

autorizo
the-print
V1 O IFUSP
16/08/01

SILVIO R. A. SALINAS
Diretor do Instituto de Física
USP

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

P.P. N° 1527

IFUSP 1527

**Introdução às Redes de Mapas Acoplados
- Modelos para o Estudo de Caos Espaço-Temporal**

Viana, Ricardo L.

*Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, Paraná*

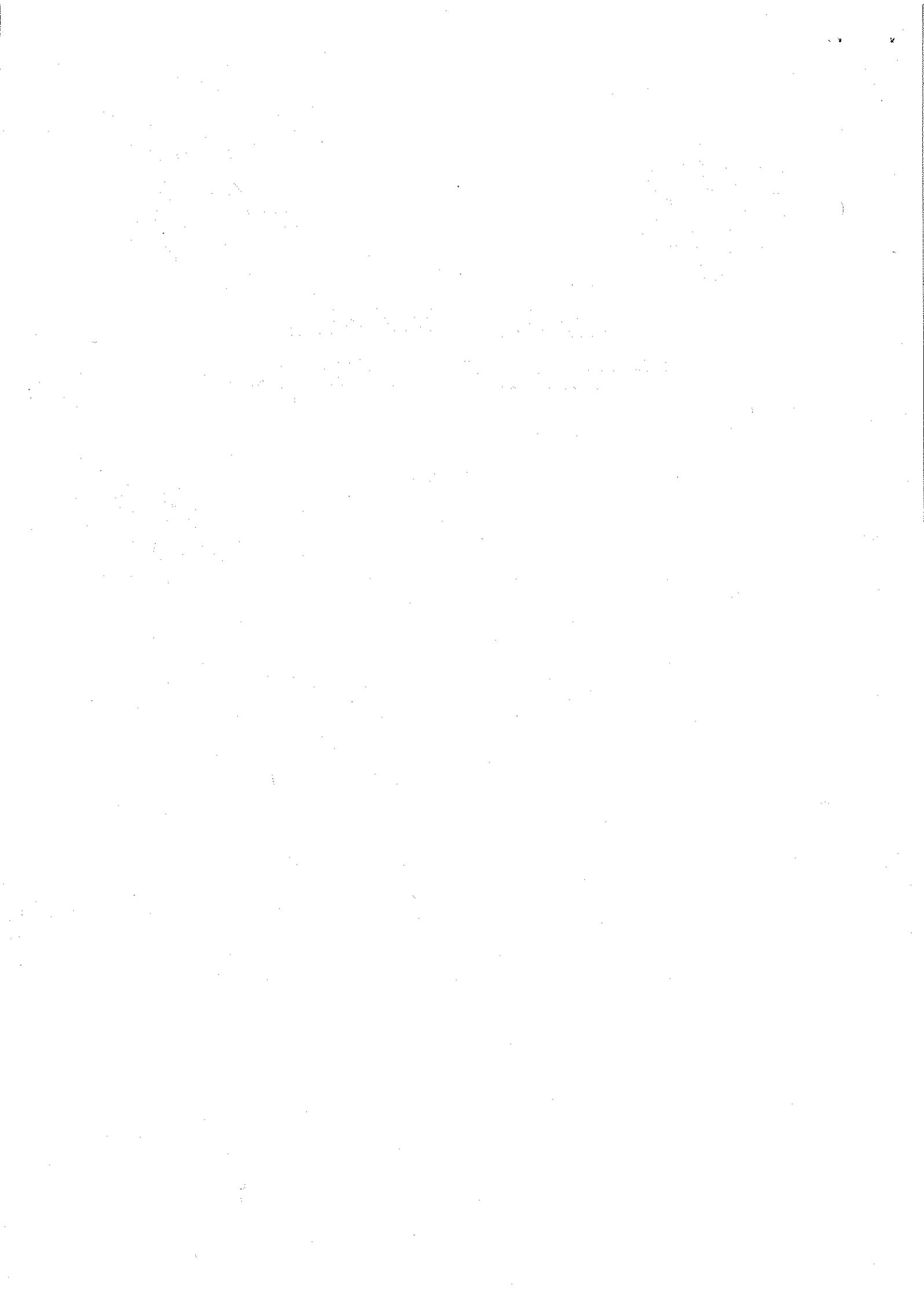
INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Notas de Aula - Mini-Curso

Pós-Graduação IFUSP

21 a 25/02/2000



Introdução às Redes de Mapas Acoplados -
Modelos para o Estudo de Caos Espaço-Temporal

Ricardo L. Viana

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná

81531-990, Curitiba, Paraná

Abstract

1. Introdução
2. Conceitos Básicos
3. Dinâmica de Padrões Espaço-Temporais
4. Espectro de Lyapunov
5. Sincronização em Redes de Mapas Acoplados
6. Memórias de Curto-período

I. INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos espaço-temporais têm um número tipicamente muito grande de graus de liberdade. A extensão do estudo de sistemas com baixa dimensionalidade para incluir graus de liberdade espacialmente distribuídos tem sido uma das áreas mais ativas de pesquisa em Dinâmica Não-linear nos últimos vinte anos. Este interesse é motivado pelo grande número de problemas práticos onde a dinâmica espacial desempenha um papel significativo: turbulência em fluidos e plasmas, ergodicidade na mecânica estatística, sólitons, redes neurais, excitações em sólidos, formação de padrões em sistemas naturais, processamento digital de sinais, computação paralela, dentre outros.

Às vezes é dito, talvez injustamente, que a turbulência é o grande problema não-resolvido da Física Clássica. O fato é que, a despeito do imenso esforço dispendido neste século, ainda parecemos estar longe de uma descrição satisfatória de todos os aspectos da turbulência. Ruelle e Takens, em 1971, sugeriram que a representação de um fluxo turbulento no espaço de fase poderia ser um atrator estranho, ou caótico. No entanto, a dinâmica caótica não nos fornece indicações sobre a estrutura espacial do fluxo. A conexão entre as propriedades de sistemas caóticos de baixa dimensionalidade e a dinâmica espaço-temporal é uma das linhas de pesquisa mais intensa nesta área.

Em Ciências Naturais e Tecnologia nós dependemos fortemente de modelos matemáticos para descrever os fenômenos observados. No que diz respeito a sistemas dinâmicos espacialmente estendidos, devemos levar em conta que os graus de liberdade espaciais devem ser adicionados aos modelos matemáticos obedecendo a uma simetria espacial. Esta simetria, a invariância translacional, restringe o tipo de acoplamento entre os graus de liberdade do sistema, já que a posição relativa dos graus de liberdade espaciais determina as propriedades do acoplamento (mais ou menos intenso, nesta ou naquela direção, etc.).

Sistemas contínuos apresentam num número infinitamente denso de graus de liberdade espaciais, e são normalmente descritos por equações diferenciais parciais. No entanto, neste curso estaremos mais interessados em sistemas que apresentam um número enumerável (e finito) de graus de liberdade espaciais, que denominaremos de *sistemas dinâmicos na rede*. A cada grau de liberdade espacial nós podemos assinalar uma variável de estado, que caracteriza alguma propriedade física do sistema que varia com o espaço e o tempo.

Na tabela a seguir nós apresentamos uma hierarquia de sistemas dinâmicos espacialmente estendidos [1]. Equações diferenciais parciais têm espaço, tempo e variável de estado contínuas. Equações funcionais iteradas diferem no tratamento do tempo como variável discreta. Cadeias de osciladores representam sistemas dinâmicos na rede onde a variável de estado local é contínua, ou seja, são redes de equações diferenciais ordinárias acopladas. Nosso objeto neste curso são redes de mapas acoplados, que têm espaço e tempo discretos, mas sendo contínua a variável de estado. É uma categoria acima, ainda, dos autômatos celulares, onde todas as variáveis são discretas.

sistema	espaço	tempo	variável de estado
equações diferenciais parciais	contínuo	contínuo	contínua
equações funcionais iteradas	contínuo	discreto	contínua
cadeias de osciladores	discreto	contínuo	contínua
redes de mapas acoplados	discreto	discreto	contínua
autômata celulares	discreto	discreto	discreta

Cada uma destas categorias de sistemas têm seus méritos e defeitos, sua utilização é determinada pelo balanço custo-benefício das características que definem o problema a ser resolvido. Por exemplo, poderíamos preferir as equações diferenciais parciais pela suposta "generalidade" que seu tratamento proporciona, mas isto é questionável pois: (a) os métodos numéricos empregados para resolver problemas de valores de contorno acabam sempre por discretizar as variáveis espaciais e temporais; (b) o tempo computacional alto e a recorrente instabilidade numérica são fatores que dificultam a sua investigação.

Sistemas dinâmicos na rede, como mapas ou osciladores, são mais complexos que autômata celulares pois têm variáveis de estado contínuas, e conseqüentemente a capacidade de gerar informação local. No entanto, há sistemas onde a informação local é naturalmente discreta, mesmo binária, como em determinadas redes neurais, e para elas a descrição mais adequada pode ser a dos autômata celulares.

Finalmente, redes de mapas acoplados podem ser obtidas como seções de Poincaré (estroboscópicas) de cadeias de osciladores acoplados. Em certos casos, é possível passar de uma categoria a outra por meio de um processo sistemático de discretização que leva em conta uma periodicidade natural, tanto no espaço como no tempo, sobretudo quando há uma perturbação do tipo função delta de Dirac periódica.

Redes de mapas acoplados foram introduzidas em Dinâmica Não-Linear a partir da tese de doutoramento de Kunihiko Kaneko [2], em 1983. Desde então, tem sido dele e seus colaboradores da Universidade de Tóquio as principais contribuições à teoria; embora haja vários outros grupos pesquisando o assunto em outras partes do mundo. Um 1992, a revista americana CHAOS dedicou um fascículo inteiro às redes de mapas acoplados [3]. Em 1994, Kaneko editou o livro "Theory and Applications of Coupled Map Lattices" pela World Scientific [4], com contribuições de diversos autores. Ainda hoje, as principais revistas científicas na área de Dinâmica Não-Linear exibem um bom número de artigos neste assunto, que continua oferecendo problemas de interesse aos pesquisadores.

Devido às suas características de fácil implementação computacional, quando comparados a outros sistemas hierarquicamente superiores (vide Tabela), as redes de mapas acoplados tem sido escolhidas com frequência como "laboratórios teóricos" para o estudo da dinâmica espaço-temporal. Respeitadas suas limitações enquanto modelos matemáticos da Natureza, podemos encarar as redes de mapas acoplados como paradigmas extremamente úteis para a investigação de fenômenos não-lineares espacialmente extensos.

A estratégia para modelar fenômenos dinâmicos em sistemas espacialmente extensos por redes de mapas acoplados é baseada nos seguintes passos [4]:

1. Escolha um conjunto de variáveis de estado macroscópicas numa rede. Num sistema físico-químico, por exemplo, tais variáveis podem ser a temperatura, o campo de velocidade do

fluido ou a concentração local de alguma substância. A dimensão e a topologia da rede devem ser escolhidas de acordo com o sistema físico a ser modelado;

2. Decomponha o processo subjacente ao fenômeno em componentes independentes. Por exemplo, para um sistema fluido não-homogêneo e condutor de calor, os processos de convecção, reação, difusão, etc.;
3. Substitua cada componente por uma dinâmica paralela simples na rede. A dinâmica consiste numa transformação não-linear das variáveis de estado em cada sítio da rede e um termo de acoplamento entre vizinhos adequadamente escolhidos;
4. Leve a cabo cada unidade dinâmica, ou processo, sucessivamente.

A maior motivação para o estudo das redes de mapas acoplados tem sido a investigação do caos espaço-temporal, entendido como a dinâmica caótica em sistemas espacialmente extensos, onde o número efetivo de graus de liberdade diverge quando o tamanho do sistema aumenta. O caos espaço-temporal é criado pela dinâmica não-linear local e pela difusão espacial. Nas redes de mapas acoplados estes procedimentos são considerados separadamente.

II. CONCEITOS BÁSICOS

Nós supomos uma rede espacial M -dimensional. Em princípio, trataremos do caso unidimensional ($M = 1$) para definir os conceitos básicos, mas também nos reportaremos a estudos bi- e tri-dimensionais. Já existem alguns trabalhos sobre redes fractais (como um tapete de Sierpinski), nas quais M não é um número inteiro. A cada sítio da rede espacial nós atribuímos uma variável de estado real D -dimensional $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{R}^D$, onde $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ é o índice que identifica o i -ésimo sítio numa rede unidimensional com N sítios. Na maioria dos casos até agora estudados, a variável de estado é unidimensional ($D = 1$), mas já existem alguns estudos para $D = 2$.

O tempo é discretizado na forma usual $n = 0, 1, 2, \dots$, tal que $\mathbf{x}_n^{(i)}$ seja a variável do sítio i no tempo n . A evolução de uma variável de estado local é governada por dois fatores:

1. a dinâmica local é regida por um mapa D -dimensional $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$ que avança discretamente no tempo;
2. o acoplamento a outros sítios por meio de uma certa prescrição;

De forma geral, a equação que define uma rede unidimensional de mapas acoplados é

$$\mathbf{x}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n^{(i)}) + \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{x}_n^{(j)}) \quad (1)$$

onde $\mathcal{C}^{(i)}$ é um termo genérico de acoplamento, que pode depender de todos os sítios $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$, inclusive do próprio sítio i . O vetor ND -dimensional $(\mathbf{x}_n^{(0)}, \mathbf{x}_n^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(N-1)})$, que representa o estado da rede no tempo n , é dito o seu *padrão* neste instante.

A. Dinâmica Local

A dinâmica local tem sido investigada por meio de mapas de baixa dimensionalidade bem conhecidos. O exemplo mais estudado é o do mapa logístico

$$x \mapsto f(x) = \lambda x(1 - x) \quad (2)$$

onde $x \in [0, 1]$ e $\lambda \in [1, 4]$ é o parâmetro de controle do mapa. Além deste, merecem destaque os mapas lineares por partes, como os mapas do padeiro $x \rightarrow 2x \pmod{1}$, o mapa da tenda; e o mapa do seno-círculo

$$x \mapsto f(x) = x + \omega + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x), \quad (3)$$

onde $x \in [0, 1)$ é uma variável angular, $0 \leq \omega < 1$ é uma frequência natural, e $K > 0$ mede a não-linearidade do sistema.

Outros mapas unidimensionais serão expostos mais adiante. Quanto a mapas bidimensionais ($D = 2$), as investigações têm-se concentrado no mapa de Hénon

$$x_{n+1} = A - (x_n)^2 + By_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (4)$$

e no mapa padrão de Chirikov-Taylor (redes simpléticas):

$$p_{n+1} = p_n + K \sin \theta_{n+1}, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + p_n \pmod{2\pi}, \quad (5)$$

Daqui para frente nos limitaremos ao caso onde a variável de estado é unidimensional ($D = 1$).

Quanto ao tipo de dinâmica local, podemos classificar as redes de mapas acoplados como

1. Homogêneas: quando os mapas são idênticos em todos os sítios;
2. Não-homogêneas: quando os mapas não são idênticos devido a mudanças nos seus parâmetros para cada sítio da rede;

Redes homogêneas são mais comuns nos estudos computacionais, porém em alguns casos, como o estudo da sincronização, é conveniente usar redes não-homogêneas com parâmetros aleatoriamente distribuídos num dado intervalo.

B. Tipos de Acoplamento

Há infinitas formas de acoplamento entre os mapas. Nos acoplamentos *locais*, a dinâmica de um dado sítio i é determinada apenas pelos sítios vizinhos mais próximos: $i + 1$ e $i - 1$. Acoplamentos *não-locais* permitem que o sítio i seja influenciado por um número arbitrariamente grande de outros sítios mais distantes.

Vamos abordar inicialmente o primeiro caso. Um tipo genérico de acoplamento local é dado pelo termo de acoplamento

$$C_{j=i, i \pm 1}^{(i)}(x_n^{(j)}) = \epsilon_0 g(x_n^{(i)}) + \epsilon_R g(x_n^{(i+1)}) + \epsilon_L g(x_n^{(i-1)}) \quad (6)$$

onde o vetor $\vec{\epsilon} = (\epsilon_0, \epsilon_R, \epsilon_L)$ é chamado o *núcleo (kernel) de acoplamento*. Podemos enumerar quatro casos de interesse:

1. Acoplamento aditivo: $\epsilon_0 = 0, \epsilon_R = \epsilon_L$;
2. Acoplamento Laplaciano, ou difusivo: $-\frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_R = \epsilon_L$;
3. Acoplamento totalístico: $\epsilon_0 = -\frac{2}{3}, \epsilon_R = \epsilon_L = \frac{1}{3}$;
4. Acoplamento unidirecional: $-\epsilon_0 = \epsilon_L, \epsilon_R = 0$;

O acoplamento Laplaciano

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2}(g(x_n^{(i-1)}) - 2g(x_n^{(i)}) + g(x_n^{(i+1)})) \quad (7)$$

é o mais utilizado nos estudos de redes de mapas acoplados. Seu nome decorre do fato que o termo de acoplamento pode ser encarado como a discretização de uma derivada segunda espacial

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{2}(g(x^{(i-1)}) - 2g(x^{(i)}) + g(x^{(i+1)})) \quad (8)$$

onde o parâmetro de rede espacial é igual a um: $\Delta x = (i+1) - i = 1$. Tais derivadas ocorrem em termos difusivos de equações de reação-difusão.

