

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA
NUCLEAR**

INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**DESCRIÇÃO CLÁSSICA DO ESPALHAMENTO
ENTRE DUAS PARTÍCULAS**

Kasuo Ueta

Publicação IFUSP - 1618/2006

Texto elaborado para alunos de
iniciação científica do Departamento
de Física Nuclear do IFUSP - junho
de 2005.

**DESCRIÇÃO CLÁSSICA DO ESPALHAMENTO ENTRE
DUAS PARTÍCULAS**

Kasuo Ueta

*Texto elaborado para alunos de
iniciação científica do Departamento
de Física Nuclear do IFUSP – junho
de 2005.*

DESCRIÇÃO CLÁSSICA DO ESPALHAMENTO ENTRE DUAS PARTÍCULAS

Cinemática do espalhamento elástico. Consideremos duas partículas, 1 e 2, que colidem uma com a outra passando de um estado inicial, em que cada partícula realiza um movimento livre, para um estado final, no qual o movimento das partículas é novamente livre. Se, no final do processo, os estados internos das partículas são os mesmos que no início, a colisão é um *espalhamento elástico*. O nosso objetivo é descrever esse espalhamento, que é univocamente determinado quando são dadas as direções de movimento e as energias das partículas no estado inicial, bem como a forma da interação entre elas. Algumas propriedades da colisão são, no entanto, independentes do particular tipo de interação envolvido e decorrem das leis gerais de conservação da energia e do momento linear. Tais propriedades constituem as *relações cinemáticas*. Embora não forneçam a descrição completa do espalhamento, essas relações contêm informações importantes, como veremos a seguir.

Os sistemas de referência de centro de massa e de laboratório. O sistema de referência ligado ao laboratório onde é feita a experiência de espalhamento é denominado *sistema de laboratório* e indicado com SL. Vamos indicar com v_1 e v_2 as velocidades de 1 e 2 com respeito ao SL; as velocidades iniciais são v_{1i} e v_{2i} , enquanto que v_{1f} e v_{2f} são as finais:

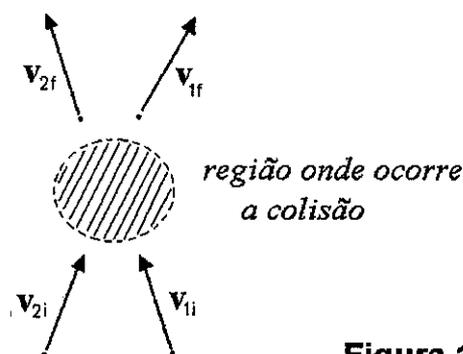


Figura 1

Embora a experiência seja feita no SL, é mais cômodo descrever o espalhamento num sistema de referência no qual o centro de massa das duas partículas está em repouso – o *sistema de centro de massa* (SCM). Esse sistema realiza um movimento de translação uniforme em relação ao SL, com uma velocidade V , igual à do CM :

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \text{constante} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{M}, \quad (1)$$

m_1 e m_2 sendo as massas de 1 e 2 e $M = m_1 + m_2$ a massa total do sistema. No SCM, as velocidades são indicadas com \mathbf{v}_1^* e \mathbf{v}_2^* , sendo \mathbf{v}_{1i}^* e \mathbf{v}_{2i}^* as velocidades iniciais e \mathbf{v}_{1f}^* e \mathbf{v}_{2f}^* as velocidades finais.

Expressão das velocidades no SCM em termos das velocidades no SL. Como o SCM translada-se com uma velocidade \mathbf{V} em relação ao SL, a velocidade de uma partícula em relação ao SCM é igual a sua velocidade em relação ao SL subtraída de \mathbf{V} :

$$\mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} \quad , \quad \mathbf{v}_2^* = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V} \quad . \quad (2)$$

Substituindo \mathbf{V} pelo segundo membro da primeira igualdade de (1), vamos obter

$$\mathbf{v}_1^* = \frac{m_2}{M} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad , \quad \mathbf{v}_2^* = -\frac{m_1}{M} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad . \quad (3)$$

Introduzindo a velocidade de 1 com respeito a 2,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad , \quad (4)$$

podemos escrever

$$\mathbf{v}_1^* = \frac{m_2}{M} \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v}_2^* = -\frac{m_1}{M} \mathbf{v} \quad . \quad (5)$$

Em particular, para as velocidades iniciais, temos

$$\mathbf{v}_{1i}^* = \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_i \quad , \quad \mathbf{v}_{2i}^* = -\frac{m_1}{M} \mathbf{v}_i \quad , \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i} \quad . \quad (6)$$

Relações cinemáticas no SCM. Nesse sistema de referência, os momentos lineares iniciais e finais são

$$\mathbf{p}_{1i}^* = m_1 \mathbf{v}_{1i}^* \quad , \quad \mathbf{p}_{2i}^* = m_2 \mathbf{v}_{2i}^* \quad , \quad \mathbf{p}_{1f}^* = m_1 \mathbf{v}_{1f}^* \quad , \quad \mathbf{p}_{2f}^* = m_2 \mathbf{v}_{2f}^* \quad . \quad (7)$$

Como o momento linear total é constante, e vale zero no SCM, temos

$$\mathbf{p}_{1i}^* + \mathbf{p}_{2i}^* = \mathbf{p}_{1f}^* + \mathbf{p}_{2f}^* = 0 \quad (8)$$

e, então,

$$\mathbf{p}_{2i}^* = -\mathbf{p}_{1i}^* \quad , \quad \mathbf{p}_{2f}^* = -\mathbf{p}_{1f}^* \quad . \quad (9)$$

Portanto, os momentos individuais são opostos como mostrado na figura seguinte:

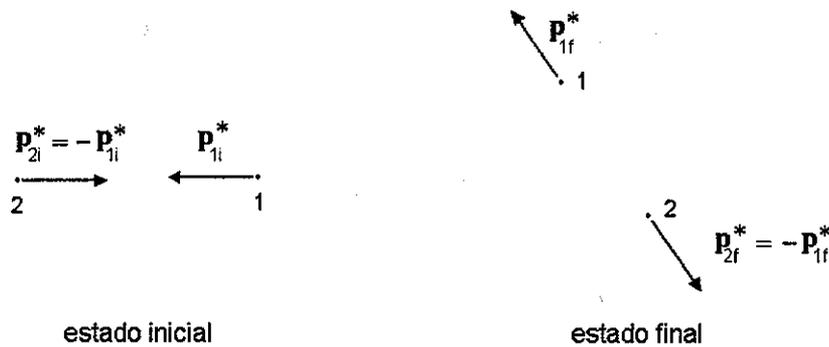


Figura 2

Vejam agora que informação se obtém da conservação da energia. Nos estados inicial e final, a energia total é dada pela soma das energias cinéticas das partículas acrescida das energias internas. Como estas são as mesmas antes e depois da colisão, a conservação da energia acaba sendo a da energia cinética total:

$$\frac{p_{1i}^{*2}}{2m_1} + \frac{p_{2i}^{*2}}{2m_2} = \frac{p_{1f}^{*2}}{2m_1} + \frac{p_{2f}^{*2}}{2m_2} \quad (10)$$

Utilizando as relações (9) em (10), concluímos então que

$$p_{1f}^* = p_{1i}^* \quad , \quad p_{2f}^* = p_{2i}^* \quad (11)$$

Isso significa que, no SCM, o momento linear de cada partícula tem, após o espalhamento, a mesma magnitude que no estado inicial. Podemos dizer que, vista no SCM, a colisão gira as velocidades de tal modo que elas permanecem sempre opostas e possuem, no final do processo, as mesmas magnitudes que no início:

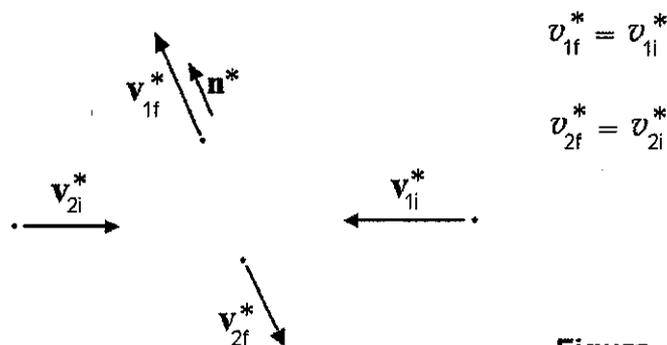


Figura 3

Na figura, mostramos também o vetor unitário \mathbf{n}^* que tem a direção de \mathbf{v}_{1f}^* . Em termos dele, podemos escrever

$$\mathbf{v}_{1f}^* = v_{1i}^* \mathbf{n}^* \quad , \quad \mathbf{v}_{2f}^* = -v_{2i}^* \mathbf{n}^* \quad . \quad (12)$$

Essas expressões, mais a primeira das relações (8) escrita na forma

$$m_1 \mathbf{v}_{1i}^* + m_2 \mathbf{v}_{2i}^* = 0 \quad , \quad (13)$$

constituem as relações cinemáticas no SCM. As equações (12) representam as velocidades finais numa forma que incorpora o fato de terem elas a mesma magnitude que as velocidades iniciais correspondentes e de serem opostas uma da outra. Quanto à direção dessas velocidades, ou seja, a do vetor \mathbf{n}^* , não é possível determiná-la considerando apenas a conservação do momento linear e da energia. A direção efetivamente observada depende não apenas das velocidades iniciais \mathbf{v}_{1i}^* e \mathbf{v}_{2i}^* (que fixam a energia e o momento linear do sistema), mas também do posicionamento inicial, mais próximo ou mais distante, de cada uma das partículas em relação à “linha de tiro” da outra, detalhe esse que determina o grau de aproximação entre as partículas durante a colisão – por exemplo, se elas colidem frontalmente ou “de raspão” – propiciando uma maior ou menor interação entre elas. Por isso, se especificamos apenas as velocidades iniciais, como acontece em experimentos envolvendo partículas microscópicas, qualquer direção é admissível, em princípio, para \mathbf{n}^* . Velocidades hipotéticas compatíveis com a conservação do momento linear e da energia serão ditas cinematicamente admissíveis ou, simplesmente, admissíveis. Nem todas as velocidades finais admissíveis vão realmente ocorrer ; pode acontecer que determinadas direções de movimento não sejam acessíveis dependendo do tipo de interação entre as partículas.

Relações cinemáticas no SL. Considerando as relações

$$\mathbf{v}_{1f} = \mathbf{v}_{1f}^* + \mathbf{V} \quad , \quad \mathbf{v}_{2f} = \mathbf{v}_{2f}^* + \mathbf{V} \quad , \quad (14)$$

que decorrem de (2), podemos estabelecer as relações cinemáticas no SL a partir da cinemática no SCM. Isso pode ser feito graficamente, como mostramos a seguir. Vimos que, no SCM, as velocidades finais das duas partículas são opostas uma da outra, tem magnitudes que independem da direção,

$$v_{1f}^* = v_{1i}^* = \frac{m_2}{M} v_i \quad , \quad v_{2f}^* = v_{2i}^* = \frac{m_1}{M} v_i \quad , \quad v_i = |\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}| \quad , \quad (15)$$

e, em princípio, qualquer direção é admissível para elas. Portanto, as velocidades finais admissíveis no SCM são quaisquer dois vetores opostos, traçados a partir da extremidade do vetor \mathbf{V} , um (\mathbf{v}_{1f}^*) tendo a extremidade sobre a superfície esférica de raio $(m_2/M)v_i$ e o outro (\mathbf{v}_{2f}^*) sobre a de raio $(m_1/M)v_i$, ambas as superfícies sendo centradas no extremo de \mathbf{V} . Desse fato e das relações (14), decorre então que as velocidades finais admissíveis no SL são quaisquer dois vetores traçados do início de \mathbf{V} a pontos diametralmente opostos situados um em cada uma das superfícies esféricas mencionadas, como ilustrado na figura seguinte:

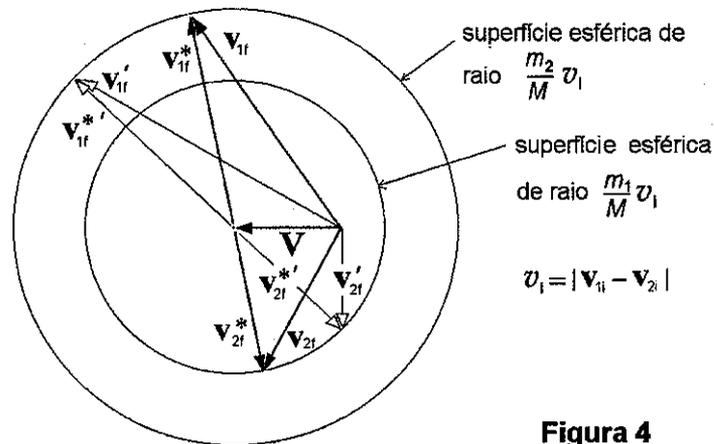


Figura 4

Essa figura ocorre quando as velocidades iniciais e as massas das partículas são tais que $V < (m_1/M)v_1 < (m_2/M)v_1$. Vemos que, nesse caso, qualquer direção é admissível para as velocidades finais no SL. Se tivéssemos $(m_1/M)v_1 < V < (m_2/M)v_1$, o início do vetor \mathbf{V} estaria entre as duas superfícies esféricas e não ocorreriam velocidades \mathbf{v}_{2f} para fora de um cone de eixo \mathbf{V} , vértice no início desse vetor e geratriz tangente à superfície esférica de raio $(m_1/M)v_1$. A colisão no SL tem, assim, características geométricas distintas, dependendo de como são as velocidades iniciais e as massas das partículas envolvidas.

Daqui para diante, vamos nos restringir ao caso em que uma das partículas está em repouso antes da colisão. Essa é a situação que ocorre usualmente no laboratório onde uma partícula, que denominamos projétil, é arremessada em direção a uma partícula-alvo que se encontra em repouso. Indicando o projétil com 1 e o alvo com 2, temos então o seguinte estado inicial:

$$\mathbf{v}_{2i} = \mathbf{0} \quad \leftarrow \mathbf{v}_{1i}$$

Figura 5

Vejamos como fica o diagrama de velocidades. A expressão da velocidade do centro de massa e a da velocidade relativa inicial reduzem-se a

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{1i} \quad , \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{1i} \quad (16)$$

e, portanto, as velocidades iniciais das partículas no SCM são dadas por

$$\mathbf{v}_{1i}^* = \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_{1i} \quad , \quad \mathbf{v}_{2i}^* = -\frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{1i} = -\mathbf{V} \quad . \quad (17)$$

Temos então $v_{1f}^*/v_{2f}^* = v_{1i}^*/v_{2i}^* = m_2/m_1$ e $V = v_{2i}^* = v_{2f}^*$. Isso significa que, no diagrama de velocidades, a superfície esférica das velocidades \mathbf{v}_{1f}^* é externa ou interna à das velocidades \mathbf{v}_{2f}^* conforme seja m_1 menor ou maior do que m_2 , e o início do vetor \mathbf{V} está situado precisamente sobre a superfície das velocidades \mathbf{v}_{2f}^* :

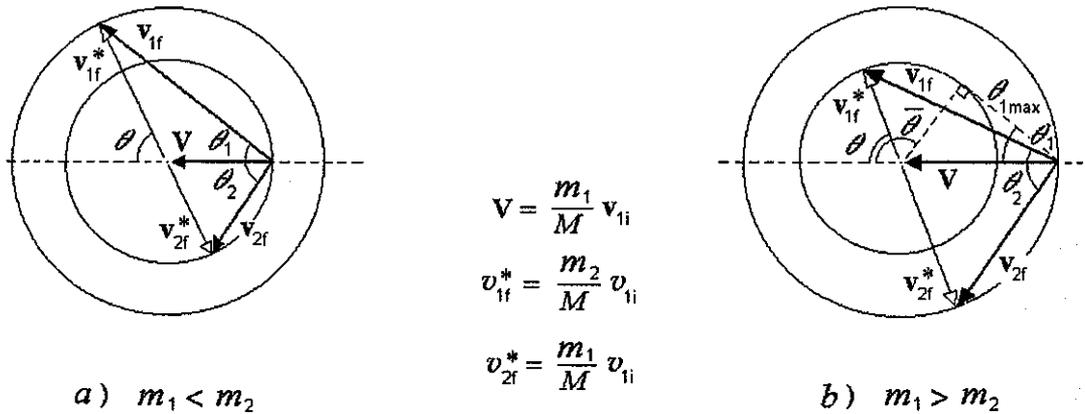


Figura 6

Quando $m_1 = m_2$, as duas superfícies esféricas se degeneram numa só e temos a figura seguinte:

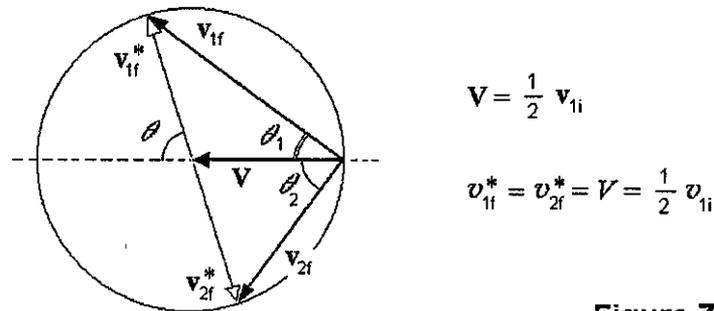


Figura 7

Como a direção de \mathbf{V} é também a das velocidades iniciais \mathbf{v}_{1i}^* e \mathbf{v}_{1i} , os ângulos θ e θ_1 mostrados nas figuras são os ângulos que descrevem, respectivamente no SCM e no SL, o desvio sofrido pelo projétil na colisão. Cada um desses ângulos é, assim, o ângulo de espalhamento do projétil, um referente ao SCM e o outro ao SL. O ângulo θ_2 , por sua vez, é o ângulo de espalhamento da partícula-alvo no SL – ele especifica a direção em que recua a partícula 2 no SL, relativamente à direção de incidência da partícula 1 (no SCM, o ângulo de espalhamento da partícula 2 é evidentemente o próprio ângulo θ , se medido em relação à

direção da sua velocidade inicial). É costume chamar o ângulo de espalhamento da partícula-alvo no SL de *ângulo de recuo* e o do projétil (seja no SCM ou no SL) simplesmente de *ângulo de espalhamento*. Ângulos de espalhamento menores que $\pi/2$ são ditos ângulos dianteiros e, maiores que $\pi/2$, traseiros. **Observação:** no que segue, quando usarmos o termo espalhamento sem especificar de qual partícula se trata, estará subentendido o da partícula incidente.

Os valores admissíveis para o ângulo de espalhamento no SCM são todos os valores do intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, pois, como vimos, o espalhamento no SCM pode ser em qualquer direção. O ângulo $\theta = 0$ ocorre quando a partícula 1 “passa ao largo” sem colidir com a partícula 2, mas há situações em que ela pode emergir na direção frontal mesmo que haja interação com a partícula alvo; $\theta = \pi$ corresponde a uma colisão com reversão total da direção de movimento de cada uma das partículas no SCM, o que acontece, por exemplo, quando duas partículas que não podem se interpenetrar colidem frontalmente.

O intervalo dos valores admissíveis para o ângulo de espalhamento no SL depende da razão entre as massas m_1 e m_2 . Da fig. 6.a, vemos que, se $m_1 < m_2$, a correspondência entre θ e θ_1 é biunívoca, o ângulo θ_1 variando de 0 a π quando θ percorre o seu intervalo. Portanto, quando $m_1 < m_2$, também no SL pode ocorrer espalhamento em qualquer direção. Mas, se $m_1 > m_2$, o ângulo de espalhamento no SL não pode superar o ângulo $\theta_{1\max}$ mostrado na fig. 6.b. Neste caso, a correspondência entre θ e θ_1 não é biunívoca, existindo dois valores distintos de θ associados ao mesmo valor de θ_1 . O ângulo θ_1 cresce inicialmente com θ até atingir o valor $\theta_{1\max}$ quando $\theta = \bar{\theta}$ e depois volta para zero à medida que θ aumenta. Portanto, quando $m_1 > m_2$, o espalhamento no SL ocorre em ângulos dianteiros (pois $\theta_{1\max} < \pi/2$), em direções que se distribuem num cone de abertura $\alpha = \theta_{1\max}$ e eixo na direção de incidência. Para completar, mostremos que o ângulo $\theta_{1\max}$ relaciona-se de um modo simples com as massas m_1 e m_2 . Vemos da fig. 6.b, que $\text{sen}\theta_{1\max} = v_{1f}^*/V$. Levando em conta que $V = v_{2f}^* = (m_1/m_2)v_{1f}^*$, obtemos então

$$\text{sen}\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1} \quad , \quad (18)$$

ou seja,

$$\theta_{1\max} = \arcsen \frac{m_2}{m_1} \quad , \quad m_1 > m_2 \quad . \quad (19)$$

Para o ângulo $\bar{\theta}$ resulta

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{2} + \theta_{1\max} = \frac{\pi}{2} + \arcsen \frac{m_2}{m_1} \quad . \quad (20)$$

Se $m_1 = m_2$, o ângulo θ_1 vale exatamente a metade do ângulo θ , percorrendo o intervalo $[0, \pi/2)$ quando θ varia no intervalo $[0, \pi)$. Para $\theta = \pi$, o ângulo θ_1 é desprovido de sentido já que, para esse valor de θ , a partícula 1 tem velocidade final nula no SL, como

resultado de uma colisão em que ela transfere toda a sua velocidade para uma partícula de mesma massa que se encontra inicialmente em repouso.

Quanto ao ângulo de recuo, vemos das figs. 6 e 7 que os valores admissíveis são todos os valores do intervalo $[0, \pi/2)$, qualquer que seja a razão das massas m_1 e m_2 . O valor é zero numa colisão em que $\theta = \pi$ e tende a $\pi/2$ quando $\theta \rightarrow 0$ [o intervalo é aberto em $\pi/2$ porque, no limite $\theta = 0$, v_{2f} é um vetor nulo, desprovido portanto de direção]. Vemos que, no SL, a velocidade final da partícula-alvo tem uma componente na direção da velocidade inicial do projétil. Isso quer dizer que o seu movimento final no SL é realmente um recuo, mesmo que a força entre as partículas seja atrativa.

A soma $\theta_1 + \theta_2$ dá o ângulo entre as direções dos movimentos de 1 e 2 no SL após a colisão. Das figuras, vemos que esse ângulo é maior que $\pi/2$, para $m_1 < m_2$, e menor que $\pi/2$, se $m_1 > m_2$. Quando $m_1 = m_2$, temos $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, isto é, as duas partículas emergem da colisão formando um ângulo reto.

Expressão de θ_1 e θ_2 em termos θ . Determinemos agora a forma precisa das relações entre θ_1 e θ e entre θ_2 e θ . De qualquer uma das figs. 6, vemos que

$$\tan\theta_1 = \frac{v_{1f}^* \operatorname{sen}\theta}{V + v_{1f}^* \cos\theta} .$$

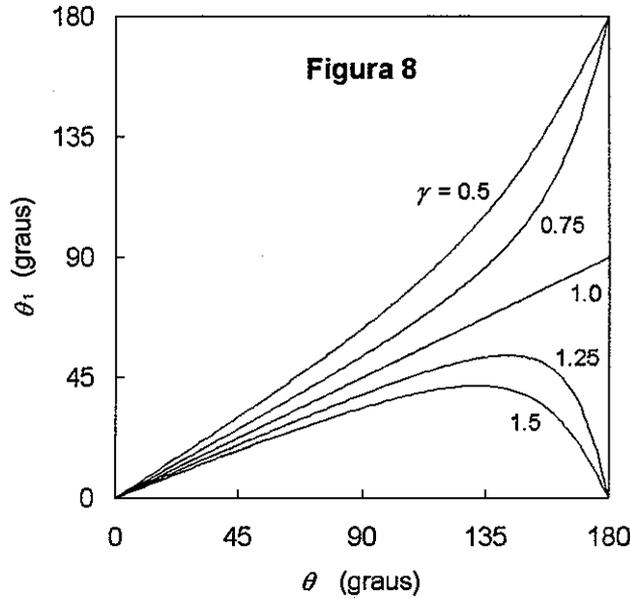
Lembrando que $V = (m_1/m_2)v_{1f}^*$, obtemos então

$$\tan\theta_1 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\theta} . \quad (21)$$

Se $m_1 < m_2$, o ângulo θ_1 varia no intervalo $[0, \pi]$ quando θ percorre o intervalo $[0, \pi]$. Se $m_1 > m_2$, θ_1 percorre o intervalo $[0, \theta_{1\max}]$, uma vez no sentido crescente e outra no sentido decrescente, em correspondência à variação $0 \rightarrow \bar{\theta} \rightarrow \pi$ do ângulo θ . Quando $m_1 = m_2$, a expressão (21) pode ser escrita como $\tan\theta_1 = \tan(\theta/2)$ e, então,

$$\theta_1 = \frac{\theta}{2} , \quad \text{se } m_1 = m_2 . \quad (22)$$

O ângulo θ_1 percorre o intervalo $[0, \pi/2)$ quando θ varia no intervalo $[0, \pi)$ e é desprovido de sentido quando $\theta = \pi$, já que, para esse valor de θ , a partícula 1 tem velocidade final nula no SL, como vimos anteriormente. Na figura seguinte, mostramos o gráfico de $\theta_1 \times \theta$ para alguns valores da razão $\gamma = m_1/m_2$:



Nota-se que as curvas correspondentes a $\gamma \neq 1$ tendem à reta $\theta_1 = \theta/2$ no intervalo $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ quando $\gamma \rightarrow 1$, como de fato se espera.

Para obter a relação entre θ_2 e θ , observamos, dos diagramas das velocidades, que $2\theta_2 + \theta = \pi$. Portanto, ela é dada simplesmente por

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \theta) \quad . \quad (23)$$

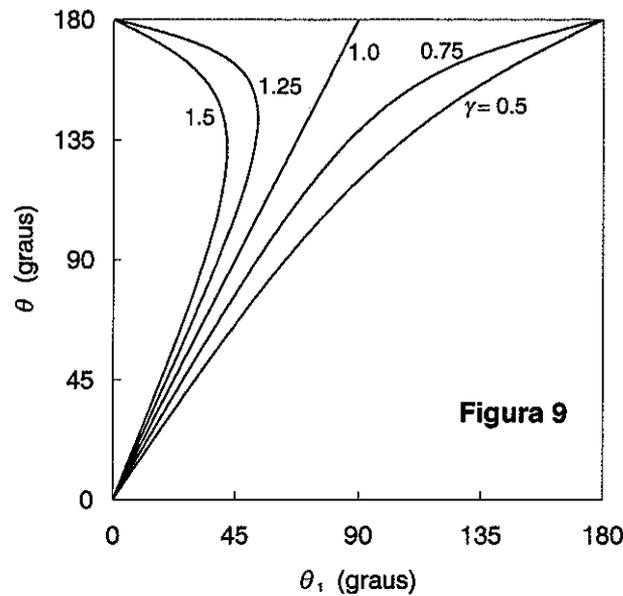
O ângulo θ_2 percorre o intervalo $[0, \pi/2)$ quando θ decresce no intervalo $(0, \pi]$, não estando definido para $\theta = 0$ porque a esse valor de θ corresponde $v_{2f} = 0$.

Expressão de θ em termos de θ_1 . A relação inversa de (21) é dada pela expressão

$$\cos \theta = -\gamma \sin^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1} \quad , \quad (24)$$

que se obtém quadrando e multiplicando por $\cos^2 \theta_1$ a eq. (21) escrita como $(\gamma + \cos \theta) \tan \theta_1 = \sin \theta$ e resolvendo a equação do 2º grau que resulta para $\cos \theta$. Quando $\gamma < 1$, sabemos que a correspondência entre θ e θ_1 é biunívoca e $\theta = 0$ quando $\theta_1 = 0$. Portanto, nesse caso, devemos escolher somente o sinal (+) em (24). Quando $\gamma > 1$, a correspondência não é biunívoca e existem dois valores de θ associados a um mesmo valor de θ_1 . Esses dois valores correspondem ao duplo sinal na expressão (24), fornecendo o sinal (+) o ramo dos valores de θ que variam de 0 a $\bar{\theta}$ quando θ_1 varia de 0 a $\theta_{1\max}$ e o sinal (-) o dos que variam de $\bar{\theta}$ a 180° quando θ_1 volta de $\theta_{1\max}$ para o valor zero. Quando $\gamma = 1$, a expressão (24) tomada com o sinal (+) resulta em $\theta = 2\theta_1$, $0 \leq \theta_1 < \pi/2$, como deve ser.

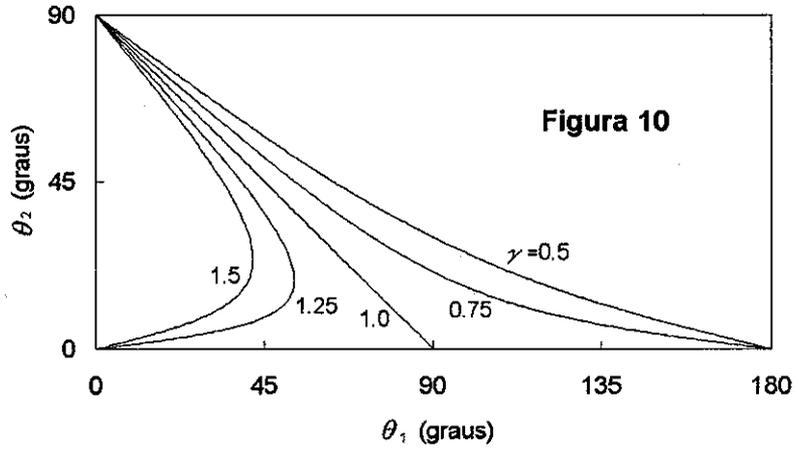
As curvas $\theta \times \theta_1$, que são as curvas $\theta_1 \times \theta$ refletidas com respeito à bissetriz do 1º quadrante (pela própria definição de função inversa), estão mostradas na figura abaixo:



Correlação entre as direções de movimento finais no SL. Os diagramas das velocidades (figuras 6 e 7) mostram que as direções de movimento finais das partículas 1 e 2 são correlacionadas, isto é, o ângulo de espalhamento da partícula 1 fixa o ângulo da direção de recuo da partícula 2 (se $m_1 > m_2$, existem, de fato, duas direções em que pode recuar a partícula 2 e, nesse caso, a correlação entre o movimento das duas partículas só se torna unívoca quando especificamos também as magnitudes das velocidades ou as energias cinéticas das partículas). Das expressões (23) e (24), vemos que o ângulo θ_2 relaciona-se com o ângulo θ_1 mediante a expressão

$$\theta_2 = \frac{1}{2} [\pi - \arccos(-\gamma \sin^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1})] \quad (25)$$

Quando $\gamma = 1$, essa expressão tomada com o sinal (+) reduz-se a $\theta_2 = (1/2)\pi - \theta_1$, $0 \leq \theta_1 < \pi/2$, como deve ser. Na fig. 10, mostramos os gráficos $\theta_2 \times \theta_1$:



Energias cinéticas finais no SL em termos do ângulo de espalhamento no SCM. Quadrando a primeira das relações (14) ou aplicando a lei dos cossenos ao triângulo formado pelos vetores \mathbf{v}_{1f} , \mathbf{v}_{1f}^* e \mathbf{V} , obtemos

$$v_{1f}^2 = v_{1f}^{*2} + V^2 + 2v_{1f}^* V \cos\theta . \quad (26)$$

Lembrando que $v_{1f}^* = (m_2/M)v_{1i}$ e $V = (m_1/M)v_{1i}$, temos então

$$v_{1f}^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\theta}{M^2} v_{1i}^2 . \quad (27)$$

Substituindo na expressão da energia cinética final da partícula 1 no SL, $E_{1f} = (1/2)m_1v_{1f}^2$, obtemos essa energia escrita em termos do ângulo de espalhamento no SCM:

$$E_{1f} = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\theta}{M^2} E_{1i} , \quad (28)$$

onde

$$E_{1i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \quad (29)$$

é a energia cinética inicial da partícula 1 no SL. Vemos que E_{1f} é máxima, e igual a E_{1i} , para $\theta = 0$, e mínima, numa colisão em que $\theta = \pi$, quando o seu valor é $[(m_1 - m_2)^2 / M^2] E_{1i}$. Para obter a expressão da energia cinética final da partícula 2, E_{2f} , em função de θ , observamos que o triângulo formado pelos vetores \mathbf{v}_{2f} , \mathbf{v}_{2f}^* e \mathbf{V} é isósceles e, então, $v_{2f} = 2v_{2f}^* \sin(\theta/2)$. Sendo $v_{2f}^* = (m_1/M)v_{1i}$, temos então

$$v_{2f} = 2 \frac{m_1}{M} v_{1i} \sin \frac{\theta}{2} \quad (30)$$

e substituindo na expressão $E_{2f} = (1/2)m_2 v_{2f}^2$, obtemos finalmente

$$E_{2f} = \frac{4m_1 m_2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} E_{1i} \quad (31)$$

Como a partícula 2 encontra-se inicialmente em repouso, a sua energia cinética final é a energia adquirida na colisão. A expressão (31) mostra que o máximo valor da energia adquirida é

$$(E_{2f})_{\max} = \frac{4m_1 m_2}{M^2} E_{1i} \quad (32)$$

e ocorre quando $\theta = \pi$. Podemos constatar que a energia adquirida pela partícula 2 é, como se espera, igual a energia perdida pela partícula 1, isto é, $E_{2f} = Q = E_{1i} - E_{1f}$. De fato, utilizando a expressão (28), temos

$$Q = E_{1i} - \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta}{M^2} E_{1i} = \frac{2m_1 m_2 (1 - \cos\theta)}{M^2} E_{1i} = \frac{4m_1 m_2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} E_{1i} = E_{2f} \quad .$$

Expressão das energias cinéticas finais em função das direções de movimento no SL. No ítem precedente, exprimimos as energias cinéticas finais no SL em termos do ângulo de espalhamento no SCM. Vamos agora exprimir essas energias em função das direções de movimento finais no SL, isto é, E_{1f} em termos de θ_1 e E_{2f} em termos de θ_2 . Para isso, determinemos antes as expressões correspondentes para as velocidades finais. Quadrando a relação $\mathbf{v}_{1f}^* = \mathbf{v}_{1f} - \mathbf{V}$, ou aplicando a lei dos cossenos ao triângulo de lados \mathbf{v}_{1f}^* , \mathbf{v}_{1f} e \mathbf{V} , temos

$$v_{1f}^{*2} = v_{1f}^2 + V^2 - 2 v_{1f} V \cos\theta_1 \quad ,$$

isto é,

$$\frac{m_2^2}{M^2} v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + \frac{m_1^2}{M^2} v_{1i}^2 - 2 v_{1f} \frac{m_1}{M} v_{1i} \cos\theta_1$$

ou ainda

$$\left(\frac{v_{1f}}{v_{1i}} \right)^2 - 2 \frac{m_1}{M} \cos\theta_1 \left(\frac{v_{1f}}{v_{1i}} \right) + \frac{m_1^2 - m_2^2}{M^2} = 0 \quad . \quad (33)$$

Resolvendo essa equação do segundo grau em v_{1f}/v_{1i} , vamos chegar à seguinte expressão para a velocidade final da partícula 1:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1}{M} \cos\theta_1 \pm \frac{1}{M} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2\theta_1} \right) v_{1i} \quad . \quad (34)$$

