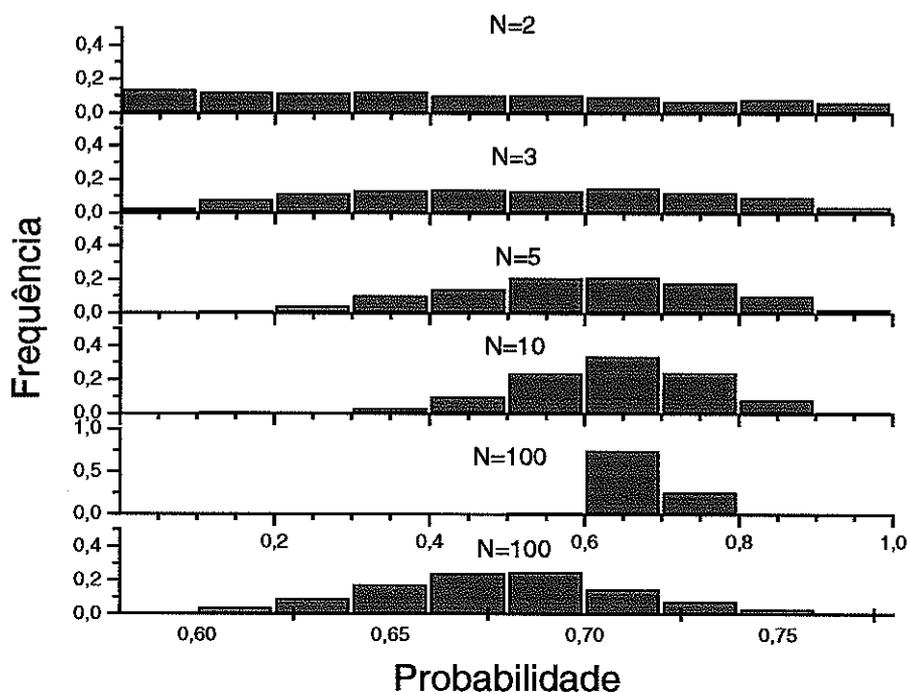


Fig.3 Histogramas da distribuição da probabilidade de se achar Y_i dentro do intervalo $[\bar{Y} - s, \bar{Y} + s]$ para vários números N de medidas. O último gráfico representa um detalhamento do resultado para $N=100$.

No caso $N = 3$, a característica da distribuição mudou. A probabilidade de se achar a metade do conjunto dentro do intervalo é bem maior do que para frações muito pequenas e muito grandes. No caso $N = 5$, a distribuição torna-se ainda mais estreita e o valor máximo se desloca para a direita, para valores maiores da fração de sucessos. Todas as distribuições para $N > 3$ têm aspecto gaussiano. No caso $N > 5$ o máximo da distribuição corresponde à probabilidade igual a aproximadamente 68% .

5. ESTIMATIVA DA DISPERSÃO DO VALOR MÉDIO

Mostramos agora os resultados do exame do conteúdo do intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$. O que fizemos foi estudar a probabilidade de que a média \bar{Y}' de outras N medidas esteja dentro do intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$. Este é o caso em que repetimos todo o experimento em condições idênticas. Para este fim, geramos $N = 2$ dados aleatórios Y_1 e Y_2 , calculamos o valor médio, \bar{Y} , e o desvio padrão da média, s_m , de acordo com as expressões da seção 2,

determinamos o intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$ e geramos ainda $N' = 1000$ vezes conjuntos de $N = 2$ dados, $\{Y_i\}_2$, calculamos a cada vez a média \bar{Y}' e contamos o número de vezes em que \bar{Y}' caiu dentro do intervalo obtido no início. Este procedimento foi repetido $N'' = 2000$ vezes e elaboramos um histograma da distribuição de probabilidade dos sucessos, ou seja, das frações do número de conjuntos $\{Y_i\}_N$, cujas médias caíram dentro do intervalo mencionado.

