



# Instituto de Física

# Universidade de São Paulo

## TEORIA DE GRUPOS PARA FÍSICOS

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 66.318  
05315-970, São Paulo, SP, Brasil*

José M. Filardo Bassalo  
Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Publicação IF  
E-BOOK 1661/2011

04/04/2011

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Instituto de Física  
Cidade Universitária  
Caixa Postal 66.318  
05315-970 - São Paulo - Brasil

JOSÉ MARIA FILARDO BASSALO  
([www.bassalo.com.br](http://www.bassalo.com.br))  
**PROFESSOR TITULAR APOSENTADO DA UFPA**  
FUNDAÇÃO MINERVA

MAURO SÉRGIO DORSA CATTANI  
([mcattani@if.usp.br](mailto:mcattani@if.usp.br))  
**PROFESSOR TITULAR**  
INSTITUTO DE FÍSICA  
USP

# TEORIA DE GRUPOS PARA FÍSICOS

*Os Autores (Bassalo e Cattani) dedicam este livro, respectivamente, a:*

**CÉLIA, JÔ, GISA, LUCAS, VÍTOR**

**ÁDRIA, SAULO, ANNA-BEATRIZ e MATHEUS**

e

**MARIA LUIZA, MARIA BEATRIZ, MARTA e OLÍVIA**

## PREFÁCIO DA PRIMEIRA EDIÇÃO

Este livro tem o objetivo básico de colocar o leitor em contato com um dos ramos mais ativos da Matemática dos dias de hoje: a Teoria de Grupos e sua aplicação ao estudo da Física.

A importância do estudo da Teoria de Grupos em Física surgiu, basicamente, com o livro de Hermann Weyl intitulado **Gruppentheorie und Quantenmechanic**, publicado em 1928, no qual esse grande matemático alemão mostra que existe uma íntima relação entre as Leis Gerais da Teoria Quântica e a Teoria de Grupos ao observar que *todos os números quânticos, com exceção do número quântico principal  $n$ , são índices que caracterizam as representações de grupo.*

Uma das grandes aplicações práticas da Teoria de Grupos em Física é vista no livro do físico húngaro-norte-americano Eugene Wigner intitulado **Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren**. Nesse livro, publicado em 1931, esse Prêmio Nobel de Física evidencia que todas as regras da Espectroscopia Atômica podem ser bem entendidas fazendo-se o estudo das simetrias observadas nos resultados espectroscópicos. Nesse estudo ele usou a Teoria criada pelo matemático francês Évariste Galois, em 1832.

O grande momento da aplicação em Física da Teoria de Grupos em Partículas Elementares ocorreu em 1961, com a publicação de dois artigos independentes dos físicos, o Nobelistas norte-americano Murray Gell-Mann e o israelense Yuval Ne'eman. Nesses trabalhos, admitindo que a Hamiltoniana de Interações Fortes fosse invariante pelo grupo  $SU(3)$  eles conseguiram, entre outros resultados, uma classificação coerente dos **hádrons** (usando as representações de octetos desse grupo) e a previsão da existência de novas partículas elementares, dentre as quais a partícula  $\Omega^-$ . Esta partícula foi detectada em 1964, em uma experiência sobre o espalhamento de **káons** por **prótons** ( $K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$ ) realizada por V. E. Barnes *et al.*. Observe-se que antes, em 1956, o físico japonês Shoichi Sakata havia sem sucesso usado o grupo  $SU(3)$  para classificar as Partículas Elementares. Observe-se ainda que em 1964 Gell-Mann e, independentemente, o físico russo-norte-americano George Zweig usaram uma outra representação do  $SU(3)$  (tripletos) para prever a existência dos **quarks**. Estes até o momento não foram observados isoladamente.

Um outro grande momento da aplicação em Física da Teoria de Grupos ocorreu no começo da década de 1970 quando os físicos norte-americanos, o Nobel Kenneth Wilson e Michael Fisher aplicaram o **Grupo de Renormalização** aos fenômenos críticos

(transições de fases), retomando o que havia sido considerado por Gell-Mann e pelo físico norte-americano Francis Eugene Low em 1954. Neste livro, contudo, não trataremos desse Grupo.

De modo geral a aplicação da Teoria de Grupos a problemas físicos é dividida em dois esquemas: considerações sobre simetria e considerações sobre problemas de autovalores. Como exemplo do primeiro tipo mencionamos o estudo da simetria de um cristal, de fundamental importância na Física da Matéria Condensada (Espectroscopia, Cristalografia, etc.). No segundo tipo, um exemplo relevante é o estudo de invariâncias de equações de autovalores resultantes de transformações de coordenadas (translações e rotações).

O presente livro está dividido em 8 Capítulos. Nos primeiros três Capítulos, apresentamos a parte formal da Teoria de Grupos e suas Representações e nos cinco Capítulos seguintes são discutidas algumas aplicações à Física. No Capítulo 1 são estudadas as Definições e os Teoremas fundamentais relativos à teoria formal de grupo; no Capítulo 2 são investigadas as Representações e os Caráteres de Grupo, bem como seus Teoremas Fundamentais como o **Lema de Schur**. Ainda nesse Capítulo, introduzimos um estudo sumário das **Séries e Coeficientes de Clebsch-Gordan** utilizados no estudo da Teoria do Momento Angular e de suas aplicações. No Capítulo 3, são discutidos o **Grupo de Lie** e sua correspondente **Álgebra de Lie**, de crucial importância para o estudo da Teoria Quântica de Campo, uma vez que esta representa o candidato natural para a descrição da Física das Partículas Elementares. Nesses três primeiros Capítulos, visando fixar e compreender os algoritmos da Teoria de Grupos, mostramos alguns exemplos de sua aplicação. São também propostos alguns exercícios para que o leitor possa exercitar o seu aprendizado.

No Capítulo 4 é desenvolvida a Teoria do Momento Angular como uma das aplicações das Representações Irredutíveis do **Grupo de Lie SU(2)**. No Capítulo 5 usamos as Representações Irredutíveis do **Grupo de Lie SU(3)** para entender a classificação das Partículas Elementares, principalmente os modelos de Sakata, do octeto (Gell-Mann e Ne'eman) e dos quarks (Gell-Mann e Zweig). No Capítulo 6 estudamos os sistemas Gentiliônicos baseados na **Estatística de Gentile**, com suas propriedades fundamentais de simetria descritas pelo Grupo de Simetria Intermediário  $S_3$ . No Capítulo 7 concebendo a hipótese de que **quarks** sejam gentileons, investigamos a possibilidade de considerar as partículas elementares como sendo sistemas Gentiliônicos. Esses sistemas teriam simetrias regidas pelos grupos  $S_3$  e  $SU(3)$ . Mostramos que, no contexto gentiliônico, o **confinamento de quarks** é previsto como consequência de uma regra de seleção determinada pelo **invariante de Casimir** da álgebra do grupo  $S_3$ .

Por fim, o livro é concluído com o Capítulo 8 onde apresentamos, brevemente, uma das mais importantes aplicações da Teoria de Grupos que é a Teoria de Gauge, usada para descrever as interações fundamentais da Natureza. Mostramos também, com uma aplicação

simples da referida teoria, que o **Efeito Aharanov-Bohm** pode ser explicado pela invariância de gauge do Eletromagnetismo.

Queremos agradecer ao professor Francisco Pereira Assunção, Diretor do *Centro de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará* (CCEN/UFPA), ao professor Manoel Januário da Silva Neto, Chefe do *Departamento de Física da UFPA* (DF/UFPA), às Sras. Walquíria Lima Souza do Sacramento e Antonia Zeile Santana Pereira, da Divisão de Administração do CCEN/UFPA, pelo apoio material para a edição deste livro.

Agradecemos, também, à *Universidade de São Paulo* (USP) e ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq), pelo apoio financeiro para a publicação do livro.

Belém, agosto de 2005.

**José Maria Filardo Bassalo**

Professor do DF/UFPA

**Mauro Sérgio Dorsa Cattani**

Professor Titular do IF/USP

## PREFÁCIO DA SEGUNDA EDIÇÃO

Esta Segunda Edição de **Teoria de Grupos e Algumas Aplicações em Física** (EDUFPA, 2005), agora com o título **Teoria de Grupos para Físicos**, foi revista e aumentada, tendo em vista a leitura crítica de alguns amigos, em particular o físico brasileiro José Carlos de Almeida Azevedo, ex-Reitor da Universidade de Brasília, aos quais agradecemos.

Com o objetivo de melhor entendimento dos *Gentileons*, o Capítulo 6 foi acrescentado de cinco novos itens, com dois Apêndices. Nesses novos itens estudamos o Princípio da Indistinguibilidade de Partículas Idênticas em Mecânica Quântica, o Grupo de Permutação e suas Representações nos Espaços de Configurações e de Hilbert, Sistemas de 3 Partículas e Sistemas Compostos por N Partículas Idênticas e seu Princípio Estatístico. No Apêndice I analisamos com detalhes as Representações do Grupo  $S_N$  no Espaço de Configuração e no Espaço de Hilbert, bem como mostramos a construção das Formas e Operadores de Young, das Funções Base e das Autofunções de Energia e calculamos as Representações Irredutíveis dos Grupos  $S_2$  e  $S_3$ . No Apêndice II mostramos a conexão entre o Grupo de Permutação  $S_3$  com e as Rotações de um Triângulo Equilátero em um Espaço Euclidiano.

Agradecemos à *Universidade de São Paulo* pelo apoio financeiro à da digitação do texto e ao Editor José Roberto Marinho, da *Editora Livraria da Física*, pela publicação deste livro.

Belém, junho de 2007.

**José Maria Filardo Bassalo**

Professor Titular Aposentado da UFPA e da Fundação Minerva

**Mauro Sérgio Dorsa Cattani**

Professor Titular do IF/USP

## SUMÁRIO

**PREFÁCIO DA PRIMEIRA EDIÇÃO** / iii

**PREFÁCIO DA SEGUNDA EDIÇÃO** / ix

**CAPÍTULO 1** / 1

**Grupo** / 1

1.1 Primeiras Definições / 1

1.2 Exemplos de Grupos / 2

1.3 Teoremas Elementares e outras Definições / 16

1.4 Isomorfismo e Homomorfismo / 30

**CAPÍTULO 2** / 35

**Representações de Grupos** / 35

2.1 Primeiras Definições / 35

2.2 Teoremas Fundamentais sobre Representações de Grupos / 55

2.2.1 Interpretação Geométrica do Teorema da Ortogonalidade / 64

2.3 Caráteres das Representações / 65

2.3.1 Interpretação Geométrica do Teorema da Ortogonalidade dos Caracteres de um Grupo / 67

2.4 Produto Direto de Representações / 85

2.5 Bases para Representações / 90

2.6 Séries e Coeficientes de Clebsch-Gordan / 94

**CAPÍTULO 3** / 99

**Grupos e Álgebras de Lie** / 99

3.1 Grupos de Lie / 99



- 3.2 Exemplos de Grupos de Lie / 101
- 3.3 Transformações Infinitesimais e Parâmetros de Grupos / 106
- 3.4 Constantes de Estrutura / 110
- 3.5 Álgebra de Lie / 125
- 3.6 Teoremas gerais sobre as Álgebras de Lie / 145

## **CAPÍTULO 4 / 159**

### **Teoria do Momento Angular / 159**

- 4.1 Representações Irredutíveis do Grupo SU(2) / 159
  - 4.1.1 Representações Spinoriais / 159
  - 4.1.2 Representações por Matrizes Rotação / 166
  - 4.1.3 Representações por Harmônicos Esféricos / 171
- 4.2 Operador de Momento Angular / 176
  - 4.2.1 Momento Angular Orbital: Conceito Clássico / 176
  - 4.2.2 Momento Angular Orbital: Conceito Quântico / 176
  - 4.2.3 A Álgebra dos Operadores de Momento Angular / 177
  - 4.2.4 Auto-funções e Auto-Valores dos Operadores  $L^2$  e  $L_z$  / 178
  - 4.2.5 Operador de Momento Angular Total / 185
  - 4.2.6 Operadores *ladder* (“escada”) / 187
  - 4.2.7 Adição de Dois Momentos Angulares / 192
  - 4.2.8 Operadores Tensoriais e o Teorema de Wigner-Eckart / 203

## **CAPÍTULO 5 / 211**

### **Teoria de Grupo e a Classificação das Partículas Elementares / 211**

- 5.1  $O^+(3)$  e o Potencial Esfericamente Simétrico / 211

5.2 SU(2) e os Multipletos de Isospin /	214
5.2.1 Introdução Histórica /	214
5.2.2 Álgebra e Representações do SU(2) /	215
5.2.3 Diagramas de Pesos das Representações Irredutíveis do SU(2) /	218
5.2.4 Séries e Coeficientes de Clebsch-Gordan do SU(2) /	219
5.3 SU(3), os Supermultipletos de Mesmo Spin-Paridade ( $J^P$ ) e os Quarks /	221
5.3.1 Introdução Histórica /	221
5.3.2 Álgebra e Representações Irredutíveis do SU(3) /	242
5.3.3 Diagramas de Pesos das Representações Irredutíveis do SU(3) /	252
5.3.4 Séries e Coeficientes de Clebsch-Gordan do SU(3) /	275
5.3.5 Fatores Isoescalares e Teorema de Wigner-Eckart /	283
5.4 Modelos em SU(3) para as Partículas Elementares /	285
5.4.1 Modelo de Sakata /	285
5.4.2 Modelo do Octeto /	289
5.4.3 Modelo de Quarks /	300

## **CAPÍTULO 6 / 317**

### **O Princípio da Indistinguibilidade e o Grupo de Permutação: Férmions, Bósons e Gentíleons / 317**

6.1 Gentíleons /	317
6.1.1 Introdução /	317
6.1.2 A Indistinguibilidade de Partículas Idênticas em Mecânica Quântica /	318
6.2 O Grupo de Permutação e suas Representações nos Espaços de Configuração e de Hilbert /	320
6.3 Sistemas com $N = 3$ Partículas /	323

6.4	Sistemas Compostos por N Partículas Idênticas. O Princípio Estatístico /	326
6.5	Sumário e Conclusões /	329
<b>Apêndice A6.I</b>	Representações do Grupo $S_N$ no Espaço de Configuração $\varepsilon^{(N)}$ e no Espaço de Hilbert $L_2(\varepsilon^{(N)})$ /	331
<b>Apêndice A6.II</b>	Permutações no $\varepsilon^{(3)}$ e as Rotações de um Triângulo Equilátero em um Espaço Euclidiano $E_3$ /	344
6.6	Os Sistemas Gentiliônicos Mais Simples /	346
6.6.1	Introdução /	346
6.6.2	Propriedades de Simetria do Estado Quântico Gentiliônico $Y(3,1)$ /	351
6.6.3	Spin e Estatística /	359
6.6.4	A Simetria $S_3$ e os Auto-Estados $SU(3)$ /	363
6.6.5	Propriedades Fundamentais dos Sistemas $g_1$ /	365
6.6.6	Os Hádrons Gentiliônicos /	366
6.6.7	Uma Cromodinâmica Quântica para os Hádrons Gentiliônicos /	368
<b>CAPÍTULO 7</b>	/	373
<b>O Grupo de Simetria Intermediário <math>S_3</math> e o Confinamento de Quark</b>	/	373
7.1	Introdução /	373
7.2	Rotações no Espaço de Cor, Gauge de Cor e Confinamento /	374
<b>CAPÍTULO 8</b>	/	381
<b>Teoria de Gauge</b>	/	381
	A Invariância de Gauge do Eletromagnetismo e o Efeito Aharonov-Bohm /	389
<b>REFERÊNCIAS</b>	/	395
<b>ÍNDICE ONOMÁSTICO</b>	/	403



# CAPÍTULO 1

## Grupo<sup>1</sup>

### 1.1 Primeiras Definições

**Definição 1.1.1** Um conjunto  $G$  consistindo dos elementos  $a, b, c, \dots$   $G = \{a, b, c, \dots\} \equiv \{G, *\}$

é chamado de **Grupo** para uma dada operação –  $(*)$ , se seus elementos satisfazem às seguintes propriedades:

- a)  $\forall a, b \in G, a*b = c \in G$  (Condição de **Fechamento**);
- b)  $\forall a, b, c \in G, (a*b)*c = a*(b*c)$  (Condição de **Associatividade**);
- c)  $\exists e \in G$ , tal que:  $\forall a \in G, a*e = e*a = a$  (**e** é chamado o **Elemento Unidade**);
- d)  $\forall a \in G, \exists a^{-1}$  tal que:  $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$  (**a<sup>-1</sup>** é chamado o **Elemento Inverso** de a).

**Definição 1.1.2** Se para  $\forall a, b \in G$  tem-se  $a*b = b*a$ , diz-se que o grupo é **Comutativo** ou **Abeliano**.

**Definição 1.1.3** O número de elementos de um grupo é chamado de **ordem** do grupo. Os grupos podem ser **finitos** ou **infinitos**.

**Definição 1.1.4** Um grupo cujos elementos são caracterizados por um número de parâmetros contínuos é chamado **Grupo Contínuo**.

---

<sup>1</sup> Esta parte deste Capítulo foi ministrada pelo professor José Maria Filardo Bassalo no *Curso de Extensão*, realizado em 1985, na UFPA, sobre **Teoria de Grupo**.

**Exercício 1.1.1** Mostre que:

a) Se  $a, b \in G$ , então para as equações:

$a * x = b$  e  $y * a = b$ , tem-se, de maneira unívoca:

$$x = a^{-1} * b \text{ e } y = b * a^{-1};$$

b) Se  $a, b \in G$ , então:

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1};$$

c) Se  $a \in G$  e  $n$  é inteiro, por

definição, temos (Bak e Lichtenberg, 1967):

$$\text{I) } a^n = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_n, \text{ se } n > 0;$$

$$\text{II) } a^n = e, \text{ se } n = 0;$$

$$\text{III) } a^n = \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * a^{-1} * \dots * a^{-1}}_n, \text{ se } n < 0,$$

então:

$$a^n * a^m = a^{n+m},$$

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

## 1.2 Exemplos de Grupos

a) **Conjunto  $\mathbb{Z}$** . O conjunto dos inteiros positivos e negativos forma um grupo infinito Abeliano em relação à adição, pois:

$$\text{I) } a, b \in \mathbb{Z}; a + b = b + a;$$

$$\text{II) } a, b, c \in \mathbb{Z}; (a + b) + c = a + (b + c);$$

$$\text{III) } \exists e \equiv 0 \in \mathbb{Z}; 0 + a = a + 0 = a;$$

$$\text{IV) } \forall a \in \mathbb{Z}, \exists a^{-1} \equiv -a; a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

b) **Vetores no  $\mathbb{R}^3$** . O conjunto de vetores no espaço tridimensional forma um grupo infinito Abelianiano em relação à adição vetorial, pois:

$$\text{I) } \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3; (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{II) } \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{R}^3; (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C});$$

$$\text{III) } \exists e \equiv \vec{0}; \vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A};$$

$$\text{IV) } \forall \vec{A} \in \mathbb{R}^3, \exists (\vec{A})^{-1} \equiv -\vec{A}; \vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}.$$

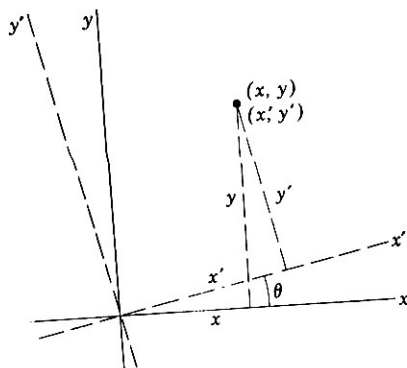
**Exercício 1.2.1** a) Verifique as propriedades de grupo do conjunto de vetores no  $\mathbb{R}^3$ , usando para isso a regra do paralelogramo;

b) Mostre que o conjunto dos racionais ( $\mathbb{Q}$ ) forma um grupo Abelianiano em relação à multiplicação.

c) **Grupo de Rotações**. O conjunto de rotações de um vetor no  $\mathbb{R}^3$  em torno do eixo dos  $z$  de um certo ângulo  $\theta$ , forma um grupo contínuo Abelianiano denotado por  $O(2)$ . Vejamos como.

Por definição, temos:

$$\vec{r}'(x', y') = R(\theta) \vec{r}(x, y)$$



A figura anterior nos mostra que:

$$x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta$$

$$y' = -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta .$$

As equações acima podem ser colocadas na forma matricial, da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Mostremos, agora, que  $R(\theta)$  forma um grupo, com relação à seguinte operação definida por:

$$\vec{r}' = R(\theta_1) \vec{r}; \quad \vec{r}'' = R(\theta_2) \vec{r}'$$

$$\vec{r}'' = R(\theta_2) R(\theta_1) \vec{r} = R(\theta_2 + \theta_1) \vec{r} ,$$

onde:

$$R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \operatorname{sen} \theta_2 \\ -\operatorname{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}; \quad R(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \operatorname{sen} \theta_1 \\ -\operatorname{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} .$$

Usando a definição de produto de matrizes, virá:

$$\begin{aligned} R(\theta_2) R(\theta_1) &= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \operatorname{sen} \theta_2 \\ -\operatorname{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \operatorname{sen} \theta_1 \\ -\operatorname{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1 & \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 \\ -\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$



$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_1) & \text{sen}(\theta_2 + \theta_1) \\ -\text{sen}(\theta_2 + \theta_1) & \cos(\theta_2 + \theta_1) \end{pmatrix} \equiv R(\theta_2 + \theta_1).$$

Portanto:

$$\text{I) } R(\theta_2) R(\theta_1) = R(\theta_2 + \theta_1) = R(\theta).$$

A regra da multiplicação de matrizes nos permite facilmente mostrar que:

$$\text{II) } R(\theta_3) [R(\theta_2) R(\theta_1)] = [R(\theta_3) R(\theta_2)] R(\theta_1);$$

$$\text{III) } R(0) R(\theta) = R(\theta) R(0) = R(\theta);$$

$$\text{IV) } R(-\theta) R(\theta) = R(\theta) R(-\theta) = R(0),$$

onde:

$$R(0) = \begin{pmatrix} \cos 0^\circ & \text{sen} 0^\circ \\ -\text{sen} 0^\circ & \cos 0^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercício 1.2.2** Demonstre as propriedades II, III e IV do grupo 0 (2).

---

d) **Grupo de Lorentz.** As Transformações de Lorentz da Relatividade Restrita formam um grupo. Vejamos como. (Smirnov, 1970)

As Transformações de Lorentz a duas variáveis são definidas por:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),$$

onde:

$$\gamma = \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-1/2} = (1 - \beta^2)^{-1/2}; \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Usando a representação matricial, teremos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma \frac{v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \equiv L(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Assim, sejam duas Transformações de Lorentz  $L_1(v_1)$  e  $L_2(v_2)$  e formemos o seu produto  $L_2 L_1$ . Então:

$$\begin{aligned} L_2 L_1 &= \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2 \beta_2 c \\ -\frac{\gamma_2 \beta_2}{c} & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 \beta_1 c \\ -\frac{\gamma_1 \beta_1}{c} & \gamma_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_2 \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_1 \beta_2 \beta_1 & -\gamma_2 \gamma_1 \beta_1 c - \gamma_2 \gamma_1 \beta_2 c \\ -\gamma_2 \gamma_1 \frac{\beta_2}{c} - \gamma_2 \gamma_1 \frac{\beta_1}{c} & \gamma_2 \gamma_1 \beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \gamma_1 \end{pmatrix} = \\ &= [\gamma_2 \gamma_1 (1 + \beta_2 + \beta_1)] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{1 + \beta_2 \beta_1} \\ -\frac{1}{c}(\beta_1 + \beta_2) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Segundo a Relatividade Restrita, temos:

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}},$$

portanto:

$$\begin{aligned} \gamma_2 \gamma_1 (1 + \beta_2 \beta_1) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} (1 + \beta_2 \beta_1) = \\ &= \frac{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}{\sqrt{(1 - \frac{v_2^2}{c^2})(1 - \frac{v_1^2}{c^2})}} = \frac{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}{\sqrt{1 - (\frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4})}} \end{aligned}$$

Por outro lado, notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{v_3^2}{c^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2)}{(1 + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4} + \frac{2v_1 v_2}{c^2})} \rightarrow 1 - \frac{v_3^2}{c^2} = \\ &= 1 - \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2}{c^2 + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} + 2v_1 v_2} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - (\frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4})}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\gamma_2 \gamma_1 (1 + \beta_2 + \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}} = \gamma_3.$$

Por outro lado, temos:

$$\frac{\beta_1 c + \beta_2 c}{1 + \beta_2 \beta_1} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = v_3,$$

$$\frac{\frac{\beta_2 + \beta_1}{c} + \frac{\beta_1}{c}}{1 + \beta_2 \beta_1} = \frac{\frac{1}{c^2}(v_2 + v_1)}{1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}} = \frac{v_3}{c^2} .$$

Por fim, temos:

$$L_2 L_1 = \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & -v_3 \\ -\frac{v_3}{c^2} & 1 \end{pmatrix} = L_3 ,$$

ou seja:

$$\text{I) } L_2 L_1 = L_3; L_1, L_2, L_3 \in L(v).$$

A regra de multiplicação de matrizes permite mostrar que:

$$\text{II) } L_1 (L_2 L_3) = (L_1 L_2) L_3 ;$$

$$\text{III) } L_0 L = L L_0 = L ; L_0 \equiv L(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{IV) } L^{-1} L = L L^{-1} = L_0 ; L^{-1} \equiv L(-v) .$$

**Exercício 1.2.3** a) Mostre as propriedades II, III e IV do Grupo de Lorentz;

b) Mostre que as Transformações de Lorentz espaciais formam um grupo. [Chame

$$\frac{v}{c} = \beta = \text{th}(\alpha)];$$

c) Mostre que o grupo de rotações  $O(2)$  e o Grupo de Lorentz  $L(2)$  deixam invariantes, respectivamente:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \text{ e } x^2 - y^2 = x^2 - y^2 ;$$

d) Mostre que as Transformações de Poincaré formam um grupo.