As três primeiras escolhas para o núcleo de acoplamento referem-se a sistemas com difusão simétrica, ao passo que o último tipo corresponde a um acoplamento assimétrico. Redes com esta característica têm sido usadas para modelar fluxos abertos (*open flow lattices*).

A função $g(x)$ define a *dinâmica de acoplamento*. Há apenas dois casos de interesse:

1. Acoplamento Linear: $g(x) = x$;
2. Acoplamento Futuro: $g(x) = f(x)$.

sendo que o acoplamento futuro tem como vantagens o fato da variável de estado em cada sítio permanecer dentro do mesmo domínio que teria no mapa isolado, de modo que os mapas acoplados na redes continuam normalizados. Além disso, no acoplamento futuro nós pré-iteramos os sítios vizinhos ($i \pm 1$) antes de acoplá-los ao sítio i . Isto fornece uma melhor aproximação a um mapeamento estroboscópico de uma cadeia análoga de osciladores a tempo contínuo.

A iteração simultânea dos vizinhos é uma aproximação melhor do estado corrente da rede, em relação ao simples uso de seus valores no instante precedente. Por exemplo, um acoplamento Laplaciano futuro é dado por

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2}(f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})) \\ &= (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2}(f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})). \end{aligned} \quad (9)$$

No entanto, poderíamos permutar os processos, primeiro acoplando os valores dos vizinhos e depois aplicando a função do mapa ao resultado:

$$x_{n+1}^{(i)} = f\left((1 - \epsilon)x_n^{(i)} + \frac{\epsilon}{2}(x_n^{(i-1)} + x_n^{(i+1)})\right), \quad (10)$$

Esta substituição parece não alterar qualitativamente nenhum dos resultados obtidos com a primeira forma do mapa.

O caso extremo de acoplamentos não-locais é o chamado *acoplamento global*, onde todos os sítios da rede interagem com todos de uma maneira “democrática”, tal que o sítio acopla na verdade com uma média sobre toda a rede. Por este motivo, este caso também é chamado de acoplamento do tipo “campo médio” [5]

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}). \quad (11)$$

Um acoplamento global deste gênero justifica-se, por exemplo, numa simulação computacional de uma rede neural, onde cada unidade (neurônio) interage com uma grande quantidade (da ordem de 100) de outras unidades.

Nós poderíamos, ainda, imaginar acoplamentos não-locais que levassem em conta a distância de um sítio a outro na rede, quando fosse computada sua influência relativa. Por exemplo, um tipo de acoplamento não-local de alcance variável, na qual a interação entre sítios vizinhos decai com a distância na rede como uma lei de potência, é dado por:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} (f(x_n^{(i-j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+j)})), \quad (12)$$

onde $N' = (N - 1)/2$, e

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} \quad (13)$$

é um fator de normalização que depende do *parâmetro de alcance* α . Ele vem da observação que a somatória no termo de acoplamento acima é, na verdade, uma média aritmética ponderada de parcelas do tipo $f(x_n^{(i-j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+j)})$, sendo o fator $\eta(\alpha)$ a soma dos pesos estatísticos correspondentes. Este acoplamento foi introduzido por Rogers e Wille [6] para uma cadeia de osciladores, e estendido por Viana e Batista para redes de mapas acoplados [7].

Vamos considerar alguns casos limites desta expressão. Para $\alpha = 0$ nós temos que $\eta = N - 1$, e podemos reescrever a somatória em (12) de modo que obtemos o acoplamento do tipo global de campo médio (11). Se $\alpha \rightarrow \infty$, apenas aqueles termos com $j = 1$ sobrevivem em ambos os somatórios. Portanto, $\eta \rightarrow 2$, e somente os vizinhos mais próximos contribuem para o acoplamento, resultando no acoplamento local Laplaciano futuro (9).

O parâmetro de alcance α pode ser qualquer número real e positivo. O termo de acoplamento correspondente

$$C^{(i)}(x_n^{(j)}) = \frac{\epsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} (f(x_n^{(i-j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+j)})) \quad (14)$$

será identicamente nulo se todos os sítios têm a mesma variável de estado num certo instante de tempo: $x_n^{(0)} = \dots = x_n^{(N-1)}$. Já para um padrão linear, como $x_n^{(i)} = (\pi/N)i$, o termo de

acoplamento também será nulo para todos os sítios da rede, pois temos $f(x_n^{(i-j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+j)}) = (\pi/N)(i - j - 2i + i + j) = 0$.

É muito difícil, no entanto, dar expressões analíticas para o termo de acoplamento, exceto em alguns casos particulares, como o padrão quadraticamente distribuído $x_n^{(i)} = (4/N^2)i^2$. Neste caso, o termo de acoplamento é o mesmo para todos os sítios, sendo dependente apenas de α [7]:

$$C^{(i)}(\alpha) = \frac{4 \sum_{j=1}^{N'} j^{2-\alpha}}{N^2 \sum_{j=1}^{N'} j^{-\alpha}}, \quad (15)$$

cujo valor decresce exponencialmente com α . Ainda que, num instante subsequente, o padrão já não seja mais quadrático, devido à mudança nos valores dos sítios, podemos esperar que grandes valores de α devam sempre influenciar muito pouco em termos do acoplamento. Nós verificamos isto para um padrão aleatório (com média zero), para o qual o termo de acoplamento é muito bem ajustado por uma gaussiana, e anula-se quando tomamos uma média sobre toda a rede.

C. Redes de Mapas Acoplados e Equações Diferenciais Parciais

É possível explorar mais a fundo a conexão existente entre redes de mapas acoplados e equações diferenciais parciais, a partir de uma equação do tipo reação -difusão, onde o termo de reação é uma perturbação periódica. Vamos partir do seguinte modelo unidimensional para uma variável de estado $x(y, t)$ (note que a variável espacial é y) [8]

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + G(t)R(x) \quad (16)$$

onde D é um coeficiente de difusão, $R(x)$ é um termo não-linear de reação, e $G(t)$ é uma função periódica do tempo, que pode ser uma sequência de perturbações impulsivas com período τ :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) \quad (17)$$

Inicialmente, integramos a equação num entorno da função delta em $t = n\tau$, ou seja, de $n\tau - \varepsilon$ a $n\tau + \varepsilon$. Definimos as seguintes variáveis

$$x_n(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(y, t = n\tau - \varepsilon) \quad x_n^*(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(y, t = n\tau + \varepsilon) \quad (18)$$

Tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, e utilizando algumas propriedades das funções delta, obtemos

$$x_n^*(y) - x_n(y) = R[x_n(y)] \quad (19)$$

Agora vamos integrar a equação diferencial no intervalo entre dois pulsos $t \in [n\tau + \varepsilon, (n+1)\tau - \varepsilon]$, onde a função delta se anula, bem como o termo de reação, deixando apenas a parte linear de difusão $x_t = Dx_{yy}$. Podemos discretizar a derivada temporal como

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{(y,t=n\tau)} = \frac{x[y, t = (n+1)\tau - \varepsilon] - x[y, t = n\tau - \varepsilon]}{\delta t}, \quad (20)$$

onde $\delta t = \tau - 2\varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ teremos

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{(y,t=n\tau)} = \frac{x_{n+1}(y) - x_n^*(y)}{\tau}. \quad (21)$$

Discretizamos a variável espacial introduzindo uma rede unidimensional cujo passo é w , ou seja, $y = iw$, onde $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. As derivadas espaciais são discretizadas simetricamente da maneira usual

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{(y=iw,t)} = \frac{x[y = (i+1)w, t] - x(y = iw, t)}{w} = \frac{x(y = iw, t) - x[y = (i-1)w, t]}{w}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)_{(y=iw,t)} &= \frac{1}{w} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{(y=(i+1)w,t)} - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{(y=iw,t)} \right] \\ &= \frac{x[y = (i+1)w, t] - 2x(y = iw, t) + x[y = (i-1)w, t]}{w^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Definimos a variável discreta na rede

$$x^{(i)}(t) = x(y = iw, t) \Rightarrow x_n^{(i)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(y = iw, t = n\tau - \varepsilon) \quad (24)$$

tal que

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{(y=iw,t=n\tau)} = \frac{x_{n+1}^{(i)} - x_n^{*(i)}}{\tau}. \quad (25)$$

Calculando (23) em $t = n\tau + \varepsilon$ e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)_{(y=iw,t)} = \frac{x_n^{*(i+1)} - 2x_n^{*(i)} + x_n^{*(i-1)}}{w^2}. \quad (26)$$

Combinando as equações anteriores, escrevemos

$$x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)} - R(x_n^{(i)}) = \frac{D\tau}{w^2} [x_{n+1}^{(i)} + R(x_n^{(i+1)}) - 2x_n^{(i)} - 2R(x_n^{(i)}) + x_n^{(i-1)} + R(x_n^{(i-1)})]. \quad (27)$$

Definindo uma constante de acoplamento

$$\epsilon = \frac{2D\tau}{w^2}, \quad (28)$$

bem como a função que representa o mapa não-linear

$$f(x) = x + R(x), \quad (29)$$

obtemos uma rede de mapas com acoplamento laplaciano futuro

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2}(f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})). \quad (30)$$

D. Condições Iniciais e de Contorno

Sendo um sistema espacialmente extenso, uma rede de mapas acoplados precisa de condições de contorno adequadas (nos extremos da rede: $i = 0$ e $i = N - 1$)

1. fixas: $x_n^{(0)} = a, x_n^{(N-1)} = b$, onde usualmente $a = b = 0$;
2. periódicas: $x_n^{(0)} = x_n^{(N)}$, ou em geral $x_n^{(i)} = x_n^{(i+N)}$ para todo i (mais utilizado);
3. livres: $x_n^{(0)}$ e $x_n^{(N-1)}$ podem ter quaisquer valores;
4. mistas: uma extremidade fixa e outra livre;

Devem ser também especificadas condições iniciais em $n = 0$ para a rede. Dentre as diversas escolhas possíveis, destacamos as seguintes:

1. perfil constante: $x_0^{(i)} = const.$;
2. perfil senoidal: $x_0^{(i)} = A + B \sin(2\pi i/N)$;
3. perfil gaussiano: $x_0^{(i)} = C \exp(-(i - j)^2/N)$;
4. perfil aleatório: $x_0^{(i)}$ = número pseudo-aleatório dentro de um certo domínio, como $[0, 1]$.

Certas características, como veremos, dependem desta escolha. Outras não, razão pela qual os perfis iniciais aleatórios são preferíveis em muitas aplicações.

III. DINÂMICA DE PADRÕES ESPAÇO-TEMPORAIS

Neste capítulo vamos dar uma idéia geral sobre alguns dos tipos de padrões espaço-temporais que tem sido estudados em redes de mapas acoplados nos últimos quinze anos. Vamos começar esta abordagem estudando uma rede de mapas do círculo $x \rightarrow \theta \in (-\pi, +\pi]$ dado (implicitamente) por

$$\tan \theta_{n+1} = \frac{\sin(\theta_n + 2\pi\beta)}{2a + \cos(\theta_n + 2\pi\beta)}, \quad (31)$$

onde $a > 0$ e $0 \leq \beta \leq 1$. O mapa acima foi introduzido por Ding [9] para descrever um sistema com ciclo limite perturbado impulsivamente por pulsos periódicos, e por este motivo nós o chamaremos de "mapa prototípico". Mais à frente, empregaremos este mapa para estudar efeitos coletivos de sincronização de osciladores perturbados. No capítulo 5, nós veremos com detalhes como este mapa é obtido a partir de um sistema a ciclo limite.

O acoplamento a ser considerado será de alcance variável, e com a função do mapa aplicada ao sítio *após* o seu acoplamento com todos seus vizinhos (vide Eq. (12)):

$$x\theta_{n+1}^{(i)} = f \left(\theta_n^{(i)} + \frac{\epsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} (\theta_n^{(i-j)} - 2\theta_n^{(i)} + \theta_n^{(i+j)}) \right). \quad (32)$$

Nós analisaremos dois casos extremos relativos a este acoplamento, o caso local, com $\alpha = 5$, e o caso global, com $\alpha = 0$.

Vamos considerar um perfil de condições iniciais na rede na forma senoidal

$$x_0^{(i)} = 0,5 + 0,4 \sin(2\pi i/N). \quad (33)$$

Este perfil influencia o padrão exibido pela rede, mas não altera as características básicas a serem estudadas. Também adotaremos condições periódicas de contorno.

A. Comportamento do mapa isolado

O comportamento temporal do mapa

$$\tan \theta_{n+1} = \frac{\sin(\theta_n + 2\pi\beta)}{2a + \cos(\theta_n + 2\pi\beta)} \quad (34)$$

foi estudado por vários autores [9,10]. Seu espaço de parâmetros apresenta duas regiões distintas. Se $a \leq 1/2$ o mapa é inversível, linear por partes para $a = 1/2$, e não-inversível para $a > 1/2$. Os seus pontos fixos θ^* são dados por

$$\sin \theta^* = \frac{1}{2a} \sin 2\pi\beta, \quad (35)$$

cuja estabilidade depende do módulo da derivada $|f'(\theta^*)|$, onde

$$f'(\theta) = \frac{1 + 2a \cos(\theta + 2\pi\beta)}{1 + 4a^2 + 4a \cos(\theta + 2\pi\beta)}. \quad (36)$$

O espaço de parâmetros $a \times \beta$ apresenta duas regiões bem distintas, de acordo com o valor de a .

(i) *Região "fraca"* ($a \leq 1/2$): o mapa exhibe comportamentos periódico e quasiperiódico característicos de mapas do círculo. Para caracterizá-los, usamos o número de rotação (*winding number*), definido como

$$w = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\theta_0) - \theta_0}{n}. \quad (37)$$

Se o mapa for um difeomorfismo (i.e., se $f(\theta)$ tem uma inversa contínua e diferenciável $f^{-1}(\theta)$), então o limite acima existe, e o valor de w não depende da condição inicial θ_0 . Uma órbita periódica de período Q (onde Q é um inteiro positivo) é caracterizada por um valor racional para o número de rotação $w = P/Q$, onde P é um inteiro positivo co-primo a Q . Uma órbita quasiperiódica, por outro lado, caracteriza-se por ter um número de rotação irracional.

Se $a = 0$ o mapa se limita a uma rotação rígida $\theta \mapsto \theta + \beta$. Neste caso o conjunto de valores de β que levam a órbitas periódicas tem medida de Lebesgue nula. No entanto, se $a > 0$, ocorre que mais de um valor de β podem fornecer uma órbita com mesmo número de rotação (racional) - isto é conhecido como *mode-locking* ou *entrainment* (eu desisti de procurar uma

tradução para estes termos). No espaço de parâmetros, esta região aparece na forma de línguas ("línguas de Arnold").

(ii) *Região unimodal* ($a > 1/2$): o mapa não é mais inversível, pois é unimodal, ou seja, tem extremos dados por

$$\theta_{\pm} = (1 - 2\beta)\pi \pm \arccos\left(\frac{1}{2a}\right). \quad (38)$$

Para $a > 1/2$, as línguas de Arnold correspondentes a comportamentos periódicos se interpenetram, de modo que nesta região não mais existe comportamento quasi-periódico. Devido a ser unimodal, no entanto, o mapa pode apresentar comportamento caótico devido a cascatas de bifurcação com duplicação do período, *a la* Feigenbaum.

De fato, tomando a região do espaço de parâmetros com $\beta = 0,315$ e o intervalo $0,540 < a < 0,610$, podemos observar uma cascata inversa de duplicações do período (Figura 1). A primeira bifurcação ocorre para $a \approx 0,605$ (não mostrada na figura), e inicia uma cascata inversa cujo ponto de acumulação ocorre para $a \approx 0,540$. A partir daí, a dinâmica é predominantemente caótica, intercalada com janelas periódicas. Nós deixaremos de falar no número de rotação nesta região do espaço de parâmetros, já que o limite na Eq. (37) não tem um valor bem-definido num regime caótico.