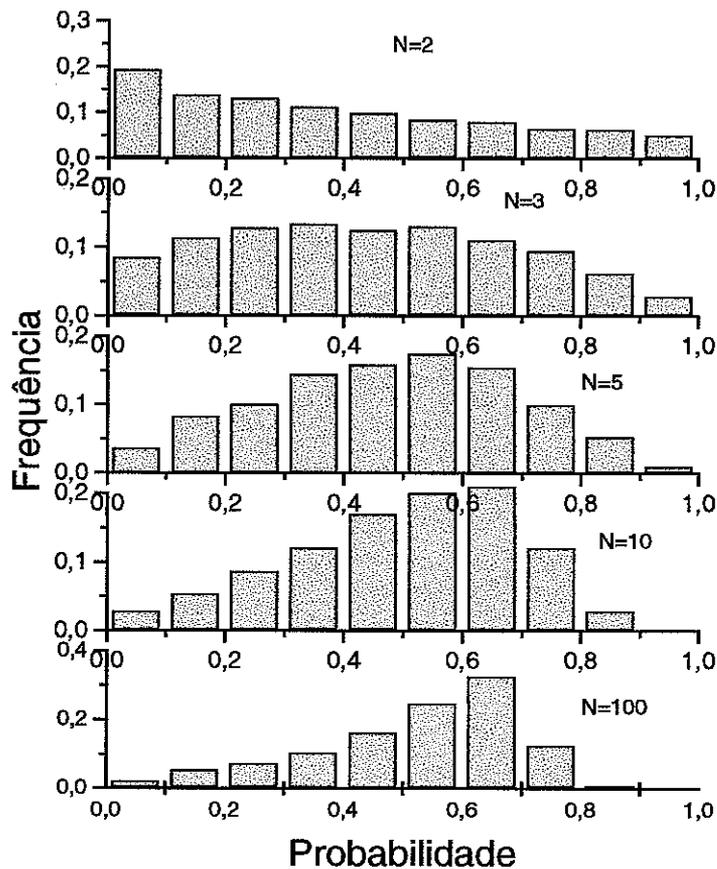


Fig.4. Histogramas da distribuição da probabilidade de se achar \bar{Y}' dentro do intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$ para vários números N de medidas.

A Fig.4 representa os resultados das simulações para $N = 2, 3, 5, 10$ e 100 . Podemos ver que no caso $N = 2$ a distribuição de probabilidade é a mesma do caso anterior (Fig.3), ou seja, a distribuição é quase uniforme, com um aumento da probabilidade para frações pequenas. No caso $N = 3$, as características da distribuição também se alteram. Aqui, a probabilidade de que a metade do conjunto de \bar{Y}' esteja no interior do intervalo de teste é novamente maior que os valores na vizinhança. Nos casos $N = 5, 10$ e 100 , essa tendência é ainda mais forte. Porém, as características da distribuição de probabilidade já não são iguais às da distribuição de Gauss, como foi obtido na primeira simulação (Seção 4, Fig.3). Mesmo

no caso $N = 100$, a probabilidade encontra-se relativamente mais dispersa. Isso é devido ao fato de que o centro do intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$ flutua com dispersão compatível com o tamanho do próprio intervalo, s_m , o desvio padrão da população das médias \bar{Y}' estudadas. Ao contrário do primeiro caso, em que o centro do intervalo $[\bar{Y} - s, \bar{Y} + s]$ flutua bem menos (s_m), quando comparamos esta flutuação com a semi-largura do intervalo, s .

Isso significa que, mesmo no caso de um número elevado de medidas, a probabilidade de que a média de outro conjunto de medidas, \bar{Y}' , esteja dentro do intervalo tem grande dispersão.

6. ESTIMATIVA DO VALOR VERDADEIRO

Finalmente, estudamos o conteúdo probabilístico do desvio padrão do valor médio s_m com respeito à probabilidade do intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$ conter o valor verdadeiro, Y_0 . Este conceito é básico em estatística.

Vamos começar nosso estudo a partir da definição da probabilidade de acharmos o valor verdadeiro dentro do intervalo obtido no experimento. É claro que o valor verdadeiro, Y_0 , não é uma grandeza aleatória, e por isso a probabilidade de achá-lo dentro de um intervalo experimental particular não tem sentido direto. Assim, a probabilidade de se achar o valor verdadeiro dentro intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$ é definida, por exemplo nas referências [5,6], como:

$$P(Y_0 \in [\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]) = \lim_{N_{\text{total}} \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N_{\text{total}}} \quad (7)$$

onde N_1 é o número de intervalos que contém Y_0 e N_{total} número total de intervalos do ensaio. A probabilidade de se encontrar o valor verdadeiro Y_0 , assim definida não é característica de um intervalo particular, obtido em um experimento, mas sim de *toda a população* de intervalos. Por essa razão ela é interpretada como uma constante para qualquer intervalo obtido no experimento.