Se $m_1 < m_2$, temos $\sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1} > \sqrt{m_1^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1} = m_1 |\cos \theta_1|$ e, portanto, devemos escolher o sinal (+) em (34). A correspondência entre θ_1 e v_{1f} é biunívoca, o ângulo θ_1 podendo variar em todo o intervalo $[0, \pi]$. Temos $v_{1f}(0) = v_{1i}$ (como se espera, pois, nesse caso, $v_{2f} = 0$) e $v_{1f}(\pi) = (m_2/M - m_1/M)v_{1i}$, valores esses respectivamente iguais a $v_{1f}^* + V$ e $v_{1f}^* - V$, como devem ser. Se $m_1 > m_2$, o ângulo θ_1 só pode tomar valores para os quais estejam satisfeitas as condições $m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1 \geq 0$ e $v_{1f} \geq 0$. A primeira condição é observada nas regiões $0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1\max}$ e $\pi - \theta_{1\max} \leq \theta_1 \leq \pi$, mas só na primeira delas está satisfeita a segunda condição, uma vez que temos agora $\sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1} < \sqrt{m_1^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1} = m_1 |\cos \theta_1|$ e $\cos \theta_1 < 0$, para $\pi - \theta_{1\max} \leq \theta_1 \leq \pi$. Vemos assim que, se $m_1 > m_2$, o espalhamento só pode ocorrer nos ângulos θ_1 tais que $0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1\max}$, como já sabíamos. Mas, vale agora o duplo sinal em (34), o ramo com sinal (+) sendo o dos valores de v_{1f} que variam de v_{1i} a $\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)/M^2} v_{1i}$ ($= \sqrt{V^2 - v_{1f}^{*2}}$) quando θ_1 cresce de 0 a $\theta_{1\max}$, enquanto que o ramo associado ao sinal (-) varia de $\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)/M^2} v_{1i}$ a $(m_1/M - m_2/M)v_{1i}$ ($= V - v_{1f}^*$) quando θ_1 volta de $\theta_{1\max}$ para 0. Se $m_1 = m_2$, a relação entre v_{1f} e θ_1 é obtida de um modo direto da fig. 7, que fornece $v_{1f} = 2V \cos \theta_1$, isto é,

$$v_{1f} = v_{1i} \cos \theta_1, \quad 0 \leq \theta_1 < \pi/2, \quad \text{se } m_1 = m_2. \quad (35)$$

As expressões para a energia cinética final da partícula 1 no SL são obtidas substituindo (34) e (35) na expressão $E_{1f} = (1/2)m_1 v_{1f}^2$, o que resulta em

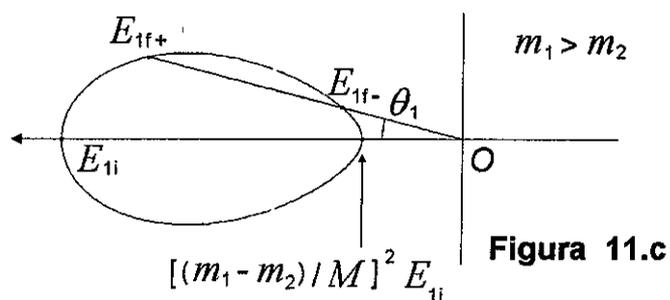
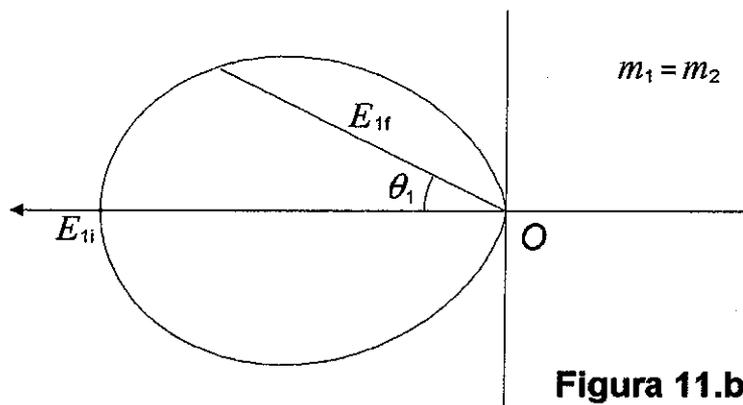
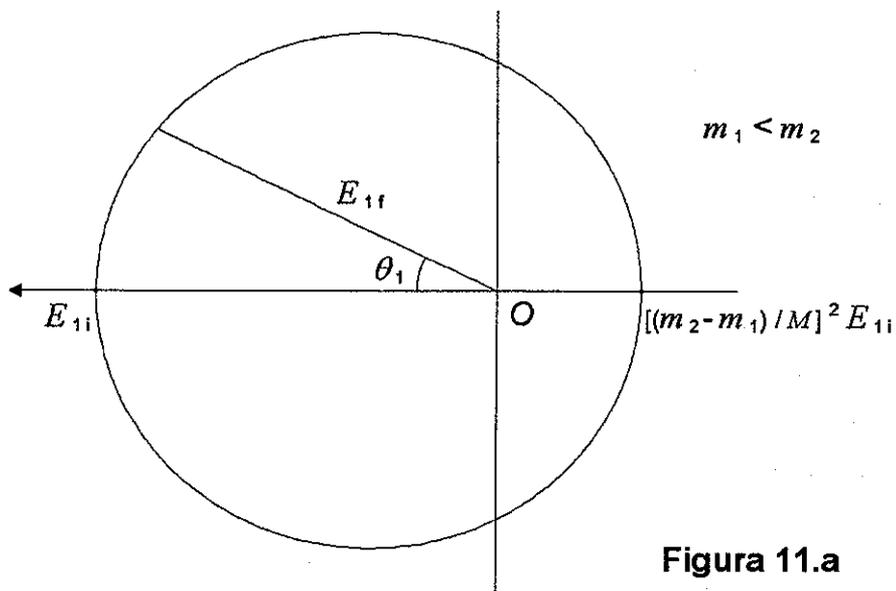
$$E_{1f} = \begin{cases} \left(\frac{m_1}{M} \cos \theta_1 + \frac{1}{M} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1} \right)^2 E_{1i}, & 0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad \text{se } m_1 < m_2, \\ \cos^2 \theta_1 E_{1i}, & 0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \text{se } m_1 = m_2, \\ \left(\frac{m_1}{M} \cos \theta_1 \pm \frac{1}{M} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1} \right)^2 E_{1i}, & 0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1\max}, \quad \text{se } m_1 > m_2. \end{cases} \quad (36)$$

Para a expressão de E_{2f} em termos de θ_2 , obtemos

$$E_{2f} = \frac{4m_1 m_2}{M^2} \cos^2 \theta_2 E_{1i}, \quad (37)$$

após substituirmos $\theta = \pi - 2\theta_2$ em (31). Vemos que, se $m_1 = m_2$, a energia final da partícula-alvo numa colisão em que ela recua numa direção χ é igual à energia final do projétil numa

colisão em que este é espalhado desse ângulo χ , a energia de incidência sendo a mesma nos dois casos. Nas figuras seguintes mostramos o gráfico polar de $E_{1f} \times \theta_1$:



Nas figuras, o eixo polar foi tomado na direção do movimento da partícula incidente. As

energias cinéticas E_{1f+} e E_{1f-} na fig. 11.c referem-se ao duplo sinal do caso $m_1 > m_2$ na expressão (36). O gráfico polar de $E_{2f} \times \theta_2$ é semelhante ao da fig. 11.b .

Determinação do ângulo de espalhamento. No ítem anterior, vimos que é possível obter informações importantes sobre a colisão entre duas partículas utilizando a conservação do momento linear e a conservação da energia. Para completar a descrição da colisão, falta relacionar o ângulo de espalhamento com as direções de movimento e as energias das partículas no estado inicial, o que requer a introdução da forma específica da interação entre as duas partículas. Vamos nos restringir à interação mais simples para a qual o espalhamento é elástico – a que não envolve os graus de liberdade internos das partículas.

Na figura abaixo, mostramos novamente o estado inicial de uma colisão no qual temos uma partícula 1 (projétil) sendo lançada do infinito, isto é, de um ponto bastante afastado, com uma velocidade v_{1i} em direção a uma partícula 2 (alvo) que está em repouso no laboratório:

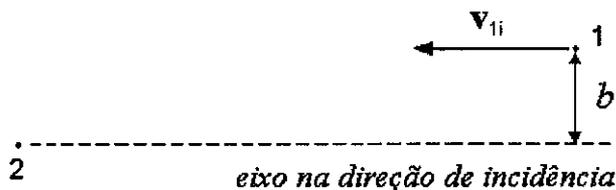


Figura 12

A distância b mostrada na figura é denominada *parâmetro de impacto*. Se não houvesse interação, a partícula 1 passaria a uma distância b da partícula 2.

Para obter a expressão que determina o ângulo de espalhamento, é conveniente trabalhar no SCM. Nesse sistema de referência, o estado inicial é como mostrado na figura abaixo:

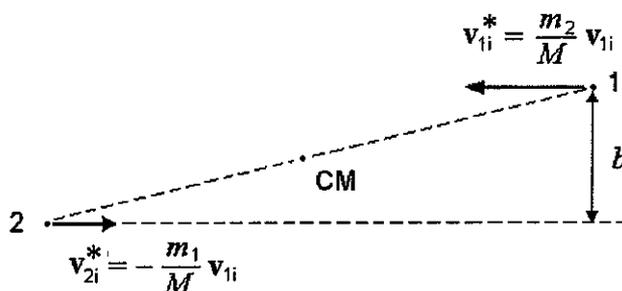


Figura 13

Vamos supor que a interação se dê através de uma força que tem a direção da reta que une as duas partículas e magnitude dependente apenas da distância entre elas:

$$\mathbf{F}_{12} = F_{12}(\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*) = F(|\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*|) \frac{\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*}{|\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*|}, \quad \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}, \quad (38)$$

\mathbf{F}_{12} sendo a força em 1 devida a 2, \mathbf{F}_{21} a reação de 1 sobre 2 e \mathbf{r}_1^* e \mathbf{r}_2^* os vetores posição de

1 e 2 com respeito ao CM:

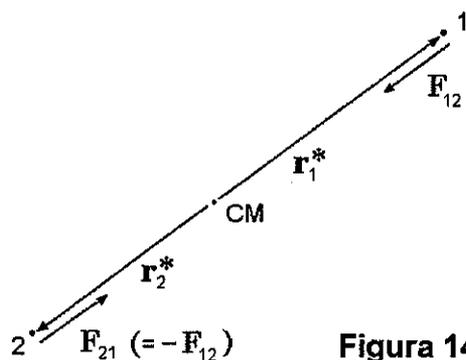


Figura 14

Para esse tipo de força, o momento angular do sistema em torno do CM e a energia total são constantes do movimento. No SCM, escrevemos

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{r}_1^* \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^* + \mathbf{r}_2^* \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^* = \text{constante} = \mathbf{r}_{1i}^* \times m_1 \mathbf{v}_{1i}^* + \mathbf{r}_{2i}^* \times m_2 \mathbf{v}_{2i}^* \quad , \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^{*2} + V(|\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*|) &= \text{constante} = E^* \\ &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{1i}^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_{2i}^{*2} + V(|\mathbf{r}_{1i}^* - \mathbf{r}_{2i}^*|) \quad , \end{aligned} \quad (40)$$

$V(|\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*|)$ sendo a energia potencial da qual derivam as forças \mathbf{F}_{12} e \mathbf{F}_{21} , isto é,

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_{\mathbf{r}_1^*} V(|\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*|) \quad , \quad \mathbf{F}_{21} = -\nabla_{\mathbf{r}_2^*} V(|\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*|) \quad . \quad (41)$$

As trajetórias das partículas estão situadas no plano que contém o CM e é perpendicular ao vetor constante \mathbf{L}^* . Esse plano é fixado pelas condições iniciais - é o plano definido pelas posições e velocidades iniciais. Na figura seguinte, mostramos as trajetórias das partículas no SCM, para o caso de uma interação estritamente repulsiva:

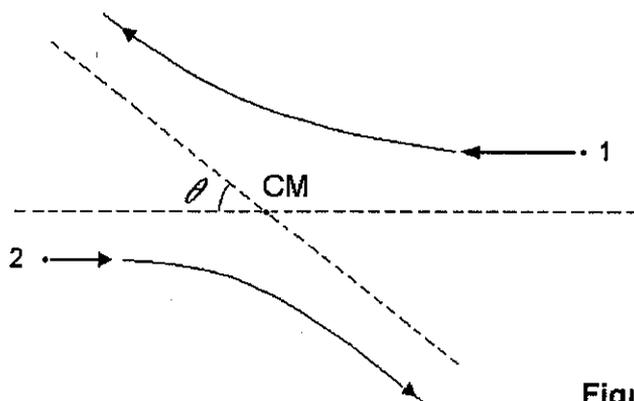


Figura 15

Como vimos anteriormente, o ângulo θ mostrado na fig. 15 é o ângulo de espalhamento no SCM. Para determinar esse ângulo dadas as velocidades e as posições iniciais e a interação entre as partículas, devemos resolver um *problema de dois corpos*, isto é, de duas partículas que interagem sem sofrer a ação de nenhum agente externo. É sabido, no entanto, que o movimento das duas partículas fica determinado quando se conhece o movimento de 1 com respeito a 2 e que este *movimento relativo* se processa como se 2 permanecesse fixa na origem de um sistema inercial, mas 1 tivesse, em vez da massa m_1 , uma *massa reduzida*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}, \quad (42)$$

a força sobre essa massa sendo a mesma F_{12} (ver, por exemplo, K. R. Symon, *Mecânica*, pág. 211). Para descrever o movimento relativo no plano que contém as trajetórias, tomamos um eixo polar Ox que tem a origem O coincidindo sempre com a partícula 2 e aponta sempre numa direção fixa, definida por $-\mathbf{v}_{1i}$. As coordenadas polares do movimento relativo são o ângulo ϕ e a distância $r=|\mathbf{r}|$, \mathbf{r} sendo o vetor posição de 1 com respeito a 2. Na figura seguinte, mostramos o vetor \mathbf{r} e o ângulo ϕ em diversos instantes:

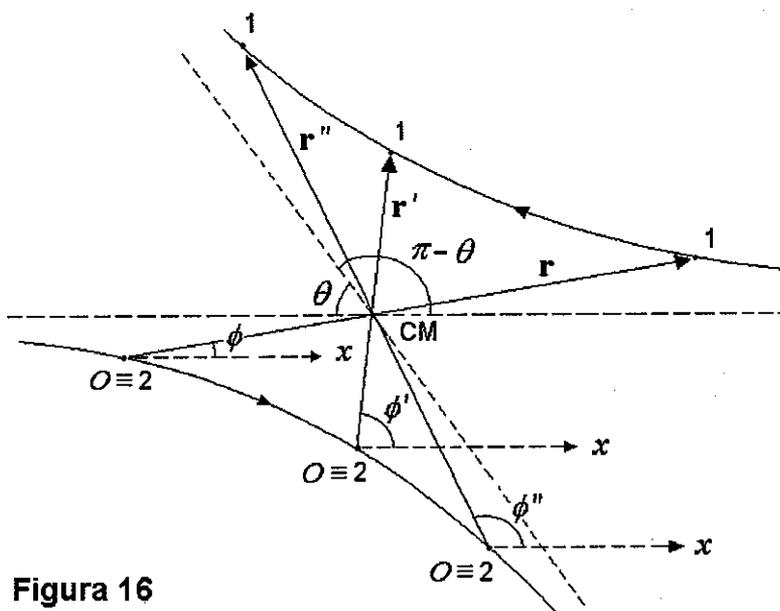


Figura 16

Na figura seguinte, mostramos o movimento de 1 visto a partir de 2:

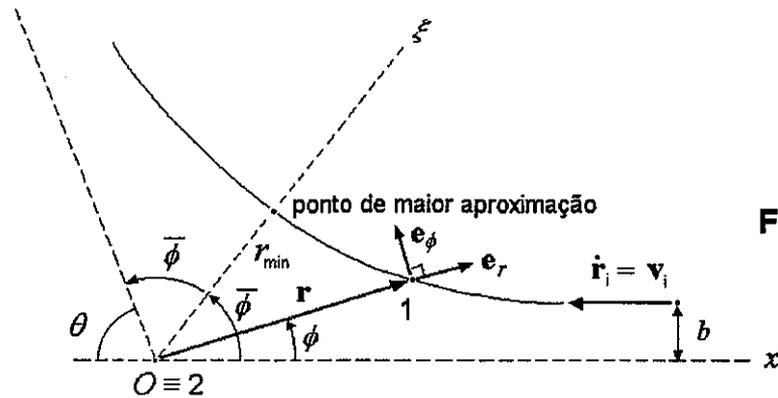


Figura 17

Note-se que o ângulo de espalhamento no movimento relativo é o mesmo que no SCM. O movimento relativo é, como dissemos, análogo ao de um corpo de massa μ sujeito a uma força externa $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12}$, a equação de movimento sendo, portanto,

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad . \quad (43)$$

Levando em conta (38), temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad , \quad (44)$$

isto é, \mathbf{F} tem a linha de ação passando sempre por um ponto fixo O (o centro de força), sendo portanto uma *força central*, e a sua magnitude é dependente apenas da distância ao centro de força. A determinação do movimento de uma partícula sujeita a uma força externa com essas características é abordada nos livros de mecânica clássica. Os pontos principais da resolução desse problema são apresentados a seguir.

Quando a força externa é da forma (44), o momento angular da partícula em torno do centro de força e a energia total da partícula são constantes do movimento:

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} = \text{constante} = \mathbf{r}_i \times \mu \mathbf{v}_i \quad . \quad (45)$$

$$\frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 + V(r) = \text{constante} = E^* = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}_i^2 + V(r_i) \quad , \quad (46)$$

a energia potencial sendo dada por

$$V(r) = - \int_{\bar{r}}^r F(r') dr' \quad , \quad (47)$$

onde \bar{r} é a distância na qual V é tomada igual a zero (usualmente, $\bar{r} = \infty$). A justificativa de termos indicado o momento angular e a energia total do movimento relativo com os mesmos símbolos, \mathbf{L}^* e E^* , utilizados para o momento angular e para a energia total do sistema das duas partículas observados no SCM [eqs. (39) e (40)] é o fato de serem iguais esses momentos angulares e essas energias, como mostramos a seguir. De fato, levando em conta as relações

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^* \quad , \quad 0 = m_1 \mathbf{r}_1^* + m_2 \mathbf{r}_2^* \quad (48)$$

e as inversas

$$\mathbf{r}_1^* = \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{r}_2^* = -\frac{m_1}{M} \mathbf{r} \quad , \quad (49)$$

temos

$$\mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*) \times \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1^* \times m_1 \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_2^* \times m_2 \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1^* \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^* + \mathbf{r}_2^* \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^*$$

e, assim, $\mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}$ é também o momento angular total observado no SCM. Temos ainda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu v^2 &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} \end{aligned}$$

e, além disso, $V(r)$ é a energia potencial do sistema das duas partículas para um observador ligado ao SCM, pois

$$-\nabla_{\mathbf{r}_1^*} V(|\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*|) = -\nabla_{\mathbf{r}} V(r) = \mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} \quad ,$$

$$-\nabla_{\mathbf{r}_2^*} V(|\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*|) = \nabla_{\mathbf{r}} V(r) = -\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{21} \quad .$$

Podemos concluir então que $(1/2)\mu v^2 + V(r)$ é também a energia total do sistema das duas partículas observada no SCM. Retornando ao problema do movimento relativo, vemos que, como \mathbf{L}^* é normal ao raio vetor \mathbf{r} e \mathbf{L}^* é constante, o movimento relativo processa-se num plano. Esse plano, que contém o centro de força e é perpendicular a \mathbf{L}^* , é o plano definido pelo vetor posição relativa inicial \mathbf{r}_i e pela velocidade relativa inicial \mathbf{v}_i . Ele é o mesmo que aquele no qual situam-se as trajetórias de 1 e 2 observadas no SCM.

Utilizando as expressões

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad , \quad \mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \quad , \quad (50)$$

onde \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_ϕ são os versores das coordenadas polares mostrados na figura precedente, temos

$\mathbf{L}^* = r \mathbf{e}_r \times \mu (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi)$, isto é

$$\mathbf{L}^* = \mu r^2 \dot{\phi} \mathbf{k} \quad , \quad (51)$$

onde $\mathbf{k} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi$ é um vetor unitário normal ao plano da trajetória. Chamando de L^* a componente de \mathbf{L}^* na direção de \mathbf{k} , temos

$$L^* = \mu r^2 \dot{\phi} \quad (52)$$

Como L^* é constante, o mesmo acontece com $\dot{\phi}$. Escrevendo

$$\dot{\phi} = \frac{L^*}{\mu r^2} \quad (53)$$

vemos então que $\dot{\phi}$ não se anula para nenhum valor finito de r e isso significa que ϕ é sempre crescente (se $L > 0$) ou sempre decrescente (se $L < 0$). Utilizando a expressão dada em (50) para a velocidade, temos ainda

$$E^* = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) \quad (54)$$

Substituindo $\dot{\phi}$ dada por (53), temos então

$$E^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^{*2}}{2\mu r^2} \quad (55)$$

Obtemos, assim, uma equação inteiramente análoga à equação

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + V(x) \quad (56)$$

que ocorre num movimento unidimensional conservativo. No lugar de $V(x)$, temos agora a *energia potencial efetiva*

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^{*2}}{2\mu r^2} \quad (57)$$

O termo $L^{*2}/2\mu r^2$ é a *barreira centrífuga*. A ele está associada uma força fictícia centrífuga de magnitude $L^{*2}/\mu r^3$. Essa força surge porque, com a eliminação da velocidade angular $\dot{\phi}$, o movimento radial é o movimento visto por um observador não-inercial solidário a um eixo que gira juntamente com o vetor \mathbf{r} . No caso da colisão de uma carga puntiforme q_1 com outra carga puntiforme q_2 , a energia potencial de interação é, como se sabe,

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{r} \quad (58)$$

e o gráfico da energia potencial efetiva (supondo que as cargas sejam de mesmo sinal) é o mostrado na figura seguinte:

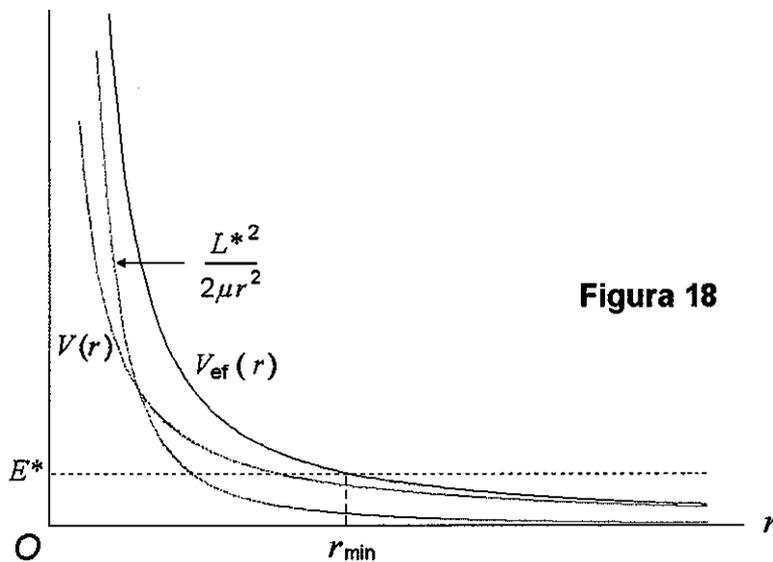


Figura 18

Para descrever o movimento radial relativo, procedemos como num problema unidimensional. Escrevendo

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu} [E^* - V_{\text{ef}}(r)] \quad , \quad (59)$$

vemos que o movimento só pode ocorrer nas regiões onde $E^* \geq V_{\text{ef}}(r)$, os valores extremos de r sendo as soluções da equação

$$V_{\text{ef}}(r) = E^* \quad . \quad (60)$$

No caso da figura anterior, qualquer que seja o valor da energia E^* , essa equação tem apenas uma solução, $r = r_{\text{min}}$, a região permitida para r sendo o intervalo $r \geq r_{\text{min}}$. Num ponto onde a equação (60) está satisfeita, a velocidade radial \dot{r} é nula. Isso não significa que o vetor velocidade relativa é nulo nesse ponto, pois a velocidade angular $\dot{\phi}$ [ver (53)] é diferente de zero para qualquer r finito. O ponto onde $\dot{r} = 0$ é um *ponto de reversão* da trajetória: $r(t)$ passa a crescer em vez de continuar decrescendo, e vice-versa. Se o intervalo permitido para r é limitado apenas inferiormente ($r \geq r_{\text{min}}$), temos uma trajetória relativa como a mostrada na figura seguinte:

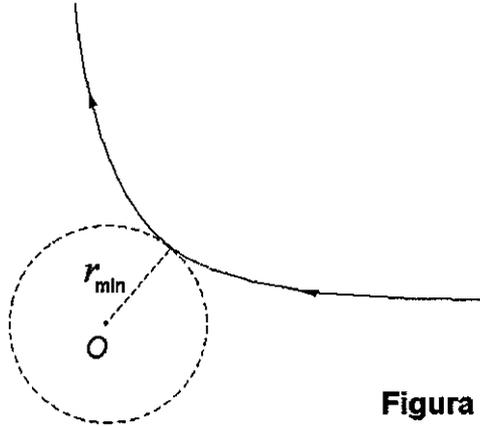


Figura 19

Uma tal trajetória é a que ocorre num processo de espalhamento, quando uma partícula vem de um ponto muito distante, atinge uma aproximação máxima da outra partícula numa distância $r = r_{\min}$ e depois retorna para o infinito. No que segue, vamos nos limitar a esse tipo de movimento.

Para obter a equação $r(\phi)$ da trajetória do movimento relativo, escrevemos

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} = \dot{\phi} \frac{1}{\dot{r}} \quad (61)$$

enquanto que, da relação (59), tiramos

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E^* - V_{\text{ef}}(r)]} \quad (62)$$

o sinal menos valendo na fase do movimento em que r é decrescente e o sinal mais na fase em que r é crescente. Substituindo (53) e (62) em (61), obtemos

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L^*}{\mu r^2} \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E^* - V_{\text{ef}}(r)]}} \quad (63)$$

Integrando essa relação a partir de uma posição inicial (r_i, ϕ_i) , temos finalmente

$$\phi - \phi_i = \int_{r_i}^r \frac{L^*}{\mu r'^2} \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E^* - V_{\text{ef}}(r')]}} dr' \quad (64)$$

o sinal mais (menos) valendo se r cresce (decresce) a partir da posição (r_i, ϕ_i) e enquanto r for crescente (decrescente). A integral obtida fornece implicitamente a equação $r(\phi)$ da trajetória.

Mostremos, em seguida, que a trajetória é simétrica em relação a um eixo $O\xi$ que vai do centro de força ao ponto de reversão da trajetória. Para isso, consideremos dois pontos da trajetória, P_1 e P_2 , situados um antes e outro depois do ponto de reversão e a uma mesma r do centro de força :

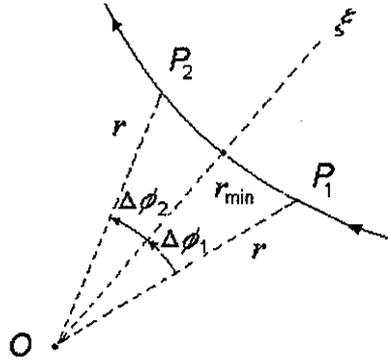


Figura 20

Levando em conta a expressão (64), vemos que os ângulos $\Delta\phi_1$ e $\Delta\phi_2$ são dados por

$$\Delta\phi_1 = \int_r^{r_{\min}} \frac{L^*}{\mu r'^2} \frac{1}{-\sqrt{\frac{2}{\mu}[E^* - V_{\text{ef}}(r')]}} dr' ,$$

$$\Delta\phi_2 = \int_{r_{\min}}^r \frac{L^*}{\mu r'^2} \frac{1}{+\sqrt{\frac{2}{\mu}[E^* - V_{\text{ef}}(r')]}} dr' .$$

Vemos, então, que $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2$, ficando assim mostrada a simetria da trajetória com respeito ao eixo $O\xi$. Em vista dessa propriedade, o ângulo total varrido pelo vetor posição relativa \mathbf{r} num processo de espalhamento consiste de duas partes iguais, $\bar{\phi}$, correspondentes uma ao movimento desde o infinito até o ponto de maior aproximação e a outra ao retorno desde esse ponto até o infinito (fig. 17). O valor do ângulo $\bar{\phi}$ é dado por

$$\bar{\phi} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L^*}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E^* - V(r) - \frac{L^{*2}}{2\mu r^2}]}} dr , \quad (65)$$

onde

$$E^* = \frac{1}{2} \mu v_i^2 \quad (66)$$

e

$$L^* = \mu v_1 b \quad (67)$$

são, respectivamente, os valores constantes da energia total e do momento angular do movimento relativo (ou, como vimos, do movimento do sistema das duas partículas no SCM) e a distância de maior aproximação, r_{\min} , é determinada pela equação

$$E^* - V(r_{\min}) - \frac{L^{*2}}{2\mu r_{\min}^2} = 0 \quad (68)$$

É conveniente exprimir $\bar{\phi}$ em termos da energia E^* e do parâmetro de impacto b . Substituindo (67) em (65), obtém-se

$$\bar{\phi} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E^*} - \frac{b^2}{r^2}}} dr \quad (69)$$

enquanto que (68) é escrita como

$$1 - \frac{V(r_{\min})}{E^*} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0 \quad (70)$$

O conhecimento do ângulo $\bar{\phi}$ permite determinar o ângulo de espalhamento no SCM. Como vimos, este tem o mesmo valor, θ , que o ângulo de espalhamento no movimento relativo. Quando se trata de uma interação repulsiva, a trajetória de 1 com respeito a 2 é como a da fig. 17 e, nesse caso, vemos que a relação entre θ e $\bar{\phi}$ é dada por

$$\theta = \pi - 2\bar{\phi} \quad (71)$$

Entretanto, quando as partículas interagem através de uma força atrativa, a trajetória do movimento relativo tem o aspecto mostrado na figura seguinte e, nesse caso, temos

$$\theta = 2\bar{\phi} - \pi \quad (72)$$

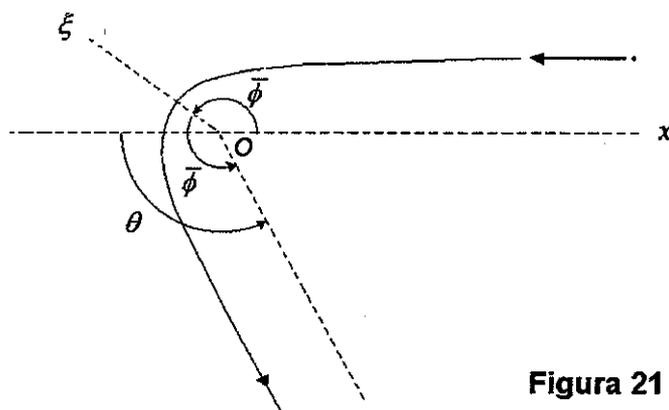


Figura 21

Em qualquer caso (repulsivo ou atrativo), podemos escrever

$$\theta = |\pi - 2\bar{\phi}| \quad (73)$$

Pode acontecer que o ângulo $\bar{\phi}$ dado pela integral (69) resulte maior que π , a partícula 1 contornando a partícula 2 antes de emergir da colisão, como mostra a figura seguinte:

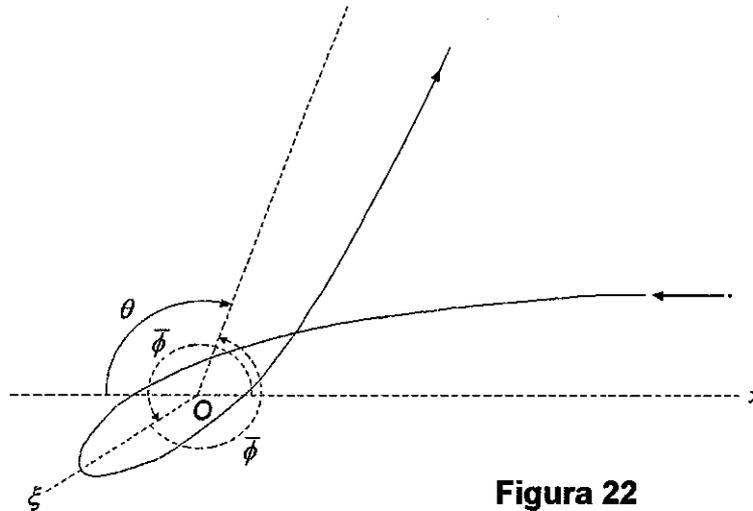


Figura 22

Nesse caso, temos $\bar{\phi} + \bar{\phi} - 2\pi = \pi - \theta$ e, então,

$$\theta = \pi - 2\bar{\phi} + 2\pi \quad (74)$$

De um modo geral, o ângulo de espalhamento θ , que está sempre compreendido entre 0 e π (por definição), é determinado pela relação

$$\pm \theta = \pi - 2\bar{\phi} + 2\nu\pi \quad (75)$$

onde o sinal + ou - e o inteiro não negativo ν são escolhidos de tal modo que θ caia no intervalo mencionado. A relação (75) é, muitas vezes, escrita como

$$\pm \theta = \Theta + 2\nu\pi \quad (76)$$

onde

$$\Theta = \pi - 2\bar{\phi} = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E^*} - \frac{b^2}{r^2}}} dr \quad (77)$$

é denominado *ângulo de deflexão* [$\Theta = \theta$ no caso da fig. 17] e pode tomar valores entre $-\infty$ e π .

Para finalizar este ítem, vamos exprimir a energia total do sistema das duas partículas no SCM, E^* , em termos da energia total no SL, E_{lab} , que é também a energia cinética inicial da partícula 1 no SL:

$$E_{\text{lab}} = E_{1i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \quad . \quad (78)$$

Essa é a energia conhecida experimentalmente. Considerando a expressão (66), temos

$$E^* = \frac{1}{2} \mu v_i^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

e, portanto,

$$E^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{\text{lab}} \quad . \quad (79)$$

Seção de choque. Em geral, o objetivo de uma experiência de espalhamento é descobrir a forma da interação entre duas partículas. As expressões (69) e (75) [ou (76) e (77)] mostram que, fixada a energia E^* , o ângulo de espalhamento é uma função do parâmetro de impacto b . Em princípio, poderíamos utilizar essas expressões para obter informações sobre a forma da energia potencial de interação $V(r)$. Faríamos uma experiência para determinar a relação entre b e θ e, em seguida, procuraríamos achar uma forma de $V(r)$ para a qual (69) e (75) reproduzissem os resultados experimentais obtidos. A dificuldade é que, quando se trata de colisões envolvendo partículas atômicas e sub-atômicas, os valores do parâmetro de impacto são tão pequenos que não podem ser medidos experimentalmente. Devemos, então, substituir b por uma grandeza mais apropriada. Essa grandeza é a seção de choque.