FIGURES

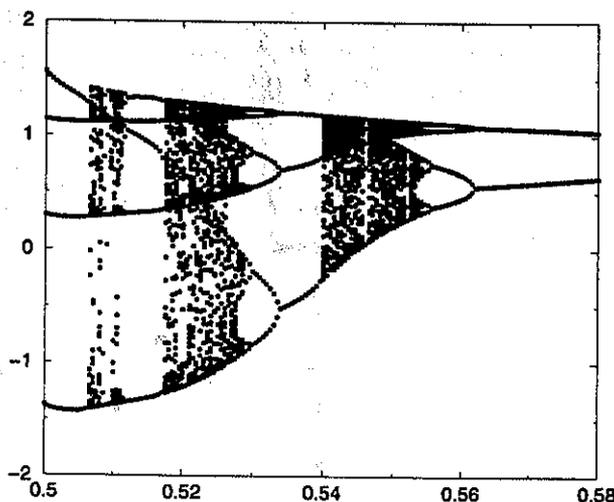


FIG. 1. Diagrama de bifurcações para o mapa prototípico com $\beta = 0,315$

B. Duplicação de Período na Rede com Acoplamento Local

Uma técnica muito útil para a visualização dos padrões espaço-temporais exibidos por uma rede de mapas acoplados é o diagrama amplitude-sítio. Nós registramos, após um dado tempo $n = m = 5000$ (após descartar, para decaimento dos transientes, as 1000 primeiras iterações), dezesseis padrões $\theta_m^{(i)}$, com $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ e $m = 5000, 5001, \dots, 5016$, que são por sua vez todos graficados simultaneamente no diagrama. Isto permite observar a presença de órbitas com períodos até 16 mapas acoplados na rede.

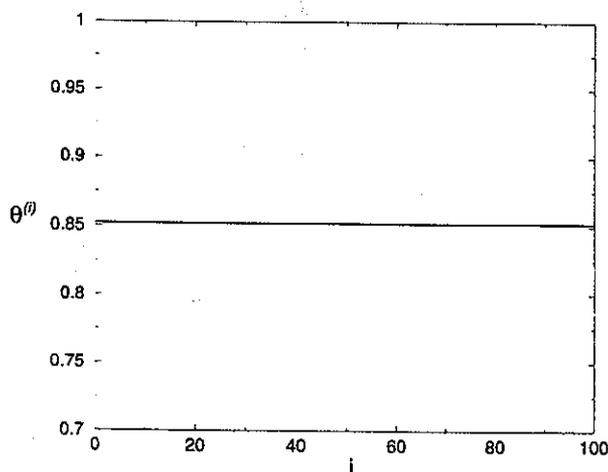


FIG. 2. Diagrama amplitude-espaco para $a = 0,610$

Na figura 2, consideramos o caso em que $a = 0,610$ e $\beta = 0,315$ (este último valor será mantido constante, de acordo com o diagrama de bifurcações da Figura 1). Tomaremos $\alpha = 5$ (acoplamento local) e $\epsilon = 0.01$ nos gráficos a seguir. O mapa isolado terá um único ponto fixo $\theta^* = 0,852$ estável (pois $|f'(\theta^*)| = 0,972 < 1$). Vemos que, para uma rede de 100 mapas idênticos acoplados, todas as condições iniciais são atraídas para este ponto fixo após um certo tempo, e o padrão observado é uniforme.

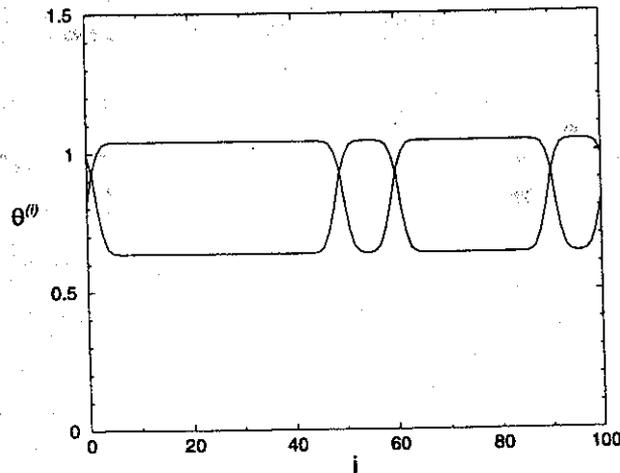


FIG. 3. Diagrama amplitude-espaco para $a = 0,580$

Na figura 3, onde tomamos $a = 0,580$, podemos observar melhor a influência do mapa isolado no comportamento coletivo da rede. Isoladamente (ou seja, para $\epsilon = 0$) cada mapa apresentaria uma órbita estável de período $2\theta_0^* \approx 0,64$, $\theta_1^* \approx 1,04$, que repete-se na rede por muitos sítios adjacentes dentro de um dado domínio. Dentro de um domínio, os sítios são espacialmente correlacionados, apresentando um certo grau de invariância translacional.

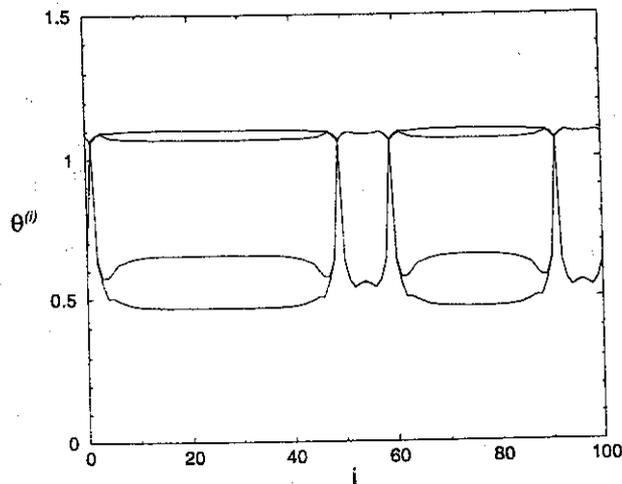


FIG. 4. Diagrama amplitude-espaco para $a = 0,560$

Dois domínios adjacentes são separados por paredes de domínio, formados por dois tipos de estrutura, um *kink* e um *anti-kink*. Na terminologia convencional, um *kink* é uma parede ascendente (no sentido de i crescente), ao passo que um *anti-kink* é no sentido descendente. Um par kink-antikink forma-se nas vizinhanças de uma órbita instável do mapa isolado, e sua localização na rede depende das condições iniciais escolhidas. No caso da figura 3, a órbita instável fica em $\theta^* \approx 0,913$, que provém naturalmente da órbita de período 1 que, antes da bifurcação, era estável.

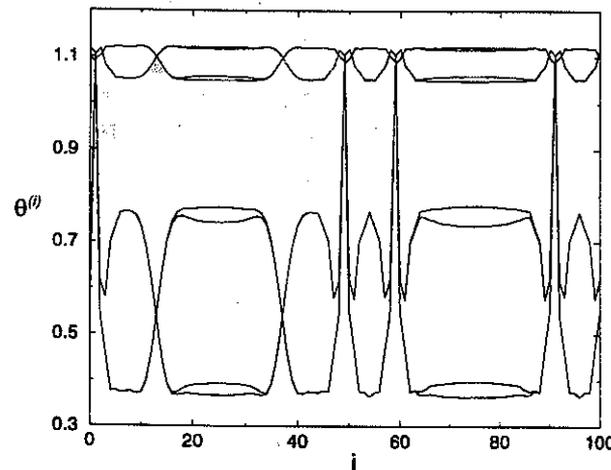


FIG. 5. Diagrama amplitude-espaco para $a = 0,555$

Domínios de período 4 são vistos na Figura 4 ($a = 0,560$), juntamente com dois domínios de período 2, e todos eles separados entre si por paredes localizadas nas vizinhanças do ponto fixo instável $\theta^* \approx 0,961$. Os domínios de período 2 têm mapas cujos valores da amplitude $\theta_n^{(i)}$ situam-se aproximadamente nas posições da órbita de período 2 antes da bifurcação (como na figura anterior). Neste caso, no entanto, esta órbita seria instável para o mapa isolado, devido à bifurcação; o que mostra que o efeito do acoplamento pode “estabilizar” uma órbita instável, o que também explica a presença das paredes de domínios próximas a pontos fixos instáveis.

Este também é o caso da Figura 5, com $a = 0,555$. Para este valor de a , os mapas isolados apresentariam uma órbita estável de período 8. No entanto, dependendo das condições iniciais escolhidas, sítios adjacentes podem ter órbitas com diferentes fases. Por exemplo, no sítio $i = 45$ poderíamos ter o 8-ciclo $\{\theta_0^*, \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_7^*\}$; e no sítio vizinho $i = 46$, teríamos $\{\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_7^*, \theta_0^*\}$, devido às condições iniciais diferentes para ambos.

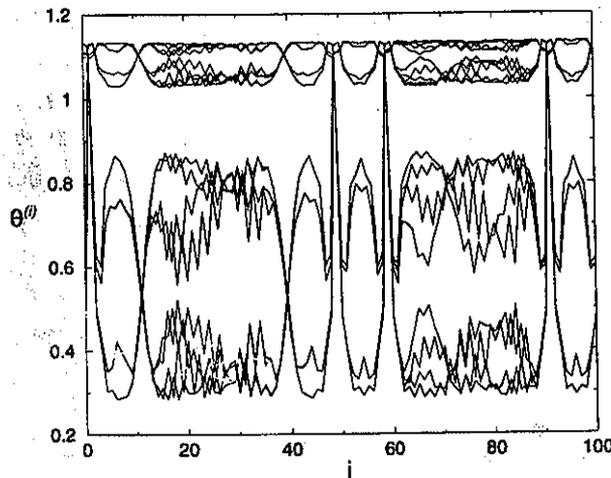


FIG. 6. Diagrama amplitude-espaco para $a = 0,552$

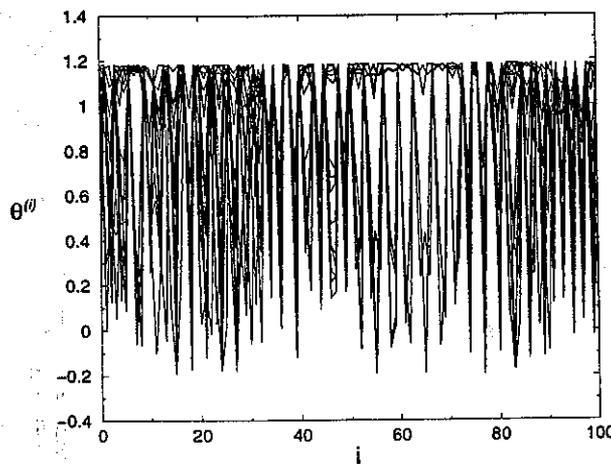


FIG. 7. Diagrama amplitude-espaco para $a = 0,540$

Quando o sistema fosse acoplado ($\epsilon \neq 0$), esta tendência persiste, formando os domínios de sítios com a mesma fase do ciclo. No entanto, devido ao acoplamento, que é um efeito difusivo, os kinks são “suavizados”, e estendem-se por diversos sítios. Em sucessivas iterações do sistema, os kinks e antikinks trocam de posições, formando uma espécie de nodo estacionário centrado numa órbita instável de período 2^p , que por sua vez é estabilizada pela ação do acoplamento [8]. Um comprimento de onda espacial poderia ser definido de maneira não-rigorosa como a distância mínima de correlação entre sítios dentro de um domínio. Observamos, neste caso, que os comprimentos de onda espaciais também decrescem quando há uma duplicação de período na rede.

Os mapas isolados apresentam comportamento caótico com duas bandas para $a = 0,552$ (Figura 6), e por este motivo poderíamos esperar também um comportamento caótico para

boa parte da rede de mapas acoplados. No entanto, simplesmente pela figura 6 não é possível checar esta afirmação, visto que podemos resolver órbitas de período máximo 16. Isto poderá ser feito com o auxílio dos expoentes de Lyapunov para a rede, o que será visto no próximo capítulo. De fato, todos os mapas nesta situação comportam-se caoticamente (vide Fig. 11).

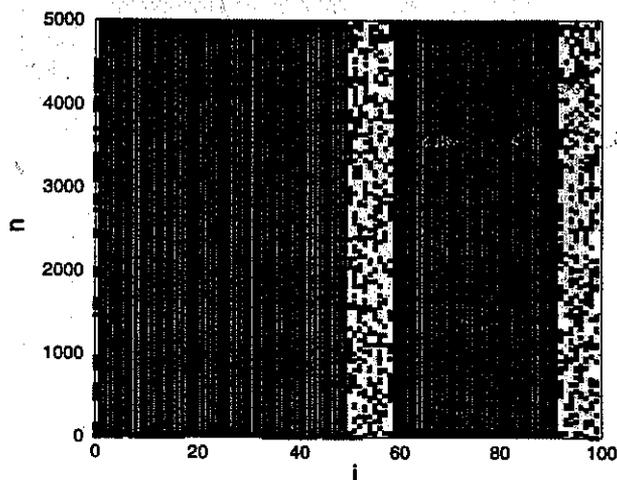


FIG. 8. Diagrama espaço-tempo para $a = 0,552$. Se a amplitude é maior ou igual a θ^* , o pixel é azul, caso contrário, amarelo

É possível observarmos também na Figura 6 uma quebra na invariância translacional dos domínios grandes. No entanto, mesmo perdendo correlação no seu interior, os domínios continuam “ancorados” na rede, ou seja, não se movem. Nós podemos visualizar este fato num diagrama espaço-tempo (Figura 8), no qual a amplitude dos sítios acoplados $\theta_n^{(i)}$ é graficada segundo a seguinte regra: se $\theta_n^{(i)} < \theta^*$ o pixel (n, i) é pintado de azul; caso contrário, é pintado de amarelo, onde $\theta^* = 0,982$ é o ponto fixo (instável) de período 1 do mapa isolado (esta escolha é um tanto arbitrária). Na figura 8, um pixel é graficado a cada 64 passos temporais. Podemos observar que os domínios maiores, em azul, não movem-se na rede para este caso. Este é um exemplo típico do que Kaneko denominou padrão aleatório congelado (*frozen random pattern*).

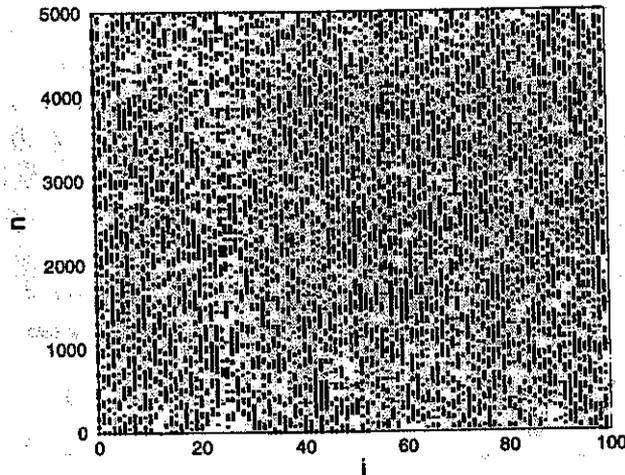


FIG. 9. Diagrama espaço-tempo para $a = 0,540$. Se a amplitude é maior ou igual a θ^* , o pixel é azul, caso contrário, amarelo

Finalmente, na figura 7, obtida para $a = 0,540$ (que, para um mapa isolado, ainda significa comportamento caótico, ainda que na vizinhança de uma janela de período 3), podemos observar que a estrutura de domínios separados por pares kink-antikink não mais ocorre, já que não há mais fases bem-definidas para as amplitudes em diferentes partes da rede, ou seja, não é mais possível distinguir um 2-ciclo do tipo $\{\theta_0, \theta_1, \theta_0, \theta_1, \dots\}$ de outro semelhante porém defasado $\{\theta_1, \theta_0, \theta_1, \theta_0, \dots\}$. Embora não haja correlação espacial alguma, não se descarta a possibilidade de observarmos mapas com comportamento periódico. Isso não seria surpreendente, levando em conta que o efeito do acoplamento sobre um dado mapa é equivalente ao de um termo externo variável no tempo $\theta_{n+1} = f(\theta_n) + \xi_n$. Este termo externo pode fazer com que o mapa saia do comportamento caótico, ou entre nele, de acordo com a sua posição no espaço de parâmetros. Esta abordagem foi usada por Shinbrot [5] numa proposta de método de "controle de caos" em redes globalmente acopladas. De fato, a análise dos expoentes de Lyapunov mostra que mais da metade dos sítios apresenta expoente negativo, e não são caóticos (vide Figura 12).