---

**e) Grupo de Permutações  $S_n$  (Smirnov, 1980)**

**Definição 1.2.1** Sejam  $n (> 1)$  objetos que numeramos com os números inteiros  $1, 2, 3, \dots, n$ . Com eles podemos formar  $n!$  permutações. Seja uma delas:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_n \end{pmatrix} \equiv (P_1 P_2 P_3 \dots P_n).$$

Tal permutação significa que o elemento que está na posição ou ordem indicada por  $P_1$ , vai para a primeira posição, o que está na posição ou ordem indicada por  $P_2$ , vai para a segunda posição, e assim sucessivamente. Por exemplo, a permutação  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  indica que a permutação que quer se realizar, é obtida da permutação fundamental  $(1\ 2\ 3)$ , fazendo com que o seu terceiro elemento (3) ocupe a primeira posição, o seu primeiro (1) ocupe a segunda posição e o seu segundo elemento (2) ocupe a terceira posição. Vejamos um segundo exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} (a\ b\ c\ d\ e) = (e\ a\ b\ c\ d).$$

**Definição 1.2.2** Chama-se de **Permutação Inversa  $P^{-1}$**  a operação que significa fazer com que o primeiro elemento da permutação fundamental ocupe a ordem ou posição indicada por  $P_1$ , o segundo elemento da permutação fundamental ocupe a ordem ou a posição indicada por  $P_2$ , e assim sucessivamente. Portanto:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} (a \ b \ c) \rightarrow P^{-1} = (b \ c \ a).$$

Da definição acima, é fácil mostrar que  $(P^{-1})^{-1} = P$ .

**Definição 1.2.3** Chama-se **Produto de Permutações**  $P_1P_2$  à permutação obtida primeiro aplicando  $P_2$  e depois  $P_1$ . Assim, se:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

então:

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vejamos um outro exemplo:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} (a \ b \ c \ d \ e) = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} (e \ a \ b \ c \ d) = (a \ c \ e \ d \ b). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} (a b c d e) = (a c e d b), \text{ então:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Definição 1.2.4** Chama-se de **Permutação Unitária E**, a permutação na qual cada elemento é substituído por ele próprio. Ela é representada por:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 1.2.1** Mostre que o conjunto de permutações  $S_3$  forma um grupo.

O grupo  $S_3$  é formado pelos seguintes elementos:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**a) Propriedades de Fechamento:**

$$P_1 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = E;$$

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P_4;$$

$$P_1P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_5;$$

$$P_1P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P_2;$$

$$P_1P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P_3.$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$P_2P_1 = P_5; P_2P_2 = E; P_2P_3 = P_4; P_2P_4 = P_3; P_2P_5 = P_1; P_3P_1 = P_4;$$

$$P_3P_2 = P_5; P_3P_3 = E; P_3P_4 = P_1; P_3P_5 = P_2; P_4P_1 = P_3; P_4P_2 = P_1;$$

$$P_4P_3 = P_2; P_4P_4 = P_5; P_4P_5 = E; P_5P_1 = P_2; P_5P_2 = P_3; P_5P_3 = P_1;$$

$$P_5P_4 = E \text{ e } P_5P_5 = P_4.$$

**b) Propriedade Associativa:**

$$(P_1P_2) P_3 = P_1 (P_2P_3).$$

Em vista da propriedade anterior, temos:

$$(P_1P_2) P_3 = P_4P_3 = P_2,$$

$$P_1 (P_2P_3) = P_1P_4 = P_2.$$

**c) Elemento Unidade:**



$$P_i E = E P_i = P_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

Assim, por exemplo:

$$P_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = P_1,$$

$$E P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = P_1.$$

**d) Elemento Inverso:**

$$P_i^{-1} P_i = P_i P_i^{-1} = E. \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

Assim, por exemplo, usando a Definição 1.2.2, virá:

$$P_4^{-1} P_4 = P_4 P_4^{-1} = E,$$

$$P_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_5.$$

Então, em vista do resultado anterior, temos:

$$P_4^{-1} P_4 = P_5 P_4 = E; \quad P_4 P_4^{-1} = P_4 P_5 = E.$$

As propriedades a, b, c e d, permitem escrever a seguinte tabela de multiplicação para o grupo  $S_3$ .

	E	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
E	E	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$P_1$	$P_1$	E	$P_4$	$P_5$	$P_2$	$P_3$
$P_2$	$P_2$	$P_5$	E	$P_4$	$P_3$	$P_1$

$P_3$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	E	$P_1$	$P_2$
$P_4$	$P_4$	$P_3$	$P_1$	$P_2$	$P_5$	E
$P_5$	$P_5$	$P_2$	$P_3$	$P_1$	E	$P_4$

- Exercício 1.2.4** a) Termine a demonstração das propriedades do grupo  $S_3$ ;
- b) A tabela de multiplicação do grupo  $S_3$  mostra que ele é não-comutativo. Demonstre a afirmativa;
- c) Mostre que o conjunto de permutações  $S_4$  forma um grupo não-comutativo.

Vimos que dado um conjunto de  $n$  ( $> 1$ ) elementos podemos formar o grupo de permutações  $S_n$ . Contudo, as permutações para obter cada elemento (a partir do elemento anterior) desse grupo podem ser um número par ou número ímpar. O grupo formado então de todas as permutações  **pares**  dos números  $1,2,\dots, n$  é chamado de  **Grupo Alternado**  ou  **Alternativo**   $A_n$  cuja ordem (número de elementos) é  $n!/2$  (Jansen e Boon, 1967).

Por exemplo, para os números  $1,2,3$ , as permutações formadas de deslocamentos  **pares**  e  **ímpares** , são:

1,2,3	1,3,2	2,3,1	2,1,3	3,1,2	3,2,1
	1,2,3	2,1,3	1,2,3	1,3,2	1,2,3
		1,2,3		1,2,3	
par(0)	ímpar(1)	par(2)	ímpar(1)	par(2)	ímpar(1)

Dado um elemento do grupo de permutações  $S_n$ , podemos formar um conjunto de permutações que se compõe de subconjuntos constituídos por  **Permutações Circulares**  ou  **Cíclicas** .

Assim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1,3) (2,4,5) = (2,4,5) (1,3).$$

Pois, como vemos, na permutação considerada existem duas permutações cíclicas entre os números 1 e 3, e 2,4 e 5 respectivamente, ou seja:  $(1,3)$  e  $(2,4,5) \rightarrow (5,2,4) \rightarrow (4,5,2)$ . Vejamos outros exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1,3,4) (2,5,6) = (2,5,6) (1,3,4),$$

pois:  $(1,3,4) \rightarrow (4,1,3) \rightarrow (3,4,1)$  e  $(2,5,6) \rightarrow (6,2,5)$ .

**Exercício 1.2.5** Encontre as permutações cíclicas de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

f) **Reflexão Espacial.** O conjunto de reflexões espaciais em torno da origem forma um grupo. Seus elementos são definidos por:

$$E(x,y,z) = (x,y,z) \rightarrow E(\vec{r}) = (\vec{r}), \text{ (Identidade)}$$

$$P(x,y,z) = (-x,-y,-z) \rightarrow P(\vec{r}) = (-\vec{r}). \text{ (Paridade)}$$

**Exercício 1.2.6** Mostre que:

a) E e P formam um grupo;

b)  $P^2 = E$ .

g) **Grupo Unitário U(1).** O conjunto de elementos definido por:

$$g(\alpha) = e^{i\alpha},$$

é um grupo contínuo de um parâmetro  $(\alpha)$ . (Este é o grupo da Eletrodinâmica Quântica).

**Exercício 1.2.7** Mostre que:

- O conjunto  $\{g(\alpha)\}$  forma um grupo;
- O conjunto  $U(1)$  é unitário.

### 1.3 Teoremas Elementares e outras Definições

**Teorema 1.3.1 - Teorema do Rearranjamento.** Seja  $G$  um grupo de ordem  $g$  com os elementos:  $E, A_2, A_3, \dots, A_g$ . Se  $A_k$  é um elemento arbitrário desse grupo, então cada elemento ocorre uma e somente uma vez na seqüência  $EA_k = A_k, A_2A_k, A_3A_k, \dots, A_gA_k$ .

**Demonstração:**

Seja  $X$  qualquer elemento de  $G$ . Seja ainda  $XA_k^{-1} = A_r$ ; então  $XA_k^{-1}A_k = A_rA_k = X$ , logo  $X$  pertence à seqüência dada. Por outro lado,  $X$  não pode ocorrer duas vezes na seqüência dada pois, se  $A_rA_k = X$  e  $A_sA_k = X$ , então  $A_r = A_s$ . Certamente o mesmo acontece para a seqüência:  $A_kE = A_k, A_kA_2, A_kA_3 \dots A_kA_g$ . (É através desse teorema que se constrói as tabelas de multiplicação de um grupo finito).

**Corolário 1.3.1** Se  $J_E, J_{A_2}, J_{A_3}, \dots, J_{A_k}$ , são números tais que cada elemento  $X$  do grupo correspondente a um número  $J$  então:

$$\sum_{v=1}^g J_{A_v} = \sum_{v=1}^g J_{A_v X} = \sum_{v=1}^g J_{XA_v} .$$

**Exemplo 1.3.1** Construa a tabela de multiplicação do grupo  $G = \{E, A, B\} \equiv \{G, *\}$ , dado abaixo:

*	E	A	B
E	E	A	B
A	A		
B	B		

O elemento (2,3), isto é, segunda linha e terceira coluna não pode ser nem A e nem B, pois haveria repetição da linha ou da coluna. Assim: (2,3) = E. O mesmo ocorre para o elemento (3,2). O Teorema 1.3.1 permite concluir que: (2,2) = B e (3,3) = A. É fácil ver que essa tabela goza da Propriedade Associativa, pois, por exemplo:

*	E	A	B
E	E	A	B
A	A	B	E
B	B	E	A

$$(E*A)*B = A*B = E,$$

$$E*(A*B) = E*E = E.$$

**Exercício 1.3.1** Construa as possíveis tabelas de multiplicação do grupo  $G = \{E,A,B,C\} \cong \{G,*\}$ , indicado abaixo:

*	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A			
B	B			
C	C			

**Definição 1.3.1** Seja  $x$  qualquer elemento de um grupo. A seqüência:  $E, x, x^2, x^3, \dots, x^n = E$  é denominada **período** de  $x$  e  $n$  é chamado a **ordem** de  $x$ .

É fácil ver que o período de  $x$  forma um grupo Abelian, chamado **Grupo Cíclico**, sendo que  $x$  é chamado o **gerador** desse grupo. Às vezes, um único elemento não é suficiente para gerar o grupo todo, precisando-se, então, de mais de um gerador. Assim, ao número mínimo de geradores requeridos para definir a estrutura do grupo chamamos de **grau** (“rank”) do grupo. Ao conjunto mínimo dos

elementos que geram o grupo chamamos de **base**. Um grupo pode ter mais de uma base.

**Exemplo 1.3.2** Calcule os períodos do grupo de reflexão espacial, e determine suas ordens.

Conforme vimos, esse grupo é formado por  $E, P$ . Sendo  $P^2 = E$ , então ele é de ordem 2.

**Exemplo 1.3.3** Calcule os períodos do grupo  $S_3$ , e determine suas ordens.

O grupo  $S_3$  é formado por:

$$S_3 = \{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}.$$

Usando-se a tabela de multiplicação desse grupo vista no Exemplo 1.2.1, vê-se que:

- a)  $P_1^2 = E$ ; logo sua ordem é 2;
- b)  $P_2^2 = E$ ; logo sua ordem é 2;
- c)  $P_3^2 = E$ ; logo sua ordem é 2;
- d)  $P_4^2 = P_5$ ;  $P_4^3 = P_4^2 P_4 = P_5 P_4 = E$ , logo sua ordem é 3;
- e)  $P_5^2 = P_4$ ;  $P_5^3 = P_5^2 P_5 = P_4 P_5 = E$ , logo sua ordem é 3.

**Exemplo 1.3.4** Seja o grupo  $G = \{E, A, B, C\} \equiv \{G, *\}$  dado pela tabela abaixo. Calcule seu **grau** (“rank”).

*	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

A tabela nos mostra que:

$$A^2 = E ; B^2 = E ; C^2 = E ,$$

$$A^3 = A^2 * A = A ; B^3 = B ; C^3 = C .$$

Portanto, nenhum elemento do grupo é capaz de gerar o grupo todo. Por outro lado, vemos que:

$$A * B = C ; B * A = C ;$$

$$A * C = B ; C * A = B ;$$

$$B * C = A ; C * B = A .$$

Assim, os pares  $\{A,B\}$  ,  $\{A,C\}$  e  $\{B,C\}$  são capazes de gerar o grupo todo, pois:

$$G = \{A^2 = B^2 = E ; A;B; A*B\}$$

$$= \{A^2 = C^2 = E ; A;C; A*C\}$$

$$= \{B^2 = C^2 = E ; B;C; B*C\} .$$

Conclui-se, portanto, que o **grau** (“rank”) desse grupo vale **2**, já que bastam apenas dois elementos do grupo para gerar os demais. Por outro lado, esse grupo possui três bases, a saber:

$$\{A, B\}, \{A, C\} \text{ e } \{B, C\} .$$

**Exercício 1.3.2** Calcule os **graus** (“ranks”) e as **bases** dos grupos definidos pelas seguintes tabelas de multiplicação:

a)

*	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A

C	C	E	A	B
---	---	---	---	---

b)

*	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	A	E
C	C	B	E	A

---

**Exercício 1.3.3** a) Calcule todos os períodos do grupo  $S_4$  e determine suas ordens;

b) Mostre que as raízes  $n$  da unidade formam um grupo cíclico de ordem  $n$  em relação ao produto. Determine o gerador desse grupo;

c) Mostre que  $1, i, -1, -i$  formam um grupo cíclico.

---

**Definição 1.3.2** Um conjunto  $H$  é dito um **subgrupo** de um grupo  $G$ , isto é,  $H \subset G$ , se ele satisfaz os axiomas de grupo. É claro que todo grupo tem dois subgrupos **triviais** ou **impróprios**:  $H = \{E, G\}$ .

---

**Exemplo 1.3.5** Mostrar que o conjunto de permutações cíclicas do grupo  $S_3$  é um subgrupo **próprio**.

---

No Exemplo 1.2.1, vimos que o grupo  $S_3$  é formado por:

$$S_3 = \{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\} .$$

As permutações cíclicas formadas de  $S_3$  são  $E, P_4$  e  $P_5$ , pois:



$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$S_{3c} = \{E, P_4, P_5\}.$$

Vejamos, agora, se esse conjunto forma um grupo. Para isso é necessário que ele satisfaça à Definição 1.1.1. Assim, segundo a tabela do Exemplo 1.2.1, temos:

a) Condição de **Fechamento**:

$$EP_4 = P_4 \quad ; \quad EP_5 = P_5; P_4P_5 = E;$$

b) Condição de **Associatividade**:

$$E(P_4P_5) = EE = E \quad ; \quad (EP_4)P_5 = P_4P_5 = E;$$

c) Elemento **Unidade**:

$$EP_4 = P_4E = P_4;$$

$$EP_5 = P_5E = P_5;$$

d) Elemento **Inverso**:

$$P_4^{-1}P_4 = P_4P_4^{-1} = E,$$

$$P_5^{-1}P_5 = P_5P_5^{-1} = E.$$

**Exercício 1.3.4** Mostre que:

- O conjunto dos números pares é um subgrupo do grupo dos números inteiros em relação à adição;
- $A_3 \subset S_3$  ;
- O elemento unidade de  $H$  é o mesmo de  $G$ .

**Definição 1.3.3** Para qualquer subgrupo  $H \subset G$  e qualquer elemento  $a \in G$ , mas  $a \notin H$ ,  $aH$  (ou  $Ha$ ) é dito uma **classe lateral**

(“coset”) à esquerda (à direita). [Note-se que uma **classe lateral** (“coset”) não é necessariamente um subgrupo.]

**Teorema 1.3.2 - Teorema de Lagrange.** Seja um grupo finito  $G$  e um subgrupo  $H \subset G$ . Se  $a, b \in G$ , mas  $a, b \notin H$ , então:

$$G = E H + a_2 H + a_3 H + \dots + a_k H$$

e

$$G = H E + H a_2 + H a_3 + \dots + H a_k ,$$

onde  $k$  é chamado de **índice** de  $H$ .

Não faremos a demonstração desse Teorema, no entanto, vamos mostrar o seu resultado através de um exemplo (Meijer e Bauer, 1962).

**Exemplo 1.3.6** Mostre o **Teorema de Lagrange** para o grupo  $S_3$  e o seu subgrupo  $H = S_{3_c}$ .

Nos Exemplos 1.2.1 e 1.3.5, vimos que  $G \equiv S_3 = \{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$  e  $H \equiv S_{3_c} = \{E, P_4, P_5\}$ . Tomemos  $a = \{a_1, a_2, a_3\} \equiv \{P_1, P_2, P_3\}$ , então, usando a tabela do Exemplo 1.2.1, virá:

$$a_1 H = \begin{cases} P_1 E = P_1 \\ P_1 P_4 = P_2 \\ P_1 P_5 = P_3 \end{cases} ; a_2 H = \begin{cases} P_2 E = P_2 \\ P_2 P_4 = P_3 \\ P_2 P_5 = P_1 \end{cases} ; a_3 H = \begin{cases} P_3 E = P_3 \\ P_3 P_4 = P_1 \\ P_3 P_5 = P_2 \end{cases} .$$

Portanto:

$$G \equiv S_3 = H + a_1 H = H + a_2 H = H + a_3 H,$$

sendo, então, 2 o índice de  $H$ .

Por outro lado, temos:

$$Ha_1 = \begin{cases} E P_1 = P_1 \\ P_4 P_1 = P_3 \\ P_5 P_1 = P_2 \end{cases}; Ha_2 = \begin{cases} E P_2 = P_2 \\ P_4 P_2 = P_1 \\ P_5 P_2 = P_3 \end{cases}; Ha_3 = \begin{cases} E P_3 = P_3 \\ P_4 P_3 = P_2 \\ P_5 P_3 = P_1 \end{cases}.$$

Portanto:

$$G \equiv S_3 = H + Ha_1 = H + Ha_2 = H + Ha_3,$$

o que confirma o índice 2 de H em  $S_3$ .

É fácil ver que  $aH$  ou  $Ha$  não forma um grupo, pois, sendo  $aH = Ha = \{P_1, P_2, P_3\}$ , então,  $P_1 P_2 = P_4 \notin aH$  ou  $Ha$ .

---

### Exercício 1.3.5

- Uma **classe lateral** (“coset”)  $aH$  ( $Ha$ ) não contém nenhum elemento de  $H$ ;
  - Duas **classes laterais** (“cosets”) (direito ou esquerdo) ou são idênticos ou não têm elemento comum;
  - A ordem  $m$  de um subgrupo  $H$  de um grupo infinito  $G$  é divisor interno de  $g$  que é a ordem de  $g$ ;
  - Mostre o **Teorema de Lagrange** para  $G = S_4$  e  $H = S_{4_c}$ .
- 

**Definição 1.3.4** Se existe um elemento  $\mu \in G$  de tal modo que se  $a, b \in G$ , tivermos:

$$\mu a \mu^{-1} = b \quad (\text{ou } \mu^{-1} a \mu = b),$$

então  $b$  é chamado de **conjugado** ou **equivalente** de  $a$ , ou seja:  $a \sim b$ .

Da definição acima, facilmente, demonstra-se que:

- $a \sim a$ ;
- Se  $a \sim b$ , então  $b \sim a$ ;
- Se  $a \sim b$  e  $b \sim c$ , então  $a \sim c$ ;

- d) Se  $G$  é Abeliano, então todo elemento de  $G$  é conjugado de si próprio.

---

**Exercício 1.3.6** Demonstre as propriedades acima.

---

Analisando-se a Definição 1.3.4 vê-se que se  $G$  for um grupo de transformações, então essa definição corresponde à transformação de similaridade.

**Definição 1.3.5** Ao conjunto de conjugados ou equivalentes de um elemento  $a \in G$ , chama-se de **classe** de  $G$ .

Da definição acima, facilmente demonstra-se que:

- O elemento  $a$  pertence à **classe** de  $G$  relativo a si próprio;
- Se  $a$  e  $b$  são conjugados, então a classe de  $a$  é a mesma da de  $b$ ;
- Se  $a$  e  $b$  não são conjugados, então suas classes não têm nenhum elemento comum;
- Se cada elemento de  $G$  pertence a uma classe relativa a si próprio, então podemos decompor  $G$  em classes;
- Qualquer elemento de  $G$  que comuta com todos os elementos de  $G$ , forma uma própria classe. A identidade é um exemplo disso.

---

**Exercício 1.3.7**

- Demonstre as propriedades acima;
  - Encontre as classes do grupo  $A_4$ ;
  - Encontre as classes do grupo  $S_4$ .
- 

**Definição 1.3.6** Um subgrupo  $H$  de  $G$  é dito **normal** ou **invariante**,  $\forall a \in G$ , então:  $aHa^{-1} = H$ .

Da definição acima, facilmente demonstra-se que:

- a) As **classes laterais** (“cosets”) direito e esquerdo de **H** são iguais; portanto  $H$ , como coleção, comuta com todos os elementos de  $G$ ;
- b) **H** contém todos os elementos de cada classe de  $G$ , ou não contém nenhum deles;
- c) Cada grupo  $G$  sempre contém os subgrupos invariantes  $H = G$  e  $H = E$ .

**Exercício 1.3.8** Demonstre as propriedades acima.

**Definição 1.3.7** Um grupo que não tem seus subgrupos invariantes impróprios triviais ( $G$  e  $E$ ), é chamado **simples**. Se nenhum dos subgrupos invariantes próprios de um grupo é Abelianiano, então o grupo é chamado **semisimples**.

**Definição 1.3.8** O grupo formado pelas **classes laterais** (“cosets”) do subgrupo invariante  $H$  e pelo próprio  $H$  é chamado de **grupo fator** de  $G$  e denotado por  $G/H$ . se o grupo  $G$  for finito, a ordem do grupo fator é o quociente das ordens de  $G$  e de  $H$ , respectivamente.

**Exercício 1.3.9** Mostre que:

- a) O conjunto das **classes laterais** (“cosets”) de  $H$  invariante forma um grupo com relação ao produto **classe lateral** (“coset”);
- b)  $HH = H$ .