Uma experiência de espalhamento consiste realmente do seguinte: bombardeamos um alvo constituído de n partículas de uma dada espécie com um feixe de outras partículas, também estas de mesma espécie, o fluxo do feixe incidente sendo de f partículas por unidade de área por unidade de tempo:

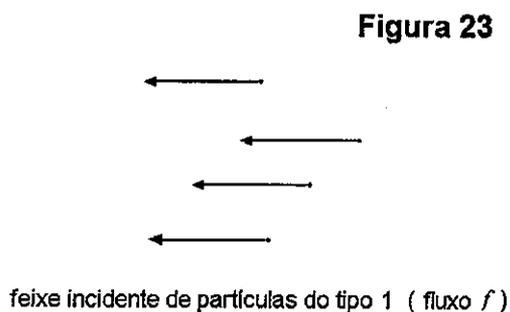
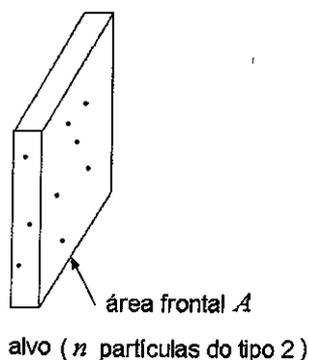
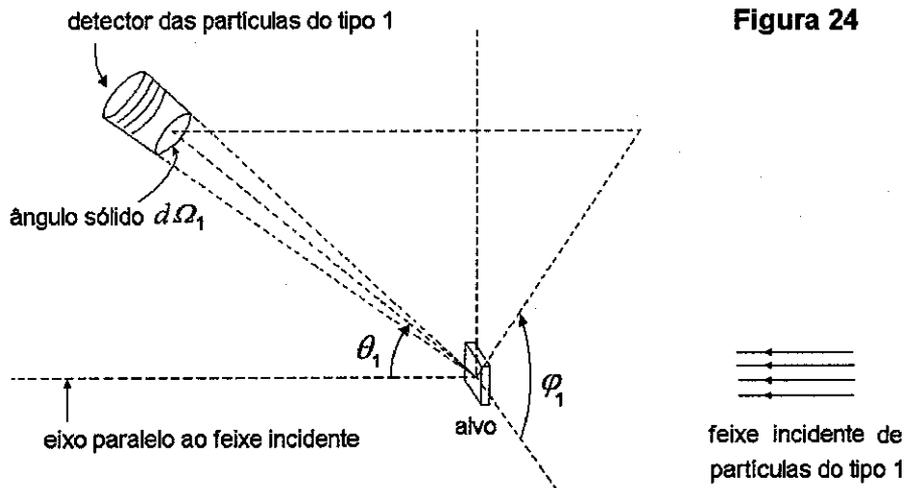


Figura 23

As seguintes condições estão usualmente satisfeitas: (i) O fluxo f é suficientemente baixo para não haver interação entre as partículas do próprio feixe incidente e para não haver uma diminuição sensível do número de partículas-alvo por efeito de recuo. (ii) O alvo é suficientemente rarefeito para não haver possibilidade de espalhamento múltiplo, isto é, uma partícula incidente interage, no máximo, com apenas uma partícula do alvo.

A quantidade que podemos medir numa experiência de espalhamento é o número dN de partículas que são espalhadas, por unidade de tempo, para dentro de um detector colocado a uma distância bastante grande do alvo (figura 24). As dimensões lineares da região ocupada pelo alvo são pequenas em comparação com a distância ao detector. Portanto, podemos dizer que, de qualquer ponto do alvo, a abertura do detector subtende um mesmo ângulo sólido, de aberturas angulares $d\theta_1$ e $d\varphi_1$ posicionado numa direção (θ_1, φ_1) , θ_1 sendo o ângulo polar do detector em relação à direção do feixe incidente e φ_1 o seu ângulo azimutal medido a partir de um eixo escolhido arbitrariamente no plano que contém o alvo e é perpendicular ao feixe incidente.



O número de colisões que ocorrem por unidade de tempo é tanto maior quanto maior é o fluxo f de partículas incidentes e quanto maior é o número n de partículas-alvo. O número dN é tanto maior quanto maior é o ângulo sólido $d\Omega_1$ e quanto maior é o número de colisões por unidade de tempo, ou seja, dN é proporcional a f , n e $d\Omega_1$:

$$dN = \frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}(\theta_1, \varphi_1) n f d\Omega_1 . \quad (80)$$

O fator de proporcionalidade, que depende da direção (θ_1, φ_1) do posicionamento do detector, foi indicado com $d\sigma_1/d\Omega_1$ e é denominado *seção de choque diferencial no sistema de laboratório*. Escrevendo

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}(\theta_1, \varphi_1) = \frac{dN}{n f d\Omega_1} , \quad (81)$$

vemos que a seção de choque é uma grandeza que pode ser determinada experimentalmente. A razão pela qual se introduz $d\sigma_1/d\Omega_1$ é que $d\sigma_1/d\Omega_1$, ao contrário de dN , não depende dos valores de n , f e $d\Omega_1$ de uma particular experiência. A seção de choque diferencial para espalhamento numa dada direção é o número de partículas espalhadas, por unidade de tempo e por centro espalhador, para dentro de um ângulo sólido orientado nessa direção, por unidade de ângulo sólido e por unidade de fluxo incidente. É fácil constatar que a seção de choque tem a dimensão de área. Mais adiante, veremos a razão da notação na forma de um quociente, $d\sigma_1/d\Omega_1$.

O espalhamento de uma partícula do feixe incidente resulta da sua colisão com um partícula do alvo. Suponhamos, então, que a partícula espalhada entre no detector que está posicionado na direção (θ_1, φ_1) . Inicialmente, vamos considerar $m_1 < m_2$. A colisão, vista no SCM, mostra então a partícula sendo espalhada para dentro de um ângulo sólido $d\Omega$, posicionado numa direção (θ, φ) :

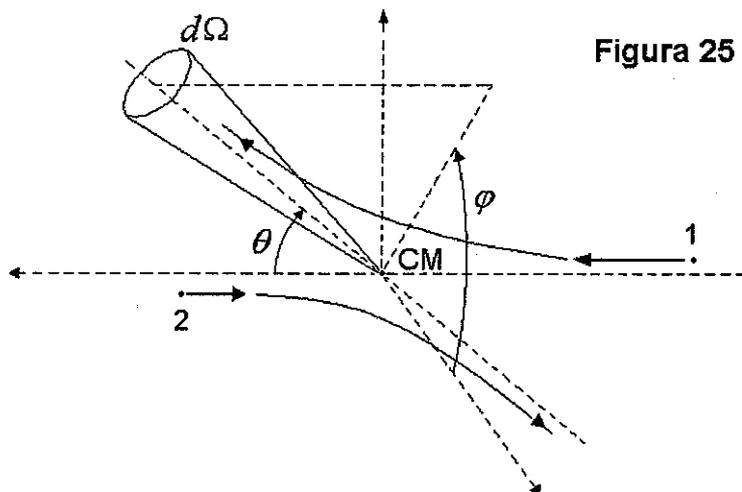


Figura 25

Os eixos de referência para medida dos ângulos θ e φ são tomados nas mesmas direções que os eixos correspondentes do SL. A correspondência entre $d\Omega_1$ e $d\Omega$ é biunívoca. Como uma alternativa para a expressão (80), podemos considerar dN como sendo proporcional a f , n e $d\Omega$:

$$dN = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) n f d\Omega . \quad (82)$$

O fator de proporcionalidade, $d\sigma/d\Omega$, é denominado *seção de choque diferencial no sistema de centro de massa*. Para determinar a relação entre as seções de choque no SL e no SCM, igualamos (82) e (80), obtendo

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}(\theta_1, \varphi_1) d\Omega_1 = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega . \quad (83)$$

A relação entre $d\Omega$ e $d\Omega_1$ é obtida da relação cinemática entre θ e θ_1 , juntamente com a igualdade $\varphi = \varphi_1$. Sendo

$$d\Omega = \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi \quad , \quad d\Omega_1 = \text{sen } \theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 \quad , \quad (84)$$

obtemos

$$d\Omega = \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \theta_1} \left| \frac{d\theta}{d\theta_1} \right| d\Omega_1 \quad , \quad (85)$$

uma vez que $d\varphi = d\varphi_1$. Levando em conta que $d\theta/d\theta_1$ é positiva no caso $m_1 < m_2$ (ver figura 9), podemos suprimir o sinal de valor absoluto. Observando, então, que $\text{sen } \theta \, d\theta = -d(\cos \theta)$, obtemos

$$d\Omega = \frac{1}{\text{sen } \theta_1} (-) \frac{d(\cos \theta)}{d\theta_1} d\Omega_1 \quad . \quad (86)$$

Derivando a expressão (24) tomada com o sinal (+) e substituindo o resultado em (86), obtém-se a relação

$$d\Omega = \left[2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \text{sen}^2 \theta_1}} \right] d\Omega_1 \quad , \quad \text{se } m_1 < m_2 \quad . \quad (87)$$

Substituindo esse resultado no 2o. membro de (83), chegamos finalmente à relação

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}(\theta_1, \varphi_1) = \left[2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \text{sen}^2 \theta_1}} \right] \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) \quad , \quad \text{se } m_1 < m_2 \quad . \quad (88)$$

Essa relação permite conhecer os valores experimentais de $d\sigma/d\Omega$ a partir dos valores experimentais de $d\sigma_1/d\Omega_1$. Como veremos mais adiante, a seção de choque $d\sigma/d\Omega$ pode ser calculada uma vez dada a forma da energia potencial de interação $V(r)$. Os valores calculados podem então ser comparados com valores experimentais. Se $m_1 > m_2$, a obtenção da relação entre $d\sigma_1/d\Omega_1$ e $d\sigma/d\Omega$ deve levar em conta que, a cada direção θ_1 de espalhamento no SL, estão associadas agora duas direções de espalhamento no SCM, θ_+ e θ_- , correspondentes aos ramos (+) e (-) da expressão (24). As partículas que entram no detector são as que, no SCM, são espalhadas para dentro de um ângulo sólido $d\Omega_+$ situado na

na direção (θ_+, φ) , bem como as que são espalhadas para dentro de um ângulo sólido $d\Omega_-$ posicionado na direção (θ_-, φ) , isto é,

$$dN = \frac{d\sigma_+}{d\Omega_+}(\theta_+, \varphi) n f d\Omega_+ = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_+, \varphi) n f d\Omega_+ + \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_-, \varphi) n f d\Omega_-, \quad (89)$$

onde $d\Omega_+ = \text{sen}\theta_+ d\theta_+ d\varphi$ e $d\Omega_- = \text{sen}\theta_- d\theta_- d\varphi$. Cada um destes ângulos sólidos relaciona-se com $d\Omega_+$ através de uma expressão do tipo (85):

$$d\Omega_+ = \frac{\text{sen}\theta_+}{\text{sen}\theta_1} \left| \frac{d\theta_+}{d\theta_1} \right| d\Omega_1, \quad d\Omega_- = \frac{\text{sen}\theta_-}{\text{sen}\theta_1} \left| \frac{d\theta_-}{d\theta_1} \right| d\Omega_1. \quad (90)$$

Lembrando que θ_+ é uma função crescente de θ_1 e θ_- é uma função decrescente, podemos escrever

$$d\Omega_+ = \frac{\text{sen}\theta_+}{\text{sen}\theta_1} \frac{d\theta_+}{d\theta_1} d\Omega_1, \quad d\Omega_- = \frac{\text{sen}\theta_-}{\text{sen}\theta_1} (-) \frac{d\theta_-}{d\theta_1} d\Omega_1, \quad (91)$$

e, assim,

$$d\Omega_+ = -\frac{1}{\text{sen}\theta_1} \frac{d(\cos\theta_+)}{d\theta_1} d\Omega_1, \quad d\Omega_- = \frac{1}{\text{sen}\theta_1} \frac{d(\cos\theta_-)}{d\theta_1} d\Omega_1. \quad (92)$$

Derivando a expressão (24) com os sinais apropriados e substituindo em (92), obtêm-se

$$d\Omega_+ = \left[2 \frac{m_1}{m_2} \cos\theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \text{sen}^2\theta_1}} \right], \quad d\Omega_- = \left[-2 \frac{m_1}{m_2} \cos\theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \text{sen}^2\theta_1}} \right]. \quad (93)$$

Utilizando essas expressões em (89), temos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_+}{d\Omega_+}(\theta_+, \varphi) &= \left[2 \frac{m_1}{m_2} \cos\theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \text{sen}^2\theta_1}} \right] \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_+, \varphi) \\ &+ \left[-2 \frac{m_1}{m_2} \cos\theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \text{sen}^2\theta_1}} \right] \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_-, \varphi), \quad \text{se } m_1 > m_2. \quad (94) \end{aligned}$$

Essa expressão é válida para $\theta_1 \leq \theta_{1\max} = \arcsen(m_2 / m_1)$; para $\theta_1 > \theta_{1\max}$, $d\sigma_1 / d\Omega_1 = 0$. A relação (94) permite conhecer a seção de choque no SL uma vez dada a seção de choque no SCM, mas não no sentido inverso já que não é possível saber em qual das duas direções θ_+ e θ_- é espalhada no SCM uma partícula cujo ângulo de espalhamento no SL é θ_1 . Essa ambiguidade pode ser eliminada se medimos, por exemplo, além do ângulo de espalhamento θ_1 , também a energia final da partícula 1 no SL - mas, essa informação não é levada em conta na definição da seção de choque $d\sigma_1 / d\Omega_1$ dada em (80). Para o caso $m_1 = m_2$, a relação entre as seções de choque pode ser obtida tomando-se o limite $m_1 \rightarrow m_2$ em (88) ou (94) e resulta bastante simples:

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}(\theta_1, \varphi_1) = 4 \cos \theta_1 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) \quad , \quad m_1 = m_2 \quad , \quad \theta = 2\theta_1 \quad , \quad 0 \leq \theta_1 < \pi/2 \quad . \quad (95)$$

Vejamos agora como é a expressão da seção de choque no SCM, $d\sigma / d\Omega$, em termos da energia potencial $V(r)$ que descreve a interação entre a partícula-projétil e a partícula-alvo. Para isso, consideremos uma colisão projétil-alvo e analisemos o movimento de 1 com respeito a 2. Na figura 26, mostramos trajetórias com um mesmo parâmetro de impacto, mas situadas em planos diferentes, ao passo que, na figura 27, mostramos trajetórias situadas num mesmo plano, mas com parâmetros de impacto diferentes:

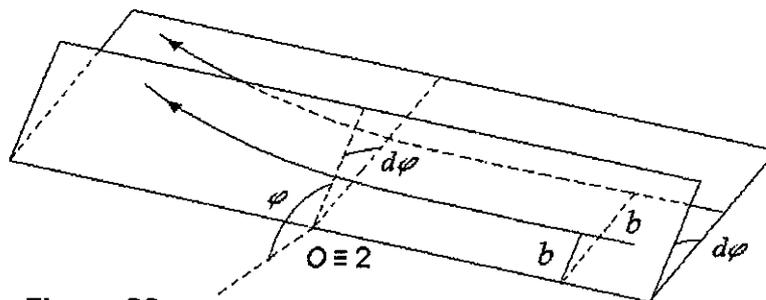


Figura 26

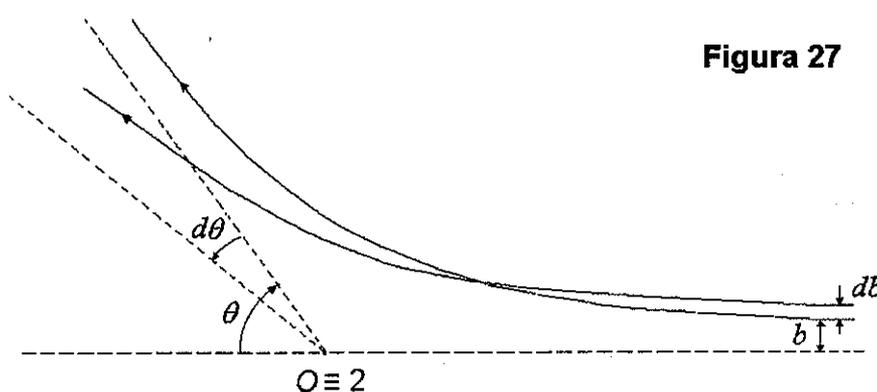
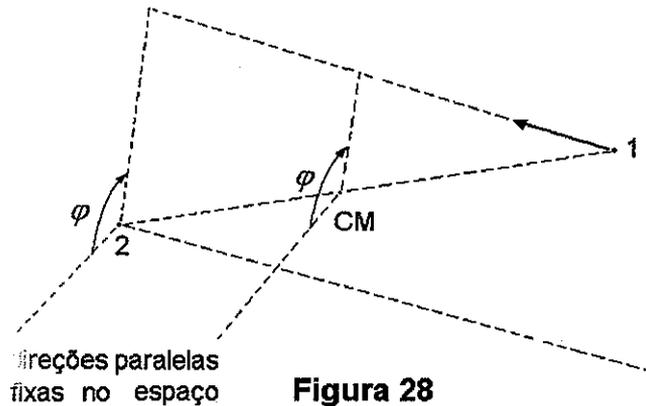
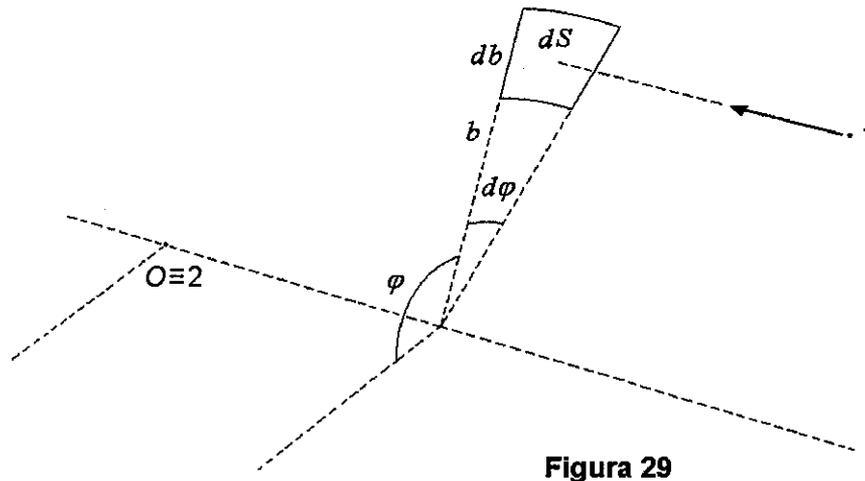


Figura 27

O ângulo φ na figura 26 é o mesmo que o da figura 25 supondo que os eixos de referência para a medida desses ângulos sejam paralelos:

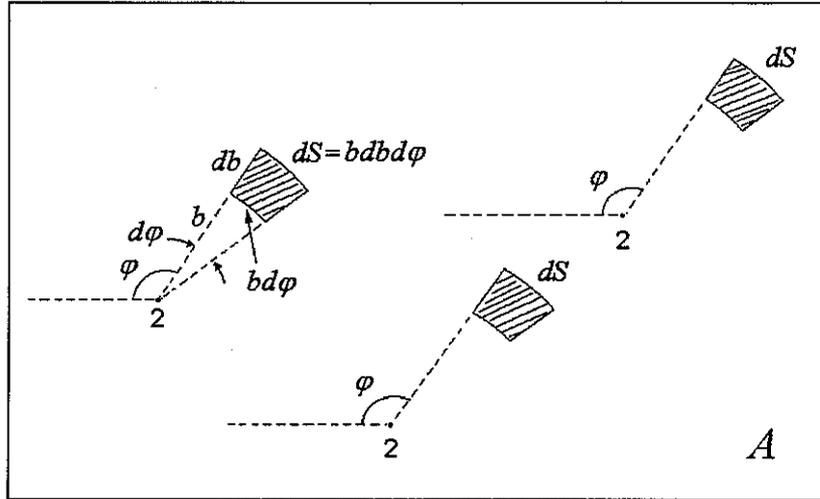


Combinando as figuras 26 e 27, vemos que a partícula 1 será espalhada para dentro do ângulo sólido de abertura $(d\theta, d\varphi)$ e eixo na direção (θ, φ) , centrado na partícula 2, quando ela for lançada na direção da área transversal dS mostrada na figura seguinte:



No SCM, essa partícula é espalhada para dentro de um ângulo sólido $d\Omega$ de mesma abertura $(d\theta, d\varphi)$ e mesma direção (θ, φ) , centrado no CM. Isso porque uma partícula que é espalhada de um ângulo θ no movimento relativo é espalhada do mesmo ângulo θ no SCM e também porque o ângulo φ é o mesmo nos dois sistemas de referência.

A análise precedente diz respeito à colisão entre uma partícula do feixe incidente e uma partícula do alvo. Considerando todas as partículas que incidem sobre o alvo, serão, dentre essas, espalhadas para dentro do ângulo sólido $d\Omega$ aquelas que incidirem passando por qualquer uma das seções transversais de área dS mostradas na figura seguinte:



alvo visto de frente (área frontal A)

Figura 30

As áreas dS não se sobrepõem se o alvo é rarefeito ou suficientemente fino. Como cada área dS vale $b db d\varphi$ e o alvo consiste de n centros espalhadores, a soma dessas áreas vale $n b db d\varphi$. Assim, a probabilidade de uma partícula do feixe incidente passar por uma qualquer das seções de área dS , é dada pelo quociente $(n b db d\varphi) / A$. Como, na unidade de tempo, incidem fA partículas sobre o alvo, o número de partículas que passam através de tais seções na unidade de tempo é

$$fA \frac{n b db d\varphi}{A} .$$

Esse é também o número dN de partículas que são espalhadas para dentro do ângulo sólido $d\Omega$ na unidade de tempo. Assim,

$$dN = fA \frac{n b db d\varphi}{A} .$$

Cancelando A , vem $dN = b db d\varphi n f$ e comparando com (82), temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} n f d\Omega = b db d\varphi n f ,$$

isto é,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = b db d\varphi . \quad (96)$$

Utilizando a expressão $d\Omega = \text{sen}\theta d\theta d\varphi$, podemos escrever

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \text{sen}\theta d\theta d\varphi = b db d\varphi$$

e temos, finalmente,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (97)$$

Utilizando essa expressão, podemos calcular a seção de choque correspondente a uma dada interação $V(r)$. Para isso, determinamos, primeiro, a relação $\theta = \theta(b)$ utilizando (75), (69) e (70); em seguida, invertemos essa relação obtendo $b = b(\theta)$; por último, com essa $b(\theta)$, calculamos o 2º membro de (97). A derivada $db/d\theta$ é tomada em valor absoluto porque pode ser negativa. A importância da seção de choque está, então, no fato que ela pode ser deduzida da energia potencial de interação e, ao contrário do que acontece com o parâmetro de impacto, é uma grandeza que pode ser medida numa experiência. Os valores calculados podem, assim, ser confrontados com valores medidos e a qualidade da comparação permite tirar conclusões a respeito da exatidão de uma dada forma de $V(r)$.

Interpretação geométrica da seção de choque: A seção de choque diferencial no SCM foi definida através da relação (82) e indicada com $d\sigma/d\Omega$. Vejamos agora o porquê dessa notação na forma de um quociente. Para isso, vamos indicar provisoriamente a seção de choque com $I(\theta, \varphi)$. Trocando $d\sigma/d\Omega$ por $I(\theta, \varphi)$ em (96), temos então

$$I(\theta, \varphi) d\Omega = b db d\varphi \quad (98)$$

Definindo a quantidade

$$d\sigma = I(\theta, \varphi) d\Omega \quad (99)$$

que representa, para um fluxo incidente unitário, o número de partículas espalhadas, por unidade de tempo e por centro espalhador, para dentro de um ângulo sólido $d\Omega$ posicionado na direção (θ, φ) , temos

$$d\sigma = b db d\varphi \quad (100)$$

e, portanto, $d\sigma$ é a própria área dS :

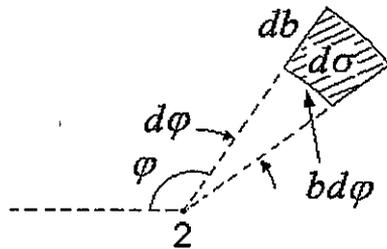


Figura 31

Portanto, $d\sigma$ significa também a área da seção transversal pela qual deve passar a partícula para que seja espalhada dentro do ângulo sólido $d\Omega$ por uma dada partícula-alvo. Da expressão (99), temos

$$I(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (101)$$

e a seção de choque diferencial é então a área eficaz para o espalhamento dentro do ângulo sólido $d\Omega$, por unidade de ângulo sólido. A propriedade (101) é a razão pela qual empregamos a notação $d\sigma/d\Omega$ ao definir a seção de choque diferencial. A área $d\sigma$, que é denominada *seção de choque*, é usualmente medida em barns ($1b = 10^{-24} \text{cm}^2 = 10^{-28} \text{cm}^2 = 10^2 \text{fm}^2$) em problemas de colisão entre núcleos atômicos. A seção de choque diferencial $d\sigma/d\Omega$ é então dada em barns por estereorradianos (b/sr).

Seção de choque total. A seção de choque total, σ , é o número total de partículas espalhadas, não importando em que direção, por centro espalhador, por unidade de tempo e por unidade de fluxo incidente. Geometricamente, ela é a soma das áreas $d\sigma$ correspondentes a todos os parâmetros de impacto para os quais a partícula é desviada do seu curso inicial:

$$\sigma = \pi b_{\max}^2, \quad (102)$$

b_{\max} sendo o máximo valor do parâmetro de impacto para o qual ocorre desvio. A seção de choque total é a área máxima ao redor de uma partícula-alvo tal que a partícula incidente é desviada do curso inicial se direcionada para dentro dessa área. Se o campo de força tem um *alcance finito* a , isto é, anula-se identicamente para $r > a$, temos $b_{\max} = a$ e a seção de choque total

$$\sigma = \pi a^2 \quad (103)$$

é a área transversal que a região de interação exhibe ao feixe incidente. Se o campo de força tende gradativamente a zero a grandes distâncias, sem que exista um raio a a partir do qual ele se anule identicamente, a partícula sempre sofrerá um desvio, mesmo que muito pequeno, qualquer que seja a magnitude do seu parâmetro de impacto, e a seção de choque total é, então, infinita. Essa conclusão é sempre verdadeira apenas na mecânica clássica. Na teoria quântica de espalhamento a seção de choque total resulta finita mesmo que a região de interação se estenda ao infinito, contanto que a energia potencial $V(r)$ vá a zero mais rapidamente do que $1/r^2$ quando $r \rightarrow \infty$ [ver, L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Third Edition, pgs. 506-507].

Formalmente, a seção de choque total é dada pela expressão

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi). \quad (104)$$

O valor infinito de σ quando a força de interação não tem um alcance finito a indica que a seção de choque diferencial $d\sigma/d\Omega$ diverge em $\theta = 0$, já que é este o ângulo de espalhamento para b tendendo a infinito.

A seção de choque para detecção das partículas de recuo. Numa experiência no SL, podemos detectar também as partículas de recuo. A seção de choque para detecção dessas partículas é definida por uma relação análoga à (80):

$$dN = \frac{d\sigma_2}{d\Omega_2}(\theta_2, \varphi_2) n f d\Omega_2 \quad , \quad (105)$$

dN sendo agora o número de partículas que recuam, por unidade de tempo, para dentro de um detector de abertura $d\Omega_2$ posicionado numa direção (θ_2, φ_2) . Para estabelecer a relação entre $d\sigma_2/d\Omega_2$ e $d\sigma/d\Omega$, observamos que dN é também o número de partículas do tipo 1 que no SCM são espalhadas para dentro de um ângulo sólido $d\Omega$ posicionado numa direção (θ, φ) , sendo $\theta = \pi - 2\theta_2$ [ver (23)], $\varphi = \varphi_2 \pm \pi$ [o sinal $+$ ($-$) valendo se $0 \leq \varphi_2 < \pi$ ($\pi \leq \varphi_2 < 2\pi$)] e

$$d\Omega = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_2} \left| \frac{d\theta}{d\theta_2} \right| d\Omega_2 = 4 \cos\theta_2 d\Omega_2 \quad . \quad (106)$$

Temos, assim,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_2}{d\Omega_2}(\theta_2, \varphi_2) n f d\Omega_2 &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = \pi - 2\theta_2, \varphi = \varphi_2 \pm \pi) n f d\Omega \\ &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = \pi - 2\theta_2, \varphi = \varphi_2 \pm \pi) n f \times 4 \cos\theta_2 d\Omega_2 \quad , \end{aligned}$$

de onde resulta finalmente

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega_2}(\theta_2, \varphi_2) = 4 \cos\theta_2 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = \pi - 2\theta_2, \varphi = \varphi_2 \pm \pi) \quad . \quad (107)$$

Geometricamente, $d\sigma_2$ é a área transversal ao feixe incidente pela qual deve passar o projétil para que a partícula-alvo recue dentro de um ângulo sólido de abertura $d\Omega_2$ orientado na direção (θ_2, φ_2) .

Partículas idênticas. Se as partículas incidentes forem idênticas às do alvo, o detector não consegue distinguir (nem mesmo pelas energias, que são iguais) as partículas que são espalhadas numa determinada direção das que sofrem recuo nessa mesma direção, e a contagem por ele registrada refere-se, então, ao conjunto dessas partículas. A seção de choque que abrange todas as partículas que entram num detector de abertura $d\omega$ orientado na direção (χ, ψ) é a soma da seção de choque para espalhamento da partícula 1 para dentro de $d\omega$ com a seção de choque para recuo das partículas 2 para dentro de $d\omega$:

$$\frac{d\sigma_{1=2}^{\text{lab}}}{d\omega}(\chi, \psi) = \frac{d\sigma_1}{d\omega}(\chi, \psi) + \frac{d\sigma_2}{d\omega}(\chi, \psi) \quad . \quad (108)$$

De (95) e (107), temos

$$\frac{d\sigma_1}{d\omega}(\chi, \psi) = 4 \cos\chi \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 2\chi, \varphi = \psi) \quad ,$$

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega_2}(\chi, \psi) = 4 \cos \chi \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = \pi - 2\chi, \varphi = \psi \pm \pi) ,$$

$d\sigma / d\Omega$ sendo a seção de choque determinada através de (97). Temos, portanto, a relação

$$\frac{d\sigma_{l=2}^{\text{lab}}}{d\omega}(\chi, \psi) = 4 \cos \chi \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 2\chi, \varphi = \psi) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = \pi - 2\chi, \varphi = \psi \pm \pi) \right] , \quad (109)$$

que exprime a seção de choque para colisões entre partículas idênticas em termos da seção de choque calculada supondo as partículas distinguíveis [isto é, mediante a expressão (97)]. Para a seção de choque no SCM, a relação é dada obviamente por

$$\frac{d\sigma_{l=2}^{\text{c.m.}}}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(\pi - \theta, \varphi \pm \pi) . \quad (110)$$

Exemplo. A fórmula de Rutherford.