Isto pode ser visto também na Figura 8, que é o diagrama espaço-tempo construído da maneira descrita anteriormente. Podemos observar um comportamento itinerante dos domínios, que aparecem, desaparecem, e reaparecem em outros lugares, com o passar do tempo. Estes processos são provocados por colisões entre paredes de domínios. Quando duas paredes colidem elas se aniquilam, provocando a coalescência dos respectivos domínios, ou seja, a criação de um domínio maior. No limite deste processo, a rede tenderia a um padrão uniforme, dependendo do valor de a .

IV. ESPECTRO DE LYAPUNOV

Do ponto de vista da dinâmica não-linear, uma rede com N mapas unidimensionais acoplados é equivalente a um grande sistema dinâmico com N dimensões, ou um mapa N -dimensional:

$$x_{n+1}^{(0)} = \mathcal{F}_0(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N-1)})$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(1)} &= \mathcal{F}_1(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N-1)}) \\
x_{n+1}^{(2)} &= \mathcal{F}_2(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N-1)}) \\
&\vdots \\
x_{n+1}^{(N-1)} &= \mathcal{F}_{N-1}(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N-1)})
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

Os expoentes de Lyapunov caracterizam o quanto uma pequena distância no espaço tangente ao espaço de fase das variáveis dinâmicas irá ser ampliada (ou reduzida). Um mapa N -dimensional é definido num espaço de fase N -dimensional, de modo que nele há N direções independentes. Correspondendo a cada uma delas há um total de N expoentes de Lyapunov ordenados $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$, que formam o chamado "espectro de Lyapunov".

Sendo assim, a teoria dos sistemas dinâmicos [11] nos ensina que devemos primeiramente calcular o produto ordenado de n matrizes jacobianas do mapa N -dimensional (uma para cada instante de tempo)

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \dots \mathbf{J}_{n-1} \mathbf{J}_n = \prod_{\ell=1}^n \mathbf{J}_\ell \tag{41}$$

onde as componentes das matrizes jacobianas são dadas por

$$(\mathbf{J}_n)_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_n^{(j)}} \tag{42}$$

Os expoentes de Lyapunov λ_i são dados pelos logaritmos dos autovalores da matriz \mathbf{A}_n acima definida dividido pelo número n de iterações, e fazendo-se este número tender a infinito. Cada expoente está associado a um autovetor \mathbf{u}_i , ou autodireção, correspondentes a estes autovalores:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \ln \|\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{u}_i\|. \tag{43}$$

A. Espectro de Lyapunov para acoplamento local

Consideremos, inicialmente, o caso de uma rede de mapas com acoplamento laplaciano futuro

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon) f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2} (f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})). \tag{44}$$

Neste caso, podemos escrever a matriz jacobiana a cada instante de tempo como o produto $\mathbf{J}_n = \mathbf{F}_n \mathbf{D}_n$ de uma matriz diagonal (proporcional à matriz identidade)

$$F_{ij} = f'(x_n^{(i)}) \delta_{ij}, \tag{45}$$

por uma matriz de difusão

$$D_{ij} = (1 - \epsilon)\delta_{ij} + \frac{\epsilon}{2}(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}), \quad (46)$$

de modo que

$$(\mathbf{J}_n)_{ij} = \sum_{\ell=1}^N D_{i\ell} f'(x_n^{(\ell)}) \delta_{\ell j}. \quad (47)$$

ou, em componentes,

$$(\mathbf{J}_n)_{ij} = \begin{pmatrix} (1 - \epsilon)f'(x_n^{(1)}) & \frac{\epsilon}{2}f'(x_n^{(2)}) & 0 & \dots \\ \frac{\epsilon}{2}f'(x_n^{(1)}) & (1 - \epsilon)f'(x_n^{(2)}) & \frac{\epsilon}{2}f'(x_n^{(3)}) & \dots \\ 0 & \frac{\epsilon}{2}f'(x_n^{(2)}) & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & (1 - \epsilon)f'(x_n^{(N)}) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

O expoente máximo de Lyapunov λ_1 caracteriza a taxa com que um deslocamento pequeno arbitrariamente escolhido é amplificado. Como a rede de mapas acoplados é um sistema fechado, o teorema de Pesin nos [11] que a soma dos expoentes de Lyapunov positivos, que fornece a taxa de amplificação de uma bola N-dimensional infinitesimal, é igual à entropia de Kolmogorov-Sinai, ou KS-entropia. Num sistema espacialmente extenso como o nosso, são mais úteis quantidades intensivas, ou seja, que são divididas pelo tamanho da rede. Desta forma, nos interessará a densidade de KS-entropia, dada por

$$h_\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\lambda_i > 0} \lambda_i \quad (49)$$

B. Espectro de Lyapunov para acoplamento dependente do alcance

Vamos considerar, agora, o caso mais geral de um acoplamento totalístico que leve em conta a distância entre vizinhos, na forma da Eq. (12)

$$x_{n+1}^{(j)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)})], \quad (50)$$

onde $N' = (N - 1)/2$, e $\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} j^{-\alpha}$.

Os expoentes de Lyapunov são calculados da mesma forma que no caso anterior, por meio das expressões (43) e (41). A diferença consiste no cálculo dos elementos de matriz das jacobianas (42)

$$(\mathbf{J}_n)_{ij} = \frac{\partial x_{n+1}^{(j)}}{\partial x_n^{(i)}} = \frac{\partial f(x_n^{(i)})}{\partial x_n^{(i)}} + \frac{\epsilon}{\eta} \sum_{k=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} \left[\frac{\partial f(x_n^{(i+k)})}{\partial x_n^{(i)}} - 2 \frac{\partial f(x_n^{(i)})}{\partial x_n^{(i)}} + \frac{\partial f(x_n^{(i-k)})}{\partial x_n^{(i)}} \right]. \quad (51)$$

onde [12]

$$\frac{\partial f(x^{(i)})}{\partial x_n^{(k)}} = \begin{cases} (1 - \varepsilon)f'(x_n^{(k)}) & \text{se } k = i \\ \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)^{|i-k|^\alpha}} f'(x_n^{(k)}) & \text{se } |i - k| \leq N' \\ \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)(N-|i-k|)^\alpha} f'(x_n^{(k)}) & \text{se } |i - k| > N', \end{cases} \quad (52)$$

onde os primos denotam derivação em relação ao argumento, e levamos em conta condições periódicas de contorno $x_n^i = x_n^{(i \pm N)}$.

Por exemplo, numa rede com cinco sítios ($N = 5$) as matrizes jacobianas têm, em cada instante de tempo, a forma

$$J = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon)f'(1) & \varepsilon_1 f'(2) & \varepsilon_2 f'(3) & \varepsilon_2 f'(4) & \varepsilon_1 f'(5) \\ \varepsilon_1 f'(1) & (1 - \varepsilon)f'(2) & \varepsilon_1 f'(3) & \varepsilon_2 f'(4) & \varepsilon_2 f'(5) \\ \varepsilon_2 f'(1) & \varepsilon_1 f'(2) & (1 - \varepsilon)f'(3) & \varepsilon_1 f'(4) & \varepsilon_2 f'(5) \\ \varepsilon_2 f'(1) & \varepsilon_2 f'(2) & \varepsilon_1 f'(3) & (1 - \varepsilon)f'(4) & \varepsilon_1 f'(5) \\ \varepsilon_1 f'(1) & \varepsilon_2 f'(2) & \varepsilon_2 f'(3) & \varepsilon_1 f'(4) & (1 - \varepsilon)f'(5) \end{pmatrix}, \quad (53)$$

onde

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2^\alpha}. \quad (54)$$

O cálculo numérico destes expoentes é dificultado pelo fato de termos de calcular autovalores de produtos de muitas matrizes que, em geral, não são diagonais. Uma exceção notável é o caso de fluxos abertos, onde o acoplamento é unidirecional. Neles, as matrizes jacobianas são triangulares superiores ou inferiores, e seus autovalores são os próprios elementos diagonais. Em geral, porém, o produto de muitas matrizes fornece números muito grandes e corremos o risco de cair em erros de *overflow* antes mesmo de tirar os autovalores. Há diversas rotinas numéricas para determinar autovalores de matrizes arbitrariamente grandes, usando redução à forma de Hessenberg e balanceamento [13]. Temos usado um número modesto de tempos, da ordem de $n = 50$, que no entanto já nos colocou quase no limite da capacidade de processamento.

Como um exemplo, vamos retornar ao caso de redes de mapas do círculo (prototípicos) acoplados, que vimos no capítulo precedente. Na Figura 10 consideramos o mesmo caso da Figura 5, onde $a = 0,555$, $\beta = 0,315$, $\alpha = 5$, $\varepsilon = 0,01$. De acordo com a constatação de que existem apenas mapas com comportamento periódico, vemos um espectro onde todos os expoentes de Lyapunov são negativos. A densidade de KS-entropia h_μ será nula neste caso.

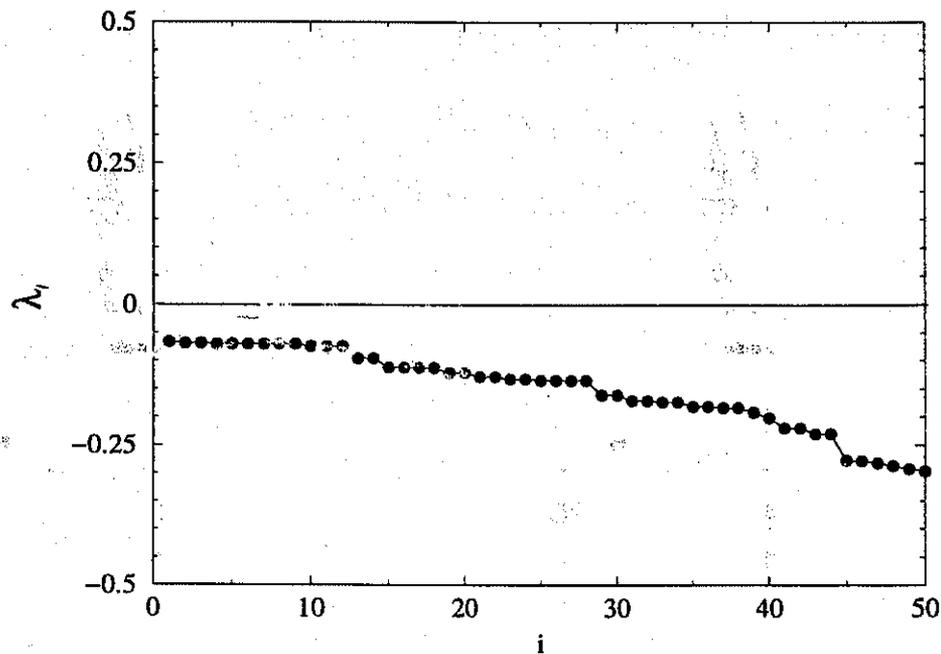


FIG. 10. Espectro de Lyapunov para uma rede de mapas do círculo prototípicos com $a = 0,555$ e $b = 0,315$

Na Figura 11, consideramos o mesmo caso da Figura 6, para a qual $a = 0,552$. Todos os expoentes do espectro são positivos, resultado numa densidade de KS-entropia da ordem de 0,2. Já na Figura 12, correspondente a $a = 0,540$ (vide Fig. 7), cerca de um terço dos sítios apresentam expoentes positivos, e a densidade de entropia é ligeiramente maior $\approx 0,25$ que no caso anterior. A conexão destes resultados com os respectivos diagramas sítio \times amplitude já foi abordada no capítulo anterior.

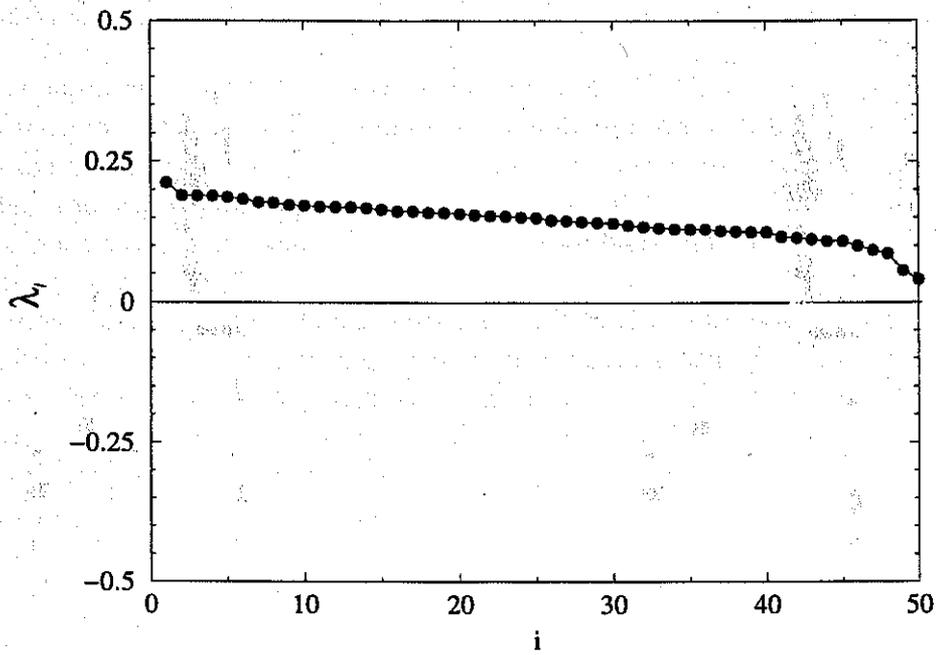


FIG. 11. Espectro de Lyapunov para uma rede de mapas do círculo prototípicos com $a = 0,552$ e $b = 0,315$

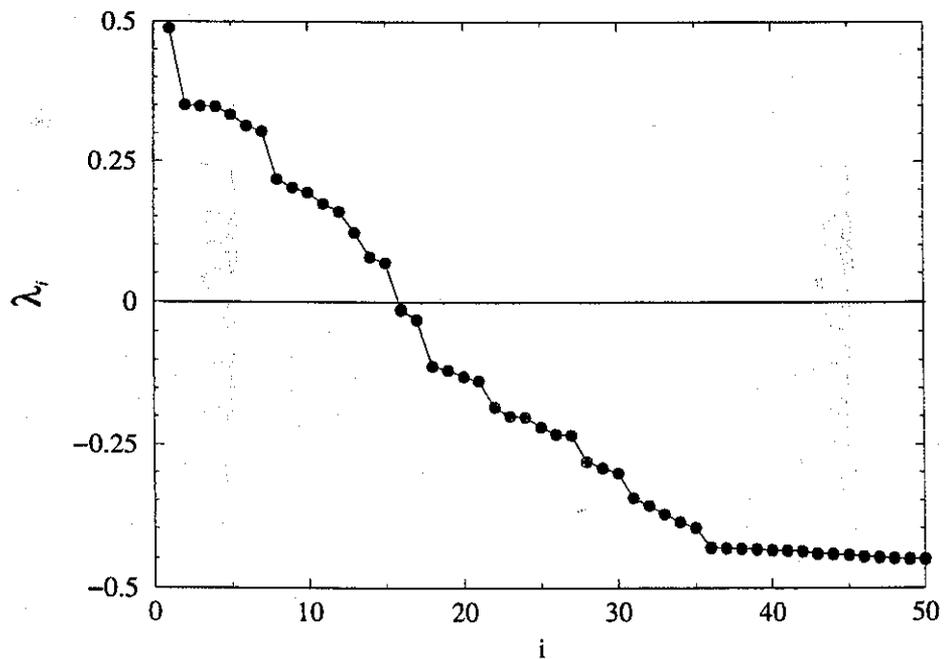


FIG. 12. Espectro de Lyapunov para uma rede de mapas do círculo prototípicos com $a = 0,540$ e $b = 0,315$

V. SINCRONIZAÇÃO EM REDES DE MAPAS ACOPLADOS

O fenômeno de sincronização foi descoberto em 1673 por Christian Huyghens para oscilações harmônicas de dois pêndulos mecanicamente acoplados - no caso, dois relógios de pêndulo fixados num mesmo suporte que, com o passar do tempo, sincronizaram suas oscilações. A sincronização de sistemas periódicos no tempo tem várias aplicações em sistemas físicos e biológicos. Certas espécies de vagalumes, por exemplo, piscam coletivamente com o mesmo período, devido a um processo de sincronização que as faz ajustarem seus próprios ritmos [14].

Redes de junções Josephson acopladas tem sido usadas como padrões confiáveis de medidas de tensão elétrica, amplificadores paramétricos, e geradores de ondas milimétricas. Estas junções quânticas supercondutoras têm uma distribuição das suas frequências naturais, devido a flutuações em seus parâmetros microscópicos, como resistências e limiares de corrente. Quando acopladas, as junções podem superar a desordem em suas frequências naturais e sincronizar, fornecendo uma potência de saída que cresce com o número de junções da rede [15]. Outros exemplo, ainda, poderiam incluir o comportamento coletivo de células especializadas no coração do tipo marcapasso *pacemakers*, devido à sua mútua sincronização.