**Exemplo 1.3.7** Dado o grupo  $S_3$ , obtenha suas classes, seus grupos invariantes, e seus grupos fatores.

O grupo  $S_3$  tem os seguintes elementos:  $\{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ . Os inversos desses elementos são:

$E^{-1} = E$ ;  $P_1^{-1} = P_1$ ;  $P_2^{-1} = P_2$ ;  $P_3^{-1} = P_3$ ;  $P_4^{-1} = P_5$  e  $P_5^{-1} = P_4$ , conforme se pode ver usando-se a Definição 1.2.2.

a) **Formemos as classes de  $S_3$ .** Para isso, usemos a Definição 1.3.5 e a tabela do Exemplo 1.2.1.

a.1)  $C_E$

Como  $E \sim E$ , então  $C_E = \{E\}$ .

a.2)  $C_{P_1}$

$$EP_1E^{-1} = P_1; P_1P_1P_1^{-1} = P_1; P_2P_1P_2^{-1} = P_3; P_3P_1P_3^{-1} = P_2;$$

$$P_4P_1P_4^{-1} = P_2; P_5P_1P_5^{-1} = P_3.$$

Portanto:

$$C_{P_1} = \{P_1, P_2, P_3\}.$$

a.3)  $C_{P_2}$

De maneira análoga ao caso anterior, é fácil ver que:

$$C_{P_2} = C_{P_1} = \{P_1, P_2, P_3\}.$$

a.4)  $C_{P_3}$

De maneira análoga ao caso de  $C_{P_1}$ , é fácil ver que:

$$C_{P_3} = C_{P_2} = C_{P_1} = \{P_1, P_2, P_3\}.$$

a.5)  $C_{P_4}$

$$EP_4E^{-1} = P_4; P_1P_4P_1^{-1} = P_5; P_2P_4P_2^{-1} = P_4;$$

$$P_3P_4P_3^{-1} = P_4.$$

Portanto:

$$C_{P_4} = \{P_4, P_5\}.$$

a.6)  $C_{P_5}$

De maneira análoga ao caso anterior, é fácil ver que:

$$C_{P_5} = C_{P_4} = \{P_4, P_5\} .$$

Esses resultados, mostram que:

$$\begin{aligned} G \equiv S_3 &= E + C_{P_1} + C_{P_4} = E + C_{P_2} + C_{P_4} = E + C_{P_3} + C_{P_4} = \\ &= E + C_{P_1} + C_{P_5} = E + C_{P_2} + C_{P_5} = E + C_{P_3} + C_{P_5} . \end{aligned}$$

b) **Formemos, agora, os grupos invariantes de  $S_3$ .** Para isso, usemos a Definição 1.3.6 e a tabela do Exemplo 1.2.1.

b.1) Seja  $H \equiv S_{3C} = \{E, P_4, P_5\} \subset G$ .

Segundo a Definição 1.3.6,  $H$  será invariante se  $\forall a \in G$ , então  $aHa^{-1} = H$ . Assim:

$$EHE^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} EEE^{-1} = E \\ EP_4E^{-1} = P_4 \\ EP_5E^{-1} = P_5 \end{array} \right\} \rightarrow EHE^{-1} = H$$

$$P_1HP_1^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} P_1EP_1^{-1} = E \\ P_1P_4P_1^{-1} = P_5 \\ P_1P_5P_1^{-1} = P_4 \end{array} \right\} \rightarrow P_1HP_1^{-1} = H$$

De maneira análoga demonstra-se que:

$$P_2HP_2^{-1} = H; P_3HP_3^{-1} = H; P_4HP_4^{-1} = H \text{ e } P_5HP_5^{-1} = H .$$

Portanto  $S_{3C}$  é um **invariante**.

b.2) Seja o conjunto  $S'_3 = \{E, P_1, P_2, P_3\}$ . Como  $P_1P_2 = P_4 \notin S'_3$ , então esse conjunto não é subgrupo de  $E$  e, portanto, não podemos nem testar a definição de invariância.

b.3) Seja o conjunto  $H_i = \{E, P_i \ (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}$

É fácil ver que:

$P_iH_iP_i^{-1} \neq H_i$ , portanto,  $H_i$  não é invariante.

c) **Obtenção do grupo fator de  $G$ .** Para isso, usemos a Definição 1.3.8 e a tabela do Exemplo 1.2.1.

Vimos no item b.1, que o subgrupo  $S_{3C}$  é um invariante. Portanto, as **classes laterais** (“cosets”) de  $S_{3C} \equiv H = \{E, P_4, P_5\}$ , são:

$P_1H; P_2H; P_3H; P_4H$  e  $P_5H$ , então, o grupo fator de  $G$  será:

$$G/H = \{P_1H, P_2H, P_3H, P_4H, P_5H\} .$$

Tais **classes laterais** (“cosets”) valem, respectivamente:

$$P_iH = \begin{cases} P_1E = P_1 \\ P_1P_4 = P_2; & P_2H = \{P_2, P_3, P_1\}; & P_3H = \{P_3, P_1, P_2\} ; \\ P_1P_5 = P_3 & P_4H = \{P_4, P_5, E\}; & P_5H = \{P_5, E, P_4\} \end{cases}$$

As duas últimas **classes laterais** (“cosets”) ( $P_4H; P_5H$ ), mostram que:  $HH = H$ . O resultado do item acima mostra que:

$$S_3 = H + P_1H = H + P_2H = H + P_3H .$$

**Exemplo 1.3.8** Seja o grupo  $S_3$  e tomemos o grupo alternativo  $A \equiv S_{3C}$  formado pelas permutações cíclicas de  $S_3$ . Mostre que  $S_3$  é um grupo **não simples** e **não-semisimples**.

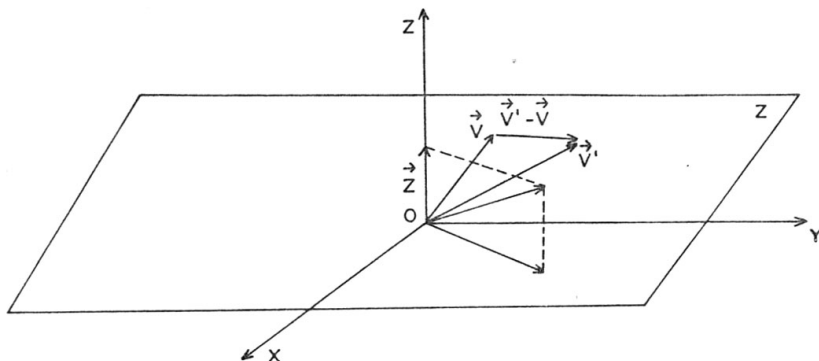
Sendo  $S_3 = \{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$  e  $A_3 = \{E, P_4, P_5\}$ , então:  $EP_4 = P_4$ ;  $EP_5 = P_5$ ;  $P_4P_5 = E$ , portanto,  $A_3$  é Abeliano. No Exemplo 1.3.7 mostramos que  $A_3$  é invariante. Ora, como  $A_3$  é um subgrupo



invariante não-trivial de  $S_3$  e Abelian, logo, segundo a Definição 1.3.7,  $S_3$  é não-simples e não-semisimples.

---

**Exemplo 1.3.9** Seja o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ . Calcule o grupo fator desse espaço vetorial.



O sub-espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  formado pelos vetores do plano  $xoy$  é um subgrupo invariante de  $\mathbb{R}^3$ , pois:

$$\bar{v} \mathbb{R}^2 \bar{v}^{-1} = \mathbb{R}^2, \text{ onde } \bar{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Tomemos, agora, um vetor  $\bar{z}$  pertencente ao  $\mathbb{R}^3$  e que esteja situado no eixo dos  $z$ . Então, o conjunto de vetores formado pela soma vetorial de  $\bar{z}$  com vetores do  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,  $\bar{z} + \mathbb{R}^2$  é uma **classe lateral** (“coset”) de  $\mathbb{R}^3$ . Esse conjunto é representado por todos os vetores que têm suas extremidades situadas em um plano  $z$  perpendicular ao eixo dos  $z$  e paralelo ao plano  $xoy$ , conforme mostra a figura. Assim, cada um desses planos corresponde a uma **classe lateral** (“coset”) de  $\mathbb{R}^3$  e forma uma série contínua.

O grupo fator de  $\mathbb{R}^3$  é constituído pelas projeções dos vetores pertencentes às **classes laterais** (“cosets”) no eixo  $oz$ , ou seja, o elemento  $F_z$  do grupo fator é obtido desprezando-se os vetores

diferença entre os diferentes vetores cujas extremidades encontram-se no plano  $\mathbf{z}$ . Em Matemática isto é representado pelo símbolo de congruência:

$$\bar{v} \equiv \bar{v}' \equiv \bar{v}'' \equiv \dots \pmod{R^2}.$$

Essa notação significa que esses vetores são iguais, se desprezarmos o vetor diferença que está situado no plano  $\mathbf{z}$ . Assim, o grupo fator será  $R^3/R^2 = \mathbf{OZ} \equiv R^1$ .

É oportuno observar que podemos generalizar o que acabamos de ver, ao aplicá-lo ao caso do espaço vetorial  $R^n$ . Assim,  $R^n$  é um grupo de dimensão  $n$  e, por seu lado,  $\mathbf{H}$  é um subgrupo invariante de dimensão  $m < n$ , então, o grupo fator  $F$  será constituído pelos vetores  $\bar{v}_i, \bar{v}_i', \bar{v}_i'', \dots$ , de tal modo que:

$$\bar{v}_i \equiv \bar{v}_i' \equiv \bar{v}_i'' \equiv \dots \pmod{H},$$

e a dimensão de  $F \equiv G/H$  será  $\mathbf{m-n}$ , e representa a projecção sobre um eixo, plano ou hiperplano.

## 1.4 Isomorfismo e Homomorfismo

**Definição 1.4.1 Isomorfismo.** Sejam dois grupos  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{G}'$ , tal que:

1. A cada elemento  $g_i \in G$  corresponde a um e somente um elemento  $g_i \in G'$ , isto

$$g_i \in G \Leftrightarrow \exists g_i' \in G';$$

2. Se  $g_i g_j = g_k$ , então  $g_i' g_j' = g_k'$ , para todos os elementos de  $G$  e  $G'$ .

Deste modo,  $G$  e  $G'$ , são ditos **isomórficos**, ou seja:  $G \approx G'$ .  
Portanto, eles têm a mesma tabela de multiplicação.

---

**Exemplo 1.4.1** Mostre que o grupo  $S_3$  é isomorfo ao grupo que mantém um triângulo equilátero idêntico a si próprio.

---

O grupo que mantém um triângulo equilátero idêntico a si próprio é definido por (veja as figuras a seguir).

$E$ : Operação da identidade, a qual deixa a figura idêntica a si própria;

$P_1$ : Reflexão em torno da linha  $A$ , isto é, troca o vértice **1** por **2**;

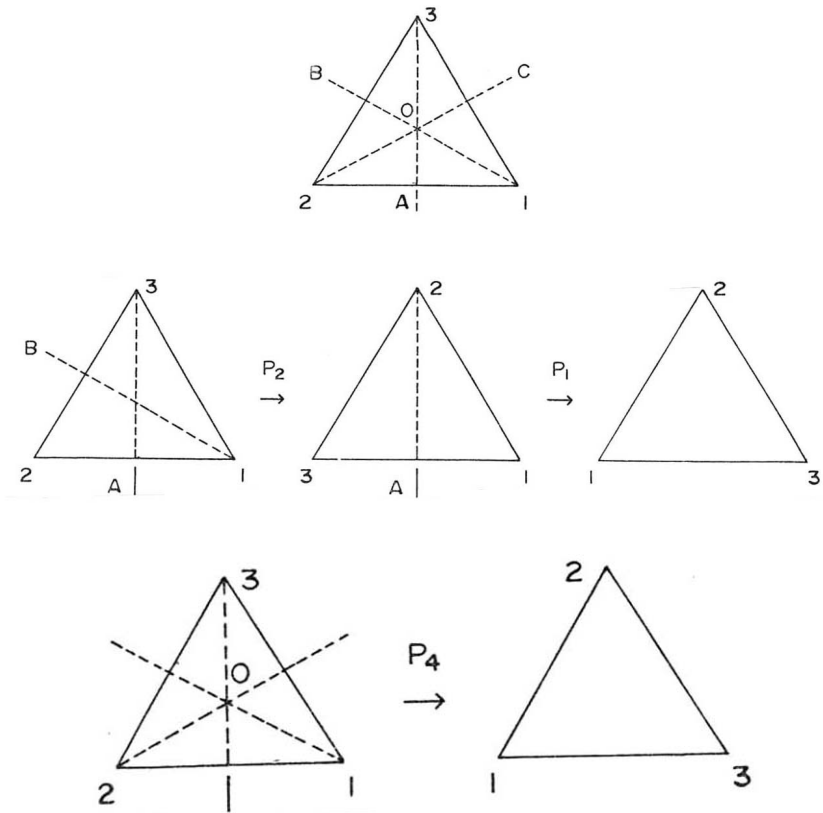
$P_2$ : Reflexão em torno da linha  $B$ , isto é, troca o vértice **2** por **3**;

$P_3$ : Reflexão em torno da linha  $C$ , isto é, troca o vértice **1** por **3**;

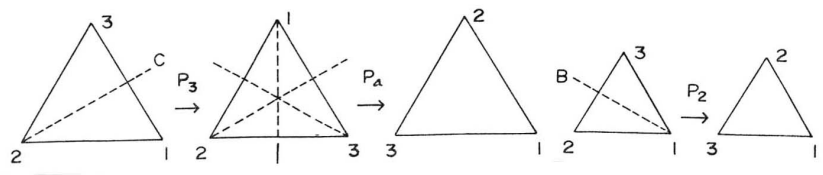
$P_4$ : Rotação de  $120^\circ$  no sentido horário em torno do centro  $o$ , isto é, o vértice **3** vai para o lugar de **1**, este para o lugar de **2**, e este para o lugar de **1**;

$P_5$ : Rotação de  $120^\circ$  no sentido anti-horário em torno do centro  $o$ , isto é, o vértice **3** vai para o lugar de **2**, este para o lugar de **1**, e este para o lugar de **3**.

É fácil ver que esse grupo satisfaz à mesma tabela de multiplicação do grupo  $S_3$  e que foi construída no Exemplo 1.2.1. Por exemplo  $P_1P_2 = P_4$ , pois:



Outro exemplo:  $P_4 P_3 = P_2$

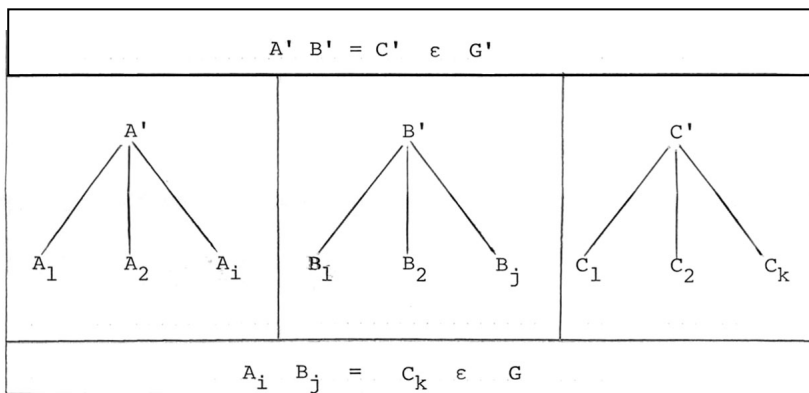


**Exercício 1.4.1** a) Complete a tabela de multiplicação do Exemplo 1.4.1.

b) Mostre que o grupo  $S_2$  é isomorfo ao grupo de reflexões espaciais.

**Definição 1.4.2 Homomorfismo.** Dois grupos  $G$  e  $G'$  são **homomórficos**, se os elementos de  $G$  podem ser postos em uma correspondência (não um a um) com os elementos de  $G'$  e desde que esta correspondência preserve as leis de multiplicação dos dois grupos.

O diagrama a seguir esclarece a definição dada.



**Obs:** O conceito de Homomorfismo é muito usado em cristalografia.

**Exemplo 1.4.2** Seja  $S_n$  o grupo de permutações de  $n$  ( $> 1$ ) objetos. Ao conjunto de permutações pares associamos o número  $+1$ , e ao de permutações ímpares, o número  $-1$ . O

conjunto formado por  $+1$  e  $-1$  forma um grupo multiplicativo e é homomórfico do grupo  $S_n$ . O elemento  $+1$  corresponde ao Grupo Alternativo de  $S_n$ , isto é,  $A_n$ , e  $-1$  à sua **classe lateral** (“coset”) (Meijer e Bauer, 1962).

---

**Teorema 1.4.1** Se um grupo  $G$  possui um subgrupo invariante  $H$ , então  $G$  é homomórfico ao grupo fator  $G/H$ .

---

**Exercício 1.4.2** a) Se  $G$  é homomórfico a  $G'$ , e se  $E'$  é o elemento de unidade de  $G'$ , mostre que:

- I) O conjunto de elementos de  $G$  que corresponde a  $E'$  forma um subgrupo invariante de  $G$ ;
  - II)  $G'$  é isomórfico ao grupo fator  $G/H$ .
- b) Mostre a última afirmação do Exemplo 1.4.2.



## CAPÍTULO 2

# Representações de Grupo<sup>1</sup>

### 2.1 Primeiras Definições

**Definição 2.1.1** Uma **representação** de um grupo é um grupo de identidades matemáticas homomórficas ao grupo abstrato original. Uma **representação linear** é uma representação em termos de operadores lineares. Assim, se fizermos uma aplicação homomórfica de um grupo arbitrário  $G$  num grupo de operadores  $D(G) \in L$ , dizemos que  $D(G)$  é uma **representação** de  $G$  no espaço de representações  $L$ . Se a dimensão de  $L$  é  $n$  dizemos que a representação tem dimensão  $n$ . quando a representação é dada em forma de matrizes, ela é denotada por  $D_{ij}(G)$ . Como pode haver várias representações para um mesmo grupo, então denotaremos  $D^{(\mu)}(G)$  [ou  $D_{ij}^{\mu}(G)$ ] para uma dada representação de dimensão  $\mu$ . Os elementos de uma representação devem ter as seguintes propriedades:

- a)  $D(RS) = D(R)D(S), \forall R, S \in G;$
- b)  $D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1}, \forall R \in G;$
- c)  $D(E) = I; E : \text{Elemento unitário de } G.$

A definição acima permite tirar duas conclusões:

---

<sup>1</sup> Esta parte deste Capítulo foi ministrada pelo professor José Maria Filardo Bassalo no *Curso de Extensão*, realizado em 1985, na UFPA, sobre **Teoria de Grupo**.



- I) Cada grupo tem uma representação unidimensional que é denotada pelo número 1;
- II) O determinante de cada matriz representação é também uma representação, pois:

$$\det D(R) \cdot \det D(S) = \det [D(R) D(S)] = \det [D(RS)].$$

**Exercício 2.1.1** Usando a propriedade a) da Definição 2.1.1, demonstre as propriedades b) e c).

**Definição 2.1.2** Quando a correspondência entre os elementos de  $G$  e os de  $D(G)$  é um isomorfismo, a representação é dita **fiel** (“faithful”). Neste caso, a ordem de  $D(G)$  é a mesma de  $G$ .

**Definição 2.1.3** Duas representações  $D(G)$  e  $D'(G)$  são ditas **equivalentes**, se  $\forall R \in G$ , existe uma transformação de similaridade  $S$ , tal que:

$$D'(R) = S^{-1} D(R) S.$$

**Definição 2.1.4** Uma representação matricial é dita **redutível** se, por transformações de similaridade, sua matriz pode ser posta na forma:

$$D(R) = \begin{pmatrix} D^{(i)}(R) & A(R) \\ 0 & D^{(k)}(R) \end{pmatrix},$$

onde  $D^{(i)}(R)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) são também representações do mesmo grupo.

- a) Ela é dita **completamente redutível** se  $A(R) = 0$ ;

- b) Quando ela não pode ser escrita nessa forma, ela é dita **irredutível**;
- c) Uma representação **totalmente redutível** é a soma direta de representações irredutíveis (estas podem aparecer várias vezes), isto é:

$$D = \sum_v a_v D^{(v)},$$

onde  $\{a_v\}$  são números inteiros positivos e a dimensão de  $D$  é a soma das dimensões de  $D^{(v)}$ . (É oportuno salientar que essa soma não representa soma de matrizes!)

**Exercício 2.1.2** a) Demonstre que cada representação matricial  $D(G)$  de um grupo finito  $G$  é equivalente a uma representação unitária;

b) Demonstre que:

$$D_{ij}(G_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } G_n G_j = G_i \\ 0, & \text{se } G_n G_j \neq G_i \end{cases},$$

onde  $G_k \in G$ , é uma representação fiel de  $G$  e denominada **regular**.

**Exemplo 2.1.1** Encontre um conjunto de representações irredutíveis do grupo  $S_3$ .

O grupo  $S_3$ , conforme vimos no Exemplo 1.2.1, é dado por:

$E = (123)$  ;  $P_1 = (213)$  ;  $P_2 = (132)$  ;  $P_3 = (321)$  ;  $P_4 = (312)$  ;  $P_5 = (231)$  com a seguinte tabela de multiplicação:

	E	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
E	E	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
P <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	E	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>
P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>5</sub>	E	P <sub>4</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>1</sub>
P <sub>3</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	E	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>
P <sub>4</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>5</sub>	E
P <sub>5</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>1</sub>	E	P <sub>4</sub>

a) Primeiramente vamos encontrar as representações uni-dimensionais de  $S_3$ . A tabela de multiplicação acima nos mostra que:

$$P_1^2 = E ; P_2^2 = E ; P_3^2 = E ,$$

então:

$$D(P_1^2) = D(E) = 1 \rightarrow D(P_1) D(P_1) = D^2(P_1) = D(P_1^2) = 1 ,$$

então:

$$D(P_1) = \pm 1 .$$

Analogamente:

$$D(P_2) = D(P_3) = \pm 1 .$$

Por outro lado, temos:

$$P_4^2 = P_5 ; P_4^3 = P_4^2 P_4 = P_5 P_4 = E ,$$

$$P_5^2 = P_4 ; P_5^3 = P_5^2 P_5 = P_4 P_5 = E ,$$

então:

$$D(P_4^3) = D(P_4^2 P_4) = D(P_4^2) D(P_4) = D^3(P_4) = D(E) = 1 ,$$

logo:

$$D(P_4) = \sqrt[3]{1} = 1, t, t^2, \text{ onde: } t = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}.$$

Analogamente:

$$D(P_5) = D(P_4) = 1, t, t^2.$$

Examinando-se, ainda, a tabela de multiplicação de  $S_3$ , vê-se que:

$$P_1 P_2 = P_4 \text{ e } P_1 P_3 = P_5,$$

então:

$$D(P_1 P_2) = D(P_1) D(P_2) = D(P_4) \rightarrow (\pm 1)(\pm 1) = 1 = D(P_4).$$

Analogamente:

$$D(P_1 P_3) = D(P_5) = 1,$$

vê-se, então, que das três soluções de  $D(P_4) = D(P_5)$ , apenas a solução 1 é satisfatória. Assim, temos apenas duas representações uni-dimensionais de  $S_3$ :

$$D^{(1)}(g) = 1, \forall g \in S_3,$$

$$D^{(1)}(E) = D^{(1)}(P_4) = D^{(1)}(P_5) = 1,$$

$$D^{(1)}(P_1) = D^{(1)}(P_2) = D^{(1)}(P_3) = -1.$$

Tais representações são Homorfismos.

b) Agora, vamos encontrar uma representação bi-dimensional de  $S_3$ .

$$\text{Sendo } D^{(2)}(E) = I, \text{ então } D^{(2)}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, temos (vide tabela de multiplicação):

$$P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 = E,$$

então:

$$D^{(2)}(P_i^2) = D^{(2)}(E) = I; \quad (i = 1,2,3).$$

Seja:

$$D^{(2)}(P_i) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a^2 + bc = 1; ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0; bc + d^2 = 1. \end{matrix}$$

Tomemos a equação:

$$ab + bd = 0 \rightarrow b(a+d) = 0 \rightarrow b = 0 \quad (\text{ou } a = -d).$$

Tomamos, no entanto,  $b = 0$ . Então, sendo:

$$a^2 + bc = 1 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1.$$

Por outro lado, temos:

$$ac + cd = 0 \rightarrow c(a+d) = 0 \rightarrow c = 0 \quad (\text{ou } a = -d).$$

Tomemos, no entanto,  $c = 0$ . Então, sendo:

$$bc + d^2 = 1 \rightarrow d^2 = 1 \rightarrow d = \pm 1.$$

Assim, podemos ter três possibilidades para a representação  $D^{(2)}(P_i)$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos escolher a primeira delas e supor que:

$$D^{(2)}(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se, no entanto, fizermos:

$$D^{(2)}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D^{(2)}(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

veremos que, sendo [vamos descarregar o índice (2)]:

$$P_1 P_3 = P_5, \text{ então } D(P_1 P_3) = D(P_1)(P_3) = D(P_5).$$

Ora:

$$D(P_1) D(P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(P_2) \neq D(P_5).$$

Por outro lado:

$$D(P_2) D(P_3) = D(P_2 P_3) = D(P_4), \text{ pois } P_2 P_3 = P_4.$$

Ora:

$$D(P_2) D(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D(P_1) \neq D(P_4).$$

Por fim:

$$D(P_2) D(P_1) = D(P_2 P_1) = D(P_5), \text{ pois } P_2 P_1 = P_5.$$

Ora:

$$D(P_2) D(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D(P_3) \neq D(P_5).$$