Vamos estudar o que significa na prática este conceito. Neste ensaio, nós geramos novamente $N = 2$ dados aleatórios, Y_1 e Y_2 , calculamos o valor médio, \bar{Y} , e o desvio padrão da média, s_m , de acordo com a seção 3. Determinado assim o intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$, analisamos se o valor verdadeiro Y_0 estava em seu interior. Repetimos esse procedimento $N' = 1000$ vezes, ou seja, geramos outros 1000 conjuntos $\{Y_i\}_2$ e contamos o número de intervalos $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$, gerados a partir deles, que contém Y_0 . Repetimos esse procedimento $N'' = 2000$ vezes e elaboramos o histograma da distribuição de frequência para a fração de sucessos. A Fig.5 representa os resultados desse tipo de simulação para $N = 2$ e 10.

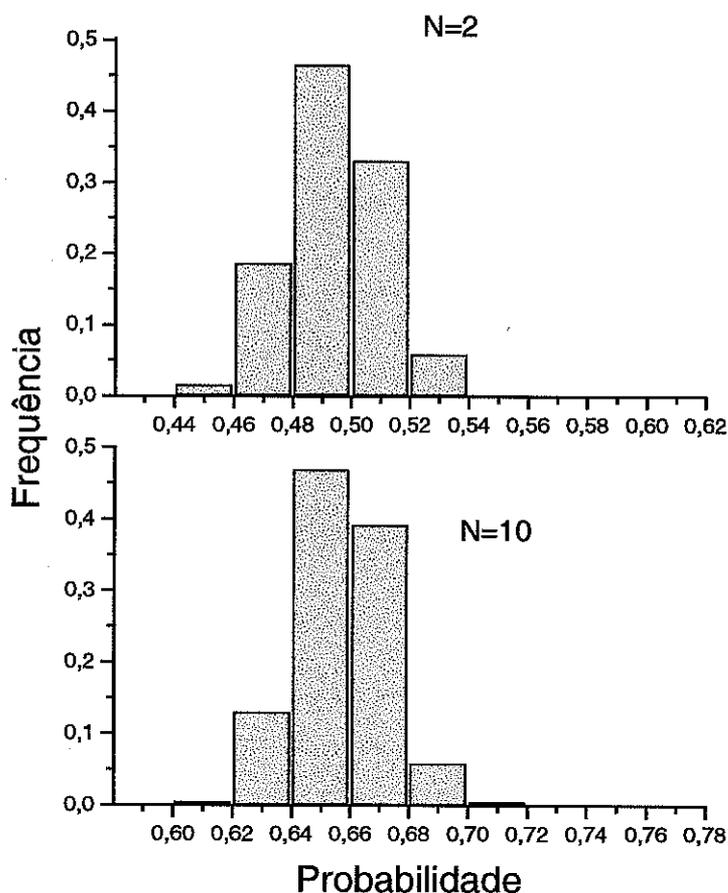


Fig. 5. Histogramas da distribuição da probabilidade de se achar Y_0 dentro do intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$ para números de medidas $N=2$ e 10.

Podemos ver que no caso $N = 2$ a distribuição de probabilidade é bastante diferente dos casos anteriores. Já nesse caso a distribuição é bem localizada e possui as características de uma gaussiana. A probabilidade é máxima para uma fração de cerca de 1/2. Com o aumento de N , a máxima probabilidade da distribuição se desloca para a direita e atinge o limite de 68% ($N = 100$). Podemos corrigir s_m introduzindo um coeficiente k dependente de N [7], tal que (veja a Tab.1) $s_m' = k \times s_m$, para obter a máxima probabilidade em 68%, para qualquer N . A Fig.6 mostra os resultados da simulação com s_m' .