Podemos distinguir dois tipos básicos de sincronização :

(i) *Sincronização de Frequências*: é o ajuste mútuo das frequências de osciladores periódicos, devido à interação fraca entre eles;

(ii) *Sincronização Completa (ou de Fases)*: ocorre devido a uma interação forte entre elementos de uma cadeia de sistemas caóticos idênticos, cujos estados coincidem, ao passo que suas dinâmicas temporais permanecem caóticas [16].

Nós nos limitaremos, nesta exposição, a estudar sincronização de frequências que ocorre em cadeias de osciladores com ciclos limites forçados impulsivamente que podem ser descritos por uma rede de mapas prototípicos acoplados.

A. Cadeias de sistemas a ciclos limites

Sistemas dinâmicos com ciclos limites apresentam estados assintóticos no espaço de fase caracterizados, para certos valores de seus parâmetros, por curvas fechadas suaves, associadas a oscilações regulares das variáveis do sistema. Sistemas a ciclos limites ocorrem no modelamento matemático de oscilações com relaxação, como a equação de Van der Pol, e também são úteis como modelos fenomenológicos para estudos da dinâmica cardíaca a baixas dimensões. Na cinética química, o Brusselator forçado e modelos correlatos; e na eletrônica, certos osciladores com resistência negativa também são exemplos de sistemas a ciclos limites.

Vamos investigar o comportamento de sistemas a ciclos limites na presença de uma perturbação externa periódica. Quando a perturbação é uma sequência de pulsos tipo funções delta de Dirac, é possível estudar o sistema usando um mapa de baixa dimensão. Nós estaremos interessados em saber como tais osciladores se comportam quando acoplados. Gostaríamos particularmente de determinar sob que condições eles sincronizarão em frequência.

Desta forma, cadeias de osciladores a ciclos limites sujeitos a perturbações externas impulsivas poderiam ser convenientemente descritos por redes de mapas acoplados. O sistema a ciclo limite a ser considerado, é dado (em coordenadas polares planas) por

$$\frac{dr}{dt} = sr(1 - r^2), \quad (55)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega, \quad (56)$$

onde $-\pi < \theta \leq \pi$, e $s > 0$ é um coeficiente de amortecimento. $0 < \Omega \leq 1$ é uma frequência natural para o oscilador. Ele apresenta um ciclo limite estável com raio igual a um, e um ponto fixo instável na origem (o que caracteriza um oscilador "suave") (cf. Fig. V A)

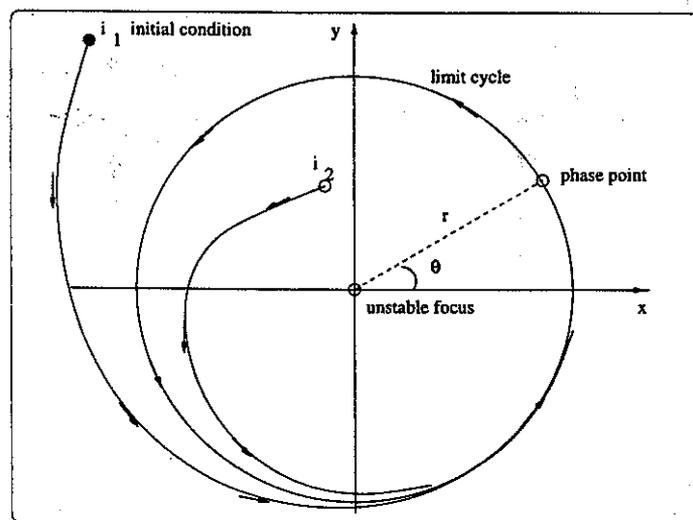


FIG. 13. Ciclo limite de um oscilador suave no plano de fase (x, y) . Duas trajetórias, iniciando em condições iniciais diferentes, são mostradas

Perturbando este sistema com uma sequência de pulsos do tipo função delta na direção x , com amplitude $2a > 0$ e frequência $b \in (0, 1]$ nós reescrevemos as equações anteriores como

$$\frac{dx}{dt} = sx(1 - x^2 - y^2) - y\Omega + 2a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi nb), \quad (57)$$

$$\frac{dy}{dt} = sy(1 - x^2 - y^2) + x\Omega. \quad (58)$$

Um mapa estroboscópico (a tempo $2\pi b$) pode ser obtido a partir das equações acima da seguinte forma: sejam r_n e θ_n as variáveis radial e angular imediatamente após o n -ésimo pulso delta (Fig. 14).

$$r_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} r(t = 2\pi nb + \epsilon), \quad (59)$$

$$\theta_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta(t = 2\pi nb + \epsilon). \quad (60)$$

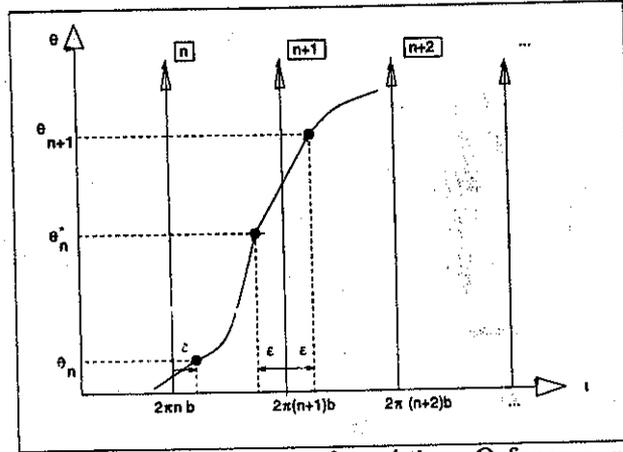


FIG. 14. Definição das variáveis do mapa estroboscópico. O forçamento externo consiste em uma sequência periódica de pulsos do tipo função delta.

A integração destas equações é efetuada em duas etapas: entre dois pulsos sucessivos (onde não há perturbação, portanto a solução é simples); e através do entorno de uma função delta (onde calculamos o salto de ambas as variáveis) [9]. Resultará um mapa bidimensional dissipativo:

$$r_{n+1}^2 = [r_n^* \cos(\theta_n + 2\pi b\Omega) + 2a]^2 + r_n^{*2} \sin^2(\theta_n + 2\pi b\Omega), \quad (61)$$

$$\tan \theta_{n+1} = \frac{r_n^* \sin(\theta_n + 2\pi b\Omega)}{2a + r_n^* \cos(\theta_n + 2\pi b\Omega)}, \quad (62)$$

onde

$$r_n^* \equiv \frac{r_n}{[r_n^2 + (1 - r_n^2) \exp(-4\pi sb)]^{1/2}} \quad (63)$$

indica o valor de r imediatamente antes do $(n+1)$ -ésimo pulso.

O parâmetro s é o inverso do tempo de relaxação, quando o pulso delta leva a trajetória para fora do ciclo limite não-perturbado. No limite de rápida relaxação ($s \rightarrow \infty$), cada pulso desloca a trajetória para fora do ciclo limite, mas ela retorna imediatamente, ou seja, radialmente (e sempre antes do próximo pulso ser aplicado, veja a Fig. VB). Neste caso limite $r_n^* \rightarrow 1$, e a equação (62) reduz-se a um mapa do círculo $\theta \mapsto f(\theta)$, com $f : (-\pi, \pi] \rightarrow (-\pi, \pi]$, na forma

$$\tan \theta_{n+1} = \frac{\sin(\theta_n + 2\pi b\Omega)}{2a + \cos(\theta_n + 2\pi b\Omega)}. \quad (64)$$

Fazendo $\beta = b\Omega$ obtemos o mapa prototípico de Ding, cujas propriedades foram discutidas no capítulo 3.

B. Redes não-homogêneas de mapas prototípicos acoplados

Vamos considerar, novamente, o tipo de acoplamento com alcance variável da Eq. (12):

$$\theta_{n+1}^{(i)} = f \left(\theta_n^{(i)} + \frac{\epsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{j^\alpha} (\theta_n^{(i-j)} - 2\theta_n^{(i)} + \theta_n^{(i+j)}) \right) \quad (65)$$

onde $\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{(N-1)/2} j^{-\alpha}$ é um fator de normalização, $\epsilon > 0$ é a intensidade do acoplamento, $\alpha \geq 0$ é o parâmetro de alcance, e o mapa do círculo $f(\theta)$ é dado por (64).

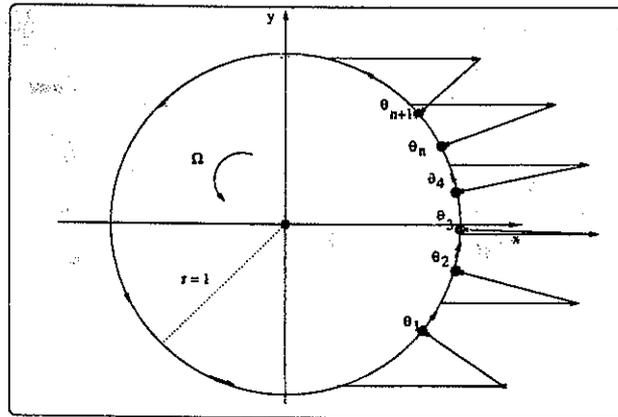


FIG. 15. Visão esquemática da trajetória do sistema a ciclo limite perturbado, no limite de rápida relaxação

Lembremos que, para $\alpha = 0$, obtemos o caso de acoplamento global do tipo campo médio, no qual cada sítio é influenciado pelo efeito médio de todos os sítios da rede. Se $\alpha \rightarrow \infty$ apenas os termos com $j = 1$ sobrevivem nas somatórias, e somente os sítios vizinhos mais próximos contribuem para o acoplamento, resultando no acoplamento Laplaciano local.

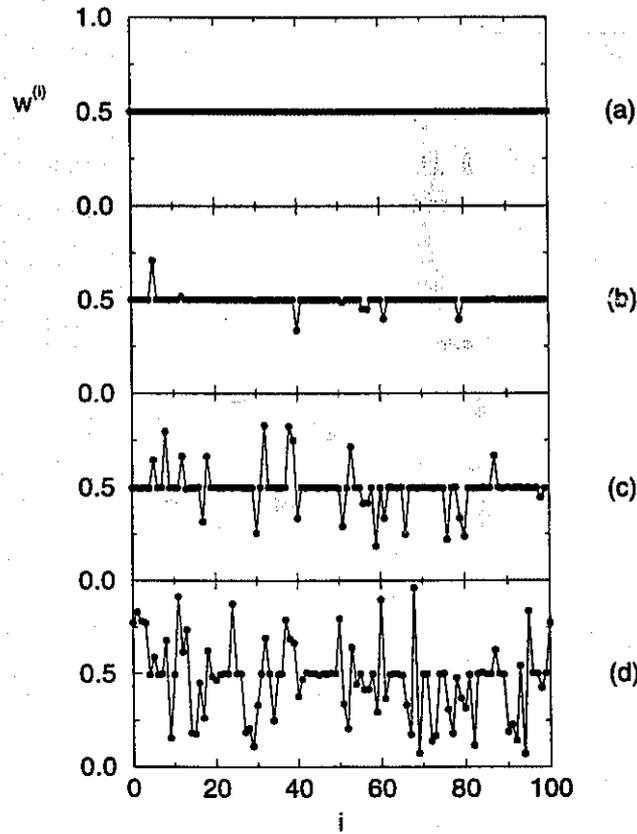


FIG. 16. Perfis do número de rotação para uma rede com $N = 100$ mapas prototípicos acoplados com $a = 0.4$ e $b = 1.0$. As frequências naturais $\Omega^{(i)}$ têm uma distribuição aleatória e uniforme. Os parâmetros de acoplamento são $\alpha = 0$: (a) $\epsilon = 0.90$, (b) $\epsilon = 0.70$, (c) $\epsilon = 0.50$, (d) $\epsilon = 0.01$.

Nós consideraremos que dois ou mais mapas estarão sincronizados em frequência, se seus números de rotação forem iguais, a menos de uma dada tolerância. Para os mapas acoplados, será mais conveniente trabalhar com a seguinte expressão para o número de rotação do i -ésimo sítio:

$$w^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m - m_0} \sum_{n=m_0}^{m-1} \theta_{n+1}^{(i)} - \theta_n^{(i)}, \quad (66)$$

no qual $m_0 = 1000$ é o número de iterações transitórias. O conjunto dos números reais $w^{(i)}$, com $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, define um perfil de números de rotação. Na ausência de acoplamento ($\epsilon = 0$), e sem não-linearidade (sem força externa) ($a = 0$), os números de rotação reduzem-se às frequências naturais $\Omega^{(i)}$ dos osciladores individuais. Nós consideraremos o caso no qual cada mapa tenha um valor diferente de $\Omega^{(i)}$, aleatoriamente escolhido entre 0 e 1.

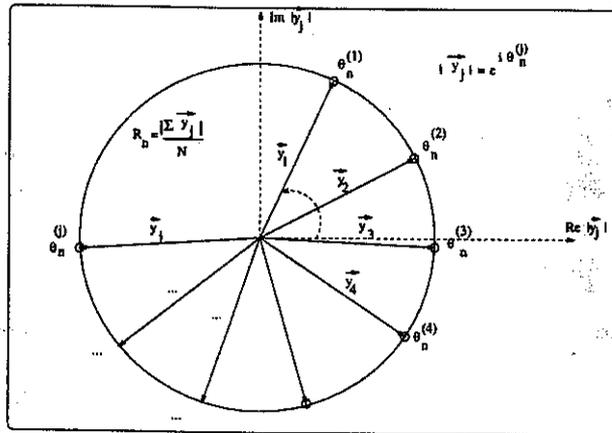


FIG. 17. Parâmetro de ordem para uma rede de mapas acoplados com condições periódicas de contorno

Neste caso teremos dois processos básicos competindo entre si: (i) a frequência natural Ω , que é fixa no tempo para cada oscilador, mas é aleatoriamente distribuída ao longo da rede, tende a trazer o número de rotação para um valor racional ou irracional com o mesmo grau de aleatoriedade; (ii) a difusão causada pelo acoplamento espacial tende a suavizar efeitos individuais causados pelas frequências naturais, e faz com que conjuntos de mapas fiquem com o mesmo período. A competição entre estes fatores pode levar à sincronização, caso a difusão vença a desordem congelada das frequências naturais. Nós desejamos saber como os parâmetros que caracterizam o acoplamento influenciam nesta disputa.

Para levar a cabo esta tarefa, necessitamos definir algumas grandezas que caracterizem a sincronização dos mapas. Observamos que, devido à distribuição aleatória e uniforme das frequências naturais, para acoplamento suficientemente forte, todos os sítios da rede tendem a sincronizar num número de rotação comum que tende ao valor $b/2$. Desta forma nós podemos, dado um perfil do número de rotação, calcular o seu valor médio $\langle w \rangle = (1/N) \sum_i w^{(i)}$, e a dispersão (desvio quadrático médio)

$$\delta w = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (w^{(i)} - \langle w \rangle)^2 \right]^{1/2} \quad (67)$$

em torno deste valor.

Na figura 16 mostramos uma série de perfis do número de rotação, obtidos a partir de um acoplamento global com ($\alpha = 0$) e diferentes valores da intensidade do acoplamento ϵ . Para acoplamento forte nós podemos observar a sincronização de todos os sítios da rede no valor $\langle w \rangle = 0.5$, com uma dispersão menor que 10^{-6} . Quando a intensidade do acoplamento decresce nós observamos a quebra deste estado uniforme em alguns locais, que tornam-se mais numerosos à medida em que ϵ fica cada vez menor; mas ainda tendo muitos agrupamento de estados sincronizados (platôs). Para acoplamento muito fraco, o número destes platôs é baixo, mas com a mesma tendência anterior, e com uma dispersão alta, da ordem de 20 por cento.

Outro diagnóstico de sincronização é parâmetro de ordem introduzido por Kuramoto [17]. Seja $\theta_n^{(i)}$, ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) o padrão da rede no instante n . O parâmetro de ordem complexo é dado por (veja a figura 17)

$$z_n = R_n e^{i\varphi_n} \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp(i\theta_n^{(j)}). \quad (68)$$

Para cada instante n , o parâmetro de ordem é a média das fases $e^{i\theta}$ para cada sítio da rede. Supondo um estado totalmente uniforme (que necessariamente implica em total sincronização), onde $\theta_n^{(0)} = \theta_n^{(1)} = \dots = \theta_n^{(N-1)} = \theta_n = \text{const.}$, então o parâmetro de ordem terá magnitude igual a 1 (para todos os instantes) e argumento igual a θ_n . Por outro lado, suponha um padrão onde as amplitudes $\theta_n^{(j)}$ estejam completamente não-correlacionadas espacialmente, de forma que, quando é feita a média das respectivas fases sobre a rede, tenhamos

$$z_n = \left\langle e^{i\theta_n^{(j)}} \right\rangle_j = \langle \cos \theta_n^{(j)} \rangle_j + i \langle \sin \theta_n^{(j)} \rangle_j = 0 \quad (69)$$

de forma que, para estados não-sincronizados como estes a magnitude do parâmetro de ordem se anula.