Agora, vamos escolher uma outra possibilidade para as representações  $D(P_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), isto é:

$$D(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga ao caso anterior, demonstra-se que:

$$D(P_2) D(P_1) = D(P_5) \neq D(P_2 P_1),$$

$$D(P_2) D(P_3) = D(P_4) \neq D(P_2 P_3).$$

Tomemos, agora, uma outra alternativa, qual seja:

$$D(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D(P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, com esses valores, é fácil ver que:

$$D(P_2) D(P_1) = D(P_5) \neq D(P_2 P_1),$$

$$D(P_2) D(P_3) = D(P_4) \neq D(P_2 P_3),$$

$$D(P_1) D(P_3) = D(P_5) \neq D(P_1) D(P_3).$$

Assim, só nos resta uma de três possibilidades:

$$D(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } D(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$D(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Procuremos, agora, outras representações. Sendo:

$$(P_4)^3 = (P_5)^3 = E, \text{ então:}$$

$$D^3(P_4) = D^3(P_5) = D(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomemos, portanto:

$$D(P_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Existe uma infinidade de soluções. Vamos, inicialmente, escolher uma matriz real e unitária, isto é, ortogonal. Então, teremos:

$$D^{-1}(P_4) \equiv [D_{ij}(P_4)]^T = D_{ji}(P_4) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

A inversa dessa matriz será:

$$D_{ij}^{-1}(P_4) \equiv \frac{1}{\det D} \text{Cof } D_{ji} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Portanto:



10

$$\frac{d}{ad-bc} = a; -\frac{b}{ad-bc} = c; -\frac{c}{ad-bc} = b; \frac{a}{ad-bc} = d.$$

Tomemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ad-bc} = a \text{ e } \frac{a}{ad-bc} = d &\rightarrow \frac{d}{ad-bc} = d(ad-bc) \rightarrow (ad-bc)^2 = \\ &= 1 + (ad-bc) = \pm 1. \end{aligned}$$

Se:

$$ad-bc = +1 \rightarrow a = d \text{ e } b = -c.$$

Ou, se:

$$ad-bc = -1 \rightarrow a = -d \text{ e } b = c.$$

Assim:

$$D(P_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ ou } D(P_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Escolhendo:

$$D(P_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Sendo, ainda:

$$D^3(P_4) = I, \text{ então: } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ com } a^2 + b^2 = 1,$$

virá:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 - 3b^2a & 3a^2b - b^3 \\ b^3 - 3a^2b & a^3 - 3ab^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} 3a^2 - b^3 &= 0, \\ b(3a^2 - b^2) &= 0 \rightarrow b = 0 \text{ ou } 3a^2 = b^2. \end{aligned}$$

A solução  $b = 0$  é descartável, senão a representação seria redutível. Tomemos, portanto, a segunda solução:

$$3a^2 = b^2 = 1 - a^2 \rightarrow 4a^2 = 1 \rightarrow a = \pm \frac{1}{2}.$$

$$3\left(\frac{1}{4}\right) = b^2 \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Por outro lado, temos:

$$a^2 - 3b^2a = 1 \rightarrow a(a^2 - 3b^2) = 1 \rightarrow a\left(a^2 - 3 \times \frac{3}{4}\right) = 1,$$

$$a\left(\frac{1}{4} - \frac{9}{4}\right) = 1 \rightarrow a\left(-\frac{8}{4}\right) = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Finalmente, escolhendo  $b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ , teremos:

$$D(P_4) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Sendo:

$$D^3(P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ então } D(P_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

já que tomamos  $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

Anteriormente, vimos que  $D(P_2)$  tem três possibilidades. Vamos escolher a seguinte:

$$D(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos determinar as outras representações restantes, isto é,  $D(P_1)$  e  $D(P_2)$ . Sendo:

$D(P_1)D(P_2) = D(P_1P_2) = D(P_4)$ , teremos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ +\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$c = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$  e  $d = -\frac{1}{2}$ , então:

$$D(P_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Por fim:

$D(P_2)D(P_3) = D(P_2P_3) = D(P_4)$ , então:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow a = \frac{1}{2} ; b = \frac{1}{2}\sqrt{3} ;$$

$c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  e  $d = -\frac{1}{2}$ , então:

$$D(P_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Em resumo, uma das representações irredutíveis de  $S_3$  terá o seguinte quadro (os índices A e B diferenciam as representações unidimensionais):

	$D_A^{(1)}$	$D_B^{(1)}$	$D^{(2)}$
E	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$P_1$	1	-1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
$P_2$	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$P_3$	1	-1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
$P_4$	1	1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
$P_5$	1	1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

**Exercício 2.1.3** Encontre:

- a) Os geradores do grupo  $S_3$ ;  
 b) Uma outra representação irredutível e bi-dimensional de  $S_3$ ;  
 c) Todas as representações irredutíveis do grupo dado pela seguinte tabela de multiplicação:

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

**Exemplo 2.1.2** Encontre uma representação tridimensional e regular para o grupo alternativo  $A_3$ .

O grupo alternativo  $A_3$  é formado por:

$G_1 = (123)$ ;  $G_2 = (312)$ ;  $G_3 = (231)$ , de modo que é fácil ver que:

$$G_1 G_2 = G_2; \quad G_1 G_3 = G_3; \quad G_2 G_3 = G_1; \quad G_1^2 = G_1; \quad G_2^2 = G_3; \quad G_3^2 = G_2.$$

Agora, usaremos a definição de representação regular, isto é:

$$D_{ij}^{(3)} \{G_n\} = \begin{cases} 1, & \text{se } G_n G_j = G_i \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Portanto [vamos descarregar o índice (3)]:

$$D_{11}(G_1) = 1 ; D_{12}(G_1) = 0 ; \text{ pois } G_1 G_2 \neq G_1,$$

$$D_{13}(G_1) = 0 ; \text{ pois } G_1 G_3 \neq G_1,$$

$$D_{21}(G_1) = 0 ; \text{ pois } G_1 G_1 \neq G_2; D_{22}(G_1) = 1; \text{ pois } G_1 G_2 = G_2,$$

$$D_{23}(G_1) = 0; \text{ pois } G_1 G_3 \neq G_2; D_{31}(G_1) = 0; \text{ pois } G_1 G_1 \neq G_3,$$

$$D_{32}(G_1) = 0; \text{ pois } G_1 G_2 \neq G_3; D_{33}(G_1) = 1; \text{ pois } G_1 G_3 = G_3.$$

Logo [vamos carregar o índice (3)]:

$$D^{(3)}(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$D^{(3)}(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D^{(3)}(G_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercício 2.1.4** a) Calcule  $D(G_2)$  e  $D(G_3)$  do Exemplo 2.1.2;

b) Encontre uma representação 6 – dimensional regular para  $S_3$ ;

c) Encontre representações equivalentes da representação regular de  $A_3$ , para:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

d) Encontre a representação regular para o grupo cíclico  $\{E, A, B, C\}$ , onde  $B = A^2$  ;  $C = A^3$  ;  $E = A^4$ .

**Exemplo 2.1.3** Mostre que o conjunto de operadores lineares  $\{O_R\}$  definido por:

$$O_R \psi(\bar{x}) \equiv \psi(R\bar{x}) \quad ; \quad \text{onde } \bar{x} \rightarrow R\bar{x},$$

forma um grupo. Calcule, então, suas representações. (Esses operadores são chamados de **Operadores de Wigner.**)

a) Vamos mostrar, inicialmente, que esse conjunto  $\{O_R\}$  forma um grupo.

### I) Condição de fechamento

Seja:  $O_R [\psi(\bar{x})] \equiv \psi(R\bar{x})$ , então:

$$(O_S O_R) \psi(\bar{x}) = O_S [O_R \psi(\bar{x})] = O_S \psi(R\bar{x}) = \psi[S(R\bar{x})]$$

$$(O_S O_R) \psi(\bar{x}) = \psi[(SR)\bar{x}].$$

Sendo  $SR = T$ , então:

$$(O_S O_R) \psi(\bar{x}) = \psi(T\bar{x}), \text{ logo:}$$

$O_S O_R \equiv O_T \equiv O_{SR}$ , é um **Operador de Wigner!**

### II) Condição de Associatividade:

$$[(O_S O_R) O_T] \psi(\bar{x}) = O_S O_R [\psi(T\bar{x})] = O_S [\psi(RT\bar{x})] = \psi(SRT\bar{x}).$$

Por outro lado, temos:

$$(O_S) [(O_R O_T)] \psi(\bar{x}) = O_S [O_R \psi(T\bar{x})] = O_S [\psi(RT\bar{x})] = \psi(SRT\bar{x}),$$

então:

$$(O_S O_R) O_T = O_S (O_R O_T).$$

### III) Elemento Unidade:

$$O_E [\psi(\vec{x})] = \psi(E\vec{x}) = \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x}),$$

$$O_E \equiv E.$$

### IV) Elemento Inverso

$$O_{R^{-1}} [O_R \psi(\vec{x})] = O_{R^{-1}} [\psi(R\vec{x})] = \psi(R^{-1} R\vec{x}) = \psi(E\vec{x}) = \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x}),$$

então:

$$O_{R^{-1}} O_R = E \rightarrow O_{R^{-1}} \equiv [O_R]^{-1}.$$

b) Agora, vamos mostrar que as matrizes definidas por:

$$O_R \psi_i(\vec{x}) \equiv \psi_i(R\vec{x}) = \sum_{j=1}^n D_{ji}(R) \psi_j(\vec{x}) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

são representações do grupo  $\{O_R\}$ .

Calculemos:

$$\begin{aligned} O_S O_R \psi_i(\vec{x}) &= O_S \psi_i(R\vec{x}) = O_S \psi \sum_{j=1}^n D_{ji}(R) \psi_j(\vec{x}) = \\ &= \sum_{j=1}^n D_{ji}(R) O_S \psi_j(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n D_{ji}(R) \sum_{k=1}^n D_{kj}(S) \psi_k(\vec{x}) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n D_{ji}(R) D_{kj}(S) \psi_k(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n D_{kj}(S) D_{ji}(R) \psi_k(\vec{x}) = \\ &= \sum_{k=1}^n [D(S) D(R)]_{ki} \psi_k(\vec{x}). \end{aligned}$$



Por outro lado, temos:

$$O_S O_R \psi_i(\vec{x}) = O_{SR} \psi_i(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n D(SR)_{ki} \psi_k(\vec{x}).$$

Assim:

$$\sum_{k=1}^n [D(S) D(R)]_{ki} \psi_k(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n D(SR)_{ki} \psi_k(\vec{x}).$$

Então:

$$D(S) D(R) = D(SR).$$

**Exemplo 2.1.4** Seja  $\{R\} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$  o grupo de rotações do plano  $(x-y)$  em torno do eixo dos  $\mathbf{z}$ , através dos ângulos  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ , no sentido anti-horário. Seja  $\{\psi_i(\vec{x})\}$  o conjunto dos **Operadores de Wigner** definido por:

$$O_{R_1} \psi(x, y) = \psi[R_1(x, y)] = \psi(x, y) = \psi_1,$$

$$O_{R_2} \psi(x, y) = \psi[R_2(x, y)] = \psi(y, -x) = \psi_2,$$

$$O_{R_3} \psi(x, y) = \psi[R_3(x, y)] = \psi(-x, -y) = \psi_3,$$

$$O_{R_4} \psi(x, y) = \psi[R_4(x, y)] = \psi(-y, x) = \psi_4.$$

Calcule as representações de  $\{R\}$ .

a) Tomemos o elemento  $R_1$ . Então:

$$O_{R_1} \psi_1 = \sum_{j=1}^4 D_{j1}(R_1) \psi_j \rightarrow O_{R_1} \psi(x, y) = \psi(x, y) = \psi_1.$$

Assim:

$$\psi_1 = D_{11}(\mathbf{R}_1)\psi_1 + D_{21}(\mathbf{R}_1)\psi_2 + D_{31}(\mathbf{R}_1)\psi_3 + D_{41}(\mathbf{R}_1)\psi_4 .$$

Portanto:

$$D_{11}(\mathbf{R}_1) = 1; D_{21}(\mathbf{R}_1) = D_{31}(\mathbf{R}_1) = D_{41} = 0 .$$

Por outro lado, temos:

$$O_{R_1} \psi_2 = \sum_{j=1}^4 D_{j2}(\mathbf{R}_1)\psi_j \rightarrow O_{R_1} \psi(y, -x) = \psi(y, -x) = \psi_2 ,$$

$$\psi_2 = D_{12}(\mathbf{R}_1)\psi_1 + D_{22}(\mathbf{R}_1)\psi_2 + D_{32}(\mathbf{R}_1)\psi_3 + D_{42}(\mathbf{R}_1)\psi_4 .$$

Portanto:

$$D_{22}(\mathbf{R}_1) = 1 ; D_{12}(\mathbf{R}_1) = D_{32}(\mathbf{R}_1) = D_{42}(\mathbf{R}_1) = 0 .$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$D_{33}(\mathbf{R}_1) = 1 ; D_{13}(\mathbf{R}_1) = D_{23}(\mathbf{R}_1) = D_{43}(\mathbf{R}_1) = 0 .$$

$$D_{44}(\mathbf{R}_1) = 1 ; D_{14}(\mathbf{R}_1) = D_{24}(\mathbf{R}_1) = D_{34}(\mathbf{R}_1) = 0 .$$

Assim [carregando o índice (4)]:

$$D^{(4)}(\mathbf{R}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv E .$$

b) Agora, tomemos o elemento  $R_2$ . Então:

$$O_{R_2} \psi_1 = \sum_{j=1}^4 D_{ji}(\mathbf{R}_2)\psi_j \rightarrow O_{R_2} \psi(x, y) = \psi(y, -x) = \psi_2 .$$

Assim:

$$\psi_2 = D_{11}(\mathbf{R}_2) \psi_1 + D_{21}(\mathbf{R}_2) \psi_2 + D_{31}(\mathbf{R}_2) \psi_3 + D_{41}(\mathbf{R}_2) \psi_4.$$

Portanto:

$$D_{11}(\mathbf{R}_2) = D_{31}(\mathbf{R}_2) = D_{41}(\mathbf{R}_2) = 0; D_{21}(\mathbf{R}_2) = 1.$$

Por outro lado, temos:

$$O_{\mathbf{R}_2} \psi_2 = \sum_{j=1}^4 D_{j2}(\mathbf{R}_2) \psi_j \rightarrow O_{\mathbf{R}_2} \psi(y, -x) = (-x, -y) = \psi_3.$$

Assim:

$$\psi_3 = D_{12}(\mathbf{R}_2) \psi_1 + D_{22}(\mathbf{R}_2) \psi_2 + D_{32}(\mathbf{R}_2) \psi_3 + D_{42}(\mathbf{R}_2) \psi_4.$$

Portanto:

$$D_{32}(\mathbf{R}_2) = 1; D_{12}(\mathbf{R}_2) = D_{22}(\mathbf{R}_2) = D_{42}(\mathbf{R}_2) = 0.$$

Analogamente, demonstra-se que, sendo:

$$O_{\mathbf{R}_2} \psi_3 = O_{\mathbf{R}_2} \psi(-x, -y) = \psi_4 = \sum_{j=1}^4 D_{j3}(\mathbf{R}_2) \psi_j$$

e

$$O_{\mathbf{R}_2} \psi_4 = O_{\mathbf{R}_2} \psi(-y, x) = (x, y) = \psi_1 = \sum_{j=1}^4 D_{j4}(\mathbf{R}_2) \psi_j$$

então:

$$D_{43}(\mathbf{R}_2) = 1; D_{13}(\mathbf{R}_2) = D_{23}(\mathbf{R}_2) = D_{33}(\mathbf{R}_2) = 0,$$

$$D_{14}(\mathbf{R}_2) = 1; D_{24}(\mathbf{R}_2) = D_{34}(\mathbf{R}_2) = D_{44}(\mathbf{R}_2) = 0.$$

Portanto [carregando o índice (4)]:

$$D^{(4)}(R_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

-----  
**Exercício 2.1.5** a) Encontre  $D(R_3)$  e  $D(R_4)$  do Exemplo 2.1.4;

b) Mostre que o operador  $H$  para um potencial Coulombiano é invariante por uma reflexão em torno da origem;

c) Mostre que  $\{O_R\}$  e  $\{R\}$  são Homeomórficos.  
 -----

## 2.2 Teoremas Fundamentais Sobre Representações de Grupos

**Teorema 2.2.1** Cada representação matricial  $D\{G\}$  de um grupo  $G$  é equivalente a uma representação unitária. (Cf. Exercício 2.1.2.a).

**Teorema 2.2.2** Uma matriz  $A$  que comuta com cada matriz  $D\{R\}$  de uma representação irredutível de um grupo  $G$  é múltipla da matriz unidade, isto é:  $A = \lambda E$ .

### Demonstração:

Por hipótese, temos que:

$$A D(R) = D(R) A, \forall R \in G.$$

Assim:

$$[A D (R)]^+ = [D (R) A]^+$$

$$D^+ (R) A^+ = A^+ D^+ (R).$$

Pelo Teorema 2.2.1,  $D (R)$  é unitária, então:

$$D^+ (R) = D^{-1} (R).$$

Portanto:

$$D^{-1} (R) A^+ = A^+ D^{-1} (R).$$

Por outro lado, segundo a Definição 2.1.1.b, temos:

$$D^{-1} (R) = D (R^{-1}).$$

Chamando  $R^{-1} = S$ , virá:

$$D (S) A^+ = A^+ D (S).$$

Assim,  $\forall T \in G$ , teremos:

$$D (T) A = A D (T),$$

$$D (T) A^+ = A^+ D (T).$$

Da teoria das matrizes sabe-se que toda matriz pode ser sempre decomposta em duas matrizes Hermitianas, isto é:

$$A = A_+ + iA_-, \text{ onde:}$$

$$A_+ = \frac{1}{2} (A + A^+) = A_+^+ ; A_- = \frac{1}{2i} (A - A^+) = A_-^+.$$

Portanto:

$$D(T) A_+ = D(T) \frac{1}{2} (A + A^+) = \frac{1}{2} D(T) A + \frac{1}{2} D(T) A^+ = \frac{1}{2} A D(T) + \frac{1}{2} A^+ D(T) = \frac{1}{2} (A + A^+) D(T) \rightarrow D(T) A_+ = A_+ D(T).$$

Por outro lado:

$$D(T) A_- = D(T) \frac{1}{2i} (A - A^+) = \frac{1}{2i} D(T) A - \frac{1}{2i} D(T) A^+ = \frac{1}{2i} A D(T) - \frac{1}{2i} A^+ D(T) = \frac{1}{2i} (A - A^+) D(T) \rightarrow D(T) A_- = A_- D(T).$$

Portanto, é suficiente considerar  $\mathbf{A}$  como uma matriz Hermitiana. Seja  $\mathbf{H}$  essa matriz, então:

$$D(R) H = H D(R),$$

onde:

$$D(R) D^+(R) = E; \quad H = H^+.$$

Se  $\mathbf{H}$  é Hermitiana, pelo Teorema Espectral da Álgebra Linear, existe uma matriz unitária  $\mathbf{U}$  que a diagonaliza, ou seja:

$$H_D = U H U^{-1}.$$

Façamos, então,  $\overline{D}(R) \equiv U D(R) U^{-1}$ , portanto:

$$\begin{aligned} \overline{D}(R) H_D &= U D(R) U^{-1} U H U^{-1} = U D(R) H U^{-1} = U H D(R)^{-1} = \\ &= U H U^{-1} U D(R) U^{-1} = H_D \overline{D}(R), \end{aligned}$$

ou seja:

$$\overline{D}(R) H_D = H_D \overline{D}(R).$$

Tomando-se  $H_D = \{\lambda_{ij} \delta_{ij}\}$ , virá:

$$\overline{D}_{ij}(R) \lambda_{jj} = \lambda_{ii} \overline{D}_{ij}(R) \rightarrow \overline{D}_{ij}(R) (\lambda_{ii} - \lambda_{jj}) = 0.$$

Se:  $\lambda_{ii} \neq \lambda_{jj}$ ,  $\rightarrow \overline{D}_{ij}(R) = 0, \forall R \in G$ .

Então,  $\overline{D}(R)$  é redutível o que contraria a hipótese do teorema.

Assim:

$$A_+ = \lambda_+ E \quad \text{e} \quad A_- = \lambda_- E.$$

Portanto:

$$A = A_+ + iA_- = \lambda_+ E + i\lambda_- E = (\lambda_+ + i\lambda_-) E \rightarrow \boxed{A = \lambda E} \quad \text{C.Q.D.}$$

**Teorema 2.2.3 - Lema de Schur.** Se  $\{D(R)\}$  de dimensão  $m$  e  $\{D'(R)\}$  de dimensão  $n$ , são representações de um grupo  $G$  e  $A$  é uma matriz  $m \times n$  tal que:

$$D(R) A = A D'(R),$$

então:

- a) Se  $m = n$ , logo  $A = 0$  ou não-singular ( $\det A \neq 0$ ), e neste caso  $D(R)$  e  $D'(R)$  são representações equivalentes;
- b) Se  $m \neq n$ , logo  $A$  é uma matriz nula.

**Demonstração:**

Por hipótese, temos que:

$$D(R) A = A D'(R),$$

ou:

$$[D(R)A]^+ = [AD'(R)]^+ \rightarrow A^+ D^+(R) = D'^+(R) A^+.$$

Sendo  $D^+(R)$  uma matriz unitária (Teorema 2.2.1), temos:

$$D^+(R) = D^{-1}(R), \text{ então:}$$

$$A^+ D^{-1}(R) = D^{-1}(R) A^+.$$

Pela Definição 2.1.1.b, temos:  $D^{-1}(R) = D(R^{-1})$ .

Chamando-se  $D(R^{-1}) = D(S)$ , virá:

$$A^+ D(S) = D'(S) A^+.$$

Portanto,  $\forall T \in G$ , temos:

$$D(T) A = A D'(T)$$

e

$$A^+ D(T) = D'(T) A^+ \quad (\text{multiplicando por } A)$$

$$A A^+ D(T) = A D'(T) A^+ = D(T) A A^+.$$

Ora, se  $A A^+$  comuta com  $D(T)$ , pelo Teorema 2.2.2, virá:

$$A A^+ = \lambda E.$$

(a) Se  $m = n$ , então  $A$  é uma matriz quadrada, logo:

$$\det(A A^+) = \det(\lambda E) = \lambda^n,$$

$$\det A \cdot \det A^+ = \lambda^n \rightarrow (\det A)^2 = \lambda^n.$$

a.I) Se  $\lambda \neq 0$ , então  $\det A \neq 0$ , logo existe  $A^{-1}$ , portanto:

$$D(T) A = A D'(T) \rightarrow A^{-1} D(T) A = A^{-1} A D'(T) \rightarrow$$

$D'(T) = A^{-1} D(T) A$ , isto é,  $D(T)$  e  $D'(T)$  são equivalentes.



a.II) Se  $\lambda = 0$ , então  $AA^+ = 0 \rightarrow \sum_k A_{ik} A_{kj}^+ = 0$ ,

ou  $\sum_k A_{ik} A_{jk}^* = 0$ .

Tomando-se  $i = j$ , virá:  $\sum_k A_{ik} A_{ik}^* = 0 \rightarrow$

$$\sum_k |A_{ik}|^2 = 0 \rightarrow A_{ik} = 0, \forall i, k.$$

(b) Se  $m \neq n$ , então  $A$  é uma matriz retangular. Tomando-se  $m < n$ , então podemos construir uma outra matriz  $B$  ( $n \times n$ ), a partir de  $A$  e completando com  $(n - m)$  colunas de zeros. Assim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que:  $AA^+ \equiv BB^+$ . Então, sendo  $AA^+ = \lambda E \rightarrow \det A \det A^+ = \det B \det B^+ = 0$ , pois  $\det B = 0$ , então:

$$\det A \det A^+ = \lambda^\alpha = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \boxed{A = 0} \quad \text{C.Q.D.}$$

**Teorema 2.2.4 - Teorema da Ortogonalidade.** Seja um grupo  $G$  que contém  $g$  elementos, e seja  $D^{(\mu)}(R)$  ( $\forall R \in G$ ) representações unitárias e irreduzíveis de  $G$ . Então:

$$\begin{aligned} \sum_R D_{ie}^{(\mu)}(R) D_{mj}^{(\nu)}(R^{-1}) &= \sum_R D_{ie}^{(\mu)}(R) D_{jm}^{*(\nu)}(R) = \\ &= \frac{g}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{em}, \end{aligned}$$

onde  $n_\mu$  representa a dimensionalidade da representação.