TABELA 1

N	2	3	4	5	10	20	∞
k	1,84	1,32	1,20	1,14	1,06	1,03	1

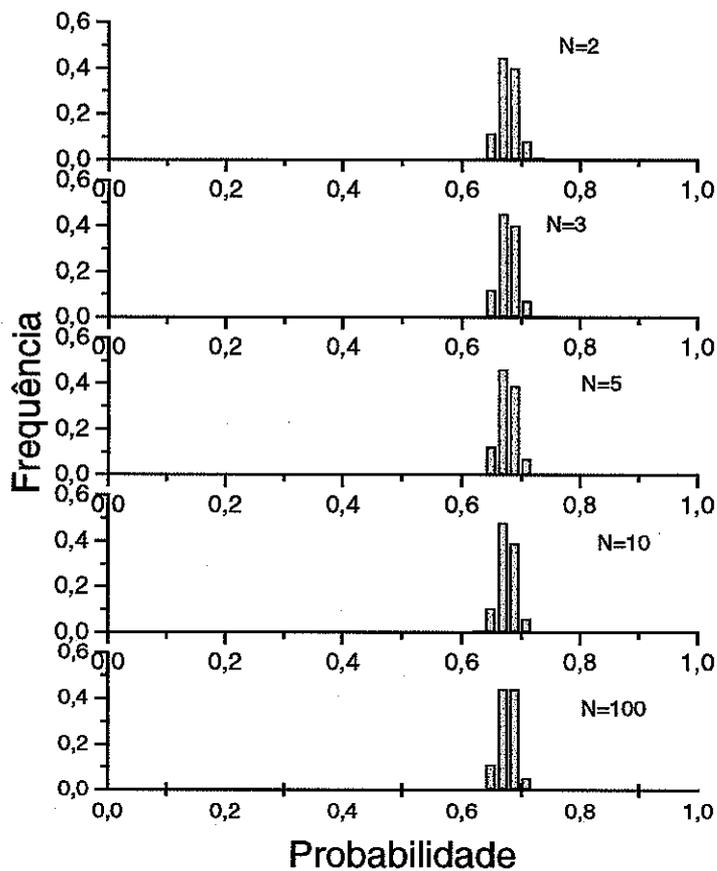


Fig. 6. Histogramas da distribuição da probabilidade de se achar Y_0 dentro do intervalo corrigido $[\bar{Y} - s'_m, \bar{Y} + s'_m]$ para vários números de medidas, fazendo uso do coeficiente de correção, k .

A largura dos histogramas diminui com o aumento do tamanho N' da amostra dos intervalos (veja a Fig.7). No caso de pequeno numero $N' < 5$ o intervalo $[\bar{Y} - s'_m, \bar{Y} + s'_m]$ já não tem um nível de confiança bem definido em relação Y_0 .

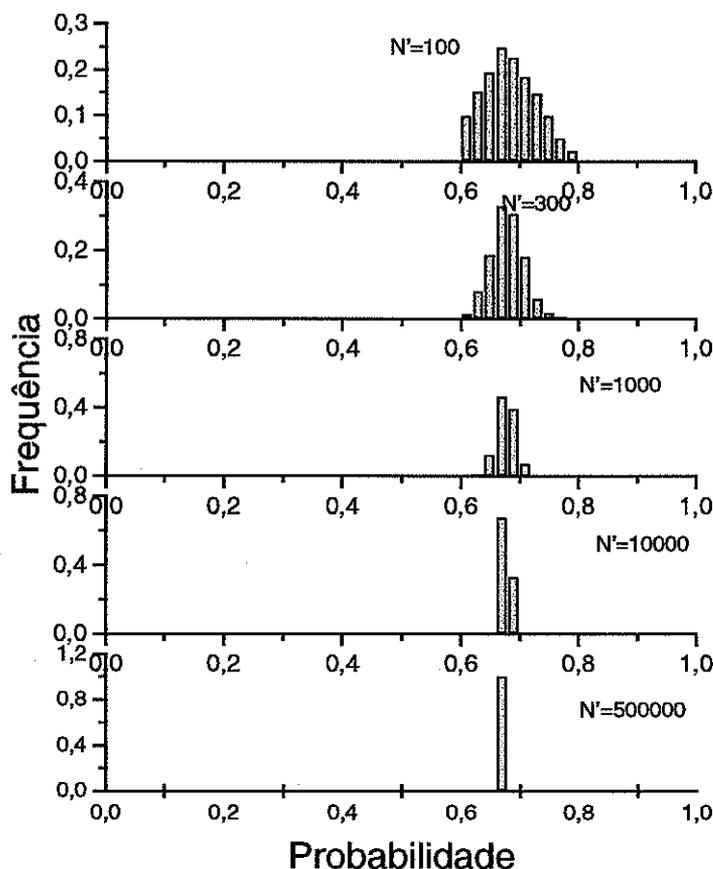


Fig.7. Histogramas da distribuição da probabilidade achar Y_0 dentro do intervalo corrigido $[\bar{Y} - s'_m, \bar{Y} + s'_m]$ para vários números de simulações, N' (tamanho do conjunto dos intervalos).

6. CONCLUSÕES

Os resultados das simulações efetuadas mostram que os três conteúdos discutidos acima coincidem, no limite de um grande número de medidas, N .