Calculemos $d\sigma / d\Omega$ para o caso em que o feixe incidente é constituído de partículas puntiformes de carga q_1 e o alvo de partículas de carga q_2 , também puntiformes. O espalhamento de um próton ou de um elétron por um núcleo atômico, bem como aquele entre dois núcleos atômicos, pode ser considerado um espalhamento entre cargas puntiformes contanto que o projétil e o alvo não se interpenetrem. A energia potencial de interação é dada por (58), isto é,

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} , \quad (111)$$

onde $\alpha = q_1 q_2$. Quando q_1 e q_2 tem o mesmo sinal (força repulsiva), α é positivo; se q_1 e q_2 tem sinais opostos (força atrativa), α é negativo. Na figura seguinte, mostramos as trajetórias de 1 e 2 no laboratório quando as cargas são de mesmo sinal:

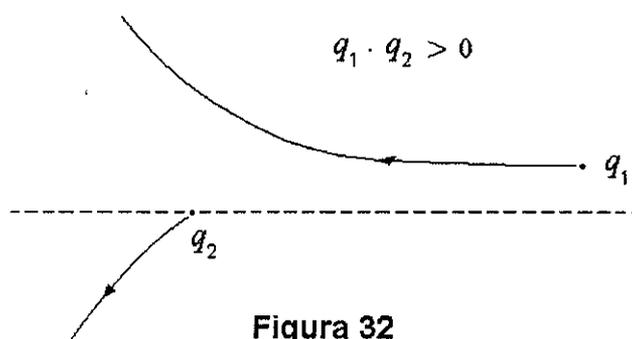
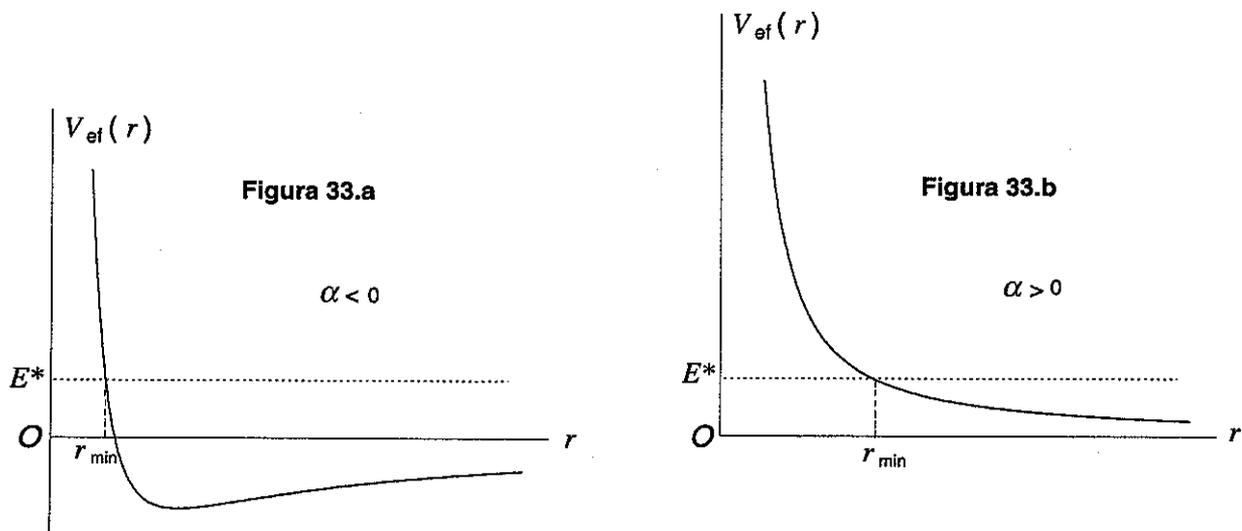


Figura 32

Nas figuras abaixo, mostramos a energia potencial efetiva para os casos $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$:



O ângulo $\bar{\phi}$ [eq.(69)] é dado agora por

$$\bar{\phi} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{r} - \frac{b^2}{r^2}}} dr \quad (112)$$

com r_{\min} determinado pela equação

$$1 - \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{r_{\min}} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0 \quad (113)$$

Introduzindo a quantidade

$$\xi = -\frac{\alpha}{2E^*} \quad (114)$$

podemos escrever (112) e (113) como

$$\bar{\phi} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1 + 2\xi \frac{1}{r} - \frac{b^2}{r^2}}} dr \quad (115)$$

e

$$1 + 2\xi \frac{1}{r_{\min}} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0 \quad (116)$$

Resolvendo a equação (116), obtemos

$$r_{\min} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 + b^2} \quad .$$

Como r_{\min} é necessariamente positivo, devemos tomar o sinal (+) e, assim,

$$r_{\min} = -\xi + \sqrt{\xi^2 + b^2} . \quad (117)$$

Para calcular a integral (115), introduzimos uma nova variável de integração, $x = b/r$. Com isso, temos

$$\bar{\phi} = \int_0^{\frac{b}{r_{\min}}} \frac{dx}{\sqrt{1 + 2\frac{\xi}{b}x - x^2}} = \int_0^{\frac{b}{r_{\min}}} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{b^2} - (x - \frac{\xi}{b})^2}}$$

Levando em conta que

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{a^2 - \eta^2}} = \arctan \frac{\eta}{\sqrt{a^2 - \eta^2}} , \quad (118)$$

temos então

$$\bar{\phi} = \arctan \frac{x - \frac{\xi}{b}}{\sqrt{1 + 2\frac{\xi}{b}x - x^2}} \Bigg|_0^{\frac{b}{r_{\min}}}$$

Sendo

$$\frac{b}{r_{\min}} - \frac{\xi}{b} = \frac{b^2 - \xi r_{\min}}{r_{\min} b} = \frac{b^2 - \xi [-\xi + \sqrt{\xi^2 + b^2}]}{r_{\min} b} = \frac{b^2 + \xi^2}{r_{\min} b} \left[1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + b^2}} \right] > 0 ,$$

temos

$$\lim_{x \rightarrow \frac{b}{r_{\min}}} \frac{x - \frac{\xi}{b}}{\sqrt{1 + 2\frac{\xi}{b}x - x^2}} = +\infty$$

e, portanto, podemos dizer que

$$\bar{\phi} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-\frac{\xi}{b}}{\sqrt{1}} = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\xi}{b} . \quad (119)$$

Esse resultado pode também ser obtido a partir da equação da trajetória do movimento relativo,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \left[\frac{\xi}{b} (1 - \cos \phi) + \sin \phi \right] , \quad (120)$$

que se obtém integrando a equação diferencial da trajetória num campo central,

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = -\frac{\mu}{L^{*2}} r^2 F(r) \quad , \quad (121)$$

com uma força $F(r) = \alpha / r^2$ e as condições iniciais

$$\left(\frac{1}{r} \right)_{\phi=0} = 0 \quad , \quad (122)$$

$$\left(\frac{d}{d\phi} \frac{1}{r} \right)_{\phi=0} = \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)_{\phi=0} = \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} \right)_{\phi=0} = \left(\frac{-\mu \dot{r}}{L^*} \right)_{\phi=0} = \frac{\mu v_i}{\mu v_i b} = \frac{1}{b} \quad . \quad (123)$$

Na figura 34.a, mostramos as trajetórias de uma partícula α (número de massa $A = 4$, número atômico $Z = 2$), de energia $E_{\text{lab}} = 5.30$ MeV (partícula α proveniente do ^{210}Po) e parâmetro de impacto variando de 0 a 48 fm, espalhada por um núcleo de ouro ($A = 197$, $Z = 79$), enquanto que na figura 34.b estão mostradas as trajetórias de um elétron de energia 25 keV ($v_i^2 / c^2 \cong 1/10$) e parâmetro de impacto compreendido entre 0 e 40 fm, espalhado por um próton (suposto puntiforme):

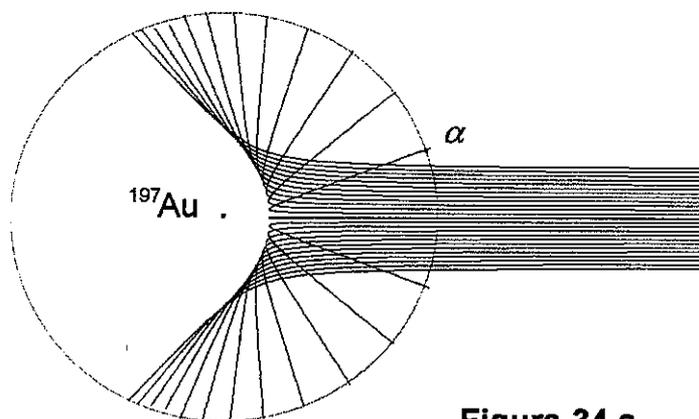


Figura 34.a

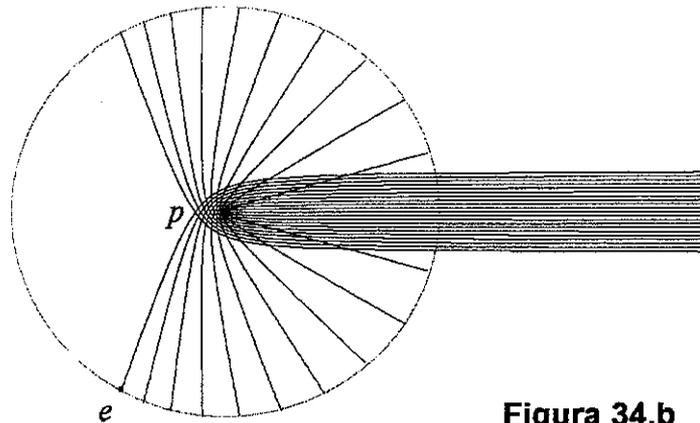


Figura 34.b

O ângulo $2\bar{\phi}$ é o valor de ϕ segundo o qual a partícula espalhada se dirige para o infinito. Tomando o limite $r \rightarrow \infty$ na expressão (120), obtemos

$$\left[\frac{\xi}{b} (1 - \cos 2\bar{\phi}) + \text{sen} 2\bar{\phi} \right] = 0 .$$

Resolvendo essa equação trigonométrica, temos

$$\cot \bar{\phi} = -\frac{\xi}{b} ,$$

isto é ,

$$\tan \left(\bar{\phi} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\xi}{b} ,$$

o que está de acordo com a expressão (119). Após essa digressão, determinemos o ângulo de espalhamento θ e, em seguida, a seção de choque $d\sigma/d\Omega$. Utilizando a expressão (73), obtemos

$$\theta = |\pi - 2\bar{\phi}| = |\pi - \pi - 2 \arctan \frac{\xi}{b}| ,$$

isto é,

$$\theta = 2 \left| \arctan \frac{\xi}{b} \right| = 2 \arctan \frac{|\xi|}{b} . \quad (124)$$

Essa é a expressão do ângulo de espalhamento em função do parâmetro de impacto. Sendo

$$\frac{\theta}{2} = \arctan \frac{|\xi|}{b} ,$$

temos

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{|\xi|}{b} \quad (125)$$

e, portanto, a relação inversa de (124) é

$$b = |\xi| \cot \frac{\theta}{2} \quad (126)$$

Derivando essa expressão, obtém-se

$$\frac{db}{d\theta} = |\xi| (-) \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} |\xi| \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \quad (127)$$

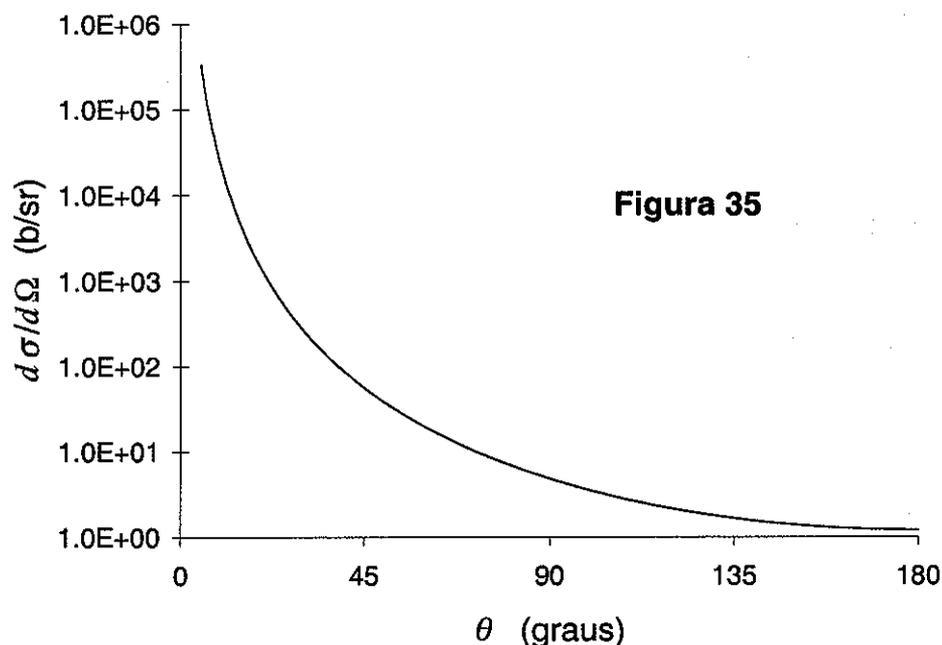
Substituindo (126) e (127) na expressão (97), temos então

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\xi| \cot \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen} \theta} \frac{1}{2} |\xi| \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\xi^2}{4} \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \quad (128)$$

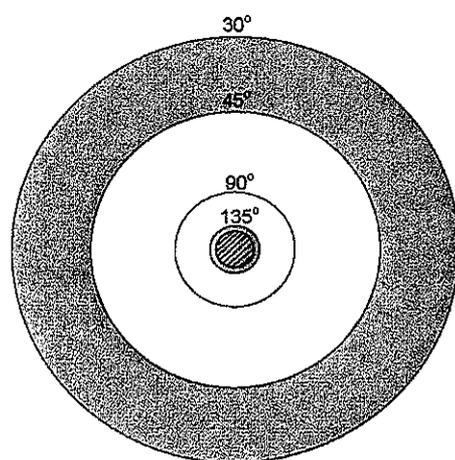
Finalmente, substituindo ξ , obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{q_1 q_2}{2E^*} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (129)$$

expressão essa conhecida como *fórmula de Rutherford*. Notamos que a seção de choque obtida independe do sinal do produto $q_1 q_2$. Na figura seguinte, mostramos o gráfico de $d\sigma/d\Omega$ em função do ângulo θ no caso do espalhamento de partículas α de energia $E_{\text{lab}} = 5.30 \text{ MeV}$ por núcleos de ouro:



Vemos que a seção de choque realmente diverge quando $\theta \rightarrow 0$ confirmando a observação feita anteriormente que, na mecânica clássica, essa divergência sempre ocorre se a interação entre o projétil e a partícula-salvo não é de alcance finito. Na figura seguinte, temos um núcleo de ouro (linhas tracejadas) visto a partir do feixe incidente de partículas α e, centradas nele, circunferências cujos raios (iguais a 9.08 , 21.92, 52.91 e 81.79 fm) são os parâmetros de impacto para espalhamento nos ângulos indicados:



A área sombreada interna é a seção de choque para espalhamento em ângulos θ superiores a 135° , enquanto que o anel sombreado é a seção de choque para espalhamento entre 30° e 45° . Convém frisar que, para a energia considerada, o projétil não penetra no alvo uma vez que o menor valor de $r_{\min}(b)$, que ocorre quando a colisão é frontal ($b = 0$) e vale 43.8 fm, é

maior do que o raio do núcleo de ouro (da ordem de 7 fm). Figuras semelhantes às figuras 34.a e 36 são encontradas em S. Tomonaga, *Quantum Mechanics*, Vol. I.

A expressão (129) refere-se ao SCM. A expressão no SL é obtida de (88), (94) e (95) substituindo-se $d\sigma/d\Omega(\theta, \varphi)$ pela expressão (129) e levando-se em conta que, de (24), tem-se

$$\sin^4 \frac{\theta}{2} = \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2 = \left[\frac{1 - \cos \theta}{2} \right]^2 = \left[\frac{1 + \gamma \sin^2 \theta_1 \mp \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}}{2} \right]^2 \quad (130)$$

($\theta = 2\theta_1$, se $m_1 = m_2$). Substituindo também E^* por $E_{\text{lab}}/(1 + \gamma)$, obtém-se :

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}(\theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4} \left(\frac{q_1 q_2}{2E_{\text{lab}}} \right)^2 4(1 + \gamma)^2 \frac{2\gamma \cos \theta_1 + \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}}}{[1 + \gamma \sin^2 \theta_1 - \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}]^2}, \quad m_1 < m_2, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad (131)$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}(\theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4} \left(\frac{q_1 q_2}{2E_{\text{lab}}} \right)^2 4(1 + \gamma)^2 \times \left\{ \frac{2\gamma \cos \theta_1 + \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}}}{[1 + \gamma \sin^2 \theta_1 - \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}]^2} + \frac{-2\gamma \cos \theta_1 + \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}}}{[1 + \gamma \sin^2 \theta_1 + \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}]^2} \right\}, \quad m_1 > m_2, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1\text{max}} = \arcsen(m_2/m_1), \quad (132)$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}(\theta_1, \varphi_1) = \left(\frac{q_1 q_2}{E_{\text{lab}}} \right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^4 \theta_1}, \quad m_1 = m_2, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \pi/2. \quad (133)$$

Se $m_1 \ll m_2$, a relação (131) reduz-se a

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}(\theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4} \left(\frac{q_1 q_2}{2E_{\text{lab}}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}}, \quad (134)$$

como se espera, já que, nesse caso, $\theta \approx \theta_1$ e $E^* \approx E_{\text{lab}}$.

A seção de choque para a detecção das partículas de recuo é obtida utilizando-se (129) em (107), o que resulta em

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega_2}(\theta_2, \varphi_2) = \left(\frac{q_1 q_2}{2E_{\text{lab}}} \right)^2 (1 + \gamma)^2 \frac{1}{\cos^3 \theta_2} \quad (135)$$

Se as partículas incidentes forem idênticas às do alvo, obtêm-se, de (129), (109) e (110),

$$\frac{d\sigma_{1=2}^{\text{lab}}}{d\omega}(\chi, \psi) = \left(\frac{q_1 q_2}{E_{\text{lab}}} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \chi} + \frac{1}{\cos^4 \chi} \right) \cos \chi \quad (136)$$

$$\frac{d\sigma_{1=2}^{\text{c.m.}}}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \left(\frac{q_1 q_2}{2E^*} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} \right) \quad (137)$$

Exemplo. Consideremos o espalhamento de uma carga puntiforme positiva ze por outra carga puntiforme e positiva Ze blindada por uma casca esférica de raio a e carga $-Ze$ uniformemente distribuída:

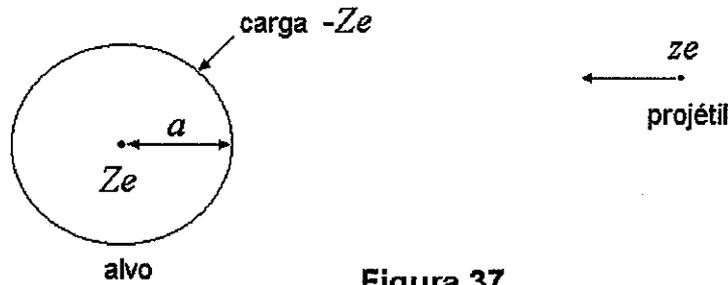


Figura 37

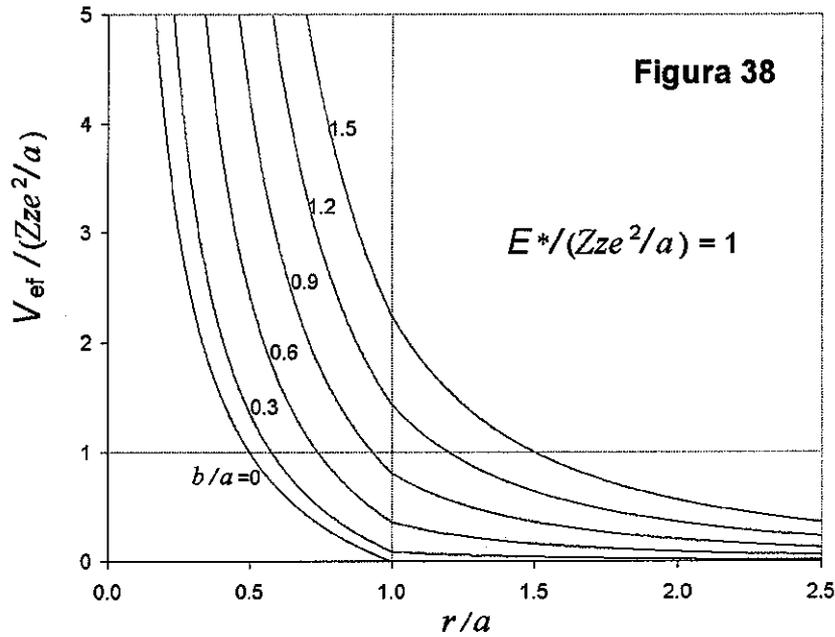
A energia potencial da interação entre o projétil e o alvo é dada por

$$V(r) = \begin{cases} \left(\frac{Zze^2}{r} - \frac{Zze^2}{a} \right) & , \quad r \leq a, \\ 0 & , \quad r \geq a. \end{cases} \quad (138)$$

Nos pontos fora da esfera, a carga Ze é blindada pela carga $-Ze$ diluída na superfície esférica, enquanto que nos pontos internos o campo elétrico é o da carga puntiforme Ze . Para uma energia E^* e um parâmetro de impacto b , temos a energia potencial efetiva

$$V_{\text{ef}}(r) = \begin{cases} \left(\frac{Zze^2}{r} - \frac{Zze^2}{a} \right) + E^* \frac{b^2}{r^2} & , \quad r \leq a , \\ E^* \frac{b^2}{r^2} & , \quad r \geq a , \end{cases} \quad (139)$$

Na figura seguinte, mostramos $V_{\text{ef}}(r)$ para os valores indicados de E^* e b :



A curva correspondente a $b/a = 0$ é evidentemente a da própria energia potencial. A linha horizontal mostrada na figura corresponde a uma ordenada de valor $E^* / (Zze^2/a)$. Para um dado b , a distância de máxima aproximação, $r_{\text{min}}(b)$, determinada pela condição $V_{\text{ef}}(r_{\text{min}}) = E^*$, ou seja, pela abcissa da interseção da linha horizontal com a curva correspondente a esse valor de b , é tanto menor quanto menor o parâmetro de impacto. Se $b > a$, o projétil não penetra na esfera e a sua trajetória é totalmente retilínea. Se $b < a$, a trajetória é retilínea até o projétil penetrar na superfície esférica, numa posição dada por um ângulo

$$\Phi = \arcsen \frac{b}{a} = \arctan \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} ; \quad (140)$$

dentro da esfera, o projétil fica sujeito apenas à repulsão coulombiana devida à carga puntiforme Ze e a sua trajetória é então um segmento de hipérbole com vértice no ponto $(r_{\text{min}}, \bar{\phi})$; após o projétil emergir da esfera numa posição dada pelo ângulo $2\bar{\phi} - \Phi$, a

trajetória é novamente uma semi-reta, de coeficiente angular $\tan(2\bar{\phi})$:

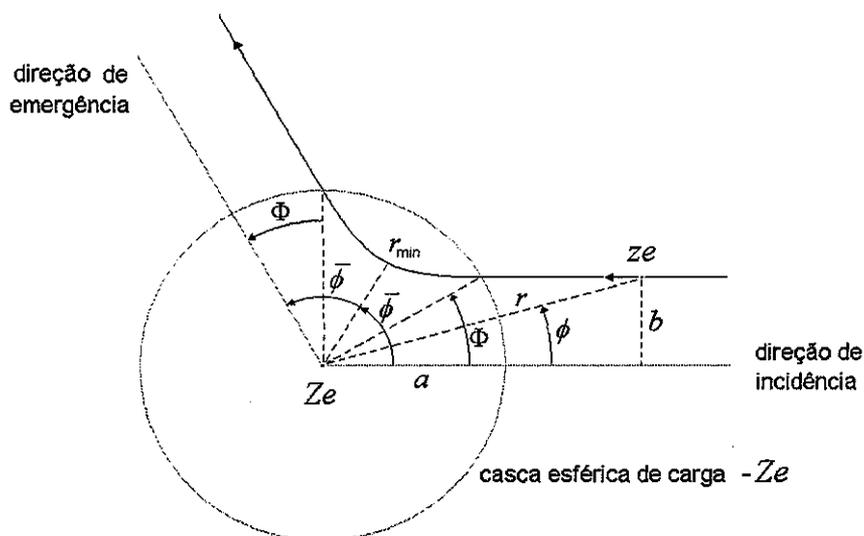


Figura 39

A equação da trajetória dentro da esfera pode ser determinada a partir da equação diferencial (121), que é escrita agora como

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{\xi}{b^2} \quad , \quad (141)$$

onde

$$\xi = -\frac{Zze^2}{2E^*} \quad . \quad (142)$$

Resolvendo a equação (141) com as condições

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{\phi=\bar{\phi}} = \frac{1}{r_{\min}} \quad , \quad \left(\frac{d}{d\phi} \frac{1}{r}\right)_{\phi=\bar{\phi}} = 0 \quad , \quad (143)$$

vamos obter

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{\xi}{b^2}\right) \cos(\phi - \bar{\phi}) + \frac{\xi}{b^2} \quad . \quad (144)$$

Para a distância de máxima aproximação, obtém-se

$$r_{\min} = \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + \left(1 - 2\frac{\xi}{a}\right)b^2}}{1 - 2\frac{\xi}{a}} \quad . \quad (145)$$

Substituindo esse valor em (144), temos finalmente

$$\frac{1}{r} = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \left(1 - 2\frac{\xi}{a}\right)b^2} \cos(\phi - \bar{\phi})}{b^2}, \quad \Phi \leq \phi \leq 2\bar{\phi} - \Phi, \quad (146)$$

que é a equação de um arco de hipérbole. O valor do ângulo $\bar{\phi}$, ainda não conhecido, pode ser obtido fazendo-se $r = a$ e $\phi = 2\bar{\phi} - \Phi$ em (146), isto é,

$$\bar{\phi} = \Phi + \arccos \frac{\frac{b^2}{a} - \xi}{\sqrt{\xi^2 + \left(1 - 2\frac{\xi}{a}\right)b^2}}. \quad (147)$$

Utilizando a relação

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

podemos escrever ainda

$$\bar{\phi} = \Phi + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\frac{b}{a} - \frac{\xi}{b}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}. \quad (148)$$

Levando em conta a expressão (140) para o ângulo Φ e introduzindo as quantidades

$$\zeta = \frac{\xi}{a} = \frac{1}{2} [(-Zze^2/a)/E^*], \quad \eta = \frac{b}{a}, \quad (149)$$

temos finalmente

$$\bar{\phi} = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} + \arctan \frac{\zeta - \eta}{\sqrt{1-\eta^2}}. \quad (150)$$

Nas figuras seguintes, mostramos as trajetórias para $E^* = Zze^2/a$ e $b/a = 0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2$ e 1.5 :

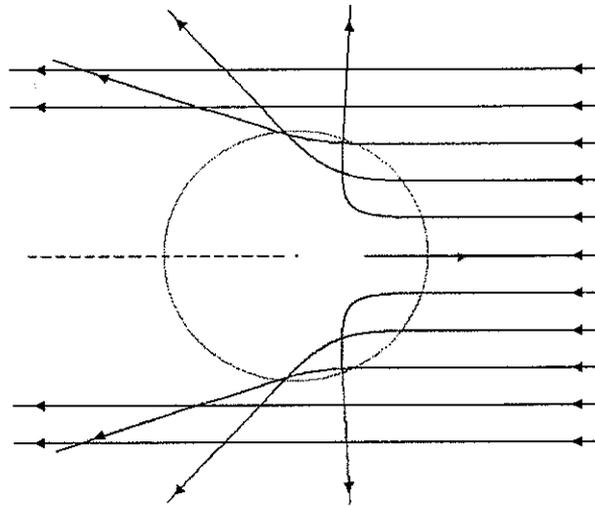
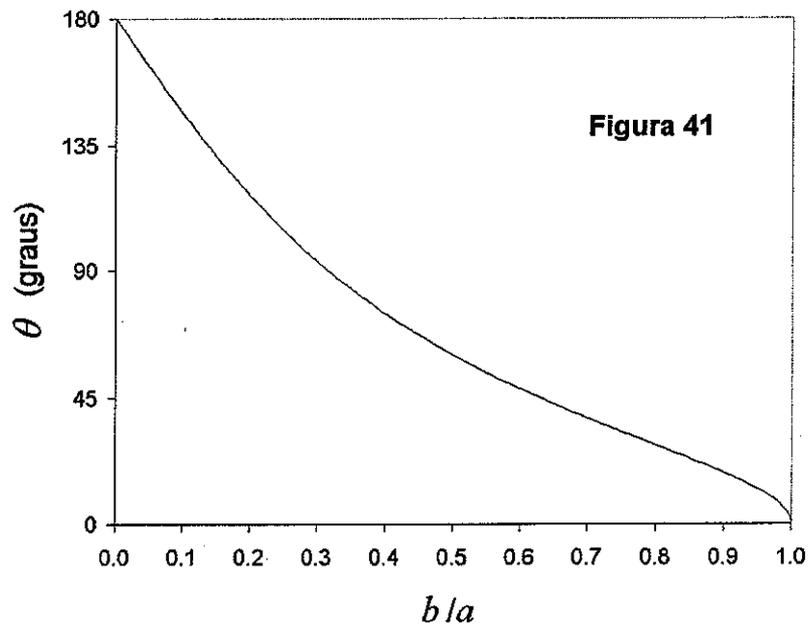


Figura 40

Ângulo de espalhamento: Substituindo (150) na expressão $\theta = \pi - 2\bar{\phi}$, iremos obter

$$\theta = 2 \arctan \frac{-\zeta \sqrt{1-\eta^2}}{1-\zeta} \quad (151)$$

Na figura seguinte, mostramos o gráfico de θ em função de b para $E^* = Zze^2 / a$:



Determinação da expressão da seção de choque: Fazendo $\tan(\theta/2) = T$, obtemos, de (151),

$$T^2(1-\zeta)^2\eta^2 = \zeta^2(1-\eta^2) \quad ,$$

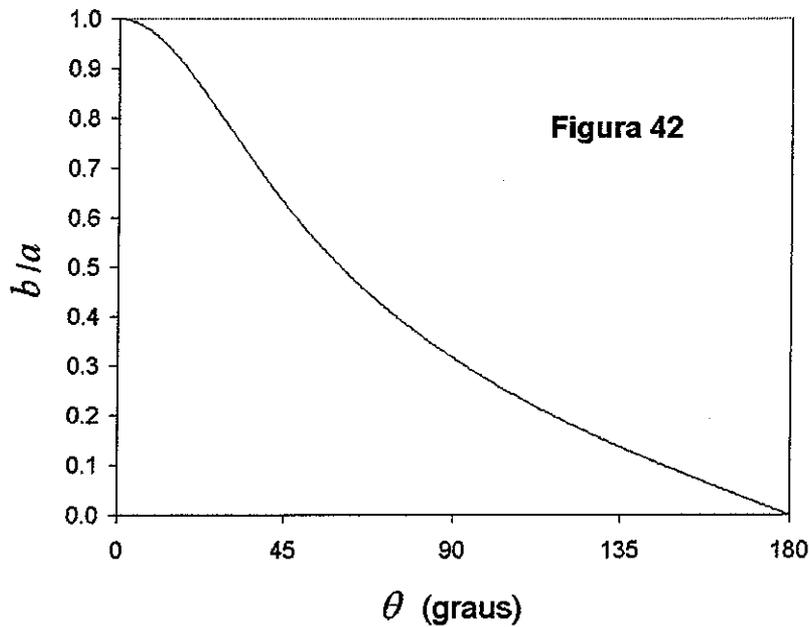
de onde resulta

$$\eta^2 = \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + (1-\zeta)^2 T^2} \quad (152)$$

e, portanto, a relação inversa da relação (151) é dada por

$$\frac{b}{a} = \frac{-\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + (1-\zeta)^2 \tan^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (153)$$

Na figura seguinte, mostramos o gráfico $b \times \theta$, para $E^* = Zze^2 / a$:



Para obter a expressão da seção de choque, é conveniente escrever a expressão (97) como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\text{sen}\theta} \left| \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (b^2) \right| = \frac{1}{2} a^2 \frac{1}{\text{sen}\theta} \left| \frac{d}{dT} (\eta^2) \frac{dT}{d\theta} \right|$$

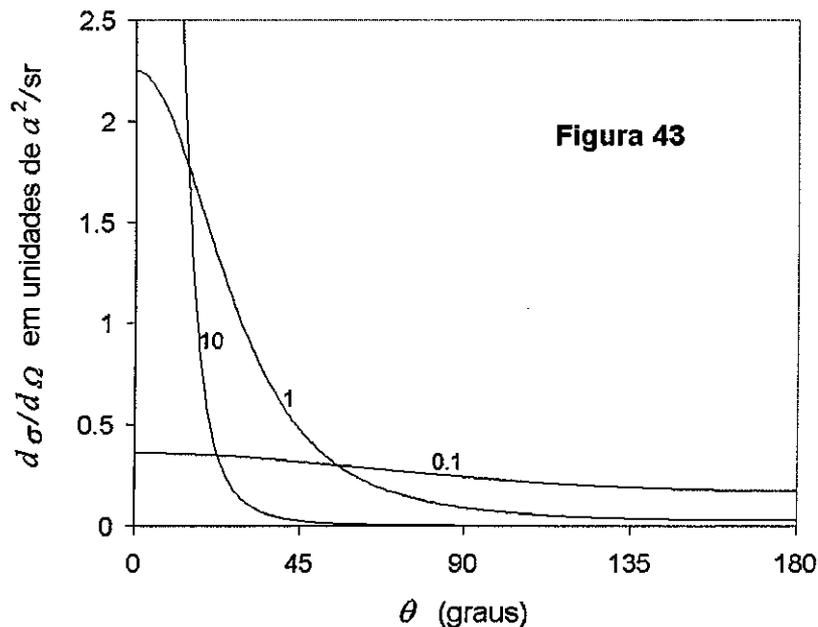
Temos então

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \left| \frac{-\zeta^2}{[\zeta^2 + (1-\zeta)^2 T^2]^2} (1-\zeta)^2 2T \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \right|$$

e, assim,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\xi^2}{4} \frac{(1-\zeta)^2}{\left[\zeta^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (1-\zeta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2} \quad (154)$$

Na figura seguinte, mostramos o gráfico de $d\sigma/d\Omega$ para os valores indicados de $E^*/(Zze^2/a)$:



Para $E^* \gg Zze^2/a$, a expressão (154) reduz-se à do espalhamento de Rutherford [ver expressão (128)], uma vez que $\zeta \rightarrow 0$ nesse limite. Isso significa que o espalhamento de partículas de energias suficientemente altas é pouco influenciado pela carga distribuída na casca esférica, bastando, nessas circunstâncias, considerar a deflexão produzida só pela carga puntiforme presente no centro da esfera. Na figura seguinte, mostramos a razão entre a seção de choque dada por (154) e a seção de choque de Rutherford [expressão (128)] para as energias $E^*/(Zze^2/a) = 10, 100$ e 1000 :

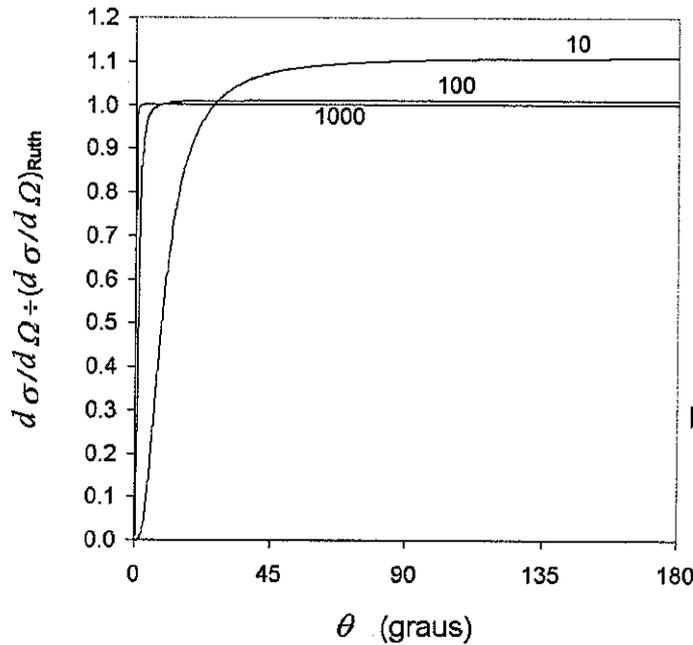


Figura 44

Vemos que $d\sigma/d\Omega$ realmente tende a $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Ruth}}$ à medida que E^* cresce. No caso do espalhamento de partículas α de energia $E_{\text{lab}} = 5.30 \text{ MeV}$ por ouro, se aproximamos o efeito dos elétrons do átomo de ouro pelo de uma casca esférica de raio $a = 1.5 \text{ angström}$ e carga $-79e$ uniformemente distribuída, temos $E^*/(Zze^2/a) \approx 3000$ e o espalhamento é determinado essencialmente pela carga positiva do núcleo do átomo de ouro.

Para finalizar, como a interação dada por (138) tem um alcance finito, a , podemos fazer um teste do resultado (154) calculando a seção de choque total σ a partir da expressão (104) e comprovando que $\sigma = \pi a^2$. De fato, substituindo (154) em (104), vem

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{\xi^2}{4} \frac{(1-\zeta)^2}{\left[\zeta^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (1-\zeta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2} \\ &= \pi \xi^2 (1-\zeta)^2 \int_0^\pi d\theta \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{1}{\left[\zeta^2 + (1-2\zeta) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2} \end{aligned}$$

Fazendo $t = \sin^2 \frac{\theta}{2}$, temos então

$$\sigma = \pi \xi^2 (1-\zeta)^2 \int_0^1 \frac{dt}{[\zeta^2 + (1-2\zeta)t]^2} = \pi \xi^2 (1-\zeta)^2 (-) \frac{1}{1-2\zeta} \left[\zeta^2 + (1-2\zeta)t \right]^{-1} \Big|_0^1$$

$$= \pi \xi^2 \frac{(1-\zeta)^2}{1-2\zeta} \left[\frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{(1-\zeta)^2} \right] = \pi \frac{\xi^2}{\zeta^2} = \pi a^2 ,$$

que é o resultado esperado.