**Demonstração:**

Como podemos multiplicar matrizes quadradas de ordens diferentes, vamos, portanto, construir a seguinte matriz:

$$A = \sum_R D^{(\mu)}(R) B D^{+(\nu)}(R),$$

onde  $B$  é uma matriz  $(\mu \times \nu)$  arbitrária. Multiplicando-se a matriz  $A$  definida acima, pela esquerda, por  $D^{(\mu)}(S)$ , virá:

$$D^{(\mu)}(S)A = \sum_R D^{(\mu)}(S) D^{(\mu)}(R) B D^{+(\nu)}(R).$$

Por hipótese,  $D$  são representações unitárias, então:

$$D^{+(\nu)}(R) = D^{-1(\nu)}(R) \text{ e } D^{+(\nu)}(S) D^{(\nu)}(S) = E.$$

Por outro lado, segundo a Definição 2.1.1.b, temos

$$D^{-1}(S) = D(S^{-1}),$$

então:

$$D^{(\mu)}(S) A = \sum_R D^{(\mu)}(S) D^{(\mu)}(R) B D^{(\nu)}(R^{-1}).$$

sendo:

$$D^{(\nu)}(S^{-1}) \cdot D^{(\nu)}(S) = D^{(\nu)}(S^{-1}S) = D^{(\nu)}(E) = E,$$

logo:

$$D^{(\mu)}(S) A = \sum_R D^{(\mu)}(S) D^{(\mu)}(R) B D^{(\nu)}(R^{-1}) D^{(\nu)}(S^{-1}) D^{(\nu)}(S).$$

Usando-se a Definição 2.1.1.a, virá:

$$D^{(\mu)}(S) A = \sum_R D^{(\mu)}(SR) B D^{(\nu)}(R^{-1} S^{-1}) D^{(\nu)}(S).$$

Ora,

$$R^{-1} S^{-1} = (SR)^{-1}, \text{ então:}$$

$$D^{(\mu)}(S) A = \sum_R D^{(\mu)}(SR) B D^{(\nu)} [(SR)^{-1}] D^{(\nu)}(S).$$

Sendo, ainda, segundo a Definição 2.1.1.b,

$$D^{-1}(R) = D(R^{-1}) \quad \text{e} \quad D^{-1}(R) = D^+(R), \text{ então:}$$

$$D^{(\mu)}(S) A = \sum_R D^{(\mu)}(SR) B D^{+(\mu)}(SR) D^{(\nu)}(S).$$

Pelo Teorema do Rearranjamento (Teorema 1.3.1), temos:

$$\sum_R D^{(\mu)}(SR) B D^{+(\nu)}(SR) = \sum_R D^{(\mu)}(R) B D^{+(\nu)}(R).$$

Portanto:

$$D^{(\mu)}(S) A = \left( \sum_R D^{(\mu)}(R) B D^{+(\nu)}(R) \right) D^{(\nu)}(S).$$

Então,  $D^{(\mu)}(S) A = A D^{(\mu)}(S)$ , devido à definição de **A**.

Agora, para demonstrar a tese do teorema, vamos usar o **Lema de Schur** (Teorema 2.2.3).

a) Se  $D^{(\mu)}(S)$  e  $D^{(\nu)}(S)$  são não-equivalentes ( $\mu \neq \nu$ ), então

$$A = 0, \text{ logo:}$$

$$A_{im} = \sum_R \sum_{jl} D_{ij}^{(\mu)}(R) B_{jp} D_{pm}^{+(\nu)}(R) = 0.$$

Como **B** é arbitrário, vamos escolher  $B_{jp} = 1$ , e os demais elementos nulos, então:

$$\sum_{\mathbf{R}} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell m}^{+(\nu)}(\mathbf{R}) = 0.$$

b) Se  $D^{(\mu)}(\mathbf{R})$  e  $D^{(\nu)}(\mathbf{R})$  são equivalentes ( $\mu = \nu$ ), então:

$$A = \lambda E \rightarrow A_{im} = \lambda \delta_{im} = \sum_{\mathbf{R}} \sum_{j, \ell} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) B_{j\ell} D_{\ell m}^{+(\mu)}(\mathbf{R}).$$

Como  $\mathbf{B}$  é arbitrário, vamos escolher  $B_{jP} = 1$  e os demais elementos nulos, então:

$$\lambda \delta_{im} = \sum_{\mathbf{R}} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell m}^{+(\mu)}(\mathbf{R}).$$

Colocando-se  $i = m$  e somando-se os dois lados dessa equação para  $i = 1, 2, \dots, n_{\mu}$ , virá:

$$\sum_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^{n_{\mu}} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell i}^{+(\mu)}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{n_{\mu}} \lambda \delta_{ii} = n_{\mu} \lambda.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^{n_{\mu}} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell i}^{+(\mu)}(\mathbf{R}) &= \sum_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^{n_{\mu}} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell i}^{-1(\mu)}(\mathbf{R}) = \\ &= \sum_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^{n_{\mu}} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell i}^{(\mu)}(\mathbf{R}^{-1}) = \sum_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^{n_{\mu}} D_{\ell i}^{(\mu)}(\mathbf{R}^{-1}) D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) = \\ &= \sum_{\mathbf{R}} [D^{(\mu)}(\mathbf{R}^{-1}) D^{(\mu)}(\mathbf{R})]_{Pj} = \sum_{\mathbf{R}} [D^{(\mu)}(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R})]_{Pj} = \\ &= \sum_{\mathbf{R}} D^{(\mu)}(\mathbf{E})_{Pj} = g \delta_{Pj}. \end{aligned}$$

Assim:

$$n_{\mu} \lambda = g \delta_{Pj} \rightarrow \lambda = \frac{g}{n_{\mu}} \delta_{\ell j},$$

e

$$\sum_{\mathbf{R}} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell m}^{+(\mu)}(\mathbf{R}) = \frac{g}{n_{\mu}} \delta_{\ell j} \delta_{im} .$$

Agora, juntando-se os resultados dos itens a) e b), teremos:

$$\sum_{\mathbf{R}} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell m}^{+(\nu)}(\mathbf{R}) = \frac{g}{n_{\mu}} \delta_{\mu\nu} \delta_{jP} \delta_{im} . \quad \text{C.Q.D.}$$

### 2.2.1 Interpretação Geométrica do Teorema da Ortogonalidade

O Teorema da Ortogonalidade (Teorema 2.2.4) nos mostra que se tomarmos as representações como “vetores” de um espaço vetorial de dimensão  $g$ , tais vetores são “Ortogonais” nesse espaço (espaço de elemento do grupo). Esses vetores são representados por três índices:  $\mu$ , índice da dimensão da representação, e  $i$  e  $j$ , índices de linha e de coluna da representação propriamente dita. Os “eixos” desse espaço vetorial são representados pelos elementos componentes do grupo  $R = \{E, A_2, \dots, A_g\}$ . Portanto, tais “vetores” são denotados por  $\{D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R})\}$ , onde  $\mathbf{R}$  representa o índice de “componentes” desses “vetores”. Quantos desses vetores existem? Uma representação  $D^{(\mu)}$  de dimensionalidade  $n_{\mu}$  é constituída de matrizes  $(n_{\mu} \times n_{\mu})$ , portanto, contém  $n_{\mu}^2$  desses “vetores”. Assim, o número total deles, vale:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \dots = \sum_{\mu=1}^N n_{\mu}^2 ,$$

onde essa soma se estende a todas as representações irredutíveis não-equivalentes. Ora, na teoria dos espaços vetoriais demonstra-se que o número de vetores ortogonais não excede a dimensão do espaço, então:

$$\sum_{\mu=1}^N n_{\mu}^2 \leq g.$$


---

**Exercício 2.2.1** Demonstre a **Relação de Completeza** para as representações de um dado grupo:

$$\sum_{v=1}^N \sum_{i,j=1}^{n_v} \sqrt{\frac{n_v}{g}} D_{ij}^{(v)}(\mathbf{R}) \sqrt{\frac{n_v}{g}} D_{ij}^{*(v)}(\mathbf{R}') = \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} .$$


---

### 2.3 Caráteres das Representações

**Definição 2.3.1** O traço de uma representação matricial  $D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R})$  é chamado de **caráter** de  $\mathbf{R}$  e denotado por:

$$X^{(\mu)}(\mathbf{R}) = \text{tr } D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) = \sum_i D_{ii}^{(\mu)}(\mathbf{R}) .$$

Da definição acima, resultam as seguintes conseqüências:

a) Duas representações equivalentes do mesmo grupo têm os mesmos caracteres, já que o traço de duas matrizes equivalentes são iguais;

b) O caráter da representação do elemento unitário  $\mathbf{E}$  do grupo é igual à dimensionalidade da representação, pois a matriz correspondente a  $\mathbf{E}$  é a matriz unitária;

c) Todos os elementos de uma dada classe de um grupo têm o mesmo caráter, pois que se  $\mathbf{A}$  é um elemento de uma classe, o outro tem a forma  $\mathbf{XAX}^{-1}$  e as correspondentes matrizes têm traços iguais.

---

**Exemplo 2.3.1** Calcule os caracteres do grupo  $S_3$ .

Usando-se a Definição 2.3.1 e o resultado do Exemplo 2.1.1, é fácil construir a seguinte tabela de caracteres do grupo  $S_3$ .

CLASSE	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	ELEMENTOS
$C_1$	1	1	2	E
$3C_2$	1	-1	0	$P_1, P_2, P_3,$
$2C_3$	1	+1	-1	$P_4, P_5$

**Teorema 2.3.1** Os caracteres das representações irredutíveis de um grupo formam um conjunto vetores ortogonais no espaço de elemento de grupo.

**Demonstração:**

Vamos partir do **Teorema da Ortogonalidade** (Teorema 2.2.4):

$$\sum_{\mathbf{R}} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell m}^{+(\nu)}(\mathbf{R}) = \frac{g}{n_{\mu}} \delta_{\mu\nu} \delta_{im} \delta_{jp}.$$

Façamos  $i = j$  e  $m = P$  e somemos sobre esses índices, assim:

$$\sum_{\mathbf{R}} \sum_i \sum_{\ell} D_{ii}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{\ell\ell}^{+(\nu)}(\mathbf{R}) = \frac{g}{n_{\mu}} \delta_{\mu\nu} \sum_i \sum_{\ell} \delta_{\mu\nu} \delta_{i\ell}.$$

Usando-se a definição de caráter (Definição 2.3.1), virá

$$\sum_{\mathbf{R}} X^{(\mu)}(\mathbf{R}) X^{+(\nu)}(\mathbf{R}) = \frac{g}{n_{\mu}} \delta_{\mu\nu} \sum_{i,\ell} (\delta_{iP})^2.$$

Sendo:

$$\sum_{i,\ell} (\delta_{i\ell})^2 = n_\mu, \text{ teremos:}$$

$$\sum_{\mathbf{R}} X^{(\mu)}(\mathbf{R}) X^{+(\nu)}(\mathbf{R}) = g\delta_{\mu\nu}.$$

Porém:

$$X^{+(\nu)}(\mathbf{R}) = X^{*(\nu)}(\mathbf{R}), \text{ logo:}$$

$$\sum_{\mathbf{R}} X^{(\mu)}(\mathbf{R}) X^{*(\nu)}(\mathbf{R}) = g\delta_{\mu\nu}.$$

Contudo, se  $C_k$  representa o número de elementos em uma classe  $C_k$  e  $S$  é o número de classes, então:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^S X^{(\mu)}(C_k) X^{*(\nu)}(C_k) c_k &= g\delta_{\mu\nu} = \\ &= \sum_{k=1}^S \sqrt{\frac{c_k}{g}} X^{(\mu)}(C_k) \sqrt{\frac{c_k}{g}} X^{*(\nu)}(C_k) = \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

C.Q.D.

### 2.3.1 Interpretação Geométrica do Teorema da Ortogonalidade dos Caráteres de um Grupo

O Teorema 2.3.1 nos mostra que se considerarmos os caracteres das representações irredutíveis de um grupo como sendo “vetores” de um espaço  $S$ -dimensional, tais vetores são “ortogonais”. Pela Teoria dos Espaços Vetoriais, o número desses “vetores” não excede a dimensão do espaço, ou seja:  $n \leq S$ .

**Teorema 2.3.2** Para um grupo finito, temos:



- a)  $\sum n_{\mu}^2 = g$  ,  
 b)  $N = S$ , isto é, o número de representações irredutíveis do grupo é igual ao número de classes.

**Demonstração:**

**Parte a:**

Segundo a Definição 2.1.4.c, temos:

$$D(R) = \sum_{\nu} a_{\nu} D^{(\nu)}(R).$$

Usando-se a definição de caráter de um grupo (Definição 2.3.1) virá:

$$X_j(C_k) = \sum_{\nu} a_{\nu} X_j^{(\nu)}(C_k).$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação acima por  $X_j^{*(\mu)}(C_k) c_k$ , e somando-se em  $\mathbf{k}$ , teremos:

$$\sum_{\mathbf{k}} X_j(C_k) X_j^{*(\mu)}(C_k) c_k = \sum_{\nu} \sum_{\mathbf{k}} a_{\nu} X_j^{(\nu)}(C_k) X_j^{*(\mu)}(C_k) c_k$$

Usando-se o resultado do Teorema 2.3.1, resulta:

$$\sum_{\mathbf{k}} X_j(C_k) X_j^{*(\mu)}(C_k) c_k = \sum_{\nu} g \delta_{\mu\nu} a_{\nu} = g a_{\mu} ,$$

$$a_{\mu} = \frac{1}{g} \sum_{\mathbf{k}} X_j(C_k) X_j^{*(\mu)}(C_k) c_k = \frac{1}{g} \sum_{\mathbf{R}} X(\mathbf{R}) X^{*(\mu)}(\mathbf{R}) .$$

Para demonstrar o proposto no item a) do Teorema em questão, vamos considerar as representações regulares do grupo, sem, contudo, com isso, perdermos a generalidade. As representações regulares são definidas por:

$$D_{ij}^{(\text{reg})}(G_\mu) = \begin{cases} 1, & \text{se } G_\mu G_j = G_i, \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Da definição acima, vê-se que:

$$D_{ij}^{(\text{reg})}(G_\mu) = 1, \text{ para } G_\mu = E, \text{ pois: } EG_i = G_i. \text{ Então:}$$

$$X^{(\text{reg})}(E) = g; \quad X^{(\text{reg})}(R) = 0, \text{ para } R \neq E.$$

Portanto, a expressão para  $a_\mu$  deduzida anteriormente, tomará a seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_\mu &= \frac{1}{g} \sum_R X(R) X^{*(\mu)}(R) = \frac{1}{g} \sum_R X^{(\text{reg})}(R) X^{*(\mu)}(R) = \\ &= \frac{1}{g} g X^{*(\mu)}(E) \rightarrow a_\mu = n_\mu \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$X_j(R) = \sum_\mu a_\mu X_j^{(\mu)}(R),$$

então:

$$X_j^{(\text{reg})}(R) = \sum_{\mu=1}^N a_\mu X_j^{(\mu)}(R).$$

Porém:  $a_\mu = n_\mu$  e  $X_j^{(\text{reg})}(\mathbf{R}) = g$ , se  $\mathbf{R} = \mathbf{E}$ , logo:

$$g = \sum_{\mu=1}^N a_\mu X_j^{(\mu)}(\mathbf{E}) = \sum_{\mu=1}^N a_\mu n_\mu ,$$

$$\boxed{g = \sum_{\mu=1}^N n_\mu^2} . \quad \text{C.Q.D.}$$

**Exercício 2.3.1.** Demonstre:

a) O item b) do Teorema 2.3.2;

b) O **Teorema da Completeza**:

$$\sum_{\mu=1}^N X^\mu(C_P) \sqrt{c_\ell} X^{*(v)}(C_k) \sqrt{c_k} = g \delta_{k\ell}$$

ou:

$$\sum_{\mu} \sqrt{\frac{c_\ell}{g}} X^{(\mu)}(C_\ell) \sqrt{\frac{c_k}{g}} X^{*(v)}(C_k) = \delta_{k\ell} ,$$

onde  $N$  é o número de elementos na classe  $c_k$  de uma representação irredutível de um dado grupo;

$$c) N_j X^{(\mu)}(C_j) N_k X^{(\mu)}(C_k) = \ell_i \sum_{\ell} C_{j k \ell} N_\ell X^{(\mu)}(C_\ell) .$$

**Exemplo 2.3.2** Estude a decomposição em representações irredutíveis do grupo  $S_3$ .

Os elementos do grupo  $S_3$  são:  $E, P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ . Então, sendo:

$$g = \sum_{n=1}^N n_{\mu}^2, \quad \text{logo: } 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2,$$

o que significa dizer que o grupo  $S_3$  tem apenas duas representações irredutíveis de dimensão 1 e apenas uma de dimensão 2. Portanto, qualquer representação de dimensão 3 será redutível. Calculemos uma dessas representações.

$$\text{a) Elemento } E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$D(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) Elemento } P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como essa permutação troca o primeiro elemento pelo segundo e deixa o terceiro irredutível, virá:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{array}{l} Aa + Bb + Cc = b \\ Da + Eb + Fc = a \\ Ga + Hb + Ic = c \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} A = C = 0; B = D = 1 = 1; \\ E = F = G = H = 0. \end{array}$$

então:

$$D(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Elemento  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

É fácil ver que:

$$D(P_2) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix},$$

então:

$$D(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Elemento  $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

É fácil ver que:

$$D(P_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}, \text{ então:}$$

$$D(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Elemento  $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

É fácil ver que:

$$D(P_4) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow D(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Elemento  $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

É fácil ver que:

$$D(P_5) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \rightarrow D(P_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a tabela de caracteres dessa representação será:

CLASSE	ELEMENTOS	X
$C_1$	E	3
$3C_2$	$P_1, P_2, P_3$	1
$2C_3$	$P_4, P_5$	0

Essa tabela de caracteres nos permite descrever que:

$$D(R) = \sum_v a_v D^{(v)}(R),$$

ou:

$$a_v = \frac{1}{g} \sum_k X_j(C_k) X_j^{*(v)}(C_k) c_k.$$

Portanto:

$$a_1 = \frac{1}{6} [X(C_1)X^{*(1)}(C_1)c_1 + X(C_2)X^{*(1)}(C_2)c_2 + X(C_3)X^{*(1)}(C_3)c_3] =$$

$$= \frac{1}{6} [3 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 3 + 0 \times 1 \times 2] = 1,$$

$$a_2 = \frac{1}{6} [X(C_1)X^{*(2)}(C_1)c_1 + X(C_2)X^{*(2)}(C_2)c_2 + X(C_3)X^{*(2)}(C_3)c_3] =$$

$$= \frac{1}{6} [3 \times 1 \times 1 + 1 \times (-1) \times 3 + 0 \times 1 \times 2] = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{6} [X(C_1)X^{*(3)}(C_1)c_1 + X(C_2)X^{*(3)}(C_2)c_2 + X(C_3)X^{*(3)}(C_3)c_3] =$$

$$= \frac{1}{6} [3 \times 2 \times 1 + 1 \times 0 \times 3 + 0 \times (-1) \times 2] = 1.$$

Portanto:

$$D = D_1^{(1)} \oplus D_2^{(3)}.$$

**Exercício 2.3.2** Estude a decomposição das representações irredutíveis de uma representação 6-dimensional regular do grupo  $S_3$ .

**Exemplo 2.3.3** Verifique as relações de ortogonalidade e de completude para os caracteres das representações irredutíveis do grupo  $S_3$ .

As relações de ortogonalidade e de completude dos caracteres de um grupo são dadas, respectivamente, por:

$$\sum_{k=1}^S X^{(\mu)}(C_k) X^{*(\nu)}(C_k) c_k = g \delta_{\mu\nu}, \quad (\text{Teorema 2.3.1})$$

$$e \sum_{\mu=1}^N \sqrt{\frac{c_\ell}{g}} X^{(\mu)}(C_\ell) \sqrt{\frac{c_k}{g}} X^{*(\mu)}(C_k) = \delta_{k\ell}. \quad (\text{Exercício 2.3.1.b})$$

A tabela dos caracteres de  $S_3$  é dada por (cf. Exemplo 2.3.1):

CLASSE	ELEMENTOS	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$
$C_1$	E	1	1	2
$3C_2$	$P_1, P_2, P_3$	1	-1	0
$2C_3$	$P_4, P_5$	1	1	-1

### a) Relações de Ortogonalidade

$$\begin{aligned} X^{(1)}(C_1)X^{*(1)}(C_1)c_1 + X^{(1)}(C_2)X^{*(1)}(C_2)c_2 + X^{(1)}(C_3)X^{*(1)}(C_3)c_3 = \\ = 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 3 + 1 \times 1 \times 2 = 6 = g \delta_{11} = g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{(1)}(C_1)X^{*(2)}(C_1)c_1 + X^{(1)}(C_2)X^{*(2)}(C_2)c_2 + X^{(1)}(C_3)X^{*(2)}(C_3)c_3 = \\ = 1 \times 1 \times 1 + 1 \times (-1) \times 3 + 1 \times 1 \times 2 = 1 - 3 + 2 = 0 = g \delta_{12} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{(1)}(C_1)X^{*(3)}(C_1)c_1 + X^{(1)}(C_2)X^{*(3)}(C_2)c_2 + X^{(1)}(C_3)X^{*(3)}(C_3)c_3 = \\ = 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 0 \times 3 + 1 \times (-1) \times 2 = 2 + 0 - 2 = 0 = g \delta_{13} = 0. \end{aligned}$$

Como:

$X^{(\mu)}(C_k) = X^{*(\mu)}(C_k)$ , portanto, as demais relações de ortogonalidade são idênticas a essas demonstradas acima.



## b) Relações de Completeza

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{(1)}(C_1) \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{*(1)}(C_1) + \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{(2)}(C_1) \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{*(2)}(C_1) + \\ & + \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{(3)}(C_1) \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{*(3)}(C_1) = \frac{1 \times 1 \times 1}{6} + \frac{1 \times 1 \times 1}{6} + \frac{2 \times 2 \times 1}{6} = 1 = \delta_{11} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{(1)}(C_1) \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{*(1)}(C_2) + \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{(2)}(C_1) \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{*(2)}(C_2) + \\ & + \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{(3)}(C_1) \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{*(3)}(C_2) = \sqrt{\frac{1}{6}} \times 1 \times \sqrt{\frac{3}{6}} \times 1 + \sqrt{\frac{1}{6}} \times 1 \times \sqrt{\frac{3}{6}} \times (-1) + \\ & + \sqrt{\frac{1}{6}} \times 2 + \sqrt{\frac{3}{6}} \times 0 = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} = 0 = \delta_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{(1)}(C_1) \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{*(1)}(C_3) + \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{(2)}(C_1) \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{*(2)}(C_3) + \\ & + \sqrt{\frac{c_1}{g}} X^{(3)}(C_1) \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{*(3)}(C_3) = \sqrt{\frac{1}{6}} \times (+1) \times \sqrt{\frac{2}{6}} \times 1 + \sqrt{\frac{1}{6}} \times 1 \times \\ & \times \sqrt{\frac{2}{6}} \times 1 + \sqrt{\frac{1}{6}} \times 2 \times \sqrt{\frac{2}{6}} \times (-1) = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{6} = 0 = \delta_{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{(1)}(C_2) \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{*(1)}(C_3) + \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{(2)}(C_2) \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{*(2)}(C_3) + \\
& + \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{(3)}(C_2) \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{*(3)}(C_3) = \sqrt{\frac{3}{6}} \times (+1) \times \sqrt{\frac{2}{6}} \times (+1) + \sqrt{\frac{3}{6}} \times (-1) \times \\
& \times \sqrt{\frac{2}{6}} \times 1 + \sqrt{\frac{3}{6}} \times 0 \times \sqrt{\frac{2}{6}} \mp (-1) = \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} + 0 = 0 = \delta_{23},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{(1)}(C_2) \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{*(1)}(C_2) + \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{(2)}(C_2) \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{*(2)}(C_2) + \\
& + \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{(3)}(C_2) \sqrt{\frac{c_2}{g}} X^{*(3)}(C_2) = \sqrt{\frac{3}{6}} \times 1 \times \sqrt{\frac{3}{6}} \times 1 + \sqrt{\frac{3}{6}} \times (-1) \times \\
& \times \sqrt{\frac{3}{6}} \times (-1) + \sqrt{\frac{3}{6}} \times 0 \times \sqrt{\frac{3}{6}} \times 0 = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1 = \delta_{22},
\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{(1)}(C_3) \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{*(1)}(C_3) + \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{(2)}(C_3) \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{*(2)}(C_3) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{(3)}(C_3) \sqrt{\frac{c_3}{g}} X^{*(3)}(C_3) = \sqrt{\frac{2}{6}} \times 1 \times \sqrt{\frac{2}{6}} \times 1 + \sqrt{\frac{2}{6}} \times 1 \times \sqrt{\frac{2}{6}} \times 1 + \\
& + \sqrt{\frac{2}{6}} \times (-1) \times \sqrt{\frac{2}{6}} \times (-1) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = 1 = \delta_{33}.
\end{aligned}$$

Como:

$X^{(\mu)}(C_k) = X^{*(\mu)}(C_k)$ , portanto, as demais relações de completudeza são idênticas a essas demonstradas acima.

---

**Exercício 2.3.3** Verifique as relações de ortogonalidade e de completudeza para as representações irredutíveis do grupo  $S_3$ .