1. Situação 1: o máximo de frequência corresponde à probabilidade $\approx 68\%$ de encontrarmos o resultado individual Y_i dentro do intervalo $[Y - s, Y + s]$;
2. Situação 2: o máximo de frequência corresponde à probabilidade $\approx 68\%$ de encontrarmos uma nova média de N medidas, Y' , dentro do intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$;
3. Situação 3: o máximo de frequência corresponde à probabilidade $\approx 68\%$ de encontrarmos o valor verdadeiro, Y_0 , dentro do intervalo $[\bar{Y} - s_m, \bar{Y} + s_m]$.

Por outro lado, o desvio padrão da amostra, s , e o desvio padrão da média, s_m , podem não caracterizar a reprodutibilidade da medida, especialmente quando a amostra a partir da qual eles foram obtidos é pequena (N pequeno).

Concluindo, os comportamentos apresentados estão ligados à flutuação estatística do próprio desvio, s , e da posição do centro do intervalo, ou seja, *o desvio padrão experimental e a posição do centro do intervalo são também grandezas aleatórias* e a dispersão destes afeta o conhecimento da probabilidade associada ao intervalo. A dispersão do desvio pode ser caracterizada através do desvio padrão do desvio padrão, dado por [2]

$$s_{s_m} = \frac{s_m}{\sqrt{2(N-1)}} \quad (8)$$

As distribuições de probabilidade obtidas são normais no primeiro e terceiro casos, e assimétrica no segundo. Quando diminuimos o número N de medidas, as larguras das distribuições de probabilidade aumentam no primeiro e segundo casos e praticamente não há alteração no terceiro caso.

Nos primeiros dois casos, para $N = 2$ o desvio padrão do conjunto s e da média s_m já não caracterizam dispersão. A probabilidade achar a grandeza testada dentro do intervalo pode ser qualquer e só para $N = 5$ nós temos um máximo de frequência correspondente a uma probabilidade em torno de $2/3$. A diferença de caráter da distribuição de probabilidade no primeiro e segundo casos em comparação com o terceiro está ligada à diferença entre os conteúdos desses intervalos. Nestes casos nós testamos o intervalo particular, no terceiro testamos o conjunto dos intervalos e só agrupamos este conjunto de maneiras diferentes, $N = 2$, $N = 10$ etc. Por isso não há paradoxo, no fato de que a probabilidade é a mesma para qualquer intervalo particular no terceiro caso.

A largura da distribuição de probabilidade para o primeiro e segundo casos praticamente não depende do tamanho N' do conjunto Y_i ou Y' e está ligada a flutuações estatísticas da posição e da largura do intervalo testado. No terceiro caso a largura não está ligada a flutuações estatísticas da posição e da largura do intervalo testado mas sim com as flutuações estatísticas de todo o conjunto dos intervalos. A largura diminui com o aumento do tamanho N' da amostra de intervalos. Para N' pequeno conseguimos reproduzir o mesmo efeito observado com N pequeno nos outros dois casos.

A probabilidade de se encontrar o valor verdadeiro Y_0 não é uma característica de um intervalo particular, obtido em um experimento, mas sim de *toda a população* de intervalos. Por essa razão, ela é interpretada como uma constante para qualquer intervalo obtido no experimento e não tem sentido prático no caso de um pequeno número N de medidas, onde a largura e a posição do intervalo variam muito.

REFERÊNCIAS

1. J. H. Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros*, Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1992.
2. O. Helene e V.R. Vanin, *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*, Ed. Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1981.
3. W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.A. Vetterling e B.P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2ª edição, Cambridge, 1992.
4. MATLAB®, *High-Performance Numeric Computation and Visualization Software*, The MathWorks Inc., versão 4.2.

5. P.A. Morettin e W.O. Bussab, *Métodos Quantitativos para Economistas e Administradores*, Atual Editora Ltda., São Paulo, 1981.
6. P.L.O. Costa Neto, *Estatística*, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1987.
7. O. Helene *et al.*, O que é uma medida?, *Revista de Ensino de Física*, 13,1991, p.12-29.

Agradecemos aos colegas, prof. Otaviano Helene por apontar este problema e pelas valiosas discussões, profs. H.R. Schelin , Ivan Evseev e Sergei Paschuk, e ao Sr. André Matias Larsen pela valiosas discussões.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física
Cidade Universitária
Caixa Postal 66.318
05315-970 - São Paulo - Brasil