Observação: Se a partícula incidente é um elétron (carga $-e$), continuam valendo as equações (146), (140) e (150) para a trajetória dentro da região esférica e a expressão (154) para a seção de choque, mas sendo agora $\xi [= (Ze^2)/(2E^*)]$ e $\zeta [= \xi/a]$ quantidades positivas. A equação (146) é, então, a de um arco de elipse, parábola ou hipérbole, dependendo do sinal de $1-2(\xi/a) [= 1-(Ze^2/a)/E^*]$, isto é, se E^* é menor, igual ou maior do que Ze^2/a . Para $E^* = (Ze^2/a)/2$ e qualquer parâmetro de impacto $b < a$, o arco de elipse tem o semi-eixo maior paralelo à direção de incidência e, por causa disso, ocorre só retroespalhamento quando a energia tem esse valor especial. Nas figuras seguintes, mostramos as trajetórias para $E^* = (Ze^2/a)/4$, $(Ze^2/a)/2$ e $2 \times (Ze^2/a)$, respectivamente, e $b/a = 0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2$ e 1.5 :

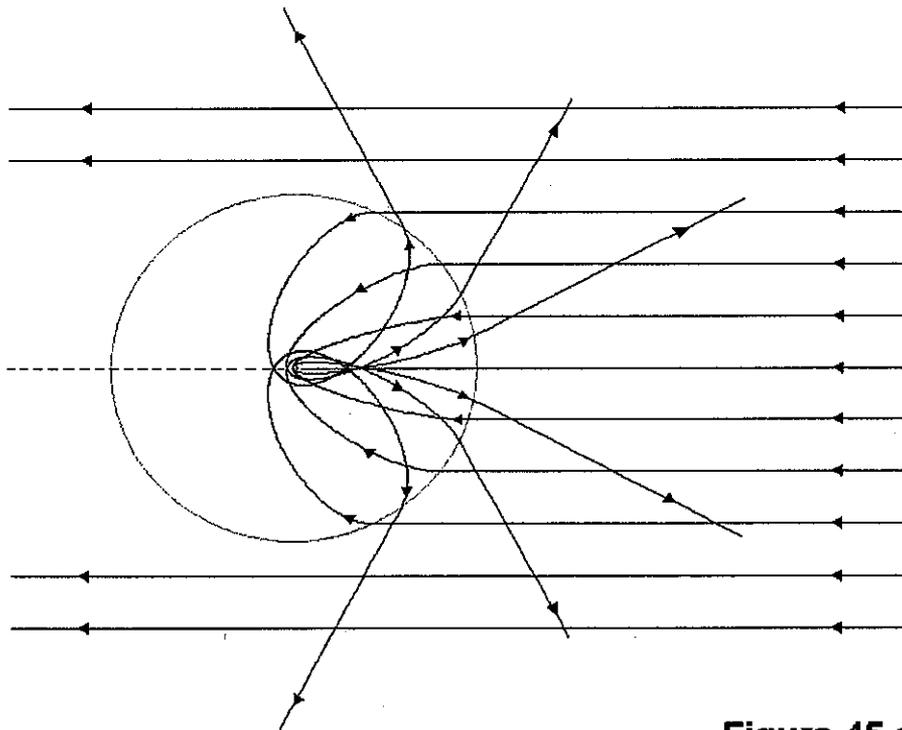


Figura 45.a

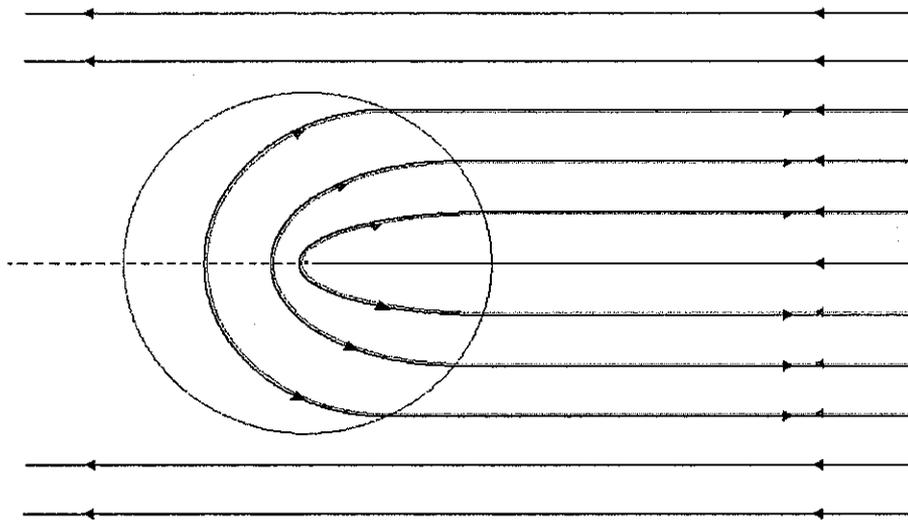


Figura 45.b

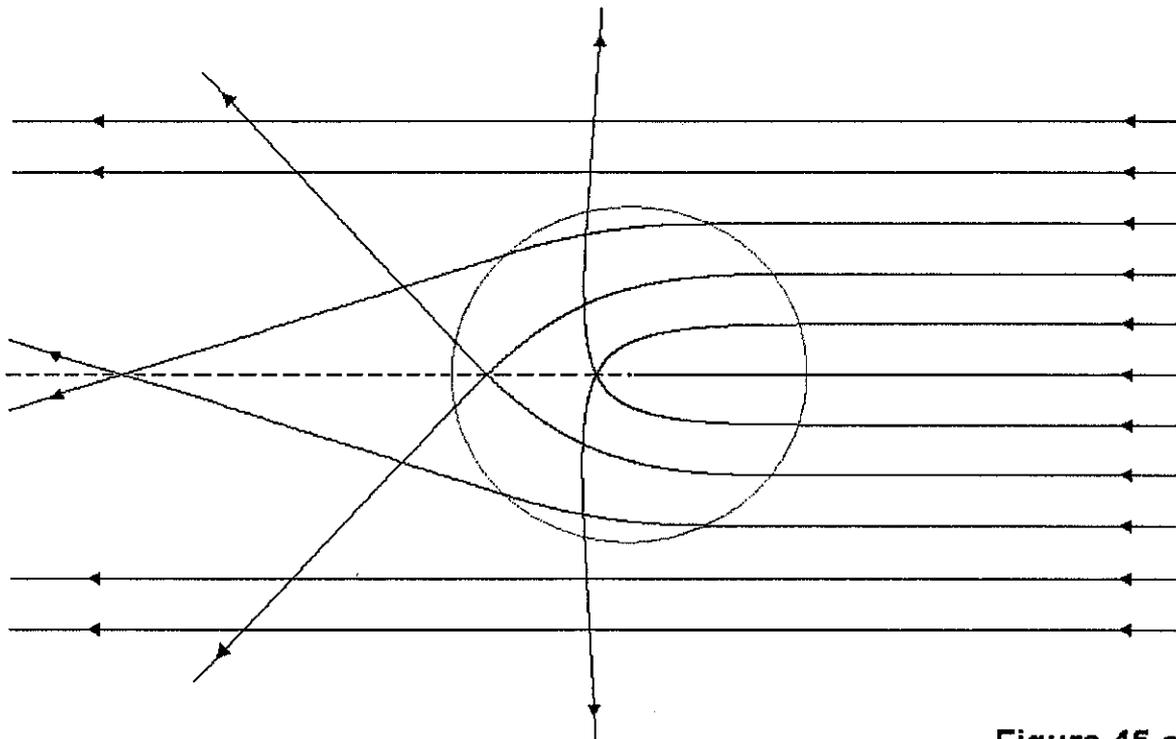


Figura 45.c

Na figura seguinte, mostramos o gráfico de $d\sigma/d\Omega$ para os valores indicados de $E^*/(Ze^2/a)$:

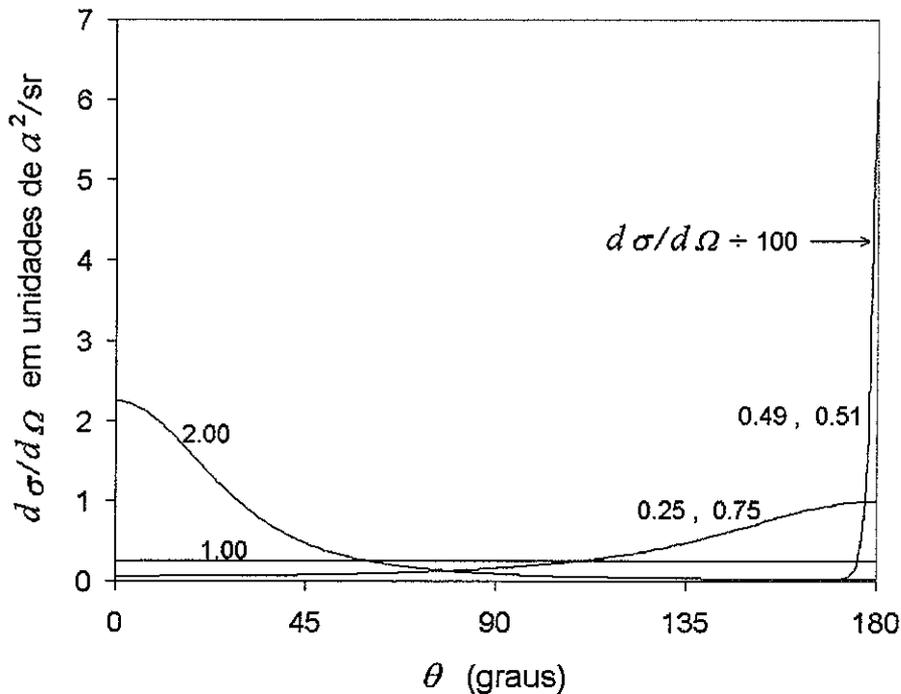


Figura 46

Nota-se que, que o espalhamento vai se concentrando na direção traseira à medida que E^* se aproxima do valor $(Ze^2/a)/2$ e, no limite, ocorre só retroespalhamento. Esse espalhamento concentrado todo na direção traseira é um caso especial de um fenômeno conhecido como *glória*, que ocorre quando se tem um retroespalhamento em algum parâmetro de impacto diferente de zero, o que, pela expressão (97), resulta numa seção de choque infinita na direção traseira. No exemplo que estamos considerando, a seção de choque na direção traseira é, na verdade, finita para toda energia E^* diferente de $(Ze^2/a)/2$, e tende a infinito somente no limite $E^* \rightarrow (Ze^2/a)$.

Da mesma forma que no caso anterior, também quando o projétil é um elétron, a seção de choque tende para a seção de choque de Rutherford se a energia é suficientemente alta. No caso do espalhamento de um elétron de 25 keV por um átomo de hidrogênio, se o efeito do elétron atômico é aproximado pelo de uma casca esférica de raio $a = a_0$ (raio de Bohr) = 0.529 angström e carga $-e$ uniformemente distribuída, temos $E^*/(e^2/a) \approx 900$ e o espalhamento se deve essencialmente ao próton localizado no centro do átomo.

Exemplo. Consideremos o espalhamento mútuo de duas partículas que tem uma energia potencial de interação

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \text{ para } r < a, \\ 0 & , \text{ para } r > a, \end{cases} \quad (155)$$

V_0 sendo uma constante positiva (Fig. 47.a). Essa forma de $V(r)$ é uma idealização de uma função contínua que tem um valor constante, $-V_0$, de $r=0$ até muito próximo de $r=a$, e reduz-se a zero numa vizinhança bastante estreita de a (Fig. 47.b):

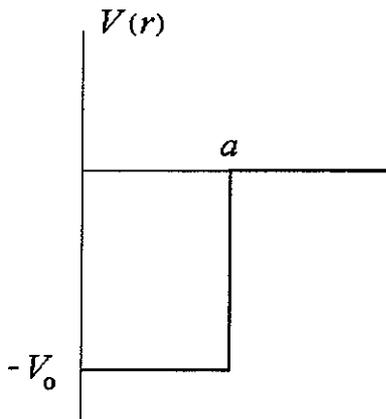


Figura 47.a

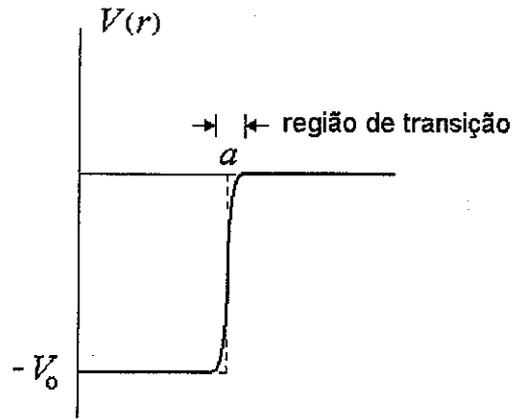


Figura 47.b

A energia potencial dada por (155) é denominada *poço quadrado*. Ela é utilizada para descrever de um modo grosseiro a interação nuclear de curto alcance entre um nêutron e um próton ou a interação nuclear média entre um núcleon e um núcleo atômico. Para a energia potencial efetiva, temos

$$V_{\text{ef}}(r) = \begin{cases} -V_0 + E^* \frac{b^2}{r^2} & , \text{ para } r < a, \\ E^* \frac{b^2}{r^2} & , \text{ para } r > a. \end{cases} \quad (156)$$

Na figura seguinte, mostramos V_{ef} para os valores indicados da energia e do parâmetro de impacto:

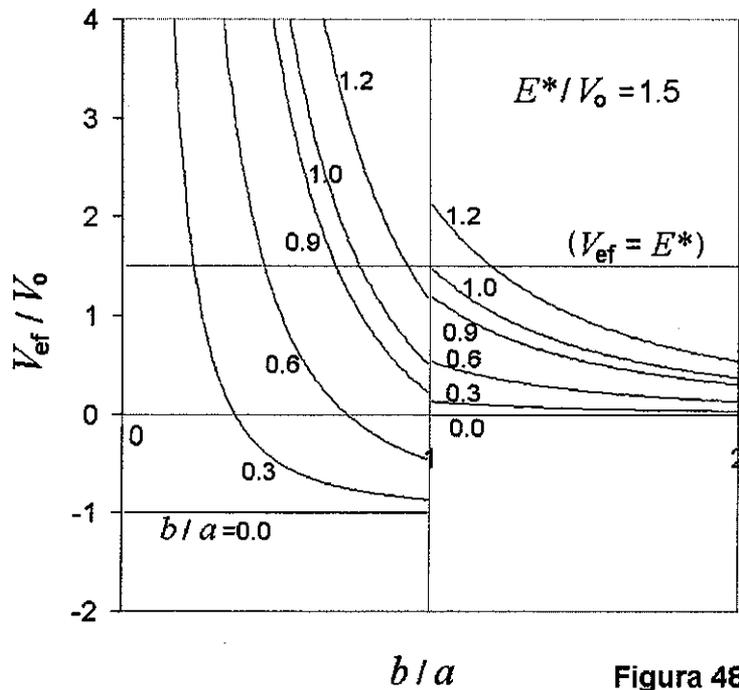


Figura 48

Vemos que a distância de maior aproximação, r_{\min} , diminui com o parâmetro de impacto b , mas ela exibe uma descontinuidade em $b = a$, uma vez que $r_{\min}(a^-) < r_{\min}(a^+) = a$.

Uma vez que a força é nula tanto fora como dentro da região esférica de raio a , o movimento é constituído de trechos retilíneos a mudança de direção ocorrendo quando a partícula sofre a ação de uma força central muito intensa ao cruzar a zona de transição brusca da energia potencial. Na figura seguinte, mostramos a trajetória do movimento relativo do projétil com respeito alvo:

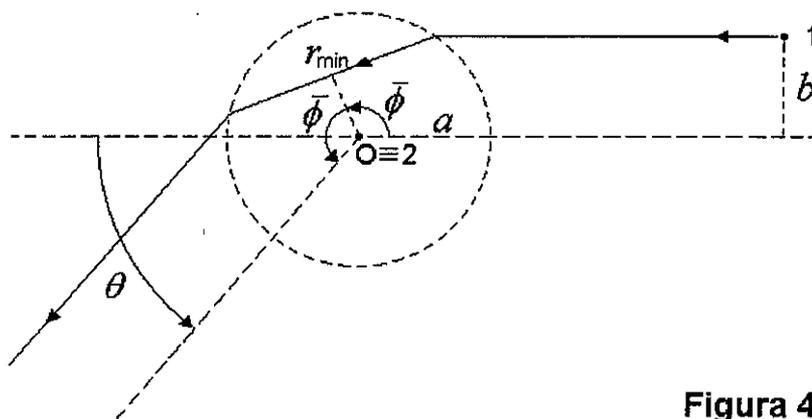


Figura 49

A trajetória é assim análoga a de uma raio luminoso que é refratado por uma esfera dielétrica homogênea de índice de refração maior do que 1. Obviamente só são espalhadas as partículas que tem parâmetro de impacto $b < a$. A distância de maior aproximação, r_{\min} , é dada por

$$1 + \frac{V_0}{E^*} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0 \quad , \quad (157)$$

isto é,

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{1 + \frac{V_0}{E^*}}} = \frac{b}{n} \quad , \quad (158)$$

após definirmos

$$n = \sqrt{1 + \frac{V_0}{E^*}} \quad . \quad (159)$$

Temos agora, de (69),

$$\bar{\phi} = \int_{r_{\min}}^a \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 + \frac{V_0}{E^*} - \frac{b^2}{r^2}}} + \int_a^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}} \quad .$$

Efetuada a mudança de variável $x = b/r$ e levando em conta a definição (159), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \int_{\frac{b}{a}}^n \frac{dx}{\sqrt{n^2 - x^2}} + \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{n} \Big|_{\frac{b}{a}}^n + \arcsen x \Big|_0^{\frac{b}{a}} \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsen \frac{b}{na} + \arcsen \frac{b}{a} \quad . \end{aligned} \quad (160)$$

Para o ângulo de espalhamento $\theta = 2\bar{\phi} - \pi$, temos, portanto,

$$\theta = 2 \left(\arcsen \frac{b}{a} - \arcsen \frac{b}{na} \right) \quad . \quad (161)$$

Uma vez que $n > 1$, a diferença entre os dois arcos senos é máxima quando $b \rightarrow a$, isto é,

$$\theta_{\max} = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen \frac{1}{n} \right] = 2 \arcsen \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = 2 \arccos \frac{1}{n} \quad . \quad (162)$$

Por exemplo, se $E^* = 1.5 \times V_0$, obtem-se $\theta_{\max} = 78.46^\circ$. Na figura seguinte, mostramos o gráfico de $\theta \times b$ para esse valor da energia:

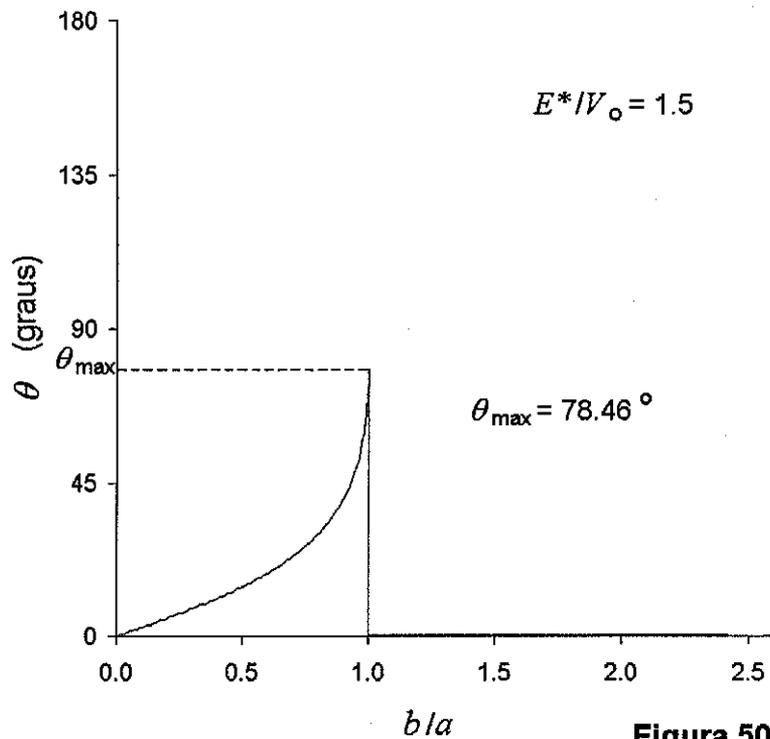


Figura 50

Na figura seguinte, mostramos as trajetórias para $E^* = 1.5 \times V_0$ e para os valores indicados de bla :

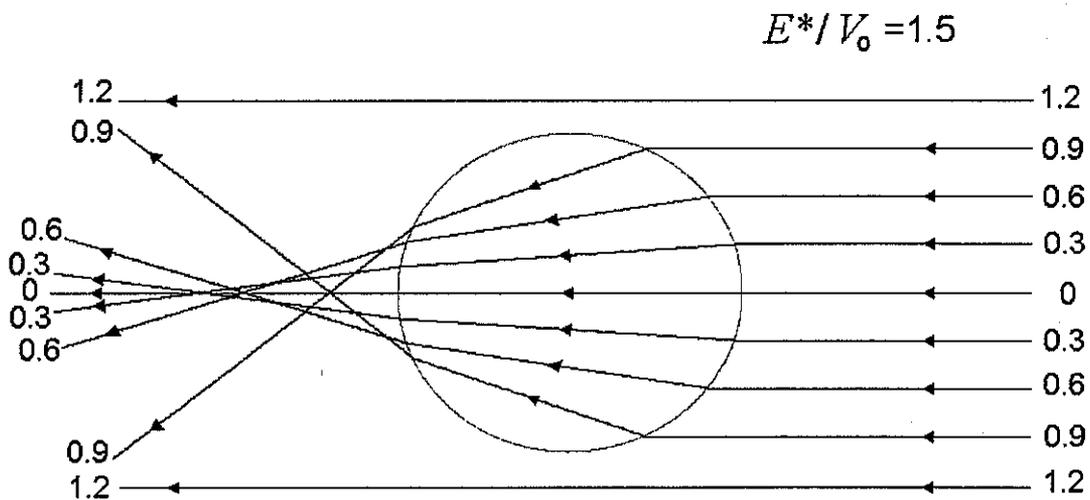


Figura 51

Observação: A expressão (160) para o ângulo $\bar{\phi}$ foi obtida seguindo o procedimento geral, que se utiliza da integral (69). No caso específico do espalhamento por um poço quadrado, $\bar{\phi}$ pode, no entanto, ser determinado mediante uma aplicação direta das leis de conservação.

Para isso, consideramos novamente a trajetória da fig. 49, mas introduzindo agora o ângulo α que a direção de incidência faz com a normal e o ângulo de refração β :

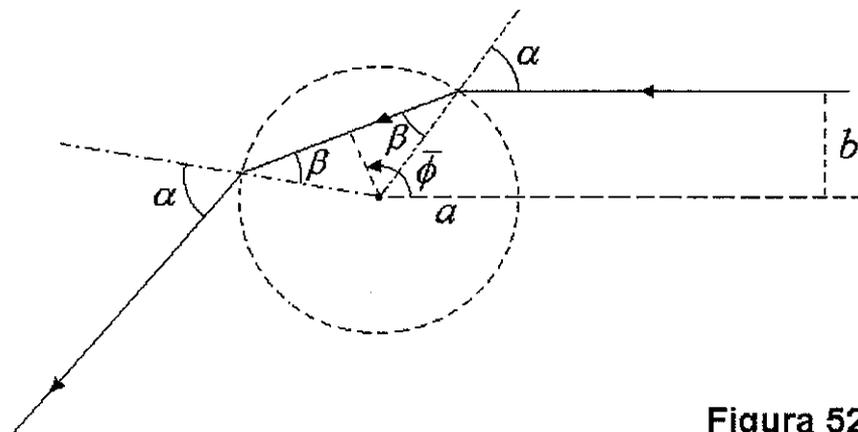


Figura 52

O valor do momento angular dentro da região esférica é o mesmo que na parte externa, o mesmo valendo para a energia total. Temos assim

$$\mu v a \operatorname{sen} \beta = \mu v_i a \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad (163)$$

$$\frac{1}{2} \mu v^2 - V_o^2 = \frac{1}{2} \mu v_i^2 \quad , \quad (164)$$

μ sendo a massa reduzida, v a velocidade no interior da região esférica e v_i a velocidade inicial. De (163), obtemos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{v}{v_i} \quad , \quad (165)$$

enquanto que, de (164), resulta

$$\frac{v}{v_i} = n \quad , \quad (166)$$

n sendo definido como em (159). Substituindo (166) em (165), temos então

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = n \quad , \quad (167)$$

que é uma relação semelhante à da lei de Snellius para a refração da luz, a diferença sendo que o índice de refração é agora a razão entre a velocidade após a refração e a velocidade de incidência, e não o inverso dessa razão. Substituindo as expressões

$$\alpha = \operatorname{arcsen} \frac{b}{a} \quad , \quad \beta = \operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{n} = \operatorname{arcsen} \frac{b}{na}$$

na relação

$$\bar{\phi} = \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta \quad ,$$

que decorre da figura anterior, obtemos para $\bar{\phi}$ novamente a expressão (160).

Determinemos agora a relação inversa, $b = b(\theta)$. Da relação (161), obtemos

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{n^2 a^2}} - \frac{b}{na} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad , \quad (168)$$

isto é,

$$na^2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \sqrt{n^2 a^2 b^2 - b^4} - \sqrt{a^2 b^2 - b^4} \quad .$$

Definindo

$$s = na^2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad , \quad x = b^2 \quad , \quad (169)$$

temos então

$$s = \sqrt{n^2 a^2 x - x^2} - \sqrt{a^2 x - x^2} \quad . \quad (170)$$

Quadrando essa relação, vamos chegar a

$$(1+n^2)a^2 x - 2x^2 - s^2 = 2\sqrt{n^2 a^4 x^2 - (1+n^2)a^2 x^3 + x^4} \quad .$$

Repetindo a operação, teremos um cancelamento dos termos em x^3 e x^4 , ficando com uma equação apenas do segundo grau em x :

$$[(1+n^2)^2 a^4 - 4n^2 a^4 + 4s^2]x^2 - 2(1+n^2)a^2 s^2 x + s^4 = 0 \quad , \quad (171)$$

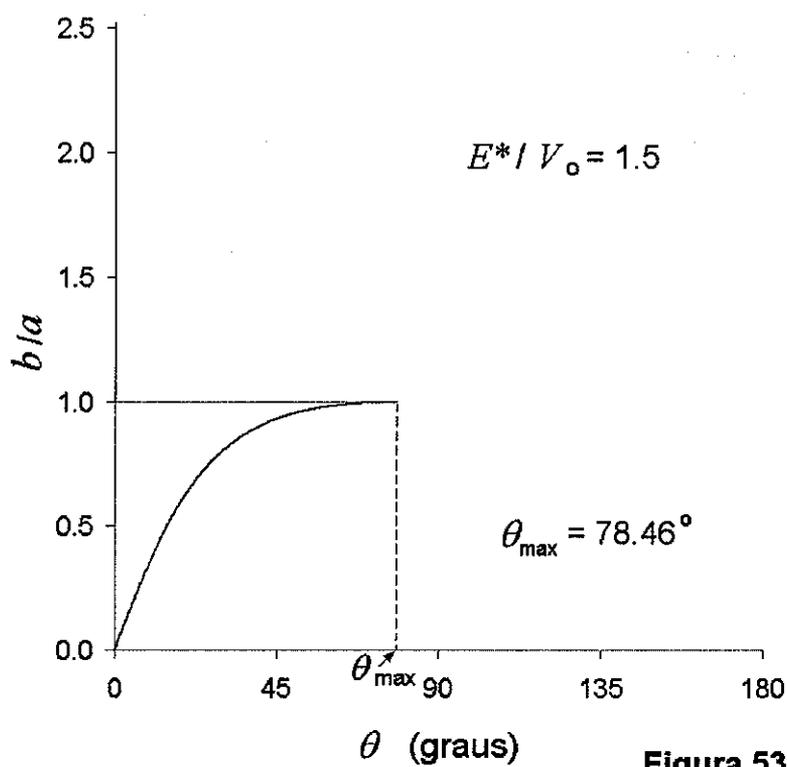
cujas soluções são

$$x = \frac{(1+n^2)a^2 s^2 \pm 2s^2 \sqrt{n^2 a^4 - s^2}}{(1+n^2)^2 a^4 - 4n^2 a^4 + 4s^2} = s^2 \frac{1}{(1+n^2)a^2 \mp 2\sqrt{n^2 a^4 - s^2}} \quad . \quad (172)$$

Dessas, somente a que corresponde ao sinal superior satisfaz a condição $x(\theta_{\max}) = a^2$. Considerando então essa solução e utilizando (169), obtemos finalmente

$$b^2 = a^2 \frac{n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{1+n^2 - 2n \cos \frac{\theta}{2}} \quad . \quad (173)$$

Na figura seguinte, mostramos o gráfico de $b = b(\theta)$ para $E^* = 1.5 \times V_0$:



Consideremos agora a seção de choque. Da relação (173), obtemos

$$b \frac{db}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (b^2) = \frac{1}{2} a^2 n^2 \sin \frac{\theta}{2} \frac{(n \cos \frac{\theta}{2} - 1)(n - \cos \frac{\theta}{2})}{(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\theta}{2})^2}, \quad (174)$$

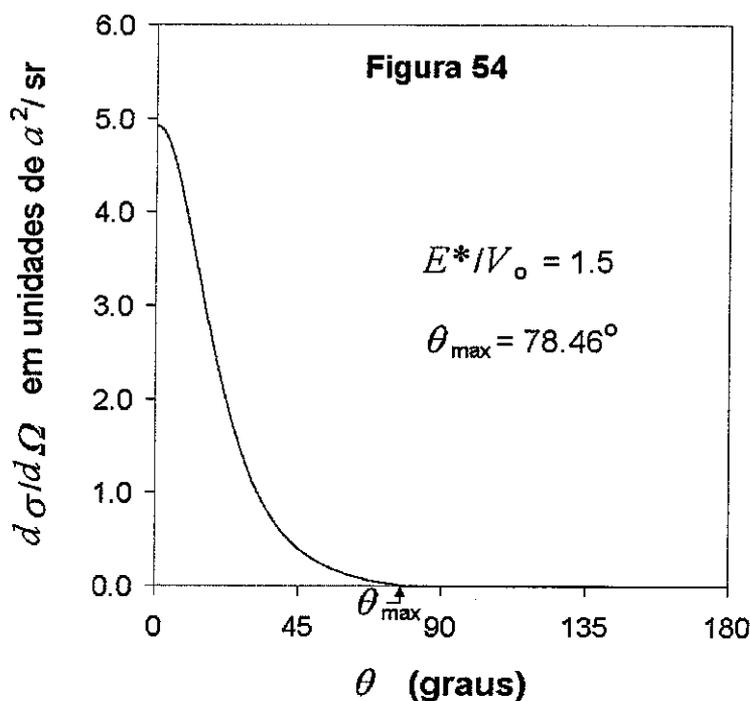
e o sinal dessa expressão é não negativo, uma vez que $n > 1 \geq \cos(\theta/2)$ e, para $\theta \leq \theta_{\max}$, $n \cos(\theta/2) \geq n \cos(\theta_{\max}/2) = n \times (1/n) = 1$. Substituindo (174) na expressão $d\sigma/d\Omega = (b/\sin\theta) |db/d\theta|$, vamos obter finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\theta}{2}} \frac{(n \cos \frac{\theta}{2} - 1)(n - \cos \frac{\theta}{2})}{(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\theta}{2})^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}, \quad (175)$$

e, como não existem partículas espalhadas em ângulos acima de θ_{\max} ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 0 \quad , \quad \text{para } \theta \geq \theta_{\max} \quad . \quad (176)$$

Na figura seguinte, mostramos o gráfico da seção de choque diferencial para uma energia $E^* = 1.5 \times V_0$:



Pode-se constatar, utilizando (175) e (176), que a seção de choque total é de fato igual a área da seção transversal circular exibida pela região de interação:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \sin\theta \frac{a^2 n^2}{4\cos\frac{\theta}{2}} \frac{(n\cos\frac{\theta}{2} - 1)(n - \cos\frac{\theta}{2})}{(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2})^2} \\ &= \pi a^2 . \end{aligned}$$

Exemplo. Determinar o espalhamento mútuo de duas partículas cuja energia potencial de interação é o *poço parabólico*

$$V(r) = \begin{cases} -(1 - \frac{r^2}{R^2})V_0 & , \quad r \leq R, \\ 0 & , \quad r \geq R, \end{cases} \quad (177)$$

$V_0 > 0$ sendo a profundidade do poço e R a distância a partir da qual a interação é nula :

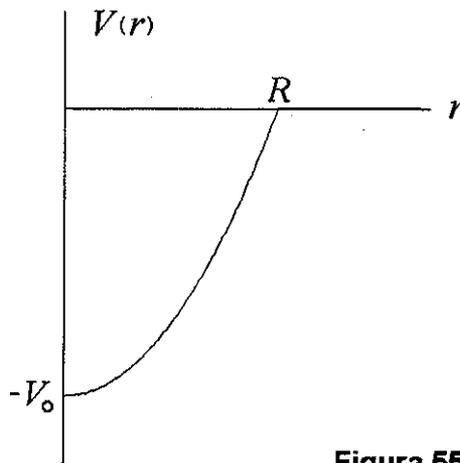


Figura 55

A energia potencial efetiva correspondente é dada por

$$V_{\text{ef}}(r) = \begin{cases} -(1 - \frac{r^2}{R^2})V_0 + E^* \frac{b^2}{r^2} & , \quad r \leq R, \\ E^* \frac{b^2}{r^2} & , \quad r \geq R, \end{cases} \quad (178)$$

e está mostrada nas figuras seguintes, para os valores indicados de E^* e b . A distância de

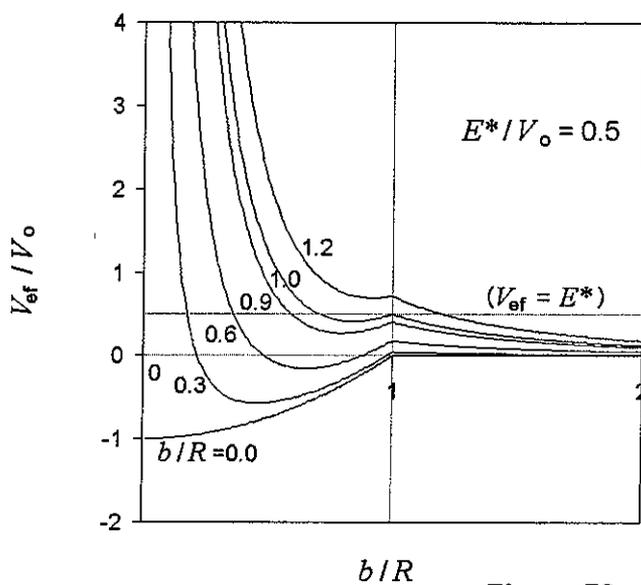


Figura 56.a

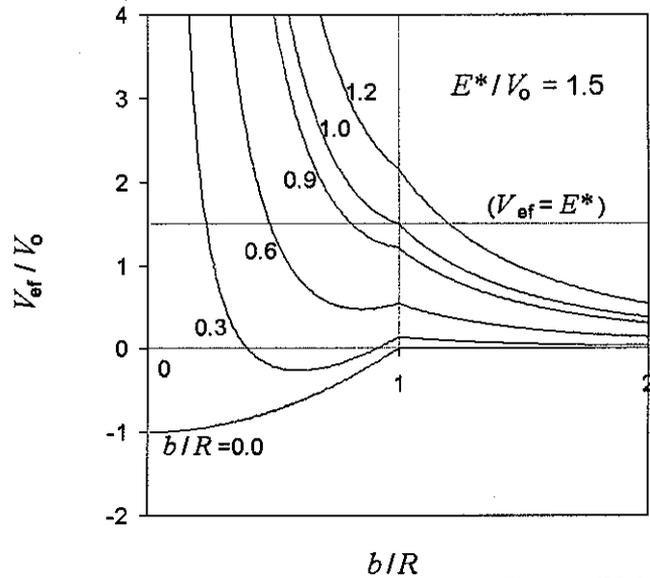


Figura 56.b

maior aproximação $r_{\min}(b)$ aumenta com o parâmetro de impacto, mas, para $E^* < V_0$ (como no caso da Fig.56.a), há uma descontinuidade em $b = R$, pois $r_{\min}(R-) < r_{\min}(R+) = R$. Por causa disso, quando $b \rightarrow R-$, o ângulo de espalhamento não irá tender para o valor zero observado para b acima R . No entanto, se $E^* > V_0$, $r_{\min}(b)$ é contínua e o ângulo de espalhamento irá forçosamente retornar para zero quando $b \rightarrow R-$.