De maneira geral, no entanto, há quase sempre uma certa correlação espacial entre sítios, mesmo que não haja sincronização entre eles; assim como não é necessário que as amplitudes θ sejam iguais para que os respectivos números de rotação o sejam, de modo que os casos vistos acima são extremos. Estados sincronizados normalmente apresentam um valor fixo da magnitude R_n próximo de um (para redes infinitas); ou flutuações em torno deste valor para redes finitas, sendo a amplitude destas flutuações proporcional a $1/\sqrt{N}$, onde N é o tamanho da rede. Já estados não-sincronizados apresentam tipicamente oscilações de R_n em torno de um valor baixo, com periodicidade complexa. No entanto, não esperamos a presença de caos determinístico nestas oscilações, visto que há um certo grau de correlação espacial mesmo na ausência de sincronização.

A figura 18 apresenta a série temporal da magnitude R_n do parâmetro de ordem e o espectro de potência correspondente, para os mesmos parâmetros da figura 16. Quando a maioria dos sítios da rede estão sincronizados, R_n apresenta oscilações regulares, caracterizadas por um pequeno número de picos esbeltos nos espectros correspondentes. A quebra deste estado é seguida por uma complexidade crescente nas oscilações de R_n , cujos valores médios decrescem, e com vários picos de frequência adicionais nos seus respectivos espectros, indicando a presença de muitos harmônicos em suas oscilações.

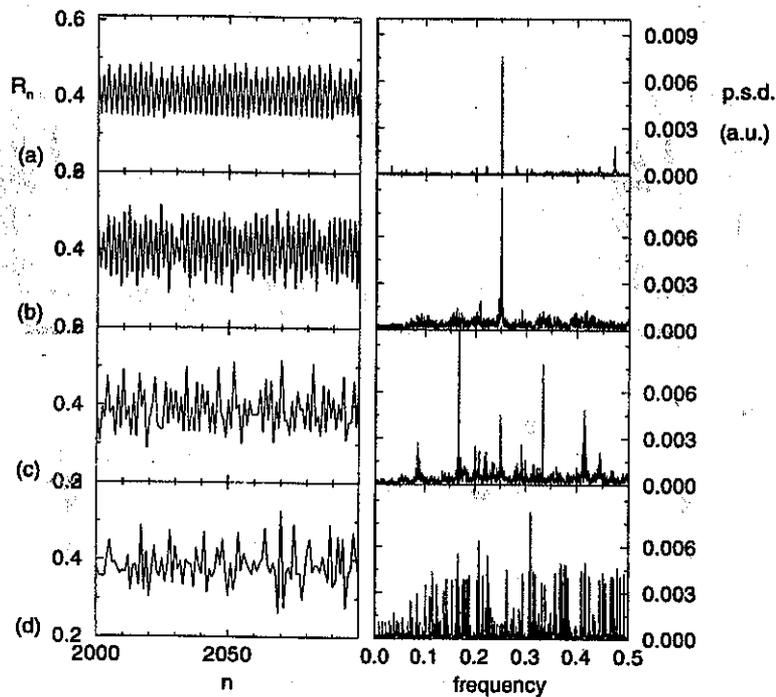


FIG. 18. Magnitude do parâmetro de ordem e espectros de potência correspondentes para os mesmos parâmetros da figura 16: $\alpha = 0$ e (a) $\epsilon = 0.90$, (b) $\epsilon = 0.70$, (c) $\epsilon = 0.50$, (d) $\epsilon = 0.01$.

Nas figuras 19 e 20, mostramos perfis dos números de rotação, as magnitudes do parâmetro de ordem e os respectivos espectros de potência para $\alpha = 3$, que já configura um acoplamento praticamente apenas entre os vizinhos mais próximos. As diferenças com o caso de acoplamento global são grandes, já que mesmo para acoplamento forte (ϵ alto) nós temos apenas alguns platôs de sincronização, o que gera flutuações irregulares em R_n , com um espectro ruidoso e sem picos distintos de frequência.

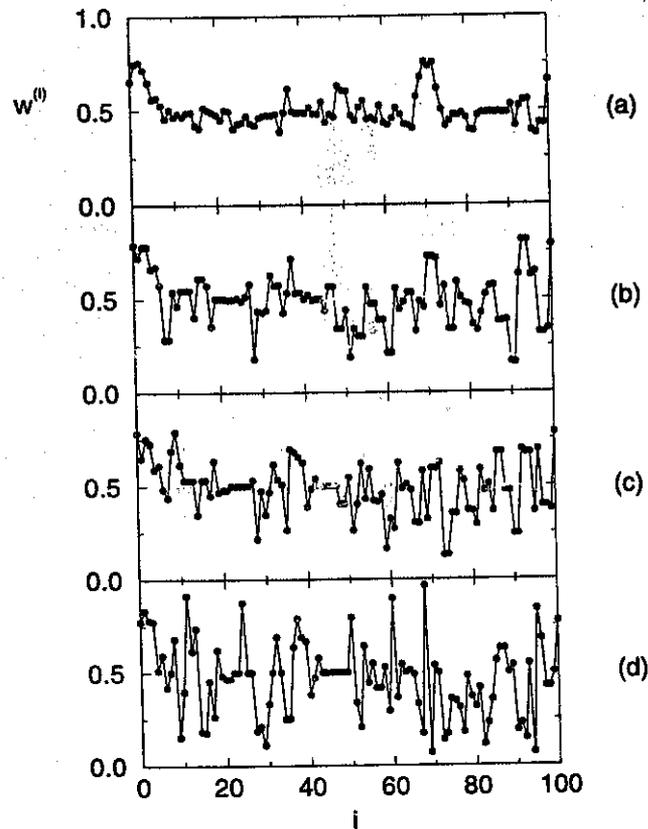


FIG. 19. Perfil do número de rotação para uma rede de $N = 100$ mapas prototípicos com $a = 0.4$ e $b = 1.0$. As frequências naturais $\Omega^{(i)}$ têm uma distribuição aleatória e uniforme. Os parâmetros de acoplamento são $\alpha = 3$ e: (a) $\epsilon = 0.90$, (b) $\epsilon = 0.70$, (c) $\epsilon = 0.50$, (d) $\epsilon = 0.01$.

Para intensidades menores do acoplamento (veja as figuras 19 e 20) a situação é similar, com um crescimento da dispersão dos números de rotação, ainda que estejamos vendo alguns platôs pequenos (equivalendo a menos de 5% de toda a rede), a mesma observação sendo válida para os espectros correspondentes. Para acoplamento pouco intenso, a distribuição dos números de rotação é semelhante àquela para o acoplamento global, como esperado. Comparando as figuras 18 e 20 nós vemos a mesma estrutura no espectros das flutuações dos parâmetros de ordem em ambos os casos.

Para acoplamentos locais a influência relativa da difusão na rede é pequena, não sendo tipicamente forte o bastante para superar a desordem congelada das frequências naturais de cada mapa. Portanto, mesmo que usemos intensidades altas de acoplamento, o resultado final em termos de sincronização será aproximadamente o mesmo. A influência do alcance do acoplamento nos perfis do número de rotação pode ser vista a partir da figura 22, onde mostramos tais perfis para diferentes valores de α e a mesma intensidade de acoplamento. A transição de um estado completamente sincronizado para um completamente não-sincronizado é efetivada pela quebra da estrutura de platôs. Inicialmente o grande platô em $w = 0,5$ é quebrado, e além das irregularidades que nos lembram da desordem natural congelada, existem também pequenos platôs a diferentes números de rotação.

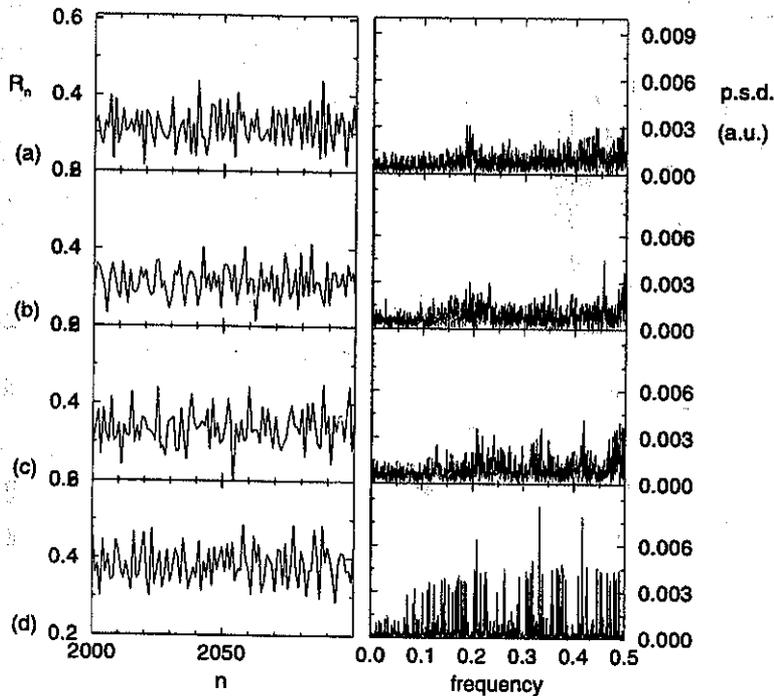


FIG. 20. Magnitude do parâmetro de ordem e espectros de potência correspondentes para os mesmos parâmetros da figura precedente: $\alpha = 3$ e (a) $\epsilon = 0.90$, (b) $\epsilon = 0.70$, (c) $\epsilon = 0.50$, (d) $\epsilon = 0.01$.

Para prover uma caracterização mais precisa de padrões como os mostrados na figura 22, contamos o número de platôs de sincronização nestes perfis de número de rotação. Seja N_i o comprimento do i -ésimo platô, e N_p o número total de platôs. O tamanho médio do platô é $\langle N \rangle = (1/N_p) \sum_{i=1}^{N_p} N_i$. Definimos o chamado "grau de sincronização" como o tamanho médio relativo dos platôs: (veja a figura 21) $p = \langle N \rangle / N$.

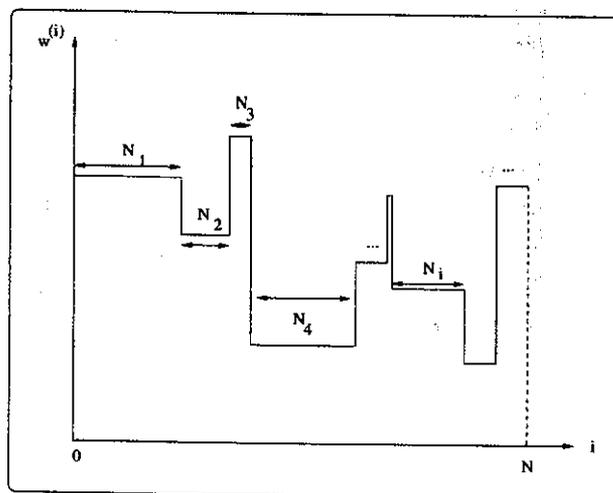


FIG. 21. Platôs de sincronização num perfil de número de rotação

Para um estado completamente sincronizado nós temos apenas um platô, que vem a ser a própria rede, portanto $\langle N \rangle = N$, e $p = 1$. Se temos, por outro lado, numa rede completamente não-sincronizada nós temos tantos platôs como sítios, $N_p \approx N$, ou $\langle N \rangle \approx 1$. Portanto $p \approx \frac{1}{N} \rightarrow 0$ caso $N \rightarrow \infty$.

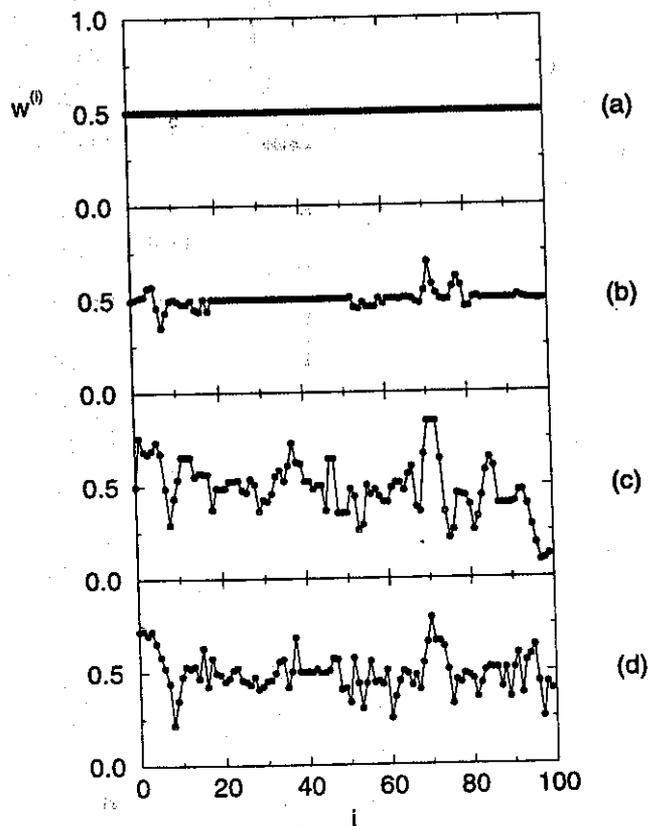


FIG. 22. Perfis do número de rotação para uma rede de $N = 100$ mapas prototípicos com $a = 0.4$ and $b = 1.0$. As frequências naturais $\Omega^{(i)}$ têm uma distribuição aleatória uniforme. Os parâmetros de acoplamento são $\epsilon = 0.85$ e: (a) $\alpha = 0.0$, (b) $\alpha = 1.0$, (c) $\alpha = 2.0$, (d) $\alpha = 3.0$.

Na figura 23 observamos a variação da dispersão do número de rotação com o parâmetro de alcance. Existe uma transição abrupta entre o estado de platô único, no qual δw é muito pequeno ($\approx 10^{-5}$), e aqueles estados não-sincronizados com dispersão da ordem de 10% da variação do número de rotação. Esta conclusão também pode ser tirada a partir da variação do grau de sincronização p correspondente a este caso. O salto entre estados completamente sincronizados e completamente não-sincronizados ocorre para um alcance de acoplamento ligeiramente inferior a 1. Este valor crítico de α depende também da intensidade do acoplamento ϵ . Este tipo de transição de fase foi também encontrada em cadeia de osciladores lineares com interações não-lineares [6].

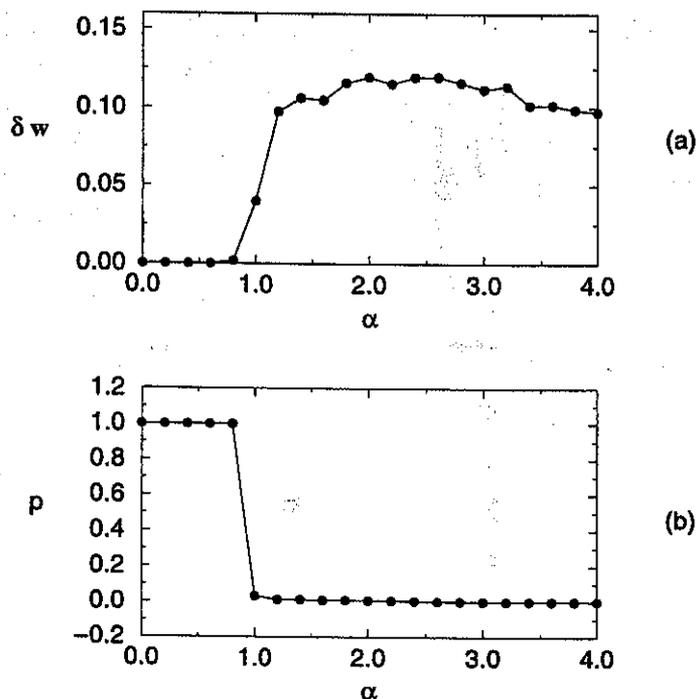


FIG. 23. (a) Dispersão do número de rotação, e (b) grau de sincronização dos perfis de números de rotação obtidos para vários valores do alcance do acoplamento α e uma intensidade fixa $\epsilon = 0.85$. Consideramos uma rede com $N = 100$ mapas prototípicos com $a = 0.4$, $b = 1.0$, e frequências naturais aleatoriamente distribuídas.