---

**Exemplo 2.3.4** Construa a tabela de caracteres do grupo alternativo  $A_4$ .

---

Primeiro, vamos construir os elementos do grupo  $A_4$ , que é formado pelas permutações pares de 4 elementos. O número ( $N$ ) de elementos desse grupo é dado por:

$$N = \frac{n!}{2} = \frac{4!}{2} = 12,$$

assim constituídos:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para calcular a tabela de caracteres desse grupo  $A_4$  sem construir as representações do mesmo, teremos de calcular primeiramente as classes equivalentes dos elementos do grupo. Para isso, vamos seguir o que foi feito no Exemplo 2.3.3. Assim, depois de um cálculo simples, porém longo, mostra-se que:

$$C_1 = \{I\}; \quad C_2 = \{A, B, C\}; \quad C_3 = \{D, F, J, K\}; \quad C_4 = \{E, G, H, L\}.$$

Sendo o número de representações irredutíveis igual ao número de classes então, o grupo  $A_4$  terá as seguintes representações:

$$D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)} \text{ e } D^{(4)},$$

sendo  $X^{(1)}$ ;  $X^{(2)}$ ;  $X^{(3)}$  e  $X^{(4)}$ , os caracteres correspondentes.

Como as dimensionalidades das representações satisfazem à condição:

$$\sum_{\mu=1}^4 n_{\mu}^2 = g = 12,$$

então, o único conjunto de números inteiros  $n_{\mu}$  que satisfaz à relação acima é dado por:

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12,$$

ou seja:

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1 \text{ e } n_4 = 3.$$

Portanto, existem três representações irredutíveis de dimensão 1 e uma de dimensão 3. Como  $C_1 = \{I\}$ , então:

$$X^{(1)}(C_1) = X^{(2)}(C_1) = X^{(3)}(C_1) = 1 \text{ e } X^{(4)}(C_1) = 3.$$

Por outro lado, existe uma representação trivial representada pelo número 1 para qualquer grupo, então  $X^{(1)} = 1$ , para todo  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Assim, os primeiros caracteres do grupo  $A_4$  são apresentados na tabela abaixo:

CLASSE	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
$C_1$	1	1	1	3
$3C_2$	1			
$4C_3$	1			
$4C_4$	1			

Determinemos, agora, os demais caracteres do grupo em questão. Para isto, usemos o conceito de ordem de um elemento de um grupo. Assim, segundo a Definição 2.3.1, dado um elemento  $g$  de um grupo, temos:

$$g^m = I \quad (m \equiv \text{ordem}).$$

Pela definição de representação (Definição 2.1.1) virá:

$$[D(g)]^m = \mathbf{1}, \text{ onde } \mathbf{1} \text{ é a matriz unidade.}$$

Da **Teoria dos Espaços Vetoriais**, sabe-se que existe sempre uma transformação de similaridade que diagonaliza uma dada matriz. Então:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Da expressão acima, vê-se que  $\lambda_k$ , auto-valores de  $D(g)$ , são todos  $m$ -raízes da unidade. Assim:

$$X(g) = \text{Tr } D(g) = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

Para determinarmos os caracteres que faltam na tabela anterior, precisamos conhecer a **ordem** das classes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ . Pela Definição 2.3.1, vê-se que:

$$C_1 = \{I\} \rightarrow I^1 = 1, \text{ logo } C_1 \text{ é de ordem } 1,$$

$$C_2 = \{A, B, C\} \rightarrow A^2 =$$

$$= A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I,$$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I,$$

$$C^2 = CC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I,$$

então, a ordem de  $C_2$  é 2.

De maneira análoga, mostra-se que  $C_3$  e  $C_4$  são ambas de ordem 3. Tais ordens permitem que se escreva as seguintes expressões:

$$X^{(2)}(C_2) \text{ ou } X^{(3)}(C_2) = \sqrt{1} = 1 \text{ ou } -1,$$

$$X^{(2)}(C_3) \text{ ou } X^{(3)}(C_2) = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ ou } \omega \text{ ou } \omega^2,$$

$$X^{(2)}(C_4) \text{ ou } X^{(3)}(C_4) = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ ou } \omega \text{ ou } \omega^2,$$

onde  $\omega = \exp(2\pi i/3)$ .

Para determinarmos esses caracteres, vamos usar a condição de ortogonalidade entre eles (Teorema 2.3.1):

$$\sum_{k=1}^S X^{(\mu)}(C_k) X^{*(\nu)}(C_k) c_k = g \delta_{\mu\nu}.$$

$$\text{Façamos, por hipótese, } X^{(2)}(C_3) = \omega \text{ e } X^{(2)}(C_4) = \omega^2,$$

então:

$$X^{(2)}(C_1) X^{*(1)}(C_1) c_1 + X^{(2)}(C_2) X^{*(1)}(C_2) c_2 +$$

$$+ X^{(2)}(C_3) X^{*(1)}(C_3) c_3 + X^{(2)}(C_4) X^{*(1)}(C_4) c_4 = g \delta_{12} = 0,$$

$$1 \times 1 \times 1 + X^{(2)}(C_2) \times 1 \times 3 + \omega \times 1 \times 4 + \omega^2 \times 1 \times 4 = 0,$$

$$1 + 3 X^{(2)}(C_2) + 4\omega + 4\omega^2 = 0.$$

Sendo:

$$\omega = \exp(2\pi i/3) = e^{i120^\circ} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\omega^2 = \exp(4\pi i/3) = e^{i240^\circ} = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Então:

$$3X^{(2)}(C_2) = -4(\omega + \omega^2) - 1 = -4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 3,$$

$$X^{(2)}(C_2) = 1 \quad \text{e} \quad X^{(2)}(C_3) = \omega; \quad X^{(2)}(C_4) = \omega^2.$$

De maneira análoga, temos:

$$X^{(3)}(C_1) X^{*(1)}(C_1) c_1 + X^{(3)}(C_2) X^{*(1)}(C_2) c_2 + \\ + X^{(3)}(C_3) \cdot X^{*(1)}(C_3) c_3 + X^{(3)}(C_4) X^{*(1)}(C_4) c_4 = g \delta_{31} = 0.$$

Façamos, por hipótese,  $X^{(3)}(C_3) = \omega^2$  e  $X^{(3)}(C_4) = \omega^2$ ,  
então:

$$1 \times 1 \times 1 + X^{(3)}(C_2) \times 1 \times 3 + \omega \times 1 \times 4 + \omega^2 \times 1 \times 4 = 0.$$

Então, de maneira análoga ao caso anterior, virá:

$$X^{(3)}(C_2) = 1; \quad X^{(3)}(C_3) = \omega^2; \quad X^{(3)}(C_4) = \omega.$$

Assim, em vista dos resultados obtidos, a tabela de caracteres de  $A_4$ , tomará o seguinte aspecto:

CLASSE	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
$C_1$	1	1	1	3
$3C_2$	1	1	1	
$4C_3$	1	$\omega$	$\omega^2$	
$4C_4$	1	$\omega^2$	$\omega$	

Resta, por fim, determinar  $X^{(4)}(C_2)$ ,  $X^{(4)}(C_3)$  e  $X^{(4)}(C_4)$ , os quais chamaremos, respectivamente, X, Y e Z. Assim, usando-se a condição de ortogonalidade entre os caracteres (Teorema 2.3.1), virá:



$$X^{(4)}(C_1) X^{*(1)}(C_1) c_1 + X^{(4)}(C_2) X^{*(1)}(C_2) c_2 + \\ + X^{(4)}(C_3) X^{*(1)}(C_3) c_3 + X^{(4)}(C_4) X^{*(1)}(C_4) c_4 = g \delta_{41} = 0,$$

$$3 \times 1 \times 1 + X \times 1 \times 3 + Y \times 1 \times 4 + Z \times 1 \times 4 = 0,$$

$$3 + 3X + 4Y + 4Z = 0, \quad (\alpha)$$

$$X^{(4)}(C_1) X^{*(2)}(C_1) c_1 + X^{(4)}(C_2) X^{*(2)}(C_2) c_2 + \\ + X^{(4)}(C_3) X^{*(2)}(C_3) c_3 + X^{(4)}(C_4) X^{*(2)}(C_4) c_4 = g \delta_{42} = 0,$$

$$3 \times 1 \times 1 + X \times 1 \times 3 + Y \times \omega^* \times 4 + Z \times (\omega^2)^* \times 4 = 0.$$

Sendo:  $\omega^* = [\exp(2\pi i/3)]^* = \exp(-2\pi i/3) = \cos 120^\circ - i \sin 120^\circ =$

$$= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2,$$

e

$(\omega^2)^* = [\exp(240^\circ i)]^* = \exp(-240^\circ i) = \cos 240^\circ - i \sin 240^\circ =$

$$= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \omega.$$

Assim:

$$3 + 3X + 4Y \omega^2 + 4Z \omega = 0. \quad (\beta)$$

$$X^{(4)}(C_1) X^{*(3)}(C_1) c_1 + X^{(4)}(C_2) X^{*(3)}(C_2) c_2 + \\ + X^{(4)}(C_3) X^{*(3)}(C_3) c_3 + X^{(4)}(C_4) X^{*(3)}(C_4) c_4 = g \delta^{43} = 0,$$

$$3 \times 1 \times 1 + X \times 1 \times 3 + Y \times (\omega^2)^* \times 4 + Z \times \omega^* \times 4 = 0,$$

$$3 + 3X + 4Y \omega + 4Z \omega^2 = 0. \quad (\gamma)$$

A solução do sistema de equações  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  e  $(\gamma)$ , fornece:

$$X = -1; Y = Z = 0.$$

Assim, a tabela final de caracteres de  $A_4$  será:

CLASSE	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
$C_1$	1	1	1	3
$3C_2$	1	1	1	-1
$4C_3$	1	$\omega$	$\omega^2$	0
$4C_4$	1	$\omega^2$	$\omega$	0

---

**Exercício 2.3.4** Encontre as classes do grupo  $A_4$  utilizando o Exemplo 2.3.4.

---

## 2.4 Produto Direto de Representações

**Definição 2.4.1** Chama-se **Produto Direto** de uma matriz  $A(m_1 \times m_2)$  com uma matriz  $B(n_1 \times n_2)$  a uma matriz

$C(m_1n_1 \times m_2n_2)$ , tal que (Mariot, 1962):

$$C = A \otimes B; C_{jp; kg} = A_{jk} B_{pq}.$$


---

---

**Exemplo 2.4.1** Efetue o **Produto Direto** entre as matrizes  $A(2 \times 3)$  e  $B(3 \times 2)$ .

---

$$A \otimes B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{11} & a_{13}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{21} & a_{13}b_{22} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{13}b_{31} & a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{23}b_{11} & a_{23}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{21} & a_{23}b_{22} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{23}b_{31} & a_{23}b_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11;11} & c_{11;12} & c_{11;21} & c_{11;22} & c_{11;31} & c_{11;32} \\ c_{12;11} & c_{12;12} & c_{12;21} & c_{12;22} & c_{12;31} & c_{12;32} \\ c_{13;11} & c_{13;12} & c_{13;21} & c_{13;22} & c_{13;31} & c_{13;32} \\ c_{21;11} & c_{21;12} & c_{21;21} & c_{21;22} & c_{21;31} & c_{21;32} \\ c_{22;11} & c_{22;12} & c_{22;21} & c_{22;22} & c_{22;31} & c_{22;32} \\ c_{23;11} & c_{23;12} & c_{23;21} & c_{23;22} & c_{23;31} & c_{23;32} \end{vmatrix} .$$

---

**Exercício 2.4.1** Demonstre que:

a) O produto direto é associativo, isto é:

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C ;$$

b) O produto direto não é comutativo, isto é:

$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$


---

**Teorema 2.4.1** Sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas matrizes ( $m \times m$ ) e  $B_1$  e  $B_2$  duas matrizes ( $n \times n$ ), então:

$$(A_1 \otimes B_1) \cdot (A_2 \otimes B_2) = (A_1 \cdot A_2) \otimes (B_1 \cdot B_2) .$$

**Demonstração:**

Partamos da definição de produto usual de matrizes:

Assim:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \beta} (A_1 \otimes B_1)_{jp, \alpha\beta} (A_2 \otimes B_2)_{\alpha\beta, kq} = \\ & = \sum_{\alpha, \beta} (A_1)_{j\alpha} (B_1)_{p\beta} (A_2)_{\alpha k} (B_2)_{\beta q} = \quad (\text{Definição 2.4.1}) \\ & = \sum_{\alpha, \beta} (A_1)_{j\alpha} (A_2)_{\alpha k} (B_1)_{p\beta} (B_2)_{\beta q} = \\ & = (A_1 \cdot A_2)_{jk} (B_1 \cdot B_2)_{pq} = [(A_1 \cdot A_2) \otimes (B_1 \cdot B_2)]_{jp, kq} . \quad \text{C.Q.D.} \end{aligned}$$

**Corolário 2.4.1** Se  $A$  e  $B$  são duas matrizes quadradas regulares, de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente, então:

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = E_m \otimes E_n \equiv E_{mn}$$

( $E \equiv$  Matriz Unitária).

Portanto,  $(A \otimes B)$  é também regular e sua inversa é dada por:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$


---

**Exercício 2.4.2**

a) Verifique que:

$$(A \otimes B)^+ = A^+ \otimes B^+;$$

b) Partindo do resultado anterior, demonstre que se  $U$  e  $V$  são matrizes unitárias, então  $U \otimes V$  também é unitária.

---

**Teorema 2.4.2** O produto direto de duas representações é também uma representação.

**Demonstração:**

Sejam  $D^{(\mu)}(R)$  e  $D^{(\nu)}(R)$  duas representações respectivas dos grupos  $G^{(\mu)}$  e  $G^{(\nu)}$ . Pela definição de representação (Definição 2.1.1), temos:

$$D^{(\mu)}(RS) = D^{(\mu)}(R)D^{(\mu)}(S),$$

e

$$D^{(\nu)}(RS) = D^{(\nu)}(R)D^{(\nu)}(S).$$

Seja o seguinte produto direto:

$$D^{(\mu \times \nu)}(R) = D^{(\mu)}(R) \otimes D^{(\nu)}(R),$$

então:

$$D^{(\mu \times \nu)}(R) \cdot D^{(\mu \times \nu)}(S) = \left[ D^{(\mu)}(R) \otimes D^{(\nu)}(R) \right] \cdot \left[ D^{(\mu)}(S) \otimes D^{(\nu)}(S) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ D^{(\mu)}(R) D^{(\mu)}(S) \right] \otimes \left[ D^{(\nu)}(R) \otimes D^{(\nu)}(S) \right] = \text{(Teorema 2.4.1)} \\
&= \left[ D^{(\mu)}(RS) \right] \otimes \left[ D^{(\nu)}(RS) \right]. \quad \text{(Definição 2.1.1)}
\end{aligned}$$

Assim:

$$D^{(\mu \times \nu)}(R) \cdot D^{(\mu \times \nu)}(S) = D^{(\mu \times \nu)}(RS) . \quad \text{C.Q.D.}$$

**Exercício 2.4.3** Demonstre que:

a)  $D^{(\mu)}(R) \otimes D^{(\nu)}(R) = D^{(\nu)}(R) \otimes D^{(\mu)}(R) ;$

b) Se  $D$  for uma representação  $(Ir)$  redutível, então a matriz adjunta  $\bar{D} = \tilde{D}^{-1}$  e  $D^*$ , também serão. (Obs: o  $\sim$  significa transposta.)

**Teorema 2.4.3** O caráter do produto direto de duas representações é igual ao produto simples dos caracteres de cada uma de per si.

**Demonstração:**

Seja:

$$D^{(\mu \times \nu)}(R) = D^{(\mu)}(R) \times D^{(\nu)}(R) .$$

Então :

$$\left[ D^{(\mu \times \nu)}(R) \right]_{jp,kq} = \left[ D^{(\mu)}(R) \right]_{jk} \left[ D^{(\nu)}(R) \right]_{pq} .$$

Portanto:

$$\sum_{j,p} \left[ D^{(\mu \times \nu)}(\mathbf{R}) \right]_{jp,jp} = \left[ D^{(\mu)}(\mathbf{R}) \right]_{jj} \left[ D^{(\nu)}(\mathbf{R}) \right]_{pp},$$

$$X^{(\mu \times \nu)}(\mathbf{R}) = X^{(\mu)}(\mathbf{R}) \cdot X^{(\nu)}(\mathbf{R}). \quad \text{C.Q.D.}$$

## 2.5 Bases para Representações

Ao definirmos representação de um grupo, vimos que uma dado grupo  $G$  pode ter várias representações. A cada uma dessas representações podemos associar uma **base** do espaço vetorial subjacente a elas.

Seja, então, um conjunto de funções linearmente independentes e apliquemos a cada uma dessas funções todos os operadores  $O_{\mathbf{R}}$  correspondentes a elementos  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{G}$ . Obteremos, assim, um conjunto de funções que pode ser expresso como combinação linear de  $n$  delas  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ . Aplicando a uma destas funções o operador  $O_{\mathbf{R}}$ , obteremos:

$$O_{\mathbf{R}} \psi_{\nu} = \sum_{\mu=1}^n \psi_{\mu} D_{\mu\nu}(\mathbf{R}),$$

teremos, então, uma representação onde  $D_{\mu\nu}(\mathbf{R})$  **representa** o elemento  $\mathbf{R}$  numa **base** composta pelo conjunto  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ .

### Definição 2.5.1

a) Uma função é dita invariante pela transformação  $O_{\mathbf{R}}$ , se e somente se:

$$O_{\mathbf{R}} \psi(x) = \psi(x) \quad \text{ou} \quad \psi(x) = \psi(\mathbf{R}x);$$

b) Um operador  $H$  é dito invariante pela transformação  $O_R$ , se e somente se:

$$[H, O_R] = 0.$$

**Teorema 2.5.1** Seja  $H$  invariante por um grupo de transformações, isto é,  $[H, O_R] = 0$ . Se  $\varepsilon$  forem os auto-valores de  $H$  e  $\psi_\nu$  suas auto-funções, ou seja:  $H\psi_\nu = \varepsilon \psi_\nu$ , então  $\psi_\nu$  é base para a representação do grupo de simetria associado.

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} [H, O_R] \psi_\nu = 0 &\rightarrow [H O_R - O_R H] \psi_\nu = 0 \rightarrow \\ (H O_R) \psi_\nu &= (O_R H) \psi_\nu \rightarrow H(O_R \psi_\nu) = O_R (H \psi_\nu) = \\ &= O_R (\varepsilon \psi_\nu) = \varepsilon (O_R \psi_\nu) = \varepsilon \sum_{\mu=1}^n \psi_\mu D_{\mu\nu}(\mathbf{R}). \quad \text{C.Q.D.} \end{aligned}$$

**Exercício 2.5.1** Sejam  $D^{(\mu)}(\mathbf{R})$  e  $D^{(\nu)}(\mathbf{R})$  duas representações irredutíveis de um mesmo grupo  $G$ , de dimensão  $n_\mu$  e  $n_\nu$ , respectivamente. Sejam as bases das mesmas dadas por:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_\mu}) \quad \text{e} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_\nu}),$$

de tal modo que:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n_\mu} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) x_j \quad \text{e} \quad y_k' = \sum_{\ell=1}^{n_\nu} D_{k\ell}^{(\nu)}(\mathbf{R}) y_\ell.$$

Demonstre que:



$$x_i' y_k' = \sum_{j,\ell} D_{ik,j\ell}^{(\mu \times \nu)}(\mathbf{R}) x_j y_\ell.$$

[NOTA:  $D^{(\mu \times \nu)}(\mathbf{R})$  não será uma representação irreduzível!]

**Exemplo 2.5.1** Estude o Grupo da **Equação de Schrödinger**.

Seja um átomo submetido a um potencial de Coulomb:

$$V = -\frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

A **Equação de Schrödinger** correspondente será:

$$H \psi_n = E_n \psi_n,$$

ou

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{e^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] \psi = E \psi.$$

Vê-se, pela equação acima, que  $H$  é invariante pelo grupo de rotações  $O_R$ , em torno da origem. Então:

$$[H, O_R] = 0,$$

logo:

$$H(O_R \psi) = E(O_R \psi).$$

A expressão acima significa que as auto-funções do operador  $O_R$  são também auto-funções de  $H$  com o mesmo auto-valor.

A **Equação de Schrödinger** nos mostra que:

$$H \psi = E \psi, \text{ onde: } H = H_1 + H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}.$$

Seja:

$$H_1 \psi_1 = E_1 \psi_1 \quad \text{e} \quad H_2 \psi_2 = E_2 \psi_2, \text{ então:}$$

$$H \psi = (H_1 + H_2) \psi.$$

Tomando:  $\psi = \psi_1 \psi_2$ , então:

$$\begin{aligned} H \psi &= (H_1 + H_2) \psi = (H_1 + H_2) \psi_1 \psi_2 = H_1 \psi_1 \psi_2 + H_2 \psi_1 \psi_2 = \\ &= E_1 \psi_1 \psi_2 + E_2 \psi_1 \psi_2 = (E_1 + E_2) \psi_1 \psi_2 = (H_1 + H_2) \psi = E \psi. \end{aligned}$$

Assim:

$$\boxed{E = E_1 + E_2}.$$

$$\text{Como } H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

e

$$H_2 = -\frac{e^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

são invariantes por rotação em torno da origem, então:

$$[H_1, O_R] = 0 \quad \text{e} \quad [H_2, O_R] = 0.$$

Portanto, se o  $D_{j_1}$  e  $D_{j_2}$  são representações do grupo de rotação relativo à  $H_1$  e à  $H_2$ , respectivamente, então:

$$D_j^{(1 \times 2)} = D_{j_1} \otimes D_{j_2},$$

é, também, uma representação de  $\psi = \psi_1 \psi_2$ , isto é,  $D_j^{(1 \times 2)}$  é uma representação de  $\mathbf{H}$  na base  $\psi$ .

## 2.6 Séries e Coeficientes de Clebsch-Gordan

**Definição 2.6.1** Segundo a Definição 2.1.4.c, vimos que:

$$D(\mathbf{R}) = \sum_{\sigma} a_{\sigma} D^{(\sigma)}(\mathbf{R}),$$

onde  $D^{(\sigma)}(\mathbf{R})$  são representações irredutíveis do grupo  $G(\mathbf{R})$ , sendo

$$a_{\sigma} = \frac{1}{g} \sum_{\mathbf{R}} X_j(\mathbf{R}) X_j^{*(\sigma)}(\mathbf{R}). \quad (\text{Teorema 2.3.2.b})$$

Ainda pelos Teoremas 2.4.2 e 2.4.3, vimos que:

$$D^{(\mu)}(\mathbf{R}) \otimes D^{(\nu)}(\mathbf{R}) = D^{(\mu \times \nu)}(\mathbf{R}),$$

e

$$X^{(\mu)}(\mathbf{R}) \otimes X^{(\nu)}(\mathbf{R}) = X^{(\mu \times \nu)}(\mathbf{R}).$$

Portanto:

$$D^{(\mu)}(\mathbf{R}) \otimes D^{(\nu)}(\mathbf{R}) = \sum_{\sigma} a_{\sigma} D^{(\sigma)}(\mathbf{R}),$$

com:

$$a_{\sigma} \equiv (\mu \nu \sigma) = \frac{1}{g} \sum_{\mathbf{R}} X^{(\mu)}(\mathbf{R}) X^{(\nu)}(\mathbf{R}) X^{*(\sigma)}(\mathbf{R}),$$

série essa que se denomina **Série de Clebsch-Gordan**.

---

**Exercício 2.6.1** Mostre que:

a)  $(\mu \vee \sigma) = (\nu \mu \sigma)$ ;

b) Se  $X(\mathbf{R}) = X^*(\mathbf{R}) \quad \forall \mathbf{R}$ ; então  $(\mu \vee \sigma)$  é totalmente simétrico;

c) O produto direto de duas representações irredutíveis de dimensões  $n_1$  e  $n_2$  ( $n_1 \geq n_2$ ), *não pode* conter representações de dimensão menor que  $n_1/n_2$ .

---

**Definição 2.6.2** Dadas duas representações  $D^{(\mu)}(\mathbf{R})$  e  $D^{(\sigma)}(\mathbf{R})$  e suas respectivas bases  $\psi_j^{(\mu)}$  ( $j=1,2,\dots, n_\mu$ ) e  $\phi_\ell^{(\nu)}$  ( $\ell=1,2,\dots, n_\nu$ ). Se

$\psi_s^{(\lambda)}$  ( $s=1,2,\dots, n_\lambda$ ) for uma base do produto direto das duas representações indicadas acima, isto é:  $D^{(\mu)}(\mathbf{R}) \otimes D^{(\nu)}(\mathbf{R})$ , então:

$$\psi_s(\lambda \zeta_\lambda) = \sum_{j,\ell} \psi_j^{(\mu)} \phi_\ell^{(\nu)} \langle \mu_j; \nu_\ell \mid \lambda \zeta_\lambda s \rangle,$$

onde  $\zeta_\lambda = 1,2,\dots, (\mu \vee \lambda)$ . Os coeficientes  $\langle \mu_j; \nu_\ell \mid \lambda \zeta_\lambda s \rangle$  são chamados **Coefficientes de Clebsch-Gordan**. (É oportuno observar que esses coeficientes têm várias notações.)