Para $b > R$, o projétil não atinge a região onde existe interação e a sua trajetória é totalmente retilínea. Se $b < R$, a trajetória é retilínea até o projétil penetrar na região de interação, numa posição dada por um ângulo

$$\Phi = \arcsen \frac{b}{R} = \arctan \frac{\frac{b}{R}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{R^2}}} ; \quad (179)$$

na região de interação, a força é a de um oscilador harmônico isotrópico e a trajetória é então um arco de elipse com vértice no ponto $(r_{\min}, \bar{\phi})$; após o projétil emergir da região de interação numa posição dada pelo ângulo $2\bar{\phi} - \Phi$, a trajetória é novamente uma semi-reta, de coeficiente angular $\tan(2\bar{\phi})$:

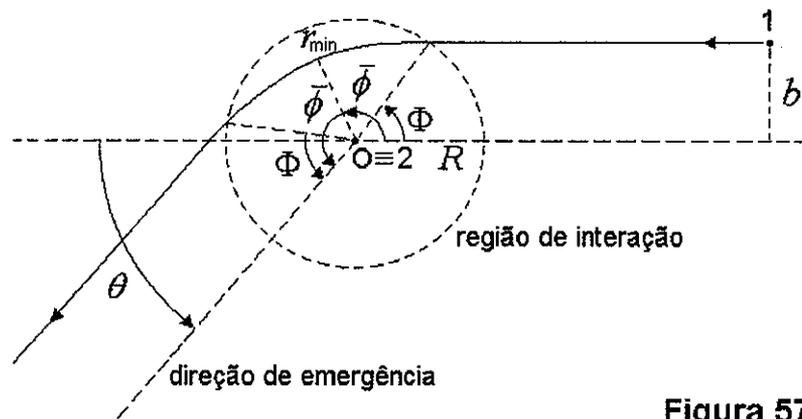


Figura 57

Para obter a equação do arco de elipse, vamos escrever a energia potencial na região $r \leq R$ na forma $V(r) = -V_0 + (1/2)k r^2$, onde

$$k = 2 \frac{V_0}{R^2} \quad , \quad (180)$$

e utilizar a relação (64) escrita como

$$\bar{\phi} - \phi = \int_r^{r_{\min}} \frac{\frac{b}{r'^2}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{E^*} [-V_0 + \frac{1}{2}kr'^2] - \frac{b^2}{r'^2}}} dr' \quad , \quad (181)$$

sendo essa expressão válida até o projétil atingir o ponto de maior aproximação $(r_{\min}, \bar{\phi})$, isto é, no trecho da trajetória desenhado em linha cheia na figura seguinte:

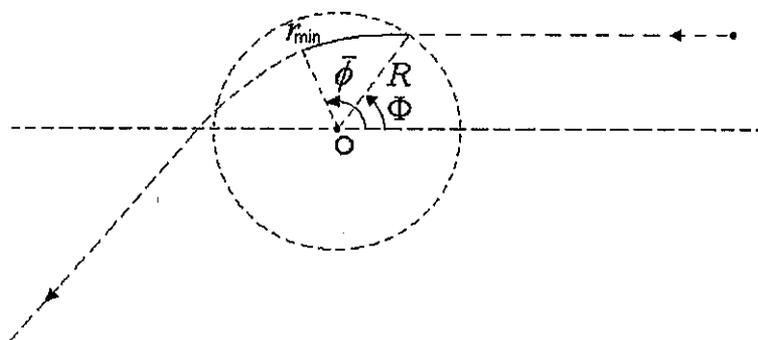


Figura 58

Para calcular a integral (181), introduzimos uma nova variável de integração, $s = r'^2$, obtendo

$$\bar{\phi} - \phi = \frac{1}{2} b \int_{r_{\min}^2}^{r^2} \frac{ds}{s \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{k}{E^*} s^2 + (1 + \frac{V_0}{E^*}) s - b^2}} \quad (182)$$

Para $b < R$ e $E^* \neq V_0$, temos

$$(1 + \frac{V_0}{E^*})^2 - 4(-\frac{1}{2} \frac{k}{E^*})(-b^2) = (1 + \frac{V_0}{E^*})^2 - 4 \frac{V_0}{E^*} \frac{b^2}{R^2} > (1 + \frac{V_0}{E^*})^2 - 4 \frac{V_0}{E^*} = (1 - \frac{V_0}{E^*})^2 > 0 .$$

Utilizando então a integral

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \operatorname{arcsen} \frac{\beta x + 2\gamma}{|x| \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \quad , \text{ se } \gamma < 0 \text{ e } \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \quad (183)$$

[ver M. R. Spiegel, *Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática*, Makron Books, 1992, pg. 114], temos

$$\bar{\phi} - \phi = \frac{1}{2} b \frac{1}{b} \operatorname{arcsen} \frac{(1 + \frac{V_0}{E^*})s + 2(-b^2)}{s \sqrt{(1 + \frac{V_0}{E^*})^2 - 4(-\frac{1}{2} \frac{k}{E^*})(-b^2)}} \bigg|_{r_{\min}^2}^{r^2}$$

Chamando E^*/V_0 de ε , vamos obter

$$\bar{\phi} - \phi = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{(\varepsilon + 1)r^2 - 2\varepsilon b^2}{r^2 \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}} - \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{(\varepsilon + 1)r_{\min}^2 - 2\varepsilon b^2}{r_{\min}^2 \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}} \quad (184)$$

O valor de r_{\min} é tal que

$$1 - \frac{1}{E^*} [-V_0 + \frac{1}{2} k r_{\min}^2] - \frac{b}{r_{\min}} = 0 \quad (185)$$

Resolvendo essa equação algébrica, e levando em conta que r_{\min} deve ser menor do que R , vamos obter

$$r_{\min} = R \sqrt{\frac{\varepsilon + 1 - \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}}{2}} \quad (186)$$

Pode-se verificar, então, que

$$(\varepsilon + 1)r_{\min}^2 - 2\varepsilon b^2 = -r_{\min}^2 \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)} , \quad (187)$$

e o argumento do segundo arcsen em (184) é, portanto, $-\pi$. A relação (184) é então escrita como

$$\bar{\phi} - \phi = \frac{1}{2} \arcsen \frac{(\varepsilon + 1)r^2 - 2\varepsilon b^2}{r^2 \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} , \quad (188)$$

isto é,

$$\frac{(\varepsilon + 1)r^2 - 2\varepsilon b^2}{r^2 \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}} = \sen \left[2(\bar{\phi} - \phi) - \frac{\pi}{2} \right] = -\cos 2(\bar{\phi} - \phi) = \sen^2(\bar{\phi} - \phi) - \cos^2(\bar{\phi} - \phi) ,$$

de onde resulta

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\varepsilon + 1 + \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}}{2\varepsilon b^2} \cos^2(\bar{\phi} - \phi) \\ + r^2 \frac{\varepsilon + 1 - \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}}{2\varepsilon b^2} \sen^2(\bar{\phi} - \phi) = 1 . \end{aligned}$$

Introduzindo as quantidades

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{2\varepsilon b^2}{\varepsilon + 1 + \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}}} \\ &= R \sqrt{\frac{\varepsilon + 1 - \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}}{2}} = r_{\min} , \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{2\varepsilon b^2}{\varepsilon + 1 - \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}}} \\ &= R \sqrt{\frac{\varepsilon + 1 + \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}}{2}} > R > A , \end{aligned} \quad (190)$$

temos finalmente

$$\frac{r^2 \cos^2(\bar{\phi} - \phi)}{A^2} + \frac{r^2 \sen^2(\bar{\phi} - \phi)}{B^2} = 1 . \quad (191)$$

Esse resultado mostra que, quando ϕ varia de Φ a $\bar{\phi}$, a partícula percorre um arco de uma elipse que tem o centro (não o foco) no centro de força, semi-eixos A e B dados por (189) e (190), e apontando o semi-eixo menor na direção do ponto de maior aproximação. A forma explícita da dependência de r com ϕ é evidentemente

$$r = \left[\frac{\cos^2(\bar{\phi} - \phi)}{A^2} + \frac{\sin^2(\bar{\phi} - \phi)}{B^2} \right]^{-\frac{1}{2}} . \quad (192)$$

O valor do ângulo $\bar{\phi}$, ainda não determinado, pode ser obtido fazendo $r = R$ e $\phi = \Phi$ em (188), isto é,

$$\bar{\phi} = \Phi + \frac{1}{2} \arcsen \frac{\varepsilon + 1 - 2\varepsilon(b^2/R^2)}{\sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} . \quad (193)$$

Para $\phi > \bar{\phi}$, a equação da trajetória pode ser obtida utilizando-se a relação $r(\phi) = r(2\bar{\phi} - \phi)$, que exprime a simetria da trajetória em relação ao ponto de maior aproximação (ver fig. 57). Temos, assim,

$$r(\phi) = \left[\frac{\cos^2(\phi - \bar{\phi})}{A^2} + \frac{\sin^2(\phi - \bar{\phi})}{B^2} \right]^{-\frac{1}{2}} , \quad \text{para } \bar{\phi} \leq \phi \leq 2\bar{\phi} - \Phi , \quad (194)$$

e a expressão obtida é a própria (192). A trajetória é, portanto, descrita pela equação (192) em todo o interior da região de interação. Nas figuras seguintes, mostramos as trajetórias para $\varepsilon = 0.5$ e $\varepsilon = 1.5$, e para os valores indicados de b/R :

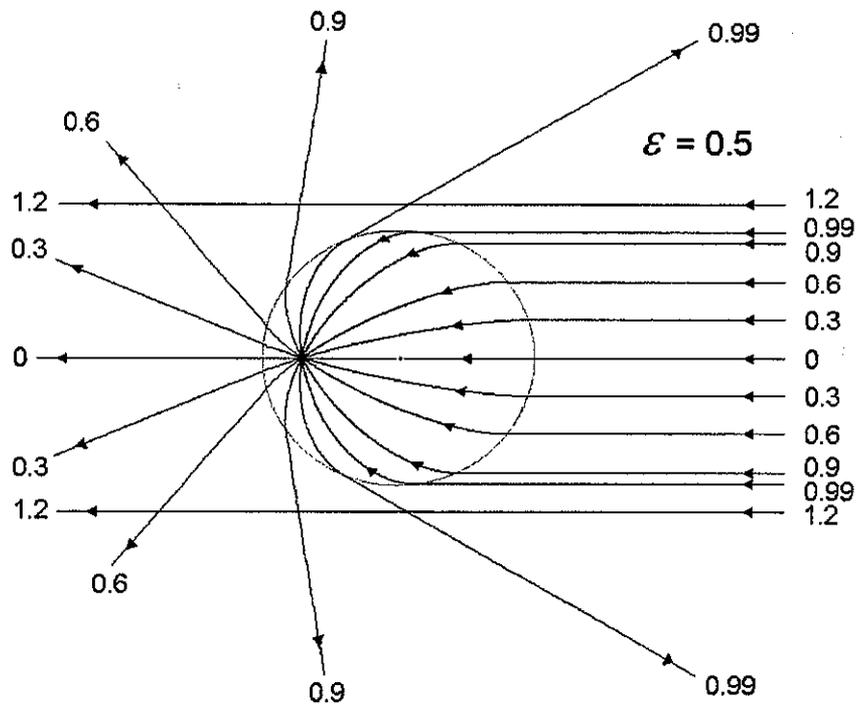


Figura 59.a

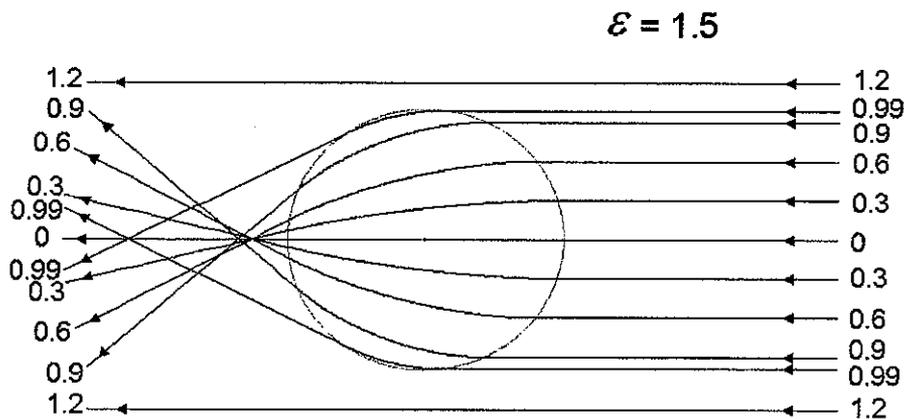


Figura 59.b

No caso da figura 59.a, o ângulo de espalhamento é crescente, tendendo ao valor π , quando o parâmetro de impacto cresce de 0 até R , e depois cai abruptamente para zero quando b ultrapassa o valor R . Já no caso da figura 59.b, ele atinge um valor máximo antes que b seja igual a R e depois retorna para o valor zero à medida que b se aproxima de R . Para uma energia genérica ε , as trajetórias serão como nas figuras 59.a ou 59.b dependendo se ε é menor ou maior do que 1.

A relação entre o ângulo de espalhamento θ e o parâmetro de impacto b é dada pela expressão

$$\theta = 2 \operatorname{arcsen} \frac{b}{R} + \operatorname{arcsen} \frac{\varepsilon + 1 - 2\varepsilon(b^2/R^2)}{\sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(b^2/R^2)}} - \frac{\pi}{2}, \quad (195)$$

que é obtida substituindo-se (193) e (179) na relação $\theta = 2\bar{\phi} - \pi$. Na figura seguinte, temos θ em função de b para $\varepsilon = 0.5$ e $\varepsilon = 1.5$:

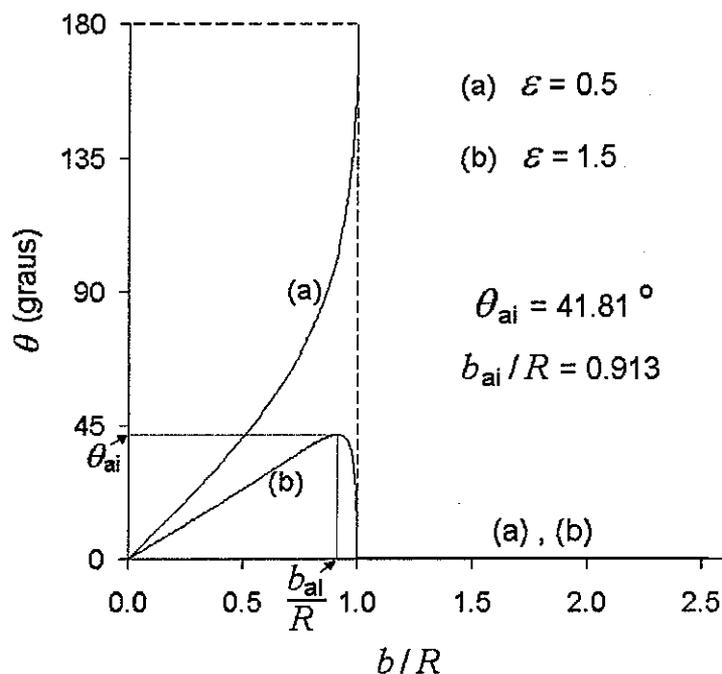


Figura 60

As curvas (a) e (b) são coerentes com as figuras 59.a e 59.b. Se $\varepsilon > 1$, o valor de b , para o qual ocorre o máximo de $\theta(b)$, é obtido igualando a zero a derivada

$$\frac{d\theta}{db} = \frac{1}{R} \frac{2}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{\varepsilon + 1 - 2\varepsilon\eta^2}{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon\eta^2}, \quad \eta = \frac{b}{R}, \quad 0 \leq b < R, \quad (196)$$

isto é,

$$b_{ai} = R \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon}}. \quad (197)$$

Quando $\theta(b)$ tem um extremo $\theta = \theta_{ai}$ num parâmetro de impacto $b = b_{ai}$ e é estacionária com respeito a variações pequenas de b [como acontece com a curva (b) da figura 60], as partículas que tem parâmetro de impacto no entorno de b_{ai} são espalhadas em direções muito

próximas da direção θ_{ai} , produzindo-se assim uma concentração de muitas partículas numa vizinhança estreita dessa direção de espalhamento (abaixo ou acima de θ_{ai} , dependendo se o extremo é um máximo ou um mínimo). Esse efeito [embora ocorra numa direção $\theta_{ai} < 90^\circ$ no caso da curva (b) da figura 60] é análogo ao que se manifesta como um arco-íris quando a luz do Sol é espalhada por gotas de água de raio bem maior do que o comprimento de onda da luz visível – daí, a denominação *espalhamento arco-íris* mesmo em se tratando de espalhamento de partículas e a utilização da notação b_{ai} e θ_{ai} para indicar os valores de b e θ correspondentes ao arco-íris. A concentração de partículas na direção θ_{ai} de espalhamento significa que a seção de choque diferencial torna-se bastante grande nessa direção. A expressão (97) mostra que a seção de choque de fato diverge em $\theta = \theta_{ai}$ uma vez que $db/d\theta = 1/(d\theta/db)$ tende a infinito quando $\theta \rightarrow \theta_{ai}$.

Consideremos agora a determinação da função inversa $b = b(\theta)$. Para obter $b(\theta)$, devemos resolver a equação (195) considerando-a uma equação na incógnita b . Por causa da complexidade da equação, vamos nos limitar a uma determinação numérica de $b(\theta)$. Para isso, procuramos, para cada valor dado de θ , o zero da função de b definida pela diferença entre o segundo e o primeiro membro de (195), o que pode ser feito utilizando, por exemplo, o método iterativo da falsa posição (ver F. B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis*, pág. 446). Obtemos, assim, uma tabela de valores numéricos da função $b = b(\theta)$ e, a partir dela, fazemos o gráfico de $b \times \theta$. Na figura seguinte, mostramos as curvas correspondentes a $\varepsilon = 0.5$ e $\varepsilon = 1.5$:

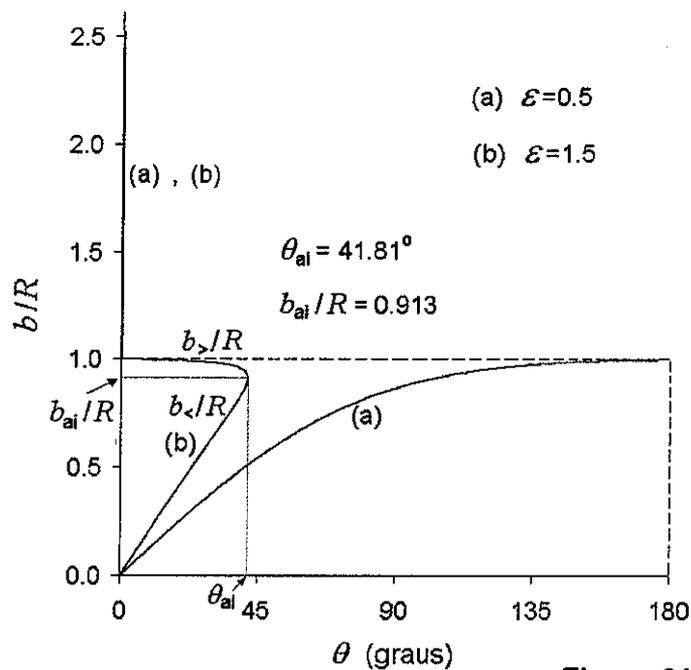


Figura 61

É claro que a fig. 61 é a fig. 60 girada de 90° no sentido anti-horário e depois vista por trás, como acontece com os gráficos de quaisquer duas funções inversas uma da outra. Para $\varepsilon < 1$, a correspondência entre θ e b é biunívoca, mas, para $\varepsilon > 1$, existem dois parâmetros de impacto para um mesmo ângulo de espalhamento, um menor do que b_{ai} e outro maior, indicados com $b_<$ e $b_>$.

Para determinar a seção de choque, utilizamos a expressão (97). A derivada $db/d\theta$ pode ser calculada numericamente a partir dos valores numéricos de $b(\theta)$ ou, então, através da relação $db/d\theta = 1/(d\theta/db)$ que tem a vantagem de ser uma expressão analítica,

$$\frac{db}{d\theta} = R \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{2} \frac{(\varepsilon+1)^2 - 4\varepsilon\eta^2}{\varepsilon+1-2\varepsilon\eta^2}, \quad \eta = \frac{b}{R}, \quad 0 \leq b < R, \quad (198)$$

muito embora em termos de b e não de θ – o que não é um inconveniente quando se dispõe de um meio, ainda que numérico, para se exprimir b em termos de θ . A seção de choque pode, assim, ser calculada como função do ângulo de espalhamento θ , observando-se que, para $\varepsilon > 1$, a expressão (97) desdobra-se na soma de dois termos, um correspondente às partículas que incidem com parâmetro de impacto b menor do b_{ai} e outro para as que o fazem com b maior do que b_{ai} :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{b < b_{ai}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{b > b_{ai}} = \frac{b_<}{\sin\theta} \left| \frac{db_<}{d\theta} \right| + \frac{b_>}{\sin\theta} \left| \frac{db_>}{d\theta} \right|. \quad (199)$$

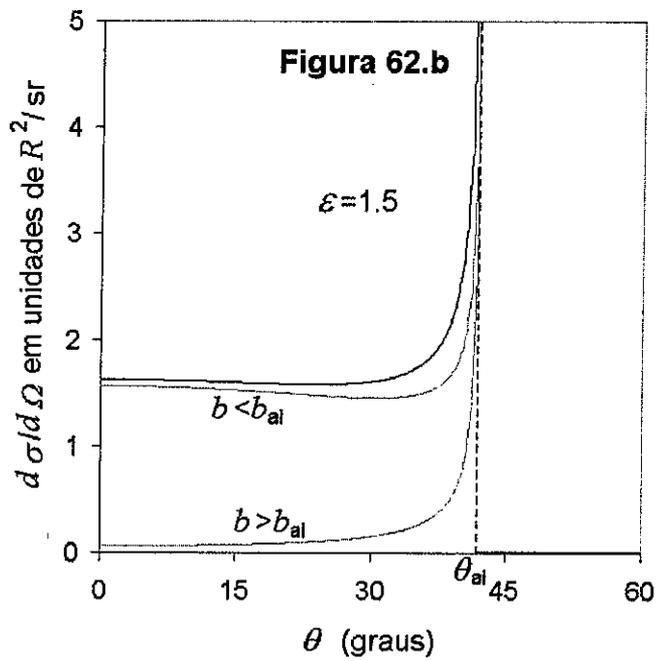
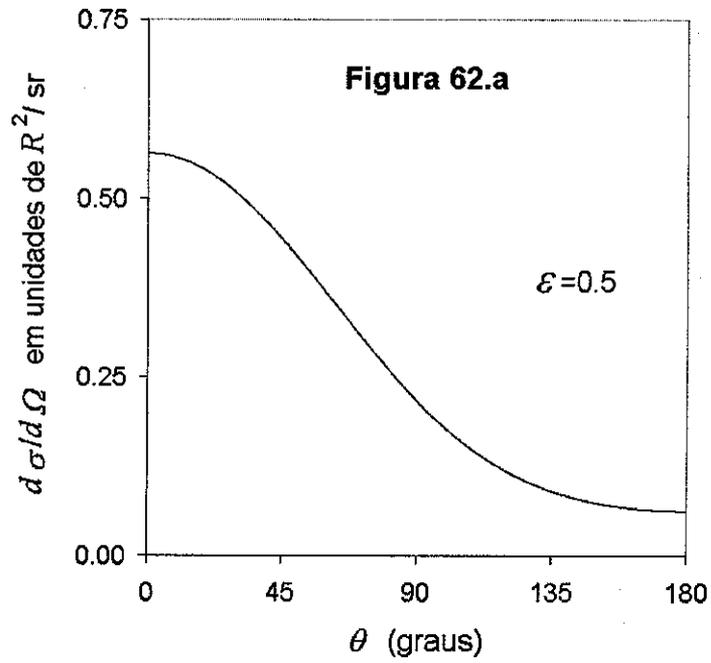
Pode-se deduzir que, para $\varepsilon < 1$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta \rightarrow 0) = \frac{(\varepsilon+1)^2}{4} R^2, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta \rightarrow \pi) = \frac{(\varepsilon-1)^2}{4} R^2, \quad (200)$$

enquanto que, para $\varepsilon > 1$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta \rightarrow 0) = \frac{\varepsilon^2 + 1}{2} R^2. \quad (201)$$

Nas figuras seguintes, mostramos as seções de choque para $\varepsilon = 0.5$ e $\varepsilon = 1.5$:



É conveniente determinar a forma analítica da seção de choque nas vizinhanças do ângulo de arco-íris θ_{ai} . Para isso, observamos que, para b nas vizinhanças de b_{ai} , temos

$$\theta(b) \cong \theta_{ai} - q(b - b_{ai})^2, \quad (202)$$

onde

$$q = -\frac{1}{2} \frac{d^2\theta}{db^2}(b_{ai}) = \frac{1}{R^2} \frac{4\varepsilon}{(\varepsilon-1)\sqrt{\varepsilon^2-1}}, \quad (203)$$

após utilizarmos (196) e (197). Temos, assim,

$$\frac{d\theta}{db} \cong -2q(b-b_{ai})$$

e, portanto,

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{\left| \frac{d\theta}{db} \right|} \cong \frac{1}{|-2q(b-b_{ai})|} \cong \frac{1}{2\sqrt{q}(\theta_{ai}-\theta)}, \quad (204)$$

qualquer que seja o ramo, $b_<$ ou $b_>$, de $b(\theta)$. Utilizando essa aproximação, obtemos então, para θ próximo de θ_{ai} ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b_{ai}}{\text{sen}\theta_{ai}} \frac{1}{\sqrt{q}(\theta_{ai}-\theta)} \quad (205)$$

No ângulo de arco-íris, a seção de choque diverge, portanto, com $(\theta_{ai}-\theta)^{-\frac{1}{2}}$.

Para finalizar, lembramos que a seção de choque calculada pode ser testada computando-se a seção de choque total e verificando que ela é de fato igual a área da seção transversal circular por onde deve passar a partícula incidente para interagir com a partícula-alvo:

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi R^2. \quad (206)$$

Utilizando um método numérico (por exemplo, o de Simpson) para calcular a integral em θ [levando em conta, a expressão (205) na vizinhança de θ_{ai} e aí fazendo o cálculo exato da integral, se $\varepsilon > 1$], podemos constatar que a relação (206) é de fato satisfeita pelas seções de choque mostradas nas figuras 62.a e 62.b.

Exemplo. Estudar o espalhamento de partículas puntiformes de carga positiva ze por um núcleo atômico de carga Ze uniformemente distribuída numa esfera de raio R considerando a ação conjunta da repulsão coulombiana e de uma interação nuclear na forma de um poço quadrado de profundidade U_0 e alcance R , sendo U_0 maior do $(3/2) \times (Zze^2/R)$.

Solução: A energia potencial de interação entre o projétil e o alvo é dada por

$$V(r) = \begin{cases} -U_0 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\alpha}{R} & , \quad r \leq R, \\ \frac{\alpha}{r} & , \quad r \geq R, \end{cases} \quad (207)$$

onde $\alpha = Zze^2$. Introduzindo as quantidades

$$k = \frac{\alpha}{R^3} \quad , \quad V_0 = U_0 - \frac{3}{2} \frac{\alpha}{R} \quad , \quad (208)$$

podemos escrever

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 - \frac{1}{2}kr^2 & , \quad r \leq R, \\ \frac{\alpha}{r} & , \quad r \geq R. \end{cases} \quad (209)$$

A energia potencial efetiva é dada então por

$$V_{\text{ef}}(r) = \begin{cases} -V_0 - \frac{1}{2}kr^2 + E^* \frac{b^2}{r^2} & , \quad r \leq R, \\ \frac{\alpha}{r} + E^* \frac{b^2}{r^2} & , \quad r \geq R, \end{cases} \quad (210)$$

E^* sendo a energia do movimento relativo e b o parâmetro de impacto. Na figura seguinte, mostramos $V_{\text{ef}}(r)$ para os valores indicados de E^* , U_0 e b :

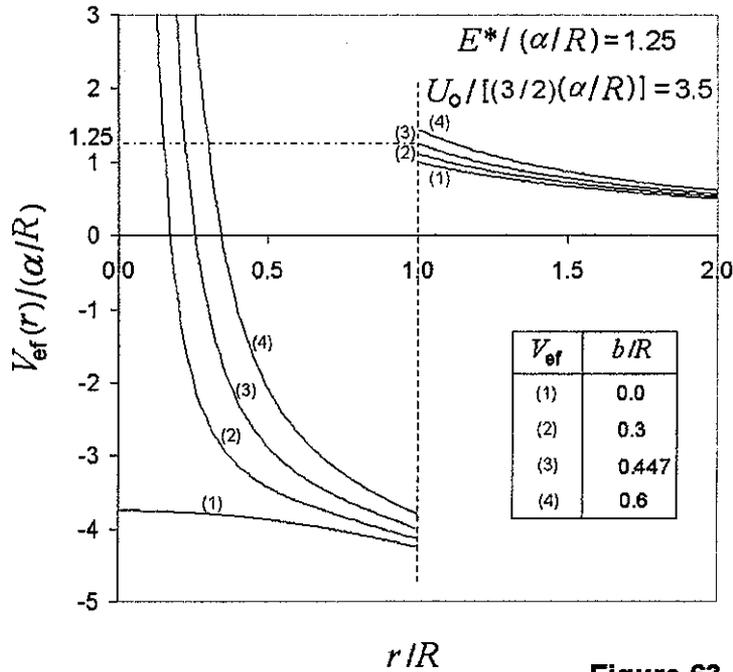


Figura 63

No caso em que o projétil é uma partícula α e o alvo um núcleo de ^{197}Au , para o qual podemos tomar um raio $R = 6.866$ fm utilizando a fórmula $R = r_0 \times A^{1/3}$, onde $r_0 = 1.18$ fm e $A = 197$ é o número de massa (ver A. Bohr e B. Mottelson, *Nuclear Structure*, vol. I, pg. 159), tem-se $\alpha/R = 33.134$ MeV, e os valores de $E^*/(\alpha/R)$ e $U_0/[(3/2)(\alpha/R)]$ assinalados na figura correspondem a uma energia $E^* \cong 41$ MeV e a um poço quadrado de profundidade $U_0 \cong 174$ MeV, que é um valor comparável ao da profundidade de outros poços (não quadrados) que descrevem mais corretamente a interação $\alpha - ^{197}\text{Au}$.

Vamos considerar $E^* > \alpha/R$, uma vez que, para $E^* < \alpha/R$, o movimento do projétil ocorre inteiramente na região externa ao núcleo. O valor crítico de b , para o qual o projétil tangencia a superfície do núcleo (numa trajetória dita *rasante*), é obtido de (116) fazendo $r_{\min} = R$:

$$b_{\text{ras}} = R \sqrt{1 + 2\xi \frac{1}{R}}, \quad \xi = -\frac{\alpha}{2E^*} \quad (211)$$

Para a trajetória rasante, o ângulo ϕ do ponto de máxima aproximação, que é também o de tangência, é dado por

$$\bar{\phi}_{\text{ras}} = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\xi}{b_{\text{ras}}} \quad (212)$$

e o ângulo de espalhamento tem o valor

$$\theta = \theta_{\text{ras}} = 2 \arctan \frac{|\xi|}{b_{\text{ras}}} \quad (213)$$

[Se, por exemplo, $E^*/(\alpha/R) = 1.25$, obtêm-se $b_{\text{ras}}/R = 0.447$ (na figura anterior, nota-se que r_{min} é de fato igual a R quando b/R tem esse valor), $\bar{\phi}_{\text{ras}} = 48.19^\circ$ e $\theta_{\text{ras}} = 83.62^\circ$]. Se $b > b_{\text{ras}}$, o projétil passa ao largo do núcleo alvo e a sua trajetória é toda a hipérbole de equação (120), que vamos rescrever na forma

$$\frac{1}{r(\phi)} = \frac{1}{b} \left[-\frac{1}{2\varepsilon\eta} (1 - \cos\phi) + \sin\phi \right] \quad (214)$$

onde

$$\varepsilon = \frac{E^*}{\frac{\alpha}{R}} \quad , \quad \eta = \frac{b}{R} \quad (215)$$

Se $b < b_{\text{ras}}$, o projétil descreve a hipérbole de equação (214) até atingir o núcleo numa posição dada por um ângulo

$$\Phi = \int_R^\infty \frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1 + 2\xi \frac{1}{r} - \frac{b^2}{r^2}}} dr = \arctan \frac{\eta + \frac{1}{2\varepsilon\eta}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} - \eta^2}} - \arctan \frac{1}{2\varepsilon\eta} \quad ; \quad (216)$$

no momento em que penetra na superfície do núcleo, o projétil sofre instantaneamente a ação da força impulsiva associada ao poço quadrado e tem a direção da sua velocidade alterada bruscamente; dentro do núcleo, o projétil fica sujeito apenas à força coulombiana devida à carga uniformemente distribuída no volume nuclear e a sua trajetória é um arco (de uma outra hipérbole, como veremos) com vértice no ponto de maior aproximação ($r_{\text{min}}, \bar{\phi}$); após emergir numa posição dada pelo ângulo $2\bar{\phi} - \Phi$, o projétil segue a trajetória hiperbólica usual do movimento num campo de força $1/r^2$:

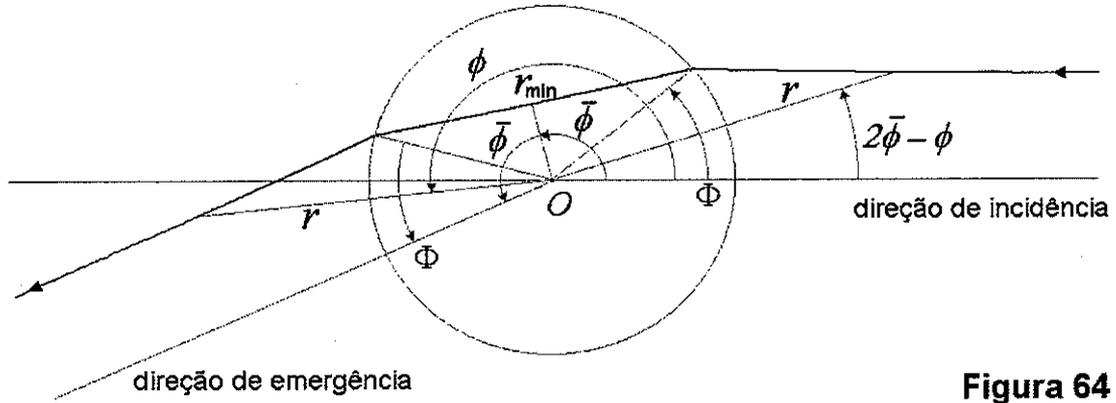


Figura 64

A determinação da trajetória dentro do núcleo é feita como no exemplo anterior. Para o ponto de maior aproximação, obtêm-se

$$r_{\min} = R \sqrt{-[\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2}] + \sqrt{[\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2}]^2 + 2\varepsilon\eta^2}} \quad , \quad (217)$$

$$\bar{\phi} = \Phi + \frac{1}{2} \arcsen \frac{\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2} - 2\varepsilon\eta^2}{\sqrt{[\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2}]^2 + 2\varepsilon\eta^2}} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \quad , \quad (218)$$

onde

$$\chi = \frac{U_0}{\frac{3}{2} \frac{\alpha}{R}} \quad , \quad (219)$$

enquanto que a trajetória é o trecho de hipérbole de equação

$$r(\phi) = \left[\frac{\cos^2(\bar{\phi} - \phi)}{A^2} - \frac{\sen^2(\bar{\phi} - \phi)}{B^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad \Phi \leq \phi \leq 2\bar{\phi} - \Phi \quad , \quad (220)$$

sendo os semi-eixos dados por

$$A = r_{\min} \quad , \quad B = R \sqrt{\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2} + \sqrt{[\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2}]^2 + 2\varepsilon\eta^2}} \quad . \quad (221)$$

O trecho final da trajetória é dado pela equação

$$\frac{1}{r(\phi)} = \frac{1}{b} \left\{ -\frac{1}{2\epsilon\eta} [1 - \cos(2\bar{\phi} - \phi)] + \text{sen}(2\bar{\phi} - \phi) \right\}, \quad 2\bar{\phi} - \Phi \leq \phi < 2\bar{\phi}, \quad (222)$$

que é obtida de (214) através da propriedade de simetria $r(\phi) = r(2\bar{\phi} - \phi)$. Na figura seguinte, mostramos as trajetórias para os valores indicados de E^* , U_0 e b/R :

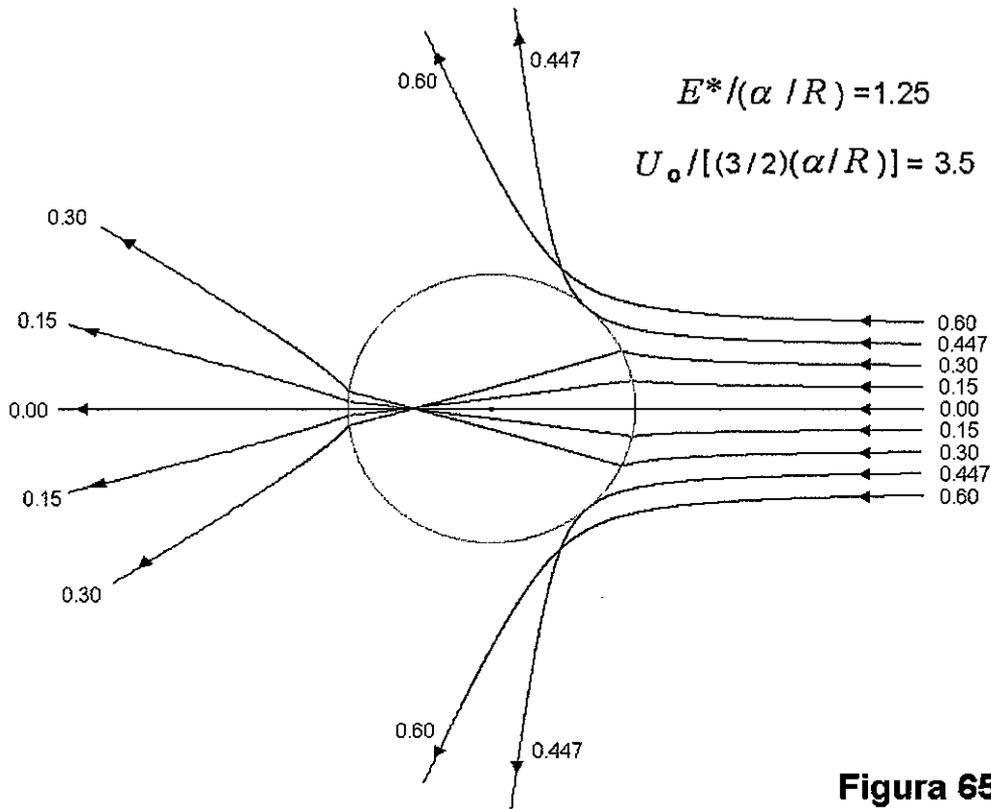


Figura 65

Dentro do núcleo, as trajetórias são pouco encurvadas por causa do acréscimo U_0 na energia cinética do projétil quando este penetra na superfície do núcleo.