C. Distribuição dos platôs de sincronização

Além do mapa prototípico de Ding, é possível estudar estes efeitos de sincronização dependentes do acoplamento num mapa mais simples, o mapa do seno-círculo de Arnold:

$$\theta \mapsto f(\theta) = \theta + \Omega + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta) \quad (70)$$

onde Ω é a frequência natural, e K é um parâmetro de não-linearidade. De fato, é possível provar que o mapa prototípico reduz-se ao mapa do seno-círculo no limite de pequenas amplitudes de forçamento ($a \ll 1$).

Em um trabalho recente [18], nós investigamos a distribuição estatística dos platôs de sincronização de acordo com o seu comprimento. Para esta finalidade, é conveniente admitir a existência de platôs de comprimento igual a um, ainda que eles de fato não representem um platô, por não estarem sincronizados com ninguém. Como para os acoplamentos globais (α pequeno, pouco menor que um) há uma forte tendência para um pequeno número de grandes platôs, decorre que para eles não obtemos uma boa estatística pelo pequeno número de eventos. Por esta razão, nós nos limitaremos ao caso de acoplamento local:

$$\theta_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(\theta_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2} [f(\theta_n^{(i+1)}) + f(\theta_n^{(i-1)})] \quad (71)$$

Como neste caso o tempo de computação é significativamente menor do que no acoplamento com alcance variável, é possível trabalhar com redes de até cerca de um milhão de sítios.

Na figura 24 mostramos alguns gráficos semi-logarítmicos para histogramas do número de platôs de sincronização n em função de seus comprimentos N_i , para valores diferentes da intensidade do acoplamento ϵ , usando uma grande rede com $N = 200.000$ sítios. Todas as distribuições são bem ajustadas por retas, indicando pois uma dependência exponencial

$$n(N_i, \epsilon) \approx \exp(-m(\epsilon)N_i) \quad (72)$$

Para acoplamento fraco ($\epsilon = 0.1$), será improvável observar platôs muito grandes. De fato, há menos que dez platôs com comprimento igual a 7, e não há maiores que isto! A maior parte deles tem comprimentos muito baixos. A inclinação das retas (coeficiente angular) vale $m \approx 1.53$.

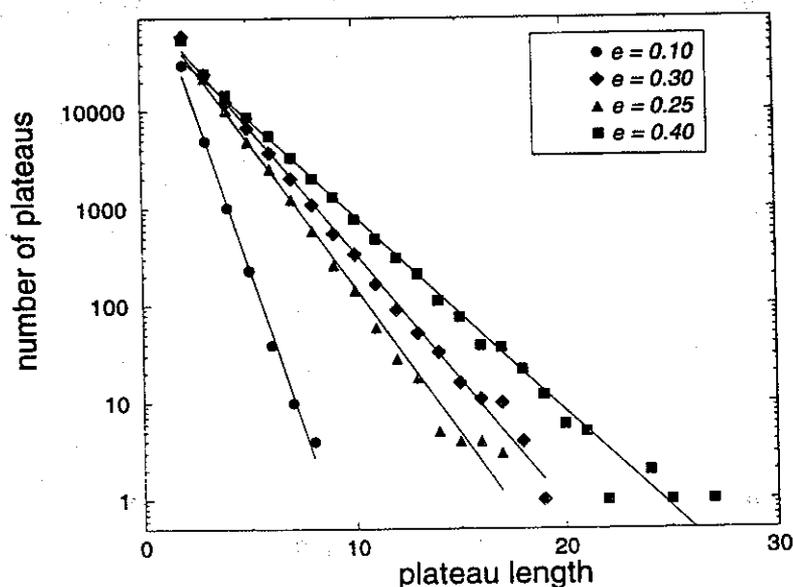


FIG. 24. Número de platôs de sincronização com um dado comprimento N_i para uma rede de $N = 200.000$ mapas do seno-círculo localmente acoplados com $K = 0.25$ e alguns valores da intensidade do acoplamento ϵ . As retas indicam ajustes feitos por regressão linear aos dados numéricos

Para intensidade maior de acoplamento, vemos a presença de platôs maiores, de até quatorze sítios. A inclinação da reta-ajuste diminui, neste caso. Platôs com maiores comprimentos são mais raros, e contribuem de maneira pobre à estatística nesta região, razão pela qual nela o ajuste é pior. Esta tendência é confirmada para ϵ maiores, onde encontramos platôs de até quarenta sítios, porém com uma qualidade pior de ajuste.

A inclinação m é o parâmetro característico da distribuição estatística dos comprimentos dos platôs. A variação de m com a intensidade do acoplamento pode ser vista na figura 25, na qual observamos uma queda monotônica da inclinação quando ϵ cresce de 0.1 a 0.5.

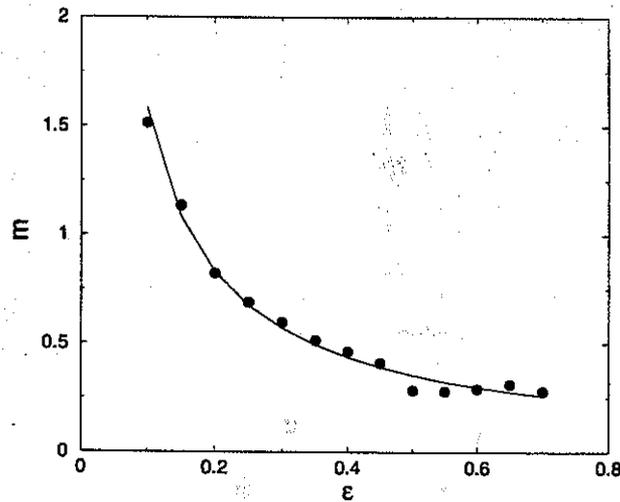


FIG. 25. Inclinação m da distribuição dos platôs de sincronização em função da intensidade do acoplamento para uma rede de $N = 200.000$ mapas do seno-círculo com $K = 0,25$. A linha cheia representa um ajuste do tipo lei de potência para os dados numéricos

Uma dependência do tipo lei de potência (mostrada em linha cheia) é fortemente sugerida pelos dados. Para acoplamentos fortes, ainda não é claro se esta inclinação satura num valor $m \approx 0,28$. Neste caso, é preciso salientar, a estatística sempre tende a ser pior devido à formação de um número progressivamente menor de platôs grandes.

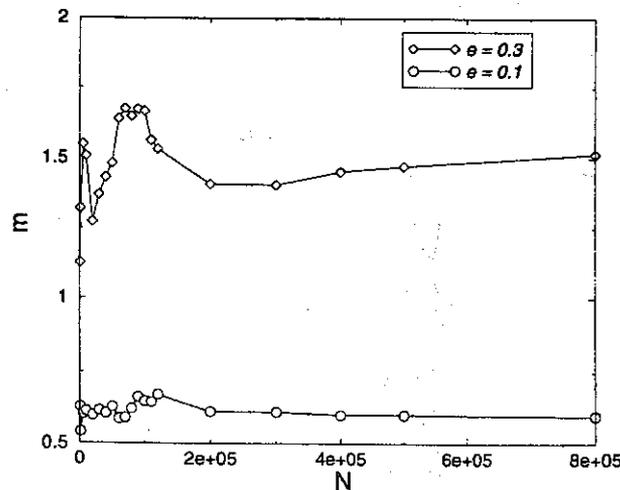


FIG. 26. Inclinação m da distribuição dos platôs de sincronização em função do tamanho da rede N para dois valores da intensidade do acoplamento

Muito embora nós já estejamos procurando trabalhar com grandes redes para permitir uma boa estatística, é interessante investigar o limite termodinâmico da rede, que corresponde a $N \rightarrow \infty$. Na figura 26 nós graficamos a inclinação da distribuição dos comprimentos dos platôs *versus* o tamanho da rede N para dois valores da intensidade do acoplamento ϵ . Foram investigadas redes de até 800 mil sítios. Para ambos os casos mostrados, observamos uma

saturação da inclinação m para valores "termodinâmicos" de $m \approx 1,5$ (para acoplamento fraco) e $m \approx 0,6$ (para acoplamento forte). Como tais valores não mudam apreciavelmente de 200 mil para 800 mil sítios, nós esperamos que nossos resultados prévios também já estejam praticamente no limite termodinâmico.

VI. MEMÓRIAS DE CURTO PERÍODO

Redes neurais tem sido o tipo de modelo mais estudado em investigações de comportamento computacional que lembra sistemas neuronais biológicos. As unidades do sistema, ou neurônios, são reduzidas a sistemas lógicos binários simples com relações de entrada-saída. A alternância entre estes estados - ativado e desativado - é ativada pela intensidade dos sinais acumulados de entrada provenientes de outras unidades da rede. Um exemplo é o modelo de Hopfield, que presume uma rede neuronal na forma de um sistema de spins, supondo uma matrix de conectividade simétrica (sinapses neuronais). A variável de estado é discreta e binária, tendo como estados possíveis: $+1$ (ativa) ou -1 (inativa) [19].

Como neurônios binários estão limitados a portar uma quantidade limitada de informação, a capacidade de memorização da rede é proporcional ao número de unidades da rede. Se pudéssemos armazenar mais informação em cada unidade, poderíamos empregar (ao menos em princípio) redes menores. O uso de variáveis de estado contínuas - como numa rede de mapas acoplados - é, portanto, atraente. Um estudo pioneiro nesta direção foi realizado por Nozawa [20], que considerou uma versão discretizada do modelo de Hopfield.

Um estudo recente que também explorou esta possibilidade visou explicar o resultado de um experimento de ondas de densidade de carga em $NbSe_3$ [21], no qual a memória manifesta-se na sincronização da resposta de uma sequência de pulsos elétricos no cristal. Uma rede de mapas acoplados com perturbação externa periódica foi proposta para explicar a existência de memórias de curto período, pelas quais entendemos a capacidade da rede de memorizar os pulsos apenas enquanto eles estão sendo aplicados. Após deixarem de ser aplicados, a difusão provocada pelo acoplamento entre os mapas faz com que a rede perca a toda informação recebida.

Seja x_n a variável de estado do neurônio no tempo discreto $n = 0, 1, 2, \dots$. Uma rede unidimensional é formada com acoplamentos do tipo Laplaciano futuro. ¹

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \text{int} \left\{ k[f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})] - (1 + A_n) \right\}, \quad (73)$$

onde k é a intensidade do acoplamento e $\text{int}\{z\}$ é o maior inteiro menor ou igual a z . A_n representa o sinal externo de entrada aplicado ao mapa, e corresponde ao padrão que a rede deve supostamente memorizar. Esta rede de mapas descreve a dinâmica de uma cadeia de N partículas super-amortecidas, num potencial periódico profundo, com vizinhos mais próximos

¹Num modelo baseado numa arquitetura neuronal semelhante a de sistemas biológicos, no entanto, um acoplamento global seria mais adequado [20].

conectados por molas de constante elástica k , e sujeitos a forças externas de amplitude $1 + A_n$. Em [21] um mapa linear simples $f(x) = x$ foi usado, mas analisaremos também o efeito de uma pequena não-linearidade, da forma $f(x) = x + rx^2$, com $r \ll 1$.

Partindo de uma configuração inicial $x_0^{(i)}$, o sistema evolui através de uma sequência de padrões que pode ou não estacionar numa configuração estável. O padrão que memoriza a sequência de entrada $\{A_1, A_2\}$ pode ser recuperado a partir da variável (dita "de curvatura") $c_n^{(i)}$, definida (para o sítio i e o instante n) como

$$c_n^{(i)} = k [f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (74)$$

tal que o armazenamento de memória é caracterizado pela formação de platôs de variáveis de curvatura. Em histogramas da parte fracional de c , dadas por $frac(z) = z - f(z)$, estas memórias aparecem como picos de frequência [21]. Tais picos podem persistir, no máximo, enquanto o sinal externo continua sendo aplicado.

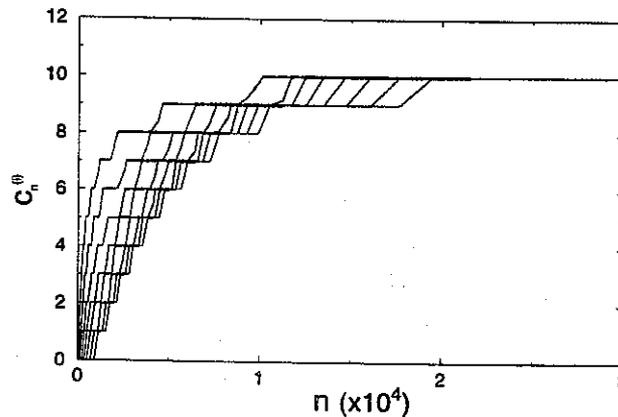


FIG. 27: Evolução temporal para os sítios de uma rede de mapas lineares acoplados com $N = 10$, $k = 0.01$, e um input $A_1 = 9, A_2 = 10$. Usamos condições iniciais aleatórias $x_0^{(i)}$ e condições mistas de contorno. Cada curva corresponde a um dado sítio ($i = 2, 3, 4, \dots, 9$).

Como um exemplo (Figura VI), nós computamos as variáveis de curvatura para $N = 10$ mapas lineares ($r = 0$) numa rede com condições periódicas mistas (uma extremidade pinçada, outra livre): $x_n^{(0)} = 0, x_n^{(N-1)} = x_n^{(N-2)}$ e o seguinte sinal de entrada (com período 2) $A_1 = 9, A_2 = 10$, etc. Ocorre que $A_n = 9$ é memorizado por um curto período, ao passo que $A_n = 10$, o ponto fixo, persiste pelo tempo no qual o input é aplicado. Cada sítio da rede (fora das extremidades) acaba atingindo o mesmo valor memorizado para a variável de curvatura.

Para entender como estas memórias são formadas, consideramos o efeito do primeiro pulso A_1 , que é aplicado a todos os sítios. O incremento na variável de estado $x_n^{(i)}$ é o mesmo para todos os sítios, exceto a extremidade fixa $x_n^{(0)} = 0$. Isto gera um aumento na variável de curvatura na vizinhança da extremidade fixa, até que o acoplamento entre ela e o sítio seguinte ($i = 1$) torne-se grande o suficiente para manter a curvatura constante. Isto ocorre para todos os outros sítios na direção da extremidade livre, até que o valor de saturação, que corresponde à memória permanente.

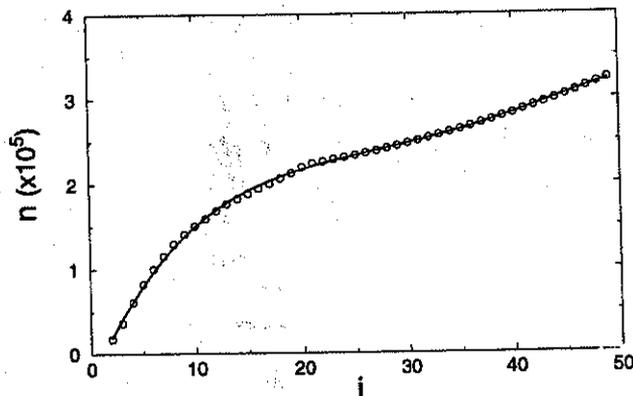


FIG. 28. Duração do transiente para o valor memorizado $c^{(i)} = 10$ como função da posição na rede, para uma rede de mapas lineares acoplados com $N = 50$, $k = 0.01$, $A = 10$, e as mesmas condições iniciais e de contorno como nas figuras prévias

Há um transiente associado a esta memória permanente. No exemplo da Figura VI, ele é menor que 2×10^4 , valor este que depende de parâmetros do mapa e da rede. A dependência com a posição do mapa na rede i é mostrada na Figura VI para uma rede maior ($N = 50$) e com um único input $A = 10$. Os resultados numéricos parecer ser bem ajustados por um polinômio de quarta ordem, cujos coeficientes dependem do tamanho da rede. Os sítios mais próximos da extremidade fixa atingem a memória permanente mais rápido que os distantes, devido ao mecanismo mencionado anteriormente [22].

A duração do transiente também depende da intensidade do acoplamento k , sendo inversamente proporcionais entre si - quanto mais fraco é o acoplamento, menor será o efeito difusivo na rede, e mais tempo será necessário para propagar qualquer informação, e o transiente será mais longo neste caso. Encontramos, também, uma dependência desta duração com a quinta potência da amplitude do input A .