---

**Exercício 2.6.2** Mostre que:

a)  $\psi_j^{(\mu)} \phi_\ell^{(\nu)} = \sum_{\lambda, \zeta_\lambda, s} \psi_s(\lambda \zeta_\lambda) \langle \lambda \zeta_\lambda s \mid \mu_j; \nu_\ell \rangle$ ;

$$b) \sum_{j,\ell} \langle \lambda' \zeta_{\lambda'} s' | \mu_j; \nu \ell \rangle \langle \mu_j; \nu \ell | \lambda \zeta_{\lambda} s \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\zeta_{\lambda} \zeta_{\lambda'}} \delta_{ss'};$$

$$c) \sum_{j,\zeta_{\lambda},s} \langle \mu_j'; \nu \ell' | \lambda \zeta_{\lambda} s \rangle \langle \lambda \zeta_{\lambda} s | \mu_j; \nu \ell \rangle = \delta_{jj'} \delta_{\ell\ell'};$$

d) Para representações unitárias, temos:

$$d.1) \langle \lambda \zeta_{\lambda} s | \mu_j; \nu \ell \rangle = \langle \mu_j; \nu \ell | \lambda \zeta_{\lambda} s \rangle^*;$$

$$d.2) \sum_{j,\ell} \langle \mu_j; \nu \ell | \lambda' \zeta_{\lambda'} s' \rangle^* \langle \mu_j; \nu \ell | \lambda \zeta_{\lambda} s \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\zeta_{\lambda} \zeta_{\lambda'}} \delta_{ss'};$$

$$d.3) \sum_{\lambda,\zeta_{\lambda},s} \langle \mu_j'; \nu \ell' | \lambda \zeta_{\lambda} s \rangle \langle \mu_j; \nu \ell | \lambda \zeta_{\lambda} s \rangle = \delta_{jj'} \delta_{\ell\ell'};$$

$$d.4) \sum_{\ell,j} D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{k\ell}^{(\nu)}(\mathbf{R}) \langle \mu_j; \nu \ell | \lambda \zeta_{\lambda} s \rangle =$$

$$= \sum_{s'} \langle \mu_i; \nu k | \lambda \zeta_{\lambda} s' \rangle D_{s's}^{(\lambda \zeta_{\lambda})}(\mathbf{R});$$

$$d.5) \sum_{i,j,k,\ell} \langle \lambda' \zeta_{\lambda'} s' | \mu_i; \nu k \rangle D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{k\ell}^{(\nu)}(\mathbf{R}) \times$$

$$\times \langle \mu_j; \nu \ell | \lambda \zeta_{\lambda} s \rangle = D_{s's}^{(\lambda \zeta_{\lambda})} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\zeta_{\lambda} \zeta_{\lambda'}} \delta_{ss'};$$

$$d.6) D_{ij}^{(\mu)}(\mathbf{R}) D_{k\ell}^{(\nu)}(\mathbf{R}) = \sum_{\lambda,\zeta_{\lambda},s',s} \langle \mu_i; \nu k | \lambda \zeta_{\lambda} s' \rangle \times$$

$$\times D_{s's}^{(\lambda\zeta_\lambda)} \langle \lambda\zeta_\lambda s | \mu j; v \ell \rangle.$$

---

# CAPÍTULO 3

## Grupos e Álgebras de Lie<sup>1</sup>

### 3.1 Grupos de Lie

No Capítulo 2 vimos que um grupo cujos elementos são caracterizados por um certo número de parâmetros contínuos, chama-se de **grupo contínuo** (vide Definição 2.1.4).

Por exemplo:

$$g(a) = e^{ia},$$

onde **a** é um parâmetro real cujo intervalo de variação é  $0 \leq a \leq 2\pi$ , pois  $\exp(2\pi ni) = 1$ , com **n** inteiro ou nulo, é um elemento de um grupo.

---

**Exercício 3.1.1** Mostre que o conjunto de elementos do tipo  $g(a)$  visto acima forma um grupo.

---

**Definição 3.1.1** Um grupo é denominado de **grupo contínuo de r-parâmetros** quando todos os seus elementos dependem de um parâmetro real  $a_\lambda$ , onde  $\lambda = 1, 2, \dots, r$ . Esse grupo é denotado por:

$$g(a_1, a_2, \dots, a_r) \equiv g(a).$$

Os elementos identidade e inverso desse grupo são definidos da seguinte maneira:

---

<sup>1</sup> Esta parte deste Capítulo foi ministrado pelo professor José Maria Filardo Bassalo no *Curso de Extensão*, realizado em 1985, na UFPA, sobre **Teoria de Grupo**.

**I) Elemento Identidade**

$$g(a^0) \equiv g(0), \text{ onde } a^0 \equiv (a_1^0, a_1^0, \dots, a_r^0),$$

de tal modo que:

$$g(a^0)g(a) = g(a)g(a^0) = g(a).$$

**II) Elemento Inverso**

$$g(\bar{a}) \equiv [g(a)]^{-1},$$

de tal modo que:

$$g(a)g(\bar{a}) = g(\bar{a})g(a) = g(a^0) = g(0).$$

**Definição 3.1.2** Um grupo de  $r$ -parâmetros ( $r = \text{finito}$ ) é dito um **Grupo de Lie** se:

$$c_\lambda = \phi_\lambda (a_1, a_2, \dots, a_r ; b_1, b_2, \dots, b_r),$$

ou

$$c = \phi (a;b),$$

é uma função analítica, isto é, pode ser desenvolvida em **Série de Taylor** uniformemente convergente, dos parâmetros **a** e **b**.

**Definição 3.1.3** Seja a seguinte transformação:

$$x'_i = f_i (x_1, x_2, \dots, x_n ; a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou

$$x'_i = f (x;a).$$

O grupo dessas transformações é chamado de **Grupo de Transformações de Lie**, se:



I) Dado

$$x'_i = f(x; a), \exists \bar{a} \text{ tal que:}$$

$$x''_i = f(x', \bar{a}) = f[f(x; a; \bar{a})] = x,$$

ou seja, a transformação é invertível.

II) Se fizermos duas transformações sucessivas:

$$x'_i = f_i(x; a) \text{ e } x''_i = f_i(x'; b),$$

então:

$$x''_i = f_i(x; c), \text{ com } c = \phi(a; b),$$

onde  $\phi$  é analítica em  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , e  $\bar{\mathbf{a}}$  é também função analítica de  $\mathbf{a}$ .

III) Existe  $a^0$ , tal que:

$$x'_i = f(x; a^0) = x.$$

**Exercício 3.1.2** Mostre que:

$$f[f(x; a); b] = f[x; \phi(a; b)].$$

## 3.2 Exemplos de Grupos de Lie

### a) Grupo Ortogonal de Dimensão n: 0(n)

a.1) Consideremos, inicialmente, o grupo 0(2). Esse grupo deixa invariante a quantidade real  $x^2 + y^2$  em um espaço real bi-dimensional. Então:

$$x' = 0(2) x.$$

Como o grupo 0(2) é ortogonal, então:  $00^T = E$ . Assim:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{com: } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1. \end{cases}$$

Vê-se, portanto, que os 4 componentes ( $n^2 = 2^2 = 4$  : a,b,c,d) que caracterizam o grupo estão sujeitos a três relações algébricas, de modo que o grupo  $O(2)$  é um grupo de **1-parâmetro**:  $2^2 - 3 = 1$ .

Se, contudo, nesse grupo só há rotações, sem reflexões espaciais, então:

$$\det O(2) = +1 ,$$

ele passa, então, a ser denotado por  $O^+(2) \equiv R(2)$  e caracterizado pela matriz:

$$O^2(2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

a.2) Consideremos, agora, o grupo  $O(3)$ . Esse grupo deixa invariante a quantidade real  $x^2 + y^2 + z^2$  em um espaço real tridimensional então:

$$x' = O(3) x .$$

A condição de ortogonalidade  $O(3)O(3)^T = E$  fornece 6 condições impostas aos seus 9 componentes ( $n^2 = 3^2 = 9$ ), de

modo que o grupo  $O(3)$  será um grupo de 3-parâmetros, pois  $9-6=3$ .

Se, contudo, esse grupo só contém rotações, sem reflexões espaciais, ele é denotado por  $O^+(3) \equiv R(3)$ .

a.3) De um modo geral, o grupo  $O(n)$  deixa invariante a quantidade real  $\sum_{i=1}^n x_i^2$ . A condição de ortogonalidade do grupo, isto é,  $O(3)O(3)^T = E$  impõe:  $n + \frac{n(n-1)}{2}$  condições aos  $n^2$  componentes do grupo, e este ficará apenas com  $n^2 - \left[ n + \frac{n(n-1)}{2} \right] = \frac{n(n-1)}{2}$  parâmetros essenciais.

### **Exercício 3.2.1** Encontre:

I. A forma do grupo  $O^+(3)$  para rotações em torno dos eixos  $x, y, z$  respectivamente;

II. As seis (6) condições impostas aos seus elementos, devido a sua condição de ortogonalidade.

## **b) Grupo Unitário de Dimensão $n$ : $U(n)$**

b.1) Consideremos, inicialmente, o grupo  $U(2)$ . Esse grupo deixa invariante o produto escalar  $(x, x)$  em um espaço complexo bi-dimensional. Então:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ com: } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o que fornece as seguintes equações:

$$a a^* + b b^* = 1; a c^* + b d^* = 0; a^*c + b^*d = 0; c c^* + d d^* = 1.$$

Vê-se, portanto, que os oito elementos do grupo  $[(a,b,c,d)]$  são complexos do tipo:  $R + i I$ , logo  $4 \times 2 = 8$ , estão sujeitos a quatro relações algébricas, de modo que o grupo  $U(2)$  é um grupo de 4-parâmetros reais ( $8 - 4 = 4$ ).

b.2) Consideremos o grupo  $U(n)$ . Tal grupo deixa invariante o produto escalar  $(x,x)$  em um espaço complexo  $n$ -dimensional. Com a condição de unitariamente desse grupo fornece  $n^2$  relações algébricas aos  $2n^2$  elementos do mesmo, então o grupo  $U(n)$  é um grupo de  $n^2$ -parâmetros reais ( $2n^2 - n^2 = n^2$ ).

### c) Grupo Unitário Especial ou Unimodular de Dimensão $n$ : $SU(n)$

Esse grupo tem, além da condição de unitariedade, a condição adicional de que o seu determinante vale  $+1$ , ou seja:

$$UU^+ = E; \det U = +1.$$

Assim, o grupo  $SU(n)$  tem  $n^2 - 1$  parâmetros reais.

### d) Grupo Linear de Dimensão $n$ : $GL(n)$

Esse grupo é caracterizado por:

$$x'_i = \sum_j a_{ij}x_j; i, j = 1, 2, \dots, n; \det a_{ij} \neq 0.$$

Tal grupo tem  $n^2$ -parâmetros, que podem variar de  $-\infty$  até  $+\infty$ .

**e) Grupo Linear Especial ou Unimodular de Dimensão n:  $SL(n)$**

Esse grupo é idêntico ao grupo  $GL(n)$ , com a condição adicional de que o seu determinante vale +1, condição essa que faz com que o tal grupo seja caracterizado por  $n^2-1$  parâmetros.

**f) Grupo Ortogonal Complexo de 4 Dimensões:  $M(4)$**

As matrizes complexas  $4 \times 4$  desse grupo têm 32 ( $16 \times 2$ ) elementos reais, e a condição de ortogonalidade  $M M^T = E$ , impõe aos mesmos 20 ( $2 \times 10$ ) relações algébricas, de modo que esse grupo passa a ter 12-parâmetros reais.

Vejamos alguns casos particulares desse grupo:

f.1) O grupo  $M^+(4)$  é aquele para o qual as matrizes do grupo  $M(4)$  têm determinante +1;

f.2) O grupo  $M(4)$  caracterizado pela matriz  $\{\alpha_{ij}\}$ , de tal modo que se tem:

$$\begin{cases} \alpha_{ij} \text{ (real), para } i, j = 1, 2, 3 \\ \alpha_{i4}, \alpha_{4i} \text{ (imaginário), para } i = 1, 2, 3 \\ \alpha_{44} \text{ (real),} \end{cases}$$

é chamado o **Grupo Homogêneo de Lorentz**  $L(v)$ . Tal grupo tem 6-parâmetros reais [16 elementos ( $4 \times 4$ ), menos 10 restrições].

O Grupo de Lorentz caracterizado por:

$$\det L(v) = +1 ; \alpha_{44} \geq 1,$$

é chamado de **Transformação Própria de Lorentz:  $L_p(v)$** .

---

**Exercício 3.2.2**

I. Encontre as 20 relações algébricas satisfeitas pelos elementos de  $M(4)$ .

II. Escreva a transformação própria de Lorentz da Relatividade.

---

**g) Grupo Complexo Especial ou Unimodular de 2 Dimensões:  $C(2)$**

As matrizes  $2 \times 2$  complexas desse grupo  $C(2)$  satisfazem à relação:

$$\det C(2) = +1,$$

portanto, esse grupo terá 6-parâmetros reais  $[(8-2 \times 1) = 6]$ .

**Observação:** Entre os grupos que acabamos de relacionar, existem os seguintes Homeomorfismos:

$$O^+(3) \sim S U(2);$$

$$O^+(4) \sim S U(2) \times S U'(2);$$

$$M^+(4) \sim C(2) \times C'(2);$$

$$L_p(v) \sim C(2).$$

A importância de tais Homeomorfismos reside no fato de que; encontradas as representações irredutíveis de  $S U(2)$  e  $C(2)$ , podemos construir as representações dos demais grupos.

### 3.3 Transformações Infinitesimais e Parâmetros de Grupos

**Definição 3.3.1** Seja a transformação:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Se:

$$x'_i = x'_i + dx'_i$$

$$x'_i = f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n; \delta a_1, \delta a_2, \dots, \delta a_r),$$

onde:

$$dx'_i = \sum_{k=1}^r M_{ik}(x') \delta a_k$$

e

$$M_{ik}(x') = \left. \frac{\partial f_i(x'_i; a)}{\partial a_k} \right|_{a=0},$$

então:

$f_i$  é dita **infinitesimal**.

Além disso, temos:

$$a_p + da_p = \phi_p(a_1, a_2, \dots, a_r; \delta a_1, \delta a_2, \dots, \delta a_r),$$

então:

$$da_\ell = \sum_{m=1}^r \theta_{\ell m}(a) \delta a_m,$$

onde:

$$\theta_{\ell m} = \left. \frac{\partial \phi_{\ell}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial b_m} \right|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}.$$

Por outro lado, temos:

$$\delta a_k = \sum_{\ell=1}^r \psi_{k\ell}(\mathbf{a}) da_{\ell}, \text{ onde: } \psi\theta = \mathbf{I},$$

então:

$$dx'_i = \sum_{k,\ell=1}^r M_{ik}(x') \psi_{k\ell}(\mathbf{a}) da_{\ell},$$

ou:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_i} = \sum_{k=1}^r M_{ik}(x') \psi_{ki}(\mathbf{a}).$$

**Definição 3.3.2** Se  $F(\mathbf{x})$  sofre uma transformação infinitesimal, então:

$$dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i.$$

Usando-se a Definição 3.3.1, virá:

$$dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \left( \sum_{\ell=1}^r M_{i\ell}(\mathbf{x}) \delta a_{\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^r \delta a_{\ell} \left( \sum_{x=1}^n M_{i\ell}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) F,$$

ou:

$$dF = \sum_{\ell=1}^r \delta a_{\ell} x_{\ell} F,$$



onde:

$$x_\ell = \sum_{i=1}^n M_{i\ell}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (\ell=1, 2, \dots, r),$$

são chamados **Geradores Infinitesimais** do grupo.

Assim:

$$F' = F + dF = F + \sum_{\ell=1}^r \delta a_\ell x_\ell F,$$

$$F' = \left[ 1 + \sum_{\ell=1}^r x_\ell \delta a_\ell \right] F.$$

Vê-se, portanto, que o número ( $r$ ) de parâmetros do grupo é igual ao número de geradores infinitesimais do grupo.

**Exemplo 3.3.1** Calcule os geradores infinitesimais do grupo  $O^+(2)$ .

Para uma rotação  $\theta$  em torno do eixo dos  $\mathbf{z}$ , temos:

$$x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta,$$

$$y' = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta.$$

Para uma transformação infinitesimal, temos:

$$\cos\theta \approx 1; \operatorname{sen}\theta \approx \delta\theta,$$

Portanto:

$$x' = x + y \delta\theta,$$

$$y' = -x \delta\theta + y.$$

Assim:

$$x' = x + y \delta\theta = f_1(x, y; \delta\theta),$$

$$y' = -x \delta\theta + y = f_2(x, y; \delta\theta).$$

Portanto:

$$M_{1\ell}(x, y) = \frac{\partial f_\ell(x, y; \delta\theta)}{\delta\theta}.$$

Como o grupo  $0^+$  (2) é de um parâmetro, então  $\ell = 1$ , e teremos:

$$M_{11}(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial\theta} = y, \quad M_{21}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial\theta} = -x.$$

Portanto:

$$X_1 = \sum_{i=1}^2 M_{i1}(x, y) \frac{\partial}{\delta x_i},$$

$$X_1 = M_{11} \frac{\partial}{\delta x_1} + M_{12} \frac{\partial}{\delta x_2},$$

$$\boxed{X_1 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}}$$

Sendo:

$$dF = \sum_{\ell=1}^r X_P \delta a_P F, \text{ portanto:}$$

$$dx = \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) x \delta\theta = y \delta\theta,$$

$$dy = \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) y \delta\theta = -x \delta\theta.$$

Ora:

$$dx = x' - x = y\delta\theta$$

$$dy = y' - y = -x\delta\theta ,$$

o que concorda com o resultado anterior.

### 3.4 Constantes de Estrutura

**Teorema 3.4.1** Os geradores infinitesimais  $\{X_P\}$  de qualquer **Grupo de Lie**, satisfazem às relações:

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, r),$$

onde  $C_{\alpha\beta}^\gamma$  são chamadas as **Constantes de Estrutura do Grupo de Lie**.

**Demonstração:**

Segundo a Definição 3.3.1, temos:

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_r),$$

e

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_\ell} = \sum_{k=1}^r M_{ik}(x) \psi_{kP}(a) \equiv M_{ik} \psi_{kP} .$$

(A partir daqui, vamos usar a **Convenção de Einstein!**)

onde:

$$M_{ik}(x) = \left. \frac{\partial f_i(x_i; a)}{\partial a_k} \right|_{a=0} ,$$

$$\delta a_k = \psi_{kP}(a) \delta a_P ,$$

$$da_P = \theta_{Pm}(a) \delta a_m ,$$

com:

$\psi\theta = I$ , ou seja:  $\psi_{\lambda\mu}(a) \theta_{\mu\nu}(a) = \delta_{\lambda\nu}$ ;  $\forall a$  e  $\lambda, \nu = 1, 2, \dots$

As condições de continuidade da função  $f_i$  requerem que:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\ell \partial a_m} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_m \partial a_\ell} . \quad (\alpha)$$

Seja:

$$\frac{\partial x_r}{\partial a_s} = y_{rs}(a_1, a_2, \dots, a_m; x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\beta)$$

onde:

$$r = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, m .$$

Assim:

$$dY_{rs} = \frac{\partial Y_{rs}}{\partial a_\alpha} da_\alpha + \frac{\partial Y_{rs}}{\partial x_\beta} dx_\beta .$$

Portanto:

$$\alpha \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\ell \partial a_m} = \frac{\partial}{\partial a_\ell} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} = \frac{\partial}{\partial a_\ell} Y_{im} = \frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\alpha} \frac{\partial a_\alpha}{\partial a_\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_\ell} .$$

Ora:

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial a_\ell} = \delta_{\alpha\ell} , \text{ então:}$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\ell \partial a_m} = \frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\alpha} \delta_{\alpha\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_\ell} = \frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_\ell} ,$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\ell \partial a_m} = \frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta} Y_{\beta\ell} \quad [\text{Usando-se } (\beta)] \quad (\gamma)$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_m \partial a_\ell} &= \frac{\partial}{\partial a_m} \frac{\partial x_i}{\partial a_\ell} = \frac{\partial}{\partial a_m} Y_{i\ell} = \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial a_\alpha} \frac{\partial a_\alpha}{\partial a_m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_m} = \\ &= \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\alpha} \delta_{\alpha m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_m} = \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial a_m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta} Y_{\beta m} , \end{aligned}$$

isto é:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_m \partial a_\ell} = \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial a_m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta} Y_{\beta m} . \quad (\delta)$$

Levando-se, agora, ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ) em ( $\alpha$ ), virá:

$$\frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta} Y_{\beta\ell} = \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial a_m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta} Y_{\beta m} . \quad (m \neq \ell) \quad (\varepsilon)$$

Sendo:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_m} \equiv Y_{im} = M_{ik}(x) \Psi_{km}(a) .$$

Então, a Equação ( $\varepsilon$ ), ficará:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_\ell} (M_{ik} \Psi_{km}) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (M_{ik} \Psi_{km}) M_{\beta r} \Psi_{r\ell} = \\ = \frac{\partial}{\partial a_m} (M_{i\alpha} \Psi_{\alpha\ell}) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (M_{i\alpha} \Psi_{\alpha\ell}) M_{\beta s} \Psi_{sm} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_{ik} \frac{\partial}{\partial a_\ell} \psi_{km} + (\psi_{km} \frac{\partial}{\partial x_\beta} M_{ik}) M_{\beta r} \psi_{r\ell} = \\ & = M_{i\alpha} \frac{\partial \psi_{\alpha\ell}}{\partial a_m} + (\psi_{\alpha\ell} \frac{\partial}{\partial x_\beta} M_{i\alpha}) M_{\beta s} \psi_{sm}, \end{aligned}$$

ou:

$$M_{ik} \frac{\partial \psi_{km}}{\partial a_\ell} - M_{i\alpha} \frac{\partial \psi_{\alpha\ell}}{\partial a_m} + M_{\beta r} \psi_{r\ell} \psi_{km} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta} - M_{\beta s} \psi_{sm} \psi_{\alpha\ell} \frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial x_\beta} = 0.$$

Troquemos, inicialmente, o índice mudo  $\alpha$  por  $k$ . Então:

$$M_{ik} \left( \frac{\partial \psi_{km}}{\partial a_\ell} - \frac{\partial \psi_{k\ell}}{\partial a_m} \right) + M_{\beta r} \psi_{r\ell} \psi_{km} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta} - M_{\beta s} \psi_{sm} \psi_{k\ell} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta} = 0.$$

Agora, no terceiro termo da expressão acima, troquemos  $k$  por  $r$  e  $s$  por  $k$ . Então:

$$M_{ik} \left( \frac{\partial \psi_{km}}{\partial a_\ell} - \frac{\partial \psi_{k\ell}}{\partial a_m} \right) + M_{\beta r} \psi_{r\ell} \psi_{km} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta} - M_{\beta k} \psi_{km} \psi_{r\ell} \frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial x_\beta} = 0,$$

ou:

$$M_{ik} \left( \frac{\partial \psi_{km}}{\partial a_\ell} - \frac{\partial \psi_{k\ell}}{\partial a_m} \right) + \psi_{r\ell} \psi_{km} \left( M_{\beta r} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta} - M_{\beta k} \frac{\partial M_{ir}}{\partial x_\beta} \right) = 0. \quad (\Delta)$$

Agora, vamos usar a seguinte definição:

$$C_{\zeta\Gamma}^k(a) \equiv \left( \frac{\partial \psi_{km}}{\partial a_\ell} - \frac{\partial \psi_{k\ell}}{\partial a_m} \right) \phi_{m\zeta} \phi_{\ell\Gamma}. \quad (\kappa)$$

Em seguida, tomemos a expressão  $(\Delta)$  e multipliquemos por  $\phi_{m\zeta} \phi_{\ell\Gamma}$ . Então:

$$M_{ik} \left( \frac{\partial \psi_{km}}{\partial a_\ell} - \frac{\partial \psi_{kl}}{\partial a_m} \right) \phi_{m\zeta} \phi_{\ell\Gamma} + \phi_{m\zeta} \phi_{\Gamma} \psi_{r\ell} \psi_{km} \left( M_{\beta r} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta} - M_{\beta k} \frac{\partial M_{ir}}{\partial x_\beta} \right) = 0 .$$

Sendo:

$$\psi_{r\ell} \phi_{\ell\Gamma} = \delta_{r\Gamma} \text{ e } \psi_{km} \phi_{m\zeta} = \delta_{k\zeta} ,$$

teremos:

$$M_{ik} C_{\zeta\Gamma}^k + \delta_{r\Gamma} \delta_{k\zeta} (M_{\beta r} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta} - M_{\beta k} \frac{\partial M_{ir}}{\partial x_\beta}) = 0,$$

$$M_{\beta\zeta} \frac{\partial M_{i\Gamma}}{\partial x_\beta} - M_{\beta\Gamma} \frac{\partial M_{i\zeta}}{\partial x_\beta} = C_{\zeta\Gamma}^k(a) M_{ik}(x). \quad (\lambda)$$

Derivemos a expressão acima em relação à  $\mathbf{a}_\rho$ , lembrando que os  $\mathbf{M}$  só dependem de  $\mathbf{x}$ , então:

$$\frac{\partial C_{\zeta\Gamma}^k(a)}{\partial a_\rho} M_{ik} = 0. \quad (k, \zeta, \Gamma, \rho=1, 2, \dots, r)$$

Como os  $M_{ik}$  são linearmente independentes, virá:

$$\frac{\partial}{\partial a_\rho} C_{\zeta\Gamma}^k(a) = 0 \rightarrow C_{\zeta\Gamma}^k(a) \equiv \text{CONSTANTES!!}$$

Essas constantes  $C_{\zeta\Gamma}^k(a)$  são chamadas de **Constantes de Estrutura** do Grupo de Lie.