Consideremos agora a relação entre o ângulo de espalhamento θ e o parâmetro de impacto b . Para $b > b_{\text{ras}}$, temos a relação (124), que escrevemos agora como

$$\theta = 2 \arctan \frac{1}{2\epsilon\eta} \quad (223)$$

Para $b < b_{\text{ras}}$, obtemos a relação

$$\theta = 2 \arctan \frac{\eta + \frac{1}{2\epsilon\eta}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon} - \eta^2}} - 2 \arctan \frac{1}{2\epsilon\eta} + \arcsen \frac{\epsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2} - 2\epsilon\eta^2}{\sqrt{[\epsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2}]^2 + 2\epsilon\eta^2}} - \frac{\pi}{2} \quad (224)$$

substituindo (218) e (216) na expressão $\theta = 2\bar{\phi} - \pi$. Na figura seguinte, mostramos θ em função de b para os valores indicados de E^* e U_o :

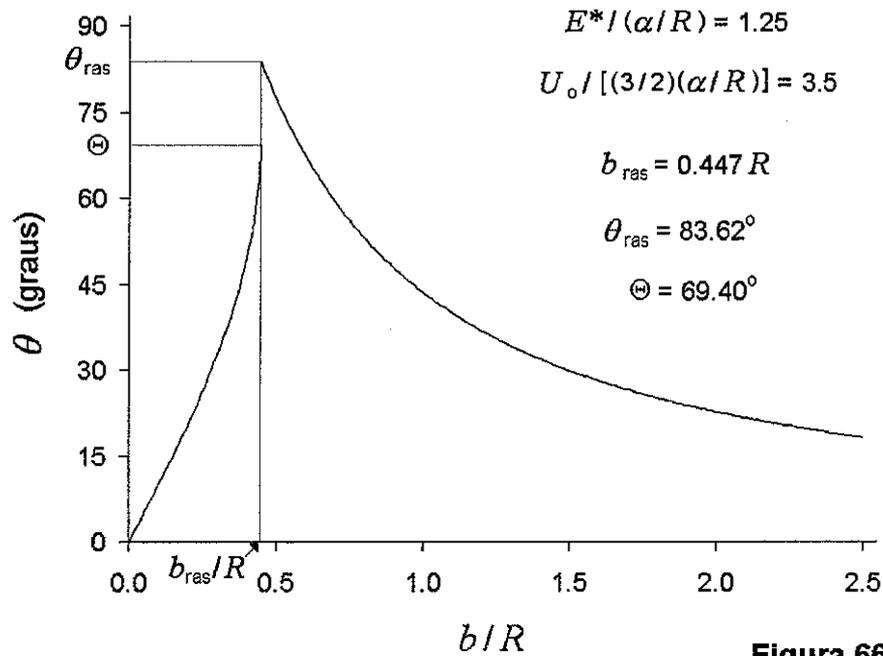


Figura 66

O ângulo Θ é o ângulo de espalhamento de uma partícula que incide com parâmetro de impacto imediatamente abaixo do valor b_{ras} (mais precisamente, Θ é o valor para o qual tende o ângulo de espalhamento θ quando $b \rightarrow b_{ras}^-$).

Na figura seguinte, mostramos o gráfico da função inversa $b = b(\theta)$ [para $b > b_{ras}$, a inversa, que indicamos com $b_>$, é dada pela expressão (126); para $b < b_{ras}$, a inversa, $b_<$, é obtida invertendo-se numericamente a relação (224)]:

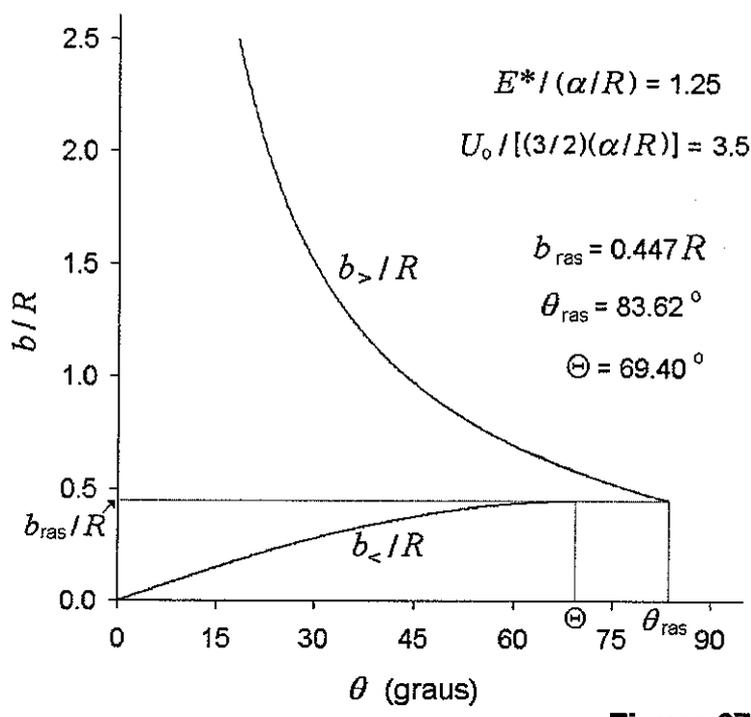


Figura 67

O cálculo da seção de choque é feito numericamente como no exemplo anterior. Na figura seguinte, mostramos $d\sigma/d\Omega$, bem como as parcelas provenientes dos ramos $b_<$ e $b_>$:

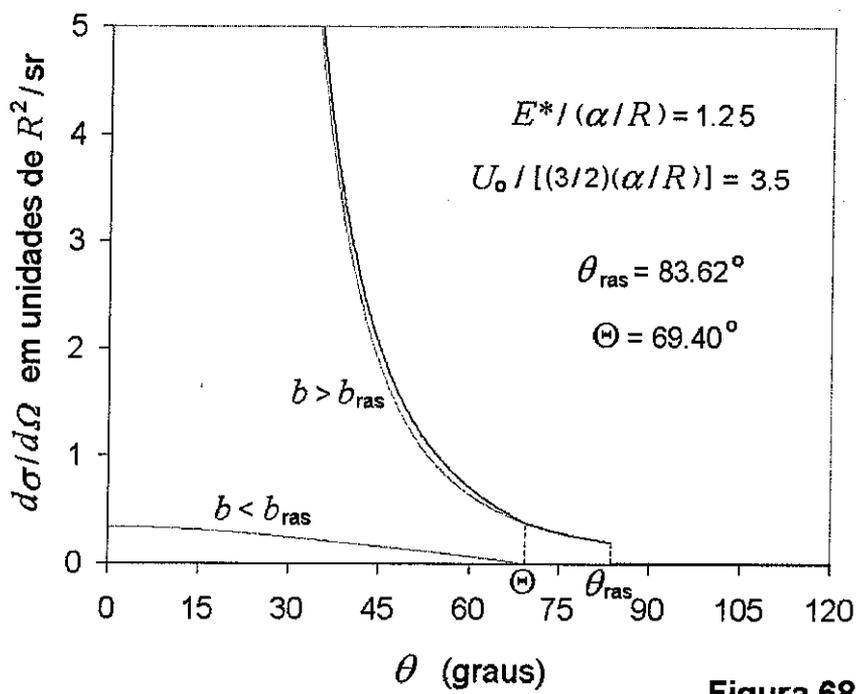


Figura 68

O termo correspondente a $b > b_{\text{ras}}$ é evidentemente a seção de choque de Rutherford, dada por (129). Na próxima figura, mostramos a razão $(d\sigma / d\Omega) / (d\sigma / d\Omega)_{\text{Ruth}}$:

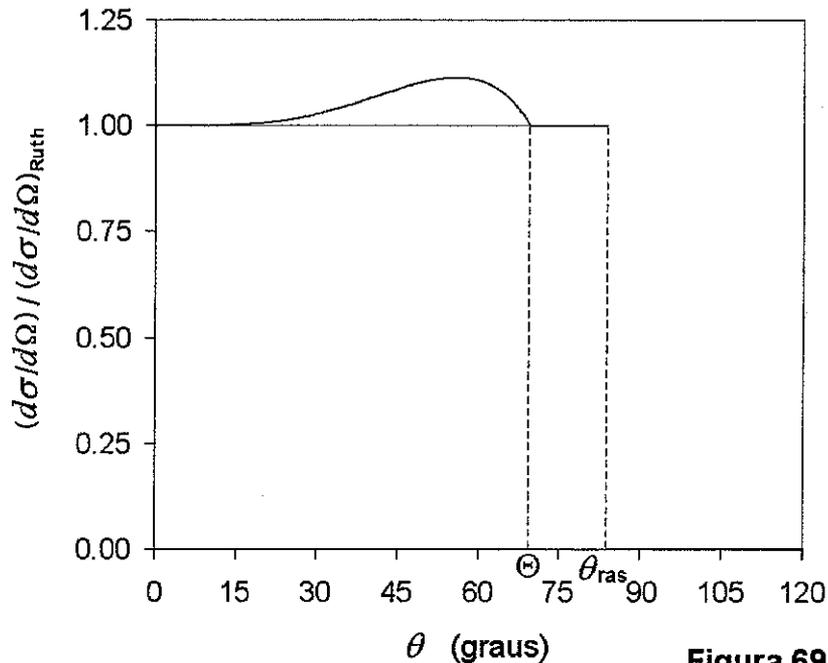


Figura 69

Para finalizar, testamos os cálculos efetuados verificando se a seção de choque total para as partículas espalhadas entre os ângulos $\theta = 0$ e $\theta = \Theta$ e incidentes com parâmetro de impacto $b < b_{\text{ras}}$,

$$\sigma(b < b_{\text{ras}}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\Theta} d\theta \operatorname{sen}\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{b < b_{\text{ras}}}, \quad (225)$$

reproduz o valor πb_{ras}^2 . Calculando-se numericamente a integral, obtém-se, para o caso considerado na Fig. 68, o valor $\sigma(b < b_{\text{ras}}) = 0.628 \times R^2$, que é, de fato, o mesmo de πb_{ras}^2 .

Exemplo. Considerar o espalhamento do exemplo precedente supondo, em vez do poço quadrado, um poço parabólico de profundidade U_0 e alcance R , sendo $U_0 > (3/2) \times (Zze^2 / R)$.

Solução: A energia potencial é dada agora por

$$V(r) = \begin{cases} -(1 - \frac{r^2}{R^2})U_0 + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}) \frac{\alpha}{R}, & r \leq R, \\ \frac{\alpha}{r}, & r \geq R, \end{cases} \quad (226)$$

onde $\alpha = Zze^2$, como no exemplo anterior. Definindo

$$k = 2 \frac{U_0}{R^2} - \frac{\alpha}{R^3}, \quad V_0 = U_0 - \frac{3}{2} \frac{\alpha}{R}, \quad (227)$$

que são quantidades positivas por causa da restrição $U_0 > (3/2) \times (\alpha/R)$, podemos escrever

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 + \frac{1}{2} kr^2, & r \leq R, \\ \frac{\alpha}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (228)$$

A energia potencial efetiva, dada por

$$V_{\text{ef}}(r) = \begin{cases} -V_0 + \frac{1}{2} kr^2 + E^* \frac{b^2}{r^2}, & r \leq R, \\ \frac{\alpha}{r} + E^* \frac{b^2}{r^2}, & r \geq R, \end{cases} \quad (229)$$

é mostrada nas figuras seguintes para os valores indicados de E^* , U_0 e b :

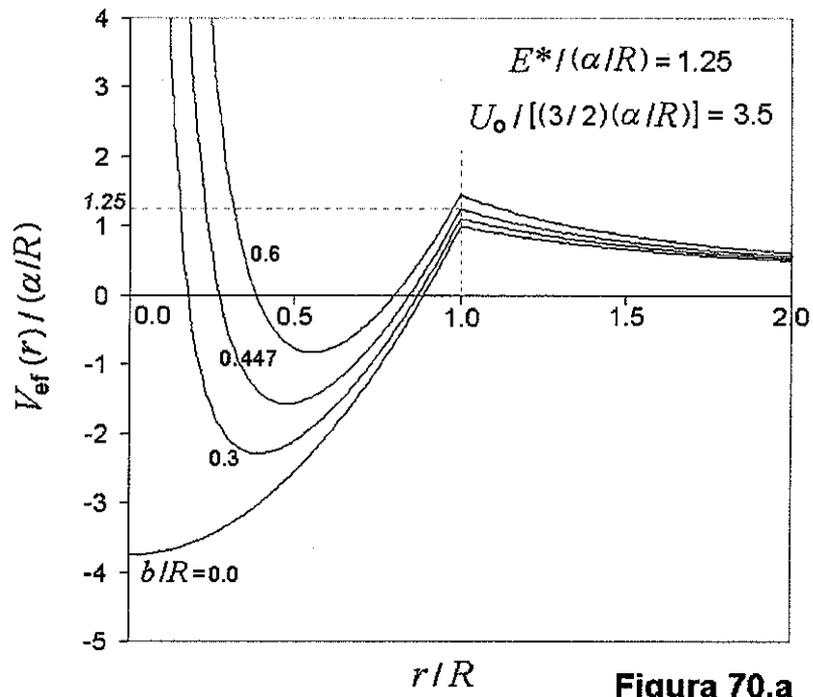


Figura 70.a

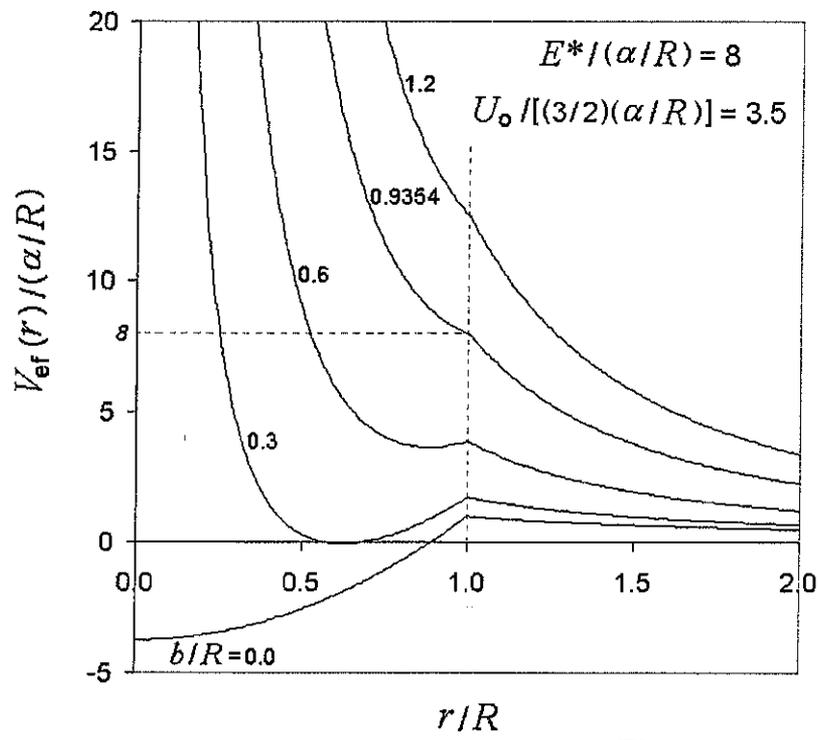


Figura 70.b

Os valores especiais, 0.447 e 0.9354, são os de b_{ras}/R (aos quais correspondem ângulos de espalhamento θ_{ras} iguais a 83.62° e 7.65° , respectivamente). O que distingue as duas figuras é que no caso da Fig. 70.a, a distância de maior aproximação, r_{min} , não tende ao valor R quando $b \rightarrow b_{\text{ras}}^-$, a trajetória correspondente a um parâmetro de impacto ligeiramente inferior a b_{ras} não se aproximando, portanto, da trajetória rasante. Essa descontinuidade não deve ocorrer quando $E^* > U_o + (1/2) \times (\alpha/R)$, que é o caso da Fig. 70.b.

Para $b > b_{\text{ras}}$, a trajetória é a hipérbole dada pelas equações (214) e (215). Para $b < b_{\text{ras}}$, a trajetória é essa hipérbole até o projétil penetrar no núcleo na posição cujo ângulo, Φ , é dado pela expressão (216). Dentro do núcleo, a trajetória é o arco de elipse de equação (192), mas sendo agora

$$\bar{\phi} = \Phi + \frac{1}{2} \arcsen \frac{\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2} - 2\varepsilon\eta^2}{\sqrt{[\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2}]^2 - 2(3\chi - 1)\varepsilon\eta^2}} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, \quad (230)$$

$$A = R \sqrt{\frac{\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2} - \sqrt{[\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2}]^2 - 2(3\chi - 1)\varepsilon\eta^2}}{3\chi - 1}} = r_{\text{min}}, \quad (231)$$

$$B = R \sqrt{\frac{\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2} + \sqrt{[\varepsilon + (\chi - 1) \frac{3}{2}]^2 - 2(3\chi - 1)\varepsilon\eta^2}}{3\chi - 1}}, \quad (232)$$

valendo para ε e χ as definições (215) e (219). Após emergir de dentro do núcleo, a trajetória é novamente uma hipérbole, de equação análoga à (222). Nas figuras seguintes, mostramos as trajetórias para os valores indicados de E^* , U_o e b/R :

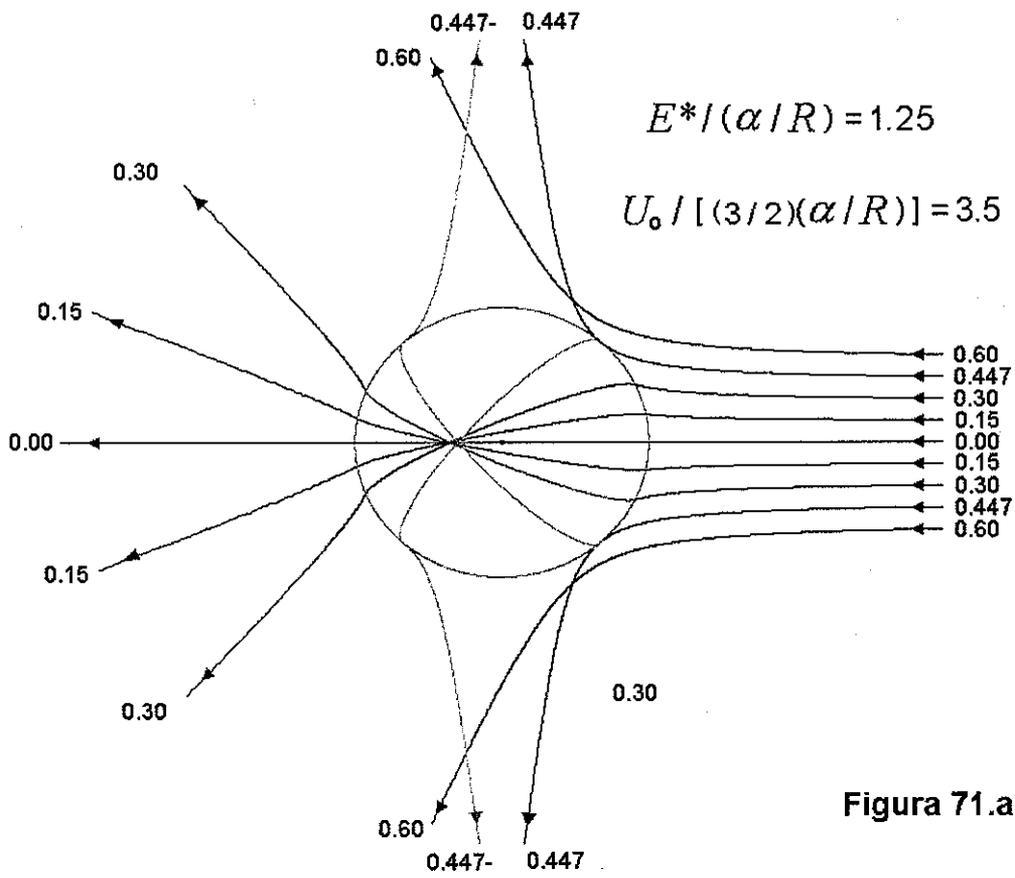


Figura 71.a

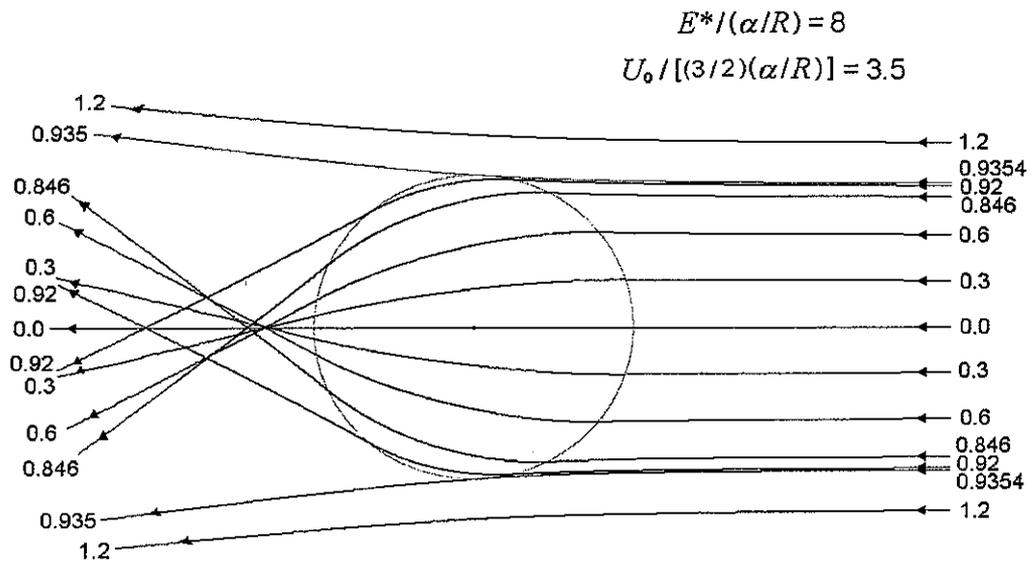


Figura 71.b

As trajetórias estão de acordo com o que havíamos concluído das figuras 70. Assim, quando o parâmetro de impacto varia de 0 a b_{ras} , as trajetórias são cada vez mais encurvadas no caso da figura 71.a, tendendo às trajetórias limites 0.477 – mostradas em linha mais clara (a essas trajetórias corresponde um ângulo de espalhamento $\Theta = 96.38^\circ$ suplementar a θ_{ras}). No caso da figura 71.b, as trajetórias comportam-se inicialmente como na figura 71.a, mas, após ser atingido um máximo de deflexão no valor 0.846 R do parâmetro de impacto, o encurvamento passa a diminuir e, por fim, chega-se com continuidade à trajetória hiperbólica rasante quando b atinge o valor b_{ras} . Antes de se chegar na trajetória rasante, ocorre uma trajetória simétrica em relação ao eixo transversal ao feixe incidente (portanto, uma trajetória não retilínea de ângulo de espalhamento zero) quando o parâmetro de impacto tem o valor $b_0 = 0.9350 R$, muito próximo do valor 0.9354 R de b_{ras} :

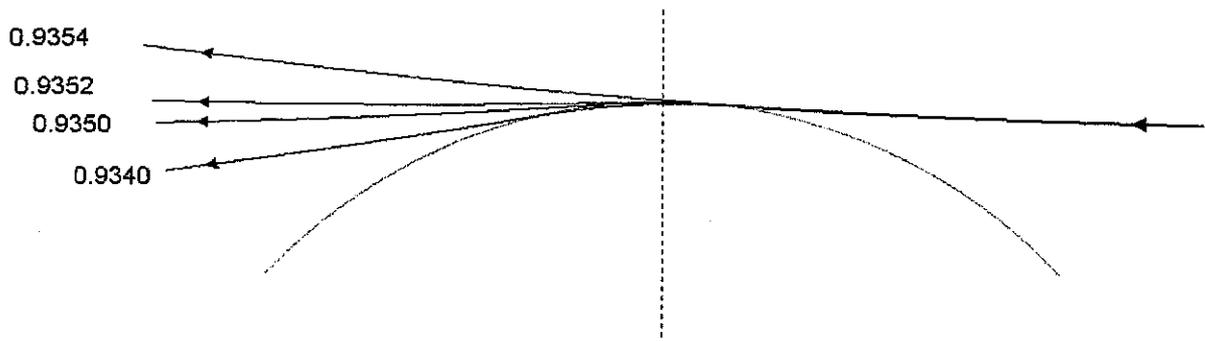


Figura 71.c

O ângulo de espalhamento é dado pela expressão (223), se $b > b_{ras}$. Para $b < b_{ras}$, obtem-se

$$\theta = \left| 2 \arctan \frac{\eta + \frac{1}{2\epsilon\eta}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon} - \eta^2}} - 2 \arctan \frac{1}{2\epsilon\eta} + \arcsen \frac{\epsilon + (\chi - 1)\frac{3}{2} - 2\epsilon\eta^2}{\sqrt{[\epsilon + (\chi - 1)\frac{3}{2}]^2 - 2(3\chi - 1)\epsilon\eta^2}} - \frac{\pi}{2} \right|, \quad (233)$$

o sinal de valor absoluto sendo necessário quando $E^* > U_0 + (1/2) \times (\alpha/R)$ e $b_0 < b < b_{ras}$. Nas figuras abaixo, mostramos $\theta(b)$, para os valores indicados de E^* e U_0 :

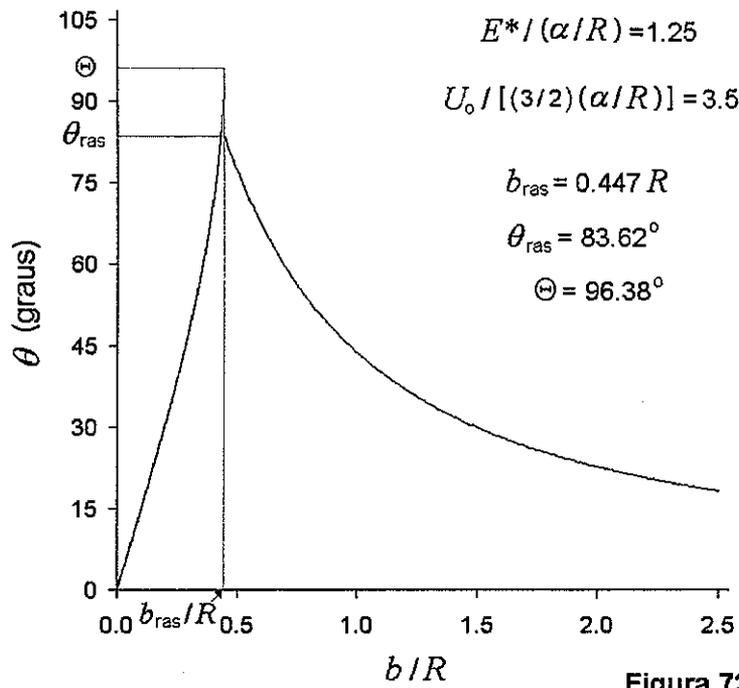


Figura 72.a

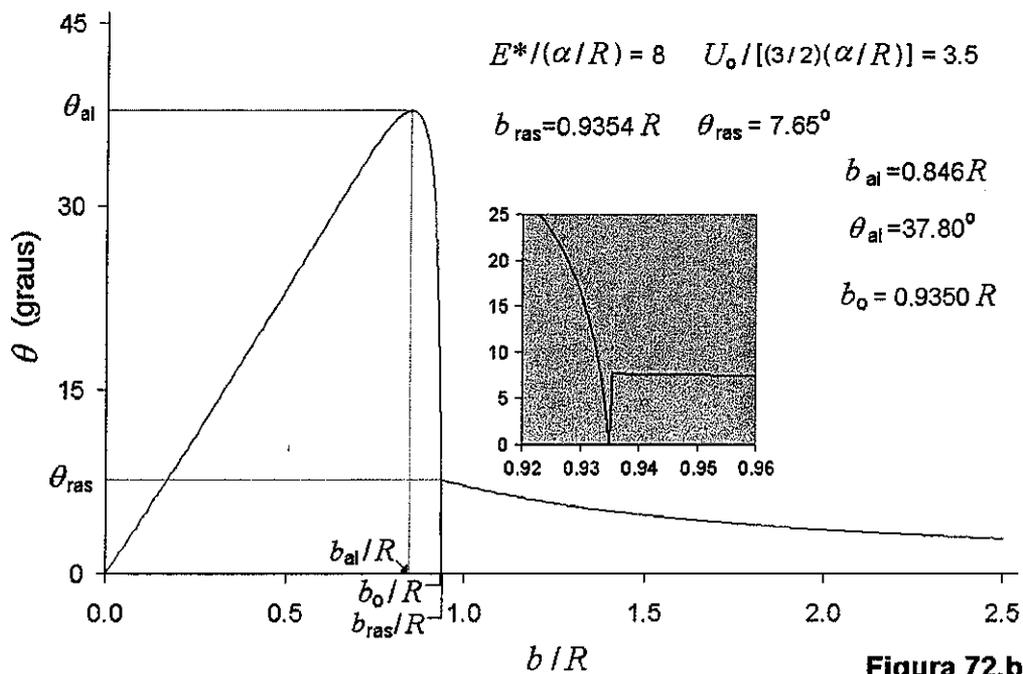


Figura 72.b

Na figura 72.b, mostramos, no detalhe, o anulamento do ângulo de espalhamento para o valor b_o do parâmetro de impacto. O caráter estacionário do máximo θ_{ai} significa que um arco-íris será observado nessa direção de espalhamento.

Nas figuras seguintes, mostramos a função inversa $b = b(\theta)$, dada pela expressão (126), se $b > b_{ras}$, ou determinada através da resolução numérica da equação (233), se $b < b_{ras}$.