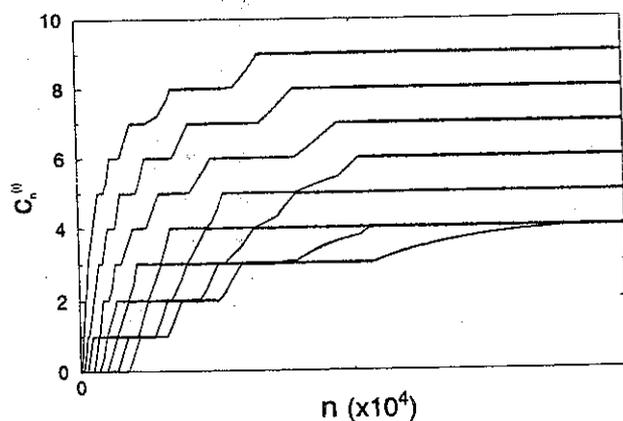


FIG. 29. Evolução temporal da variável de curvatura para os sítios de uma rede de mapas fracamente não-lineares acoplados com $N = 10$, $k = 0.01$, $r = 10^{-8}$, $A = 10$. Usamos condições iniciais aleatórias $x_0^{(i)}$ e condições de contorno mistas. Cada curva corresponde a um dado sítio da rede ($i = 2, 3, 4, \dots, 9$).

A adição de uma pequena não-linearidade ao mapa isolado ($x \mapsto x + rx^2$) tem um efeito significativo sobre a sua capacidade de armazenamento de memória. Para um valor da não-linearidade tão pequeno como $r = 10^{-8}$, segue que múltiplas memórias podem ser armazenadas, ao invés de apenas uma como no caso linear (Fig. VI). Fizemos vários testes numéricos para checar que estas múltiplas memórias permanentes permanecem tanto quanto nós continuemos a aplicar os inputs, em contraste com o caso de memórias simples apresentado por mapas lineares.

Inicialmente, notemos que um mapa linear $f(x) = x$ tem inclinação igual a um, portanto possui um contínuo de pontos fixos. Com uma pequena não-linearidade $r > 0$ o mapa passa a ter apenas um ponto fixo na origem, e as iterações evoluem muito próximas à linha de 45° , permitindo que qualquer valor seja memorizado pela influência dos inputs. Como o termo não-linear é quadrático, seu efeito é muito reduzido para r pequeno, e torna-se significativo somente para grandes valores de x , da ordem de 10^5 ou maiores. Aumentar a não-linearidade faz com que a variável de curvatura anule-se, já que os mapas passam a sincronizar em fase, apresentando o mesmo valor de x para todos os sítios. Este efeito começa a aparecer a partir da extremidade livre da rede.

[3,4[[7,8[[11,12[[15,16[
[2,3[[6,7[[10,11[[14,15[
[1,2[[5,6[[9,10[[13,14[
[0,1[[4,5[[8,9[[12,13[

FIG. 30. Matriz gráfica para codificação de símbolos, onde cada célula está relacionada a um intervalo indicado para a variável de curvatura

Vamos considerar um exemplo específico para ver porque múltiplas memórias de curto período são encontradas no caso fracamente não-linear. Começamos por escrever a variável de curvatura para o mapa quadrático como:

$$c_n^{(i)} = k \left\{ x_n^{(i-1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i+1)} + r \left[(x_n^{(i-1)})^2 - 2(x_n^{(i)})^2 + (x_n^{(i+1)})^2 \right] \right\}. \quad (75)$$

Nós consideraremos uma pequena rede com ($N = 6$) sítios. No caso linear ($r = 0$), nós teremos a sequência de valores estacionários para as variáveis de estado: $x^{(2)} = -11000$, $x^{(3)} =$

-15000 , $x^{(4)} = -18000$, $x^{(5)} = -20000$. Substituindo estes valores na equação (75) nós podemos obter as seguintes memórias $c^{(3)} = c^{(4)} = 10$. Se adicionarmos uma pequena não-linearidade ($r = 10^{-8}$) são obtidos diferentes valores estacionários (após iterarmos 4 bilhões de vezes!): $x^{(2)} = -9472$, $x^{(3)} = -12709$, $x^{(4)} = -15047$, $x^{(5)} = -16583$. Usando (VI), teremos duas memórias diferentes: $c^{(3)} = 9.05$ and $c^{(4)} = 8.11$.

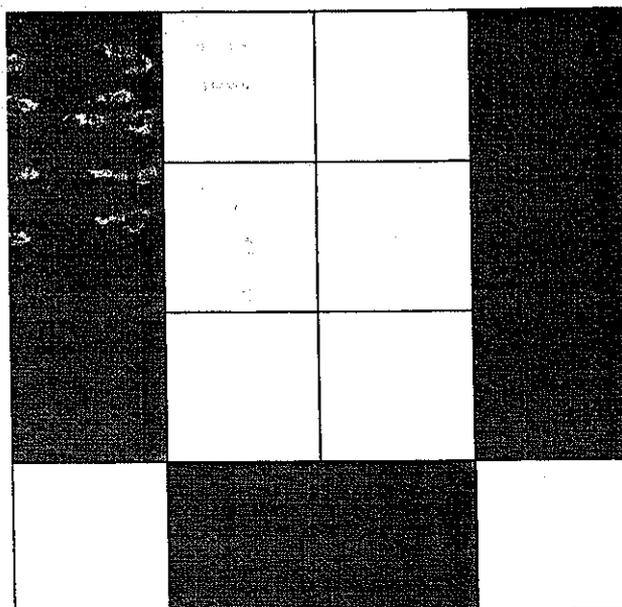


FIG. 31. Codificação da letra "V" usando a matriz da figura precedente, e uma rede de mapas acoplados com $n = 18$, $r = 10^{-7}$, $A = 10$ e as mesmas condições iniciais e de contorno

Esta propriedade sugere o uso de mapas não-lineares acoplados para armazenar informações mais complexas. Usamos uma sequência de células num mostrador (Fig. VI), onde nós atribuímos a cada uma das dezesseis células um dado intervalo para a variável de curvatura, e superpomos todos os mostradores (o que requer uma rede com $N = 18$ sítios). Cada sítio é associado a um mostrador como o da figura VI. Para uma rede, nós superpomos N mostradores, obtendo um único padrão. Usando este código simples, podemos por exemplo armazenar a letra "V" a partir de uma sequência previamente determinada de memórias permanentes para a curvatura (Figura VI).

No entanto, de maneira a garantir a efetividade de nossa rede de mapas acoplados como um instrumento de armazenagem de memórias, temos de atribuir uma dada regra para obter o padrão desejado de memórias permanentes. Isto implica em usar a intensidade de acoplamento k ou a amplitude dos pulsos externos A como parâmetros variáveis, para escrever uma regra de aprendizagem que possa produzir alguma sequência de valores para a curvatura, e portanto um símbolo codificado em nosso mostrador gráfico 4x4.

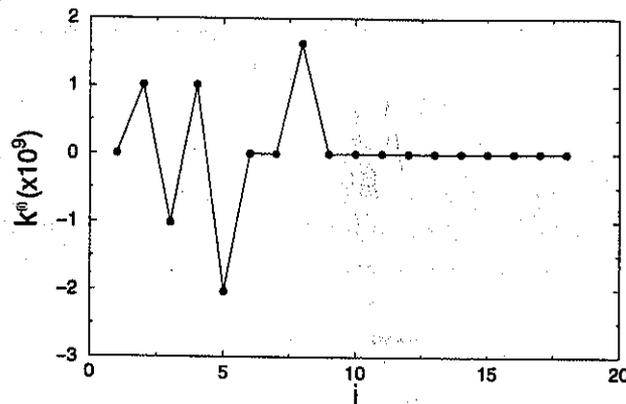


FIG. 32. Comportamento da constante de acoplamento k para a obtenção do padrão-alvo memorizado mostrado na Figura VI. Este padrão é estável até 7×10^6 iterações da rede de mapas acoplados.

Seja $\{C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \dots, C_n^{(16)}\}$ uma dada configuração desejada para a variável de curvatura, que será a configuração de memória que desejamos atingir; em outras palavras, nosso padrão-alvo. Nós pressupomos que, dado um padrão inicial arbitrário, possamos dirigir as variáveis de curvatura para seus valores-alvo, fazendo ajustes nas constantes de acoplamento $k_n^{(i)}$ ou nas amplitudes $A_n^{(i)}$ para cada sítio e para cada instante de tempo.

Usando a rede de mapas acoplados da Eq. (73) e o mapa fracamente não-linear $x + rx^2$ uma possível regra de aprendizagem é obtida usando uma forma modificada da Eq. (VI), onde $C_n^{(i)} \rightarrow C_n^{(i)}$, e nós permitimos que a constante de acoplamento seja variada para cada sítio e em cada instante: $k \rightarrow k_n^{(i)}$.

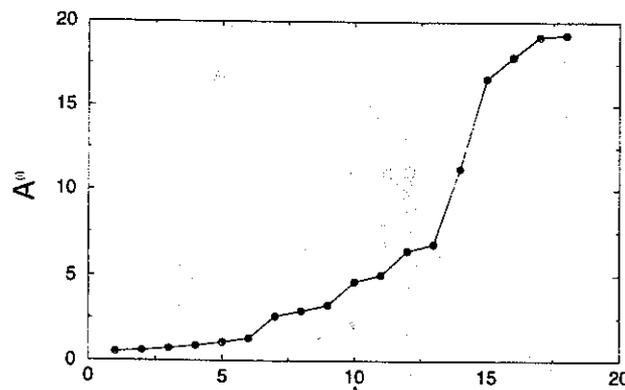


FIG. 33. Comportamento da amplitude A para a obtenção do padrão-alvo memorizado mostrado na Figura VI. Este padrão é estável até 7×10^6 iterações da rede de mapas acoplados.

Como um exemplo, consideremos o padrão mostrado na figura VI. Ele pode ser representado pelo padrão-alvo seguinte (note que esta escolha não é única, já que nós fizemos um particionamento do tipo "grão-grosso" do intervalo $[0, 16]$) para uma rede com $N = 18$ sítios:

$$\begin{aligned}
 C_n^{(i)} = 1.5 \quad (1 \leq i \leq 6), \quad C_n^{(i)} = 2.5 \quad (7 \leq i \leq 9), \quad C_n^{(10)} = C_n^{(11)} = 3.5, \\
 C_n^{(12)} = C_n^{(13)} = 4.5 \quad C_n^{(14)} = 8.5 \quad C_n^{(15)} = 13.5 \quad C_n^{(16)} = 14.5 \quad C_n^{(17)} = C_n^{(18)} = 15.5.
 \end{aligned}
 \tag{76}$$

A sequência dos $k_n^{(i)}$ configura um tipo de lei de controle para as intensidades de acoplamento na rede, que as dirige para um padrão estacionário como o mostrado na figura VI. Este procedimento é possível apenas para valores não-nulos de $C_n^{(i)}$. No entanto, as constantes de acoplamento não são, na prática, parâmetros cuja mudança seja simples.

Ao invés de variar k , podemos optar por mudar as amplitudes A_n , o que também fornece um meio de dirigir as curvaturas para o padrão-alvo, e também nos permite obter uma expressão analítica para a lei de controle correspondente, como no caso anterior. Usando este esquema de controle para o mesmo padrão-alvo da figura VI, obtemos um perfil na rede para as amplitudes que é mostrado na figura VI. Observe que cada sítio recebe um pulso externo diferente, de acordo com qual seja o padrão-alvo.

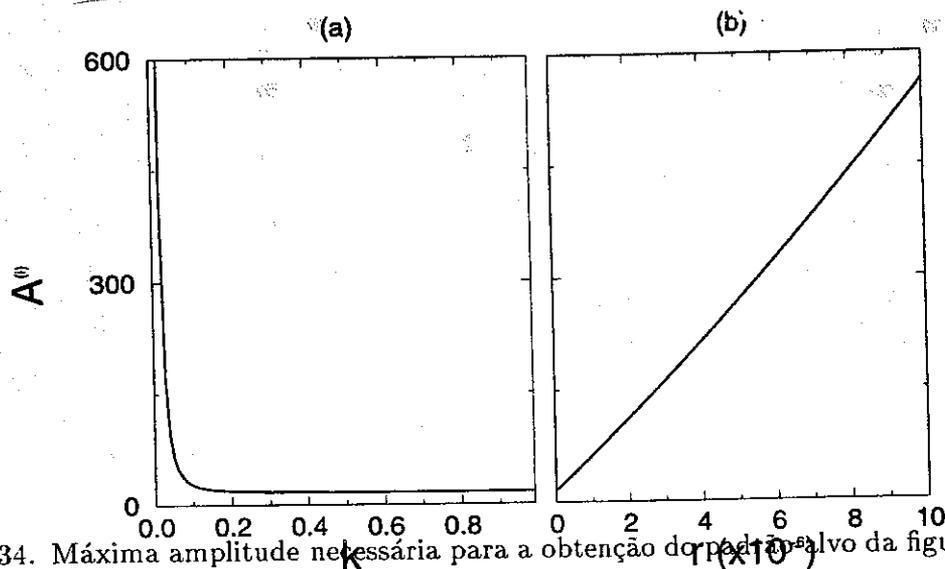


FIG. 34. Máxima amplitude necessária para a obtenção do padrão-alvo da figura VI, como função da (a) constante de acoplamento k , e (b) parâmetro de não-linearidade r .

O máximo valor da amplitude dos pulsos externos que são necessários de forma a obter um dado padrão-alvo depende tanto da intensidade de acoplamento k como do parâmetro de não-linearidade r . Na figura VI nós ilustramos ambos os casos. Observa-se que A_{max} decresce como o inverso do quadrado da intensidade de acoplamento. Isto ocorre pois, para acoplamento fraco, amplitudes maiores são necessárias para obter o mesmo padrão-alvo, em comparação com uma situação onde o acoplamento é mais intenso, porém as amplitudes são menores. Em casos intermediários, o padrão estacionário para as amplitudes é determinado pela competição entre a difusão na rede causada pelo acoplamento e as perturbações externas.

REFERENCES

- [1] J. P. Crutchfield and K. Kaneko: "Phenomenology of Spatio-Temporal Chaos", in "Directions in Chaos" (Ed. Hao Bai-lin), Vol. 1 (World Scientific, Singapore, 1987);
- [2] K. Kaneko, *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems* (World Scientific, Singapore, 1986);
- [3] Special issue of CHAOS in Coupled Map Lattices **2** (1990);
- [4] K. Kaneko (editor): "Theory and applications of coupled map lattices" (Wiley, Chichester, 1993)
- [5] T. Shinbrot, Synchronization of coupled maps and stable windows, *Physical Review E* **50**, 3230-3233 (1994).
- [6] J. L. Rogers and L. T. Wille: "Phase transitions in nonlinear oscillator chains", *Phys. Rev. E* **54** (1996) R2193-R2196;
- [7] R. L. Viana and A. M. Batista: Synchronization of Coupled Kicked Limit Cycle Systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, **9** (1998) 1931-1944.
- [8] A. Lichtenberg e M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer Verlag, Berlin, 1996);
- [9] E. J. Ding, Analytical treatment of a driven oscillator with a limit cycle, *Physical Review A* **35**, 2669-2683 (1987); E. J. Ding, Structure of the parameter space for a prototype nonlinear oscillator, *Physical Review A* **36**, 1488 (1987).
- [10] K. Ullmann and I. L. Caldas, Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system, *Chaos, Solitons and Fractals* **7**, 1913-1921 (1996).
- [11] E. Ott: "Chaos in Dynamical Systems" (Cambridge University Press, Cambridge, 1993);
- [12] A. M. Batista: "Mapas Acoplados na Rede", Monografia de Qualificação para Doutorado, Universidade Federal do Paraná (2000);
- [13] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: "Numerical Recipes in Fortran" (Cambridge University Press, 1992);
- [14] S. H. Strogatz and I. Stewart, *Scientific American* **269**, 102 (1993).
- [15] K. Wiesenfeld and P. Hadley, Attractor crowding in oscillator arrays, *Physical Review Letters* **62**, 1335-1338 (1989).
- [16] A. S. Pikowsky, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov e J. Kurths: *Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving*, *Physica D* **104**, 219-238 (1997).
- [17] Y. Kuramoto: "Chemical oscillations, waves, and turbulence" (Springer Verlag, Berlin, 1984);
- [18] S. E. de Souza Pinto, R. L. Viana: "Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps". submetido a *Physical Review E* (2000);
- [19] H. Gutfreund. *Physica A* **163** (1990) 373-385.
- [20] H. Nozawa, *Chaos* **2** (1992) 377-386.
- [21] S. N. Coppersmith, T. C. Jones, L. P. Kadanoff, A. Levine, J. P. McCarten, S. R. Nagel, S. C. Venkataramani, X. Wu; *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 3983-3986.
- [22] A. M. Batista, R. L. Viana, S. R. Lopes: "Multiple short-term memories in coupled weakly nonlinear map lattices", aceito para publicação no *Physical Review E* (2000).