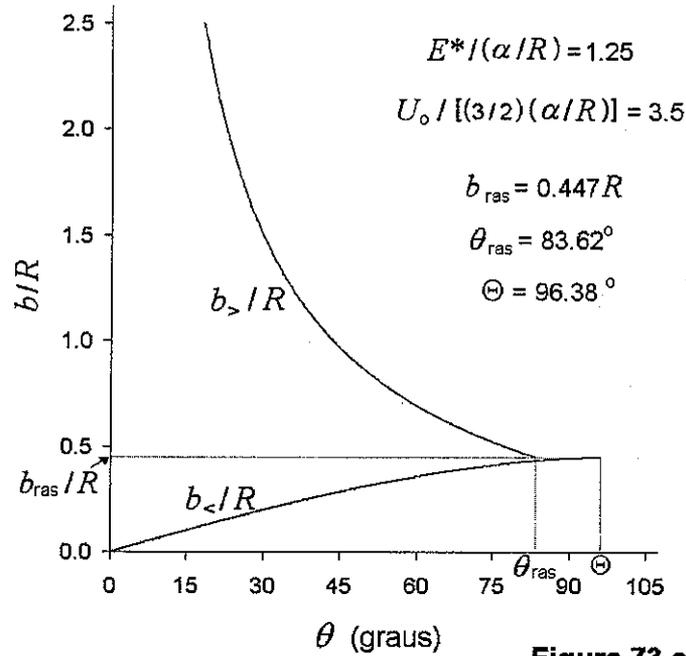


Figura 73.a

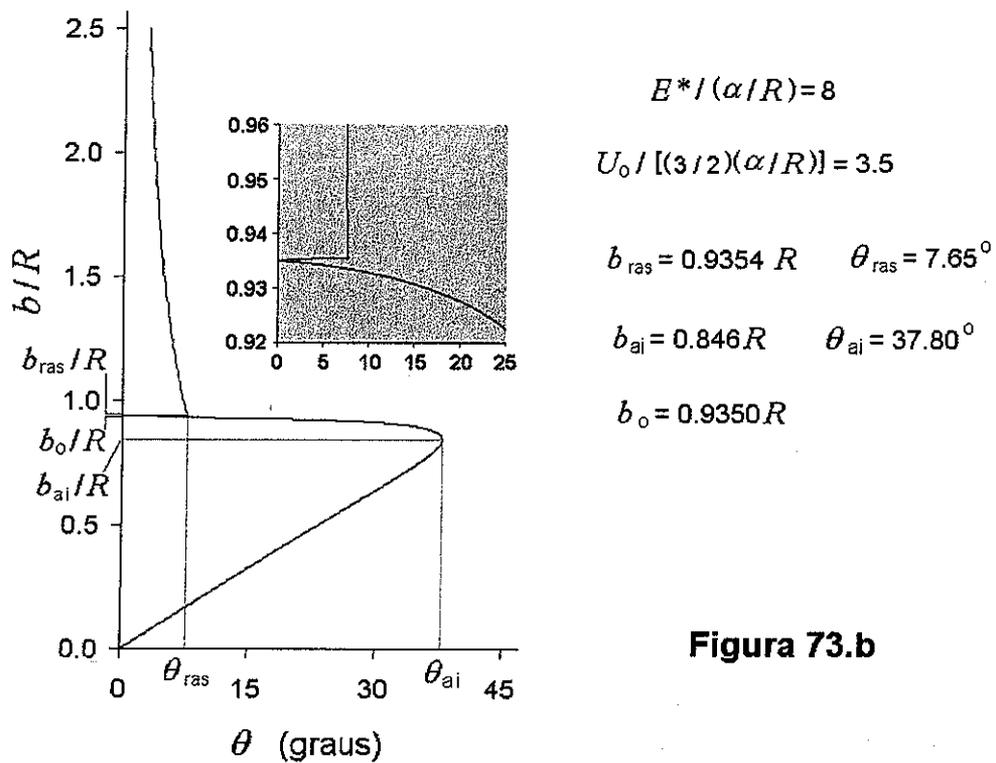


Figura 73.b

A seção de choque é determinada numericamente, como nos exemplos anteriores, e está mostrada nas figuras seguintes:

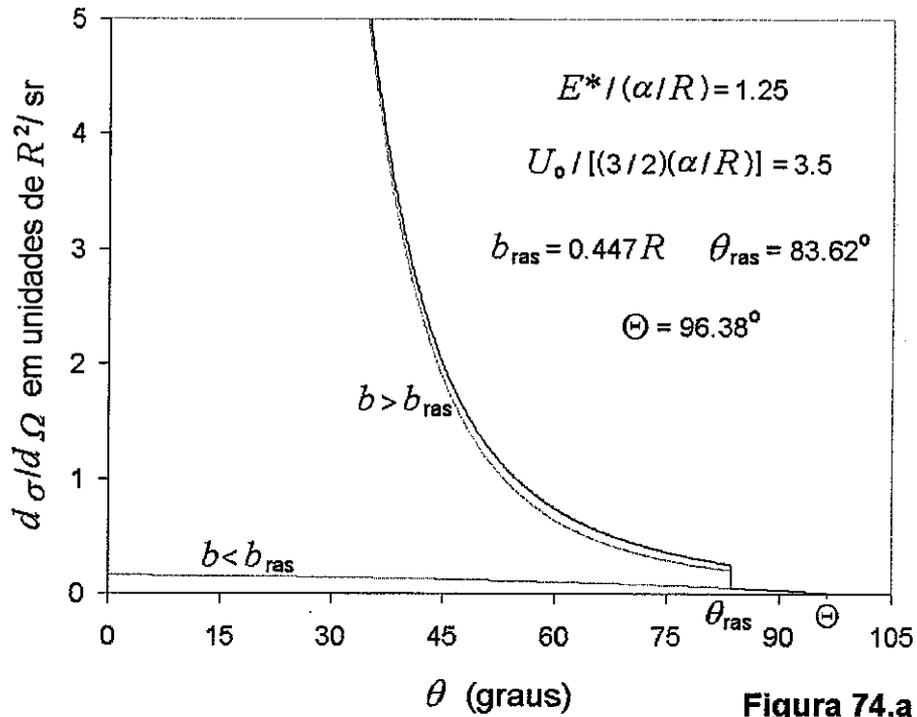


Figura 74.a

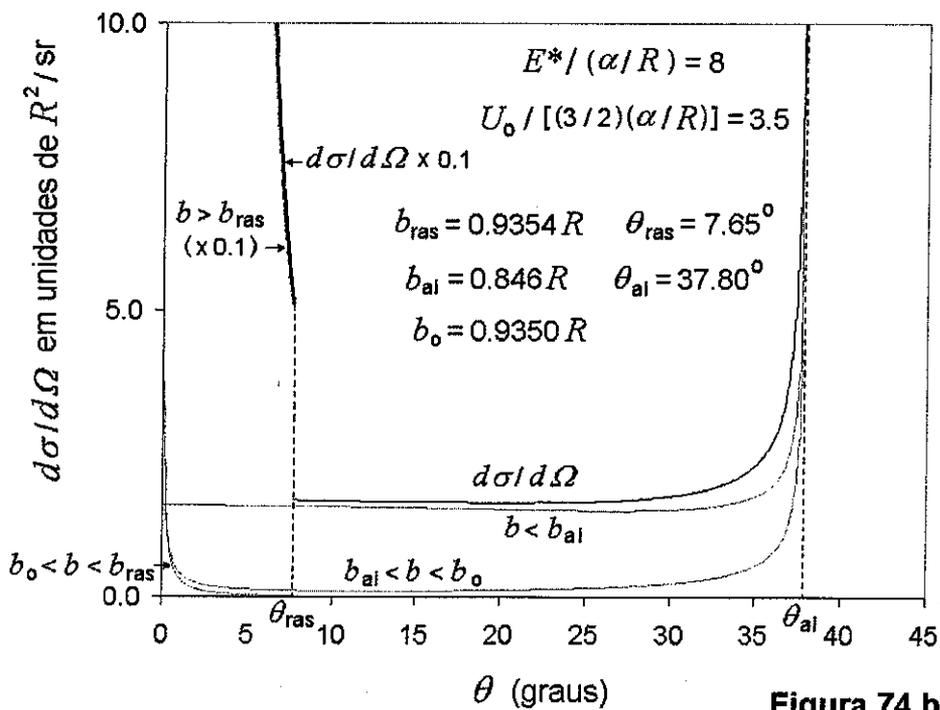


Figura 74.b

Em cada caso, mostramos, além de $d\sigma/d\Omega$, as parcelas correspondentes aos ramos da função multivalente $b = b(\theta)$. Pode-se constatar, calculando a integral

$$\sigma(b < b_{\text{ras}}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_{\text{max}}} d\theta \operatorname{sen}\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{b < b_{\text{ras}}}, \quad (234)$$

onde $\theta_{\text{max}} = \Theta$ ou θ_{ai} conforme se trate da figura 74.a ou 74.b, que $\sigma(b < b_{\text{ras}})$ é de fato igual a πb_{ras}^2 .

A seção de choque para transferência de energia. Vimos que, no SL, o projétil transfere para a partícula-alvo uma energia $Q = E_{1i} - E_{1f} = E_{2f}$. Um projétil que é espalhado entre os ângulos θ e $\theta + d\theta$ no SCM, transfere, no SL, uma energia entre Q e $Q + dQ$, sendo

$$Q = \frac{4m_1 m_2}{M^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} E_{1i} \quad (235)$$

e

$$dQ = \frac{1}{2} \frac{4m_1 m_2}{M^2} \operatorname{sen}\theta E_{1i} d\theta. \quad (236)$$

A seção de choque para a transferência de uma energia entre Q e $Q + dq$ é a área da coroa de raios b e $b + db$, transversal ao feixe incidente,

$$d\sigma_{\text{t.e.}} = 2\pi b db, \quad (237)$$

$b = b(\theta)$ sendo o parâmetro de impacto correspondente ao ângulo de espalhamento θ . Conhecendo a relação $b = b(\theta)$ e utilizando a inversa, $\theta = \theta(Q)$, de (235), podemos exprimir $d\sigma_{\text{t.e.}}$ em termos de Q e dQ :

$$d\sigma_{\text{t.e.}} = 2\pi b[\theta(Q)] \left| \frac{db[\theta(Q)]}{dQ} \right| dQ. \quad (238)$$

A quantidade

$$\frac{d\sigma_{\text{t.e.}}(Q)}{dQ} = 2\pi b[\theta(Q)] \left| \frac{db[\theta(Q)]}{dQ} \right| \quad (239)$$

é a seção de choque para a transferência de uma energia compreendida num intervalo unitário ao redor do valor Q . Numa unidade de tempo, o número de partículas que transferem uma energia entre Q e $Q + dq$ é

$$dN = \frac{d\sigma_{\text{t.e.}}(Q)}{dQ} n f dQ, \quad (240)$$

n sendo o número de partículas-alvo e f o fluxo das partículas incidentes. Na verdade, essa expressão pode ser tomada como definição de $d\sigma_{t.e.}/dQ$, a expressão (239) sendo, nesse caso, uma consequência.

Exemplo. No caso do espalhamento de Rutherford, vimos que

$$b(\theta) = |\xi| \cot \frac{\theta}{2}, \quad (241)$$

com

$$\xi = -\frac{q_1 q_2}{2E^*}. \quad (242)$$

De (241) e (235), temos

$$b^2 = \xi^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} = \xi^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - 1 \right) = \xi^2 \left(\frac{4m_1 m_2}{M^2} \frac{E_{1i}}{Q} - 1 \right)$$

e, assim,

$$\frac{d\sigma_{t.e.}}{dQ} = 2\pi \frac{1}{2} \left| \frac{db^2}{dQ} \right| = \pi \xi^2 \frac{4m_1 m_2}{M^2} \frac{E_{1i}}{Q^2}.$$

Escrevendo

$$\xi = -\frac{q_1 q_2}{2 \frac{m_2}{M} E_{1i}} = -\frac{1}{2} q_1 q_2 \frac{M}{m_2} \frac{1}{E_{1i}},$$

temos finalmente

$$\frac{d\sigma_{t.e.}}{dQ} = \pi \frac{m_1}{m_2} \frac{q_1^2 q_2^2}{E_{1i}^2} \frac{1}{Q^2}. \quad (243)$$

Para um dado tipo de partícula incidente e para uma dada energia de incidência, a seção de choque para transferência de energia é tanto maior quanto menor a massa da partícula que sofre a colisão. Assim, a transferência de energia para um núcleo atômico é muito menos significativa do que a transferência para os elétrons atômicos. A expressão (243) mostra ainda, através do fator $1/Q^2$, que pequenas transferências de energia são muito mais prováveis do que grandes.

O problema inverso na teoria de espalhamento. Nos exemplos vistos, o problema a ser resolvido consistia na determinação da seção de choque, dada a forma $V(r)$ da energia potencial de interação entre o projétil e a partícula-alvo. No problema inverso, o objetivo é determinar $V(r)$, conhecida a seção de choque diferencial como função do ângulo de espalhamento para uma dada energia E^* . Para resolver esse problema (ver L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Mechanics*, third edition, pg. 52), partimos da relação (97) com $d\sigma/d\Omega(\theta)$ conhecida e determinamos θ em termos de b : $\theta = \theta(b)$; feito isso, consideramos a relação (69) e procuramos pela função $V(r)$ que torna o segundo membro igual a uma função

conhecida de b , $\bar{\phi}(b) = [\pi \mp \theta(b)]/2$, o sinal $-(+)$ valendo no caso de uma interação repulsiva (atrativa). É importante observar que a relação entre a seção de choque e o parâmetro de impacto é expressa na forma simples (97) somente quando a função $b(\theta)$ tem apenas um ramo, isto é, quando a cada ângulo de espalhamento θ corresponde apenas um parâmetro de impacto b , o que acontece somente quando θ é uma função monótona de b [forçosamente decrescente e de valor π quando o parâmetro de impacto é zero, pois devemos ter $\theta(b \rightarrow \infty) = 0$]. Um tal comportamento do ângulo de espalhamento se verifica, por exemplo, se $V(r)$ decresce monotonamente com r (interação estritamente repulsiva) e $V(0) > E^*$, mas esta não é uma exigência necessária (apesar de que, mais adiante, iremos acabar restringindo a classe das possíveis soluções a funções $V(r)$ desse tipo). Supondo, então, a monotonicidade de $\theta(b)$, o que implica numa $b(\theta)$ também monotonamente decrescente, temos $db/d\theta < 0$ e (97) é escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left(-\frac{db}{d\theta}\right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d(b^2)}{d\theta} \quad (244)$$

Multiplicando por $2\pi \sin\theta$ e integrando entre os extremos θ e π , temos

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\pi} 2\pi \sin\theta' \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta') d\theta' &= -\pi \int_{\theta}^{\pi} \frac{d(b^2)}{d\theta'} d\theta' = -\pi [b(\theta')]^2 \Big|_{\theta}^{\pi} \\ &= -\pi [b(\pi)]^2 + \pi [b(\theta)]^2. \end{aligned}$$

Sendo $b(\pi) = 0$, temos então

$$\pi [b(\theta)]^2 = \int_{\theta}^{\pi} 2\pi \sin\theta' \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta') d\theta', \quad (245)$$

que é uma relação óbvia se lembramos o significado geométrico da seção de choque. A integral é uma função conhecida de θ , pois $d\sigma/d\Omega$ é uma função dada de θ' . Portanto, $b(\theta)$ fica determinada, o mesmo acontecendo com a inversa $\theta(b)$.

Consideremos agora a relação (69), supondo, daqui para diante, que estejamos em busca de uma interação estritamente repulsiva. Nesse caso, (69) é escrita como

$$\frac{1}{2}[\pi - \theta(b)] = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E^*} - \frac{b^2}{r^2}}} dr, \quad (246)$$

sendo o primeiro membro uma função conhecida de b . Como já dissemos, o nosso objetivo é determinar uma $V(r)$ que torne a expressão (246) uma identidade em b . Para prosseguir, é conveniente fazer na integral a mudança de variável

$$u = \frac{1}{r} \quad [du = -(1/r^2) dr] . \quad (247)$$

Ao extremo de integração $r \rightarrow \infty$, corresponde $u = 0$, enquanto que ao extremo r_{\min} corresponde $u = \bar{u} = 1/r_{\min}$. Definindo também

$$x = \frac{1}{b^2} \quad , \quad v(u) = \sqrt{1 - \frac{V(1/u)}{E^*}} \quad , \quad (248)$$

temos então

$$\frac{1}{2}[\pi - \theta(x)] = \int_0^{\bar{u}} \frac{du}{\sqrt{xv^2 - u^2}} . \quad (249)$$

A equação que determina \bar{u} é obtida de (70):

$$x[v(\bar{u})]^2 - \bar{u}^2 = 0 . \quad (250)$$

Assim como $r_{\min} = r_{\min}(b)$, $\bar{u} = \bar{u}(x)$. A variável x cresce de 0 a ∞ quando b decresce de ∞ a 0. Para $x \rightarrow 0$, $r_{\min} \rightarrow \infty$ e $\bar{u} \rightarrow 0$; para $x \rightarrow \infty$, $r_{\min} \rightarrow$ valor não nulo e $\bar{u} \rightarrow$ valor finito. Portanto, a curva $\bar{u}(x)$ tem o aspecto mostrado na figura abaixo:

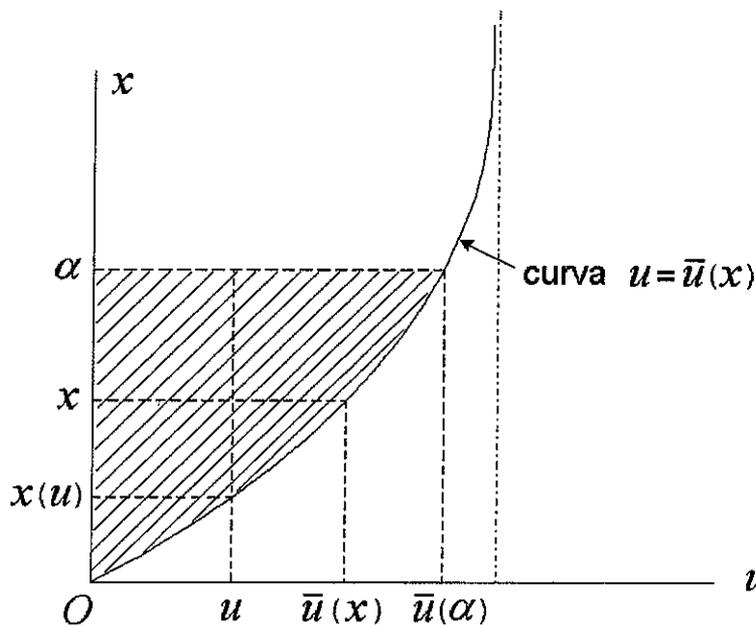


Figura 75

Seja agora α um valor fixo, mas genérico, de x . Dividindo ambos os membros de (249) por $\sqrt{\alpha - x}$ e integrando em x de 0 a α , vem

$$\int_0^{\alpha} \frac{\pi - \theta(x)}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} dx = \int_0^{\alpha} \left[\int_0^{\bar{u}(x)} \frac{du}{\sqrt{xv^2 - u^2}} \right] \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} dx . \quad (251)$$

As duas integrações sucessivas do 2º membro podem ser vistas como uma integral dupla estendida à região demarcada com traços na fig. 75. Mudando a ordem de integração, temos, então,

$$2^{\text{º}} \text{ membro de (251)} = \int_0^{\bar{u}(\alpha)} \left[\int_{x(u)}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(xv^2 - u^2)(\alpha - x)}} \right] du , \quad (252)$$

o extremo inferior $x(u)$ da integração em x sendo o valor de x para o qual $\bar{u}(x) = u$, isto é,

$$x(u) = \frac{u^2}{v^2} , \quad (253)$$

como se deduz de (250). Temos agora

$$(\alpha - x)(xv^2 - u^2) = -v^2x^2 + (\alpha v^2 + u^2)x - \alpha u^2 ,$$

e essa expressão é do tipo $A\xi^2 + B\xi + C$, com $A = -v^2 < 0$, $B = \alpha v^2 + u^2$, $C = -\alpha u^2$ e $B^2 - 4AC = (\alpha v^2 - u^2)^2 > 0$ [estritamente > 0 , pois o ponto (u, α) não está sobre a curva $\bar{u}(x)$]. Utilizando a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}} = -\frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsen \frac{2A\xi + B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} , \text{ se } A < 0 \text{ e } B^2 - 4AC > 0 \quad (254)$$

[M. R. Spiegel, *op. cit.*, pg. 114], temos então

$$\begin{aligned} \int_{x(u)}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(xv^2 - u^2)(\alpha - x)}} &= -\frac{1}{\sqrt{v^2}} \arcsen \frac{2(-v^2)x + \alpha v^2 + u^2}{\sqrt{(\alpha v^2 - u^2)^2}} \Bigg|_{x(u)}^{\alpha} \\ &= -\frac{1}{v} \left[\arcsen \frac{-\alpha v^2 + u^2}{\alpha v^2 - u^2} - \arcsen \frac{\alpha v^2 - u^2}{\alpha v^2 - u^2} \right] = -\frac{1}{v} \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{v} \end{aligned} \quad (255)$$

e, assim,

$$2^{\text{º}} \text{ membro de (251)} = \pi \int_0^{\bar{u}(\alpha)} \frac{du}{v} . \quad (256)$$

Por outro lado, efetuando uma integração por partes, iremos obter

$$\begin{aligned}
 \text{1º membro de (251)} &= \frac{\pi - \theta(x)}{2} [-2(\alpha - x)^{1/2}] \Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dx} [-2(\alpha - x)^{1/2}] dx \\
 &= \pi \sqrt{\alpha} - \int_0^\alpha \sqrt{\alpha - x} \frac{d\theta}{dx} dx, \quad (257)
 \end{aligned}$$

levando-se em conta que $\theta(0) = 0$. Portanto, a relação (251) pode ser escrita como

$$\pi \sqrt{\alpha} - \int_0^\alpha \sqrt{\alpha - x} \frac{d\theta}{dx} dx = \pi \int_0^{\bar{u}(\alpha)} \frac{du}{v}. \quad (258)$$

Vamos agora derivar (258) com respeito ao parâmetro α . Utilizando a fórmula

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f[b(t), t] b'(t) - f[a(t), t] a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad (259)$$

[ver W. Kaplan, *Advanced Calculus*, pg. 220], temos

$$\pi \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha - \alpha} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=\alpha} - \int_0^\alpha \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} \frac{d\theta}{dx} dx = \pi \frac{1}{v[\bar{u}(\alpha)]} \frac{d\bar{u}}{d\alpha},$$

ou seja,

$$\pi d(\sqrt{\alpha}) - \frac{1}{2} d\alpha \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} \frac{d\theta}{dx} dx = \pi \frac{1}{v[\bar{u}(\alpha)]} \frac{d\bar{u}}{d\alpha} d\alpha, \quad (260)$$

após multiplicarmos por $d\alpha$. Para cada valor de α , $\bar{u}(\alpha)$ é a raiz da equação

$$\alpha [v(\bar{u})]^2 - \bar{u}^2 = 0. \quad (261)$$

A relação inversa $\alpha = \alpha(\bar{u})$ é dada por

$$\alpha = \frac{\bar{u}^2}{v^2}, \quad (262)$$

onde $\bar{v} = v(\bar{u})$. Em termos da variável \bar{u} , que passamos a chamar de u , a relação (260) é, então, escrita como

$$\pi d\left(\frac{u}{v}\right) - \frac{1}{2} d\left(\frac{u^2}{v^2}\right) \int_0^{u^2/v^2} \frac{1}{\sqrt{(u^2/v^2) - x}} \frac{d\theta}{dx} dx = \frac{\pi}{v} du. \quad (263)$$

Sendo

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{du} du ,$$

obtemos

$$-\pi \frac{u}{v^2} \frac{dv}{du} du - \frac{1}{2} d\left(\frac{u^2}{v^2}\right) \int_0^{u^2/v^2} \frac{1}{\sqrt{(u^2/v^2) - x}} \frac{d\theta}{dx} dx = 0 .$$

Lembrando que

$$d(\log v) = \frac{1}{v} \frac{dv}{du} du ,$$

temos então

$$-\pi \frac{u}{v} d(\log v) - \frac{u}{v} d\left(\frac{u}{v}\right) \int_0^{u^2/v^2} \frac{1}{\sqrt{(u^2/v^2) - x}} \frac{d\theta}{dx} dx = 0 ,$$

isto é,

$$-\pi d(\log v) = d\left(\frac{u}{v}\right) \int_0^{u^2/v^2} \frac{1}{\sqrt{(u^2/v^2) - x}} \frac{d\theta}{dx} dx .$$

Dividindo por du e integrando em u entre 0 e u , obtemos

$$-\pi \int_0^u \frac{d(\log v')}{du'} du' = \int_0^u \frac{d\left(\frac{u'}{v'}\right)}{du'} du' \int_0^{u'^2/v'^2} \frac{1}{\sqrt{(u'^2/v'^2) - x}} \frac{d\theta}{dx} dx ,$$

onde $v' = v(u')$. Utilizando $\log v'$ e u'/v' como novas variáveis de integração e observando que quando $u' \rightarrow 0$, $v' \rightarrow 1$ [ver (248)], $u'/v' \rightarrow 0$ e $\log v' \rightarrow 0$, iremos obter

$$-\pi \int_0^{\log v} d(\log v') = \int_0^{u/v} d\left(\frac{u'}{v'}\right) \int_0^{u'^2/v'^2} \frac{1}{\sqrt{(u'^2/v'^2) - x}} \frac{d\theta}{dx} dx . \quad (264)$$

O 1º membro vale, evidentemente, $-\pi \log v$. O 2º membro é uma integral dupla estendida à região assinalada na figura seguinte:

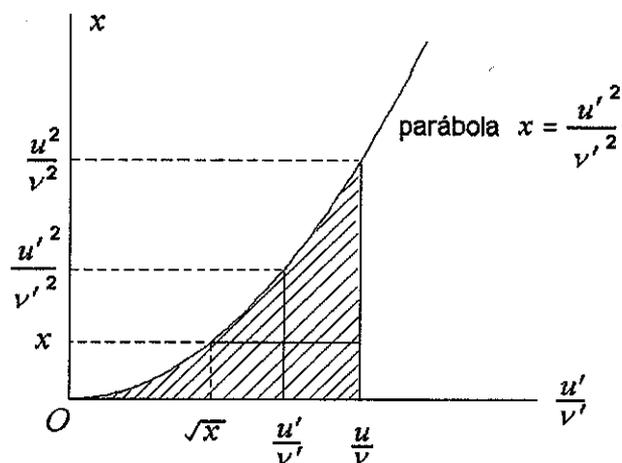


Figura 76

Invertendo a ordem de integração, temos

$$2^{\text{o}} \text{ membro de (264)} = \int_0^{u^2/v^2} \left[\int_{\sqrt{x}}^{u/v} \frac{1}{\sqrt{(u'^2/v'^2) - x}} d\left(\frac{u'}{v'}\right) \right] \frac{d\theta}{dx} dx .$$

Utilizando a integral

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} = \log(\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}) + C = \cosh^{-1} \frac{\xi}{a} + C' ,$$

obtemos

$$\int_{\sqrt{x}}^{u/v} \frac{1}{\sqrt{(u'^2/v'^2) - x}} d\left(\frac{u'}{v'}\right) = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{u'}{v'}\right) \Big|_{\sqrt{x}}^{u/v} = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{u}{v}\right)$$

e, portanto,

$$2^{\text{o}} \text{ membro de (264)} = \int_0^{u^2/v^2} \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{u}{v}\right) \frac{d\theta}{dx} dx .$$

Em termos da variável $b = 1/\sqrt{x}$, escrevemos

$$2^{\text{o}} \text{ membro de (264)} = \int_{\infty}^{v/u} \cosh^{-1}\left(b \frac{u}{v}\right) \frac{d\theta}{db} db .$$

Substituindo u por $1/r$ e invertendo os extremos de integração, temos

$$2^{\text{o}} \text{ membro de (264)} = - \int_{rv}^{\infty} \cosh^{-1}\left(\frac{b}{rv}\right) \frac{d\theta}{db} db .$$

Voltando à relação (264), temos então

$$-\pi \log v = - \int_{rv}^{\infty} \cosh^{-1}\left(\frac{b}{rv}\right) \frac{d\theta}{db} db ,$$

isto é,

$$v = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{rv}^{\infty} \cosh^{-1}\left(\frac{b}{rv}\right) \frac{d\theta}{db} db \right] . \quad (265)$$

A diferença entre essa expressão e a expressão (246) é que agora a incógnita $V(r)$ comparece através de um parâmetro (v) e não mais como uma função da variável de integração. A integral em (265) pode ser calculada e o resultado é uma função de rv . A expressão (265) é então uma equação da forma $F(r, v) = 0$ que, resolvida em v , fornece a função $v(r)$. A solução do problema é a energia potencial dada por

$$V(r) = E^* \{ 1 - [v(r)]^2 \} . \quad (266)$$

Como $d\theta/db < 0$, o argumento da exponencial em (265) é negativo e o 2^o membro de (265) é, portanto, um número compreendido entre 0 e 1. Como o 1^o membro é o próprio v , conclui-se, então, que os valores de v que satisfazem a equação (265) estão compreendidos no intervalo $0 < v < 1$. Assim, os valores que se obtêm para $V(r)$ são tais que $0 < V(r) < E^*$, e isso significa que os valores de r para os quais a equação (265) pode ser resolvida em v ficam restritos àqueles que são acessíveis à partícula incidente na energia de espalhamento E^* . A energia potencial $V(r)$ fica assim determinada apenas na região acessível. A sua forma na região não acessível não influi sobre o espalhamento e não pode, portanto, ser determinada a partir do conhecimento da seção de choque na energia E^* .

Exemplo. Supondo que a seção de choque numa energia E^* seja dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E^*} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} , \quad (267)$$

onde α é uma constante positiva, determinar a energia potencial $V(r)$.

Solução: Utilizando (267) em (245), temos

$$b^2 = 2 \int_{\theta}^{\pi} \operatorname{sen} \theta' \left(\frac{\alpha}{4E^*} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta'}{2}} d\theta' = 4 \left(\frac{\alpha}{4E^*} \right)^2 \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos \frac{\theta'}{2}}{\operatorname{sen}^3 \frac{\theta'}{2}} d\theta'$$

$$= 4 \left(\frac{\alpha}{4E^*} \right)^2 (-) \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta'}{2}} \Big|_{\theta}^{\pi} = \left(\frac{\alpha}{2E^*} \right)^2 \cot^2 \frac{\theta}{2}$$

e, portanto,

$$b = \frac{\alpha}{2E^*} \cot \frac{\theta}{2} . \quad (268)$$

Invertendo essa relação, obtemos

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{\alpha}{2E^*} \frac{1}{b} \right)$$

e, assim, chamando de I a integral em (265), temos

$$I = \int_{rv}^{\infty} \cosh^{-1} \left(\frac{b}{rv} \right) \frac{d}{db} \left[2 \arctan \left(\frac{\alpha}{2E^*} \frac{1}{b} \right) \right] db .$$

Integrando por partes, obtemos

$$I = 2 \cosh^{-1} \left(\frac{b}{rv} \right) \arctan \left(\frac{\alpha}{2E^*} \frac{1}{b} \right) \Big|_{rv}^{\infty} - \int_{rv}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b^2 - r^2 v^2}} 2 \arctan \left(\frac{\alpha}{2E^*} \frac{1}{b} \right) db .$$

Sendo

$$\lim_{b \rightarrow \infty} 2 \cosh^{-1} \left(\frac{b}{rv} \right) \arctan \left(\frac{\alpha}{2E^*} \frac{1}{b} \right) = 0 ,$$

ficamos, então, com

$$I = -2 \int_{rv}^{\infty} \frac{\arctan \left(\frac{\alpha}{2E^*} \frac{1}{b} \right)}{\sqrt{b^2 - r^2 v^2}} db .$$

Efetuada a mudança de variável

$$b = \frac{rv}{\eta} ,$$

vamos obter

$$I = -2 \int_0^1 \frac{\arctan(q\eta)}{\eta \sqrt{1-\eta^2}} d\eta ,$$

onde

$$q = \frac{\alpha}{2E^*} \frac{1}{rv} . \quad (269)$$

Sendo a integral em η igual a $(\pi/2) \log(q + \sqrt{1+q^2})$ [ver I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press 1980, pg. 610, fórmula 13], temos

$$I = -\pi \log(q + \sqrt{1+q^2})$$

e, assim, a relação (265) é escrita como

$$\frac{1}{v} = q + \sqrt{1+q^2} .$$

Transpondo q para o 1º membro e depois quadrando, vem

$$\frac{1}{v^2} - 2\frac{1}{v}q = 1 .$$

Substituindo q , obtemos

$$1 - \frac{r}{E^*} = v^2$$

e essa equação admite uma solução

$$v(r) = \sqrt{1 - \frac{r}{E^*}}$$

para todos os valores de r tais que $(\alpha/r) < E^*$. Substituindo essa expressão de $v(r)$ em (266), obtemos finalmente

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} , \quad (270)$$

na região acessível $\alpha/E^* < r < \infty$. O resultado (270) é o esperado, pois o *input* do problema é a seção de choque de Rutherford (267).

Exemplo. Determinar a energia potencial $V(r)$ sabendo que a seção de choque numa energia E^* é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2 \alpha}{E^*} \frac{\pi - \theta}{\theta^2 (2\pi - \theta)^2} \frac{1}{\sin \theta} , \quad (271)$$

α sendo uma constante positiva.

Solução: Substituindo (271) em (245), temos

$$[b(\theta)]^2 = 2 \int_{\theta}^{\pi} \operatorname{sen} \theta' \frac{\pi^2 \alpha}{E^*} \frac{\pi - \theta'}{\theta'^2 (2\pi - \theta')^2} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta'} d\theta' = 2 \frac{\pi^2 \alpha}{E^*} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\pi - \theta'}{\theta'^2 (2\pi - \theta')^2} d\theta' .$$

Mudando a variável de integração para $t = \pi - \theta'$, vem

$$\begin{aligned} [b(\theta)]^2 &= 2 \frac{\pi^2 \alpha}{E^*} \int_0^{\pi - \theta} \frac{t}{(\pi - t)^2 (\pi + t)^2} dt = 2 \frac{\pi^2 \alpha}{E^*} \int_0^{\pi - \theta} \frac{t}{(\pi^2 - t^2)^2} dt \\ &= 2 \frac{\pi^2 \alpha}{E^*} \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2 - t^2} \Big|_0^{\pi - \theta} = \frac{\pi^2 \alpha}{E^*} \left[\frac{1}{(2\pi - \theta)\theta} - \frac{1}{\pi^2} \right] = \frac{\alpha}{E^*} \frac{(\pi - \theta)^2}{\theta(2\pi - \theta)} \end{aligned} \quad (272)$$

e invertendo essa relação, iremos obter

$$\theta(b) = \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{b^2}}} \right] . \quad (273)$$

Indicando com I a integral na expressão (265), temos, então,

$$I = \int_{rv}^{\infty} \cosh^{-1} \left(\frac{b}{rv} \right) \frac{db}{b} \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{b^2}}} \right] db .$$

Efetuando, como no exemplo anterior, uma integração por partes, vem

$$I = \cosh^{-1} \left(\frac{b}{rv} \right) \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{b^2}}} \right] \Big|_{rv}^{\infty} - \int_{rv}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b^2 - r^2 v^2}} \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{b^2}}} \right] db .$$

Sendo o termo integrado igual a zero, ficamos com

$$I = -\pi \int_{rv}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{b^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{b^2}} \sqrt{b^2 - r^2 v^2}} db .$$

Efetuada a mudança de variável

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{b^2}} + 1 ,$$

vamos chegar a expressão

$$I = -\pi \sqrt{q} \int_2^{1+\sqrt{1+q}} \frac{d\eta}{\eta \sqrt{-\eta^2 + 2\eta + q}} ,$$

onde

$$q = \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{r^2 v^2} .$$

Utilizando a integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \log \left[\frac{2\sqrt{c} \sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right] , \quad c > 0 , \quad 4ac < b^2$$

(ver J. B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and System*, Academic Press, 1965, pg. 551, Murray R. Spiegel, *op. cit.* , pg. 114), obtemos então

$$I = \pi \log \frac{1+q + \sqrt{1+q}}{(1+q)(1+\sqrt{1+q})}$$

e, levando em conta esse resultado, a relação (265) é escrita como

$$v = \frac{1+q + \sqrt{1+q}}{(1+q)(1+\sqrt{1+q})} .$$

Obtemos, assim,

$$[v(1+q) - 1] \sqrt{1+q} = (1-v)(1+q)$$

e, elevando ao quadrado, resulta

$$(1+q)v^2 = 1 .$$

Levando em conta a definição de q , obtemos a solução

$$v^2 = 1 - \frac{\alpha}{E^*} \frac{1}{r^2} ,$$

contanto que $(\alpha / r^2) < E^*$. Substituindo esse resultado em (266), temos finalmente a forma procurada da interação:

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^2} , \quad \sqrt{\alpha/E^*} < r < \infty . \quad (274)$$

Pode-se constatar, fazendo o caminho inverso, que a seção de choque correspondente à energia potencial de interação (274) é, de fato, dada pela expressão (271).