Na Definição 3.3.2, vimos que:

$$X_\ell = M_{i\ell}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\ell=1, 2, \dots, r).$$

Calculemos, agora, o comutador entre esses geradores.  
Assim:

$$\begin{aligned} [X_\ell, X_m] &= X_\ell X_m - X_m X_\ell = \\ &= M_{i\ell} \frac{\partial}{\partial x_i} (M_{jm} \frac{\partial}{\partial x_j}) - M_{jm} \frac{\partial}{\partial x_j} (M_{i\ell} \frac{\partial}{\partial x_i}) = \\ &= M_{i\ell} \frac{\partial M_{jm}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - M_{jm} \frac{\partial M_{i\ell}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

No segundo termo da expressão acima, troquemos  $i$  por  $j$ , então, virá:

$$\begin{aligned} [X_\ell, X_m] &= M_{i\ell} \frac{\partial M_{jm}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - M_{im} \frac{\partial M_{j\ell}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \\ &= \left[ M_{i\ell} \frac{\partial M_{jm}}{\partial x_i} - M_{im} \frac{\partial M_{j\ell}}{\partial x_i} \right] \frac{\partial}{\partial x_j} = C_{\ell m}^k M_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

ou:

$$\boxed{[X_\ell, X_m] = C_{\ell m}^k X_k}. \quad \text{C.Q.D.}$$

**Teorema 3.4.2** As constantes de estrutura de um grupo satisfazem à seguinte relação:



$$C_{\rho\sigma}^{\mu} C_{\mu\zeta}^{\nu} + C_{\sigma\zeta}^{\mu} C_{\mu\rho}^{\nu} + C_{\zeta\rho}^{\mu} C_{\mu\sigma}^{\nu} = 0,$$

com:  $\rho, \sigma, \nu, \zeta = 1, 2, \dots, r$ .

### Demonstração:

Sejam  $X_{\zeta}, X_{\rho}, X_{\sigma}$  os geradores de um grupo. Pela **Identidade de Jacobi**, temos:

$$[X_{\zeta}, [X_{\rho}, X_{\sigma}]] + [X_{\sigma}, [X_{\zeta}, X_{\rho}]] + [X_{\rho}, [X_{\sigma}, X_{\zeta}]] = 0.$$

Usando-se o resultado do Teorema 3.4.1, virá:

$$\begin{aligned} [X_{\zeta}, C_{\rho\sigma}^k X_k] + [X_{\sigma}, C_{\zeta\rho}^k X_k] + [X_{\rho}, C_{\sigma\zeta}^k X_k] &= 0, \\ C_{\rho\sigma}^k [X_{\zeta}, X_k] + C_{\zeta\rho}^k [X_{\sigma}, X_k] + C_{\sigma\zeta}^k [X_{\rho}, X_k] &= 0, \\ C_{\rho\sigma}^k C_{\zeta k}^{\ell} X_{\ell} + C_{\zeta\rho}^k C_{\sigma k}^m X_m + C_{\sigma\zeta}^k C_{\rho k}^n X_n &= 0. \end{aligned}$$

Trocando-se  $m$  e  $n$ , por  $\ell$ , virá:

$$(C_{\rho\sigma}^k C_{\zeta k}^{\ell} + C_{\zeta\rho}^k C_{\sigma k}^{\ell} + C_{\sigma\zeta}^k C_{\rho k}^{\ell}) X_{\ell} = 0.$$

Como  $X_{\ell}$  são linearmente independentes, então:

$$C_{\rho\sigma}^k C_{\zeta k}^{\ell} + C_{\zeta\rho}^k C_{\sigma k}^{\ell} + C_{\sigma\zeta}^k C_{\rho k}^{\ell} = 0.$$

Sendo:  $C_{bc}^a = -C_{cb}^a$  (cf. Exercício 3.4.1), virá:

$$-C_{\rho\sigma}^k C_{k\zeta}^{\ell} - C_{\zeta\rho}^k C_{k\sigma}^{\ell} - C_{\sigma\zeta}^k C_{k\rho}^{\ell} = 0,$$

$$\boxed{C_{\rho\sigma}^k C_{k\zeta}^\ell + C_{\zeta\rho}^k C_{k\sigma}^\ell + C_{\sigma\zeta}^k C_{k\rho}^\ell = 0.}$$

C.Q.D

**Exercício 3.4.1.** Demonstre que:

$$C_{bc}^a = -C_{cb}^a.$$

**Exemplo 3.4.1** Calcule as constantes de estrutura do grupo de rotações em três dimensões.

Para sucessivas rotações infinitesimais em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, o grupo de rotações é dado por:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha_3 & -\delta\alpha_2 \\ -\delta\alpha_3 & 1 & \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha_3 & -\delta\alpha_2 \\ -\delta\alpha_3 & 1 & \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x + y \delta\alpha_3 - z \delta\alpha_2 \\ -x \delta\alpha_3 + y + z \delta\alpha_1 \\ x \delta\alpha_2 - y \delta\alpha_1 + z \end{pmatrix},$$

ou:

$$x' = x + y \delta\alpha_3 - z \delta\alpha_2,$$

$$y' = -x \delta\alpha_3 + y + z \delta\alpha_1,$$

$$z' = x \delta\alpha_2 - y \delta\alpha_1 + z,$$

ou ainda:

$$\delta x = x' - x = y \delta\alpha_3 - z \delta\alpha_2,$$

$$\delta y = y' - y = -x \delta\alpha_3 + z \delta\alpha_1,$$

$$\delta z = z' - z = x \delta\alpha_2 - y \delta\alpha_1.$$

Vê-se, portanto, que o grupo de rotações  $\mathbf{O}$  é um grupo de 3-parâmetros:  $\delta\alpha_1$ ,  $\delta\alpha_2$ ,  $\delta\alpha_3$ .

Calculemos, agora, os geradores desse grupo. Segundo a Definição 3.2.2, temos:

$$X_\ell = M_{i\ell}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\ell=1, 2, 3; i=1, 2, 3)$$

Sendo:

$$x' = f_1(x, y, z; \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3) = xy\delta\alpha_3 - z\delta\alpha_2,$$

$$y' = f_2(x, y, z; \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3) = -x\delta\alpha_3 + y + z\delta\alpha_1,$$

$$z' = f_3(x, y, z; \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3) = x\delta\alpha_2 - y\delta\alpha_1 + \delta\alpha_1 + z,$$

e

$$M_{i\ell}(x, y, z) = \frac{\partial f_i(x, y, z; \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3)}{\delta\alpha_\ell},$$

virá:

$$M_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} = 0; \quad M_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} = -z; \quad M_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3} = y,$$

$$M_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} = z; \quad M_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} = 0; \quad M_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_3} = -x,$$

$$M_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_1} = -y; \quad M_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_2} = x; \quad M_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Portanto, os geradores do grupo  $\mathbf{0}(3)$ , serão:

$$X_1 = M_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + M_{21} \frac{\partial}{\partial x_2} + M_{31} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\boxed{X_1 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}},$$

$$X_2 = M_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} + M_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} + M_{32} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\boxed{X_2 = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}},$$

$$X_3 = M_{13} \frac{\partial}{\partial x_1} + M_{23} \frac{\partial}{\partial x_2} + M_{33} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\boxed{X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}}.$$

Por fim, calculemos as constantes de estrutura do grupo  $\mathfrak{o}(3)$ . Para isso, usemos o Teorema 3.4.1., isto é:

$$[X_\ell, X_m] = C_{\ell m}^n X_n.$$

Então:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= \left[ z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} \right] = \\ &= \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left( -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ &\left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) = z \frac{\partial}{\partial y} \left( -z \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left( z \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( x \frac{\partial}{\partial z} \right) + y \frac{\partial}{\partial z}, \\ &\left( z \frac{\partial}{\partial x} \right) - y \frac{\partial}{\partial z} \left( x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \left( z \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( z \frac{\partial}{\partial y} \right) - z \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial}{\partial z} \right) - \\ &- x \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left( x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( y \frac{\partial}{\partial z} \right) = -z^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + zx \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \\ &+ y \left( \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \right) - yx \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - zy \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \\ &- x \left( \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right) + xy \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Sendo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \text{ virá:}$$

$$[X_1, X_2] = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} = X_3.$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$[X_2, X_3] = X_1; [X_3, X_1] = X_2.$$

Portanto:

$$C_{\ell m}^n = 1, \forall n, \ell, m.$$

### Exercício 3.4.2

- Obtenha a matriz  $\mathbf{O}$  do Exemplo 3.4.1;
- Demonstre que  $[X_2, X_3] = X_1$ , e  $[X_3, X_1] = X_2$ , conforme indicado no Exemplo 3.4.1;
- Para o Exemplo 3.4.1, demonstre que:
 
$$\delta_{X_i} = \delta \alpha_k X_k x_i \quad (i, k = 1, 2, 3);$$
- Encontre os geradores do grupo  $\mathbf{O}(4)$ .  
Sendo  $X_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) tais geradores, e definindo:

$$Y_j = \frac{X_j + X_{j+3}}{2}; Z_j = \frac{X_j - X_{j+3}}{2},$$

demonstre que:

$$[Y_i, Y_j] = \varepsilon_{ijk} Y_k,$$

$$[Z_i, Z_j] = \varepsilon_{ijk} Z_k,$$

$$[Y_i, Z_j] = 0, \forall i, j = 1, 2, 3.$$

**Exemplo 3.4.2** Obter as representações de um grupo a partir de seus geradores.

-----

Inicialmente, vamos tomar o grupo de rotações finitas ( $\phi$ ) em torno do eixo dos  $\mathbf{z}$ . No Capítulo 1, vimos que:

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para uma rotação infinitesimal, teremos:

$$R_z(\delta\phi) \cong \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi & 0 \\ -\delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \mathbf{1} + i \delta\phi M_z,$$

onde:

$$1 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que:

$$iM_z = \left. \frac{dR_r(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi & -\text{sen} \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $R_z(\phi)$  forma um grupo, teremos:

$$R_z(\phi_1 + \phi_2) = R_z(\phi_1) R_z(\phi_2).$$

Então:

$$R_z(\delta\phi_1 + \delta\phi_2) = R_z(\delta\phi_1) R_z(\delta\phi_2) \cong (1 + i\delta\phi_1 M_z) (1 + \delta\phi_2 M_z).$$

Ora, como uma rotação finita  $\phi$  pode ser composta de uma sucessão de rotações infinitesimais:  $\delta\phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\phi}{N}$ . Portanto:

$$R_z(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + i \frac{\phi}{N} M_z \right)^N,$$

$$\boxed{R_z(\phi) = \exp(i\phi M_z)} .$$

Vê-se, então, que  $M_z$  é o gerador do grupo  $R_z(\phi)$  que é um sub-grupo de  $O^+(3)$ . De maneira análoga, temos:

$$R_x(\phi) = \exp(i\phi M_x);$$

$$R_y(\phi) = \exp(i\phi M_y).$$

Sendo:  $M_x = \vec{M} \cdot \vec{I}$ ;  $M_y = \vec{M} \cdot \vec{J}$  e  $M_z = \vec{M} \cdot \vec{K}$ , então a rotação infinitesimal em torno de um eixo qualquer definido pelo vetor  $\vec{n}$ , será:

$$R_n(\delta\phi) = 1 + i(\delta\phi_x M_x + \delta\phi_y M_y + \delta\phi_z M_z),$$

$$\boxed{R_n(\delta\phi) = 1 + i\delta\phi \vec{n} \cdot \vec{M}} .$$

É fácil ver que as matrizes  $M_x$  e  $M_y$  são dadas por:

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, temos:

$$[M_x, M_y] = M_x M_y - M_y M_x =$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= i M_z .
\end{aligned}$$

De um modo geral, é fácil ver que:

$$[M_j, M_k] = i \varepsilon_{jkl} M_\ell \quad (j, k, \ell = 1, 2, 3) ,$$

onde  $\varepsilon_{jkl}$  é o **Símbolo de Levi-Civita**, e representam as constantes de estrutura do grupo de rotações.

De um modo geral, tem-se:

$$D(a) = \exp(ia_\lambda X_\lambda),$$

onde  $\lambda = 1, 2, \dots, r$  e  $X_\lambda$  são os geradores do grupo e chamados de representações fundamentais do grupo. Por sua vez,  $D(a)$  é uma **representação geral** do grupo.

### Exercício 3.4.3

- Obtenha as matrizes  $M_x$  e  $M_y$  ;
- Complete a relação de comutação entre  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$ ;

- c) Mostre que  $D(a) = \exp(ia_\lambda X_\lambda)$  são representações de um grupo;
- d) Como  $D(a)$  são matrizes unitárias (demonstre!), então  $X_\lambda$  são matrizes de traço nulo;
- e) Mostre que as matrizes:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

satisfazem à seguinte relação de comutação:

$$[T_j, T_k] = i \epsilon_{jkl} T_l .$$


---

### 3.5 Álgebra de Lie

**Definição 3.5.1** Um **Grupo de Lie** dotado da operação de comutação entre seus geradores infinitesimais é chamado de **Álgebra de Lie**, operação essa que satisfaz às seguintes propriedades:

- a)  $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ ;
- b)  $[(\lambda X_\alpha), X_\beta] = \lambda [X_\alpha, X_\beta], \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- c)  $[X_\alpha, (X_\beta + X_\gamma)] = [X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha, X_\gamma]$ ;
- d)  $[(A + iB), C] = [A, C] + i[B, C]$ , onde  $A, B, C$  são do tipo  $a_\rho X_\rho$ .
-

**Exercício 3.5.1** Mostre que o conjunto de vetores do  $\mathbb{R}^3$  dotado do produto vetorial, forma uma **Álgebra de Lie**.

---

**Definição 3.5.2** Diz-se que:

a) Uma **Álgebra de Lie A** de r-parâmetros é Abelianas, se:

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0, \forall \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, r;$$

b) Uma **Álgebra de Lie B** é uma sub-álgebra de **A**, se:

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p; \gamma = p + 1, p + 2, \dots, r;$$

c) Uma **Álgebra de Lie A** é invariante, se:

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, p; \gamma = p + 1, p + 2, \dots, r;$$

d) Um sub-conjunto de uma **Álgebra de Lie** tem a propriedade de que o comutador de qualquer de seus membros com qualquer membro da Álgebra produz um membro desse sub-conjunto; este, então, é chamado de **ideal I**. Para um **ideal I**, tem-se:

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = C_{\alpha\beta}^{\gamma} X_{\gamma}, \text{ onde:}$$

$$X_{\alpha} \in I; Y_{\beta} \in A.$$

(Se a Álgebra contém membros que não estão no Ideal, então este é chamado de **ideal próprio**.)

e) Uma **Álgebra de Lie A** é denominada **simples** se não existe nenhuma sub-álgebra  $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$  invariante; e **A** é denominada **semi-simples** se não existe nenhuma sub-álgebra  $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$  abeliana invariante. (Uma **Álgebra de Lie Simples** é aquela que não tem Ideais Próprios.)

**Teorema 3.5.1 - Teorema de Casimir.** Se um conjunto de operadores  $\{C_i\}$  comuta com todos os geradores de um grupo, isto é:  $[X_\lambda, C_i] = 0$ , então eles são múltiplos do operador identidade (E), ou seja:  $C_i = c_i E$ . Tais operadores são chamados **operadores de Casimir**.

**Demonstração:**

No Exemplo 3.4.2, vimos que:

$D(a) = \exp (ia_\lambda X_\lambda)$ , então:

$$[D(a), C_i] = [\exp (ia_\lambda X_\lambda), C_i].$$

Assim, expandindo-se a exponencial, usando-se as propriedades do comutador e a hipótese do Teorema 3.5.1 é fácil ver que:

$$[D(a), C_i] = 0 .$$

Então, pelo Teorema 2.2.2, teremos:

$$\boxed{C_i = c_i E}.$$

C.Q.D.

É oportuno observar que o conjunto  $\{C_i\}$  caracteriza a representação irredutível do grupo considerado, isto é, esse conjunto pode variar de uma representação irredutível para uma outra, mas ele permanece fixado para todos os membros de uma dada representação irredutível. Isto permite-nos usar tal conjunto como índices para as representações irredutíveis. O número de **operadores de Casimir** necessários para caracterizar cada representação de um **Grupo de Lie** é dito a **ordem da álgebra**. Em geral, é muito difícil encontrar todos os **operadores de Casimir** para um **Grupo de Lie** arbitrário.

---

**Exemplo 3.5.1** Mostre que  $C = \sum_{\lambda=1}^3 X_{\lambda}^2$  é um **operador de Casimir** para o grupo  $O(3)$ .

---

Segundo o Teorema 3.5.1, um **operador de Casimir** satisfaz à seguinte expressão:

$$[X_{\lambda}, C] = 0$$

Então, é fácil ver que:

$$\left[ X_{\lambda}, \sum_{\lambda=1}^3 X_{\lambda}^2 \right] = 0, \text{ pois: } [X_{\lambda}, X_{\lambda}] = 0 .$$


---

**Exercício 3.5.2** Mostre que:

a)  $C_1 = \sum_{\lambda=1}^3 Y_{\lambda}^2$  e  $C_2 = \sum_{\lambda=1}^3 Z_{\lambda}^2$  são dois **operadores de Casimir** para  $O(4)$ ;

- b)  $T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$ , onde  $T_1 + T_2 + T_3$  foram definidos no Exercício 3.4.3, é um **operador de Casimir**.

### Definição 3.5.3

- a) Seja a seguinte equação de auto-valores:

$$[A, X] = s X,$$

onde  $X$  são geradores infinitesimais de um dado **Grupo de Lie** de  $r$ -parâmetros e  $A$  é uma combinação linear desses geradores. As  $r$  raízes dessa equação de auto-valores são chamadas **raízes da Álgebra de Lie** associada ao grupo. Denota-se  $\Sigma$  ao conjunto dessas raízes.

Vejamos como encontrar essas raízes. Sendo:

$$A = \alpha^\lambda X_\lambda, \text{ e } X = x^\rho X_\rho, \text{ virá:}$$

$$[A, X] = [\alpha^\lambda X_\lambda, x^\rho X_\rho] = s x^\zeta X_\zeta.$$

Pelo Teorema 3.4.1, vimos que:

$$[X_\lambda, X_\rho] = C_{\lambda\rho}^\zeta X_\zeta.$$

Portanto:

$$\alpha^\lambda x^\rho C_{\lambda\rho}^\zeta X_\zeta = s x^\zeta X_\zeta,$$

$$\left( \alpha^\lambda x^\rho C_{\lambda\rho}^\zeta - s x^\zeta \right) X_\zeta = 0.$$

Como  $X_\zeta$  são vetores linearmente independentes, virá:

$$\left( \alpha^\lambda x^\rho C_{\lambda\rho}^\zeta - s x^\zeta \right) = 0.$$

Sendo:

$$x^\zeta = x^\rho \delta_\rho^\zeta,$$

teremos:

$$x^\rho \left( \alpha^\lambda C_{\lambda\rho}^\zeta - s \delta_\rho^\zeta \right) = 0.$$

A equação acima só terá solução diferente da trivial, se:

$$\det \left( \alpha^\lambda C_{\lambda\rho}^\zeta - s \delta_\rho^\zeta \right) = 0,$$

o que mostra que tal equação é uma equação algébrica de  $\mathbf{r}$ -raízes reais ou complexas, degeneradas ou não, nulas ou não. Pode-se demonstrar que se  $\alpha$  é raiz, então  $-\alpha$  também é raiz, mas  $\mathbf{k}\alpha$ , com  $\mathbf{k} \neq \pm 1$ , não é raiz;

b) Dado o conjunto de raízes de uma **Álgebra de Lie**, existe um sub-conjunto delas que gera um sub-espço, portanto tal sub-conjunto é linearmente independente. Esse conjunto é denominado de **raízes simples** e é denotado por  $\pi$ . De um modo geral esses vetores não são ortogonais;

c) Chama-se **grau** (“rank”) de uma **Álgebra de Lie** ao número de raízes simples da mesma, isto é, elas são obtidas quando se faz  $s = 0$  na expressão do item a).

Vejam os como calcular o **grau** (“rank”) de uma **Álgebra de Lie**. Inicialmente, toma-se um operador fixo **A** dado por  $A = \alpha^\lambda X_\lambda$  e, em seguida, procuramos todas as soluções da equação:  $[A, X] = 0$ , com  $X = x^\nu X_\nu$ . Depois, faz-se **A** variar e calcula-se novamente  $[A', X]$  para todos os **X** que são soluções da equação  $[A, X] = 0$ , e mantemos somente os **X** para os quais  $[A', X] = 0$ . Continuamos com esse processo até obter todos os operadores lineares do **Grupo de Lie** associado à álgebra considerada e que sejam mutuamente independentes. Este número será o **grau** (“rank”) procurado.

As raízes simples de uma **Álgebra de Lie** são fundamentais, pois, por intermédio de seus comprimentos e do ângulo formado entre elas, pode-se obter os comprimentos e as direções das demais raízes. Todas as propriedades da álgebra dependem de suas raízes. Em geral, qualquer conjunto de vetores linearmente independentes não se constitui num conjunto de raízes simples.

De um modo geral, uma **Álgebra de Lie** é um espaço vetorial que pode ser dividido em sub-espços vetoriais da seguinte maneira:

$$R = H + \sum_{\alpha \in \Sigma} R^\alpha,$$

onde  $R^\alpha$  são sub-espços unidimensionais correspondentes a cada raiz, e **H** é um sub-espço gerado pelas raízes simples. Os operadores definidos no sub-espço **H** são denotados por  $F_\mu$  e os definidos em  $R^\alpha$  são denotados por  $E_\alpha$ .

**Exemplo 3.5.2** Calcular o **grau** (“rank”) do grupo  $O^+(3)$ .



Seja  $A = \alpha_\mu X_\mu$  e  $X = x_\nu X_\nu$ , então:

$$[A, X] = [\alpha_\mu X_\mu, x_\nu X_\nu] = \alpha_\nu x_\nu [X_\mu, X_\nu].$$

Para o grupo  $O^+(3)$ , tem-se:

$$[X_\mu, X_\nu] = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} X_\lambda.$$

Portanto:

$$[A, X] = \alpha_\mu x_\nu \varepsilon_{\mu\nu\lambda} X_\lambda.$$

Pela Definição 3.5.2.c, para se calcular o **grau** (“rank”) de um grupo, temos que fazer  $[A, X] = 0$ . Assim:

$$\alpha_\mu x_\nu \varepsilon_{\mu\nu\lambda} X_\lambda = 0.$$

Como  $X_\lambda$  são linearmente independentes, então:

$$\alpha_\mu x_\nu \varepsilon_{\mu\nu\lambda} = 0, \text{ com } \mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3.$$

Para  $\lambda = 1$ , virá:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 \varepsilon_{111} + \alpha_1 x_2 \varepsilon_{121} + \alpha_1 x_3 \varepsilon_{131} + \alpha_2 x_1 \varepsilon_{211} + \alpha_2 x_2 \varepsilon_{221} + \\ + \alpha_2 x_3 \varepsilon_{231} + \alpha_3 x_1 \varepsilon_{311} + \alpha_3 x_2 \varepsilon_{321} + \alpha_3 x_3 \varepsilon_{331} = 0. \end{aligned}$$

Agora, usando-se a definição do **símbolo de Levi-Civita**,  $(\varepsilon_{ijk})$  virá:

$$\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2 = 0$$

(I)

Por raciocínio, análogo, é fácil ver que, para  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 3$ , temos, respectivamente:

$$\boxed{-\alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_1 = 0}, \quad (\text{II})$$

$$\boxed{\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 = 0}. \quad (\text{III})$$

A solução deste sistema de três equações (I, II, III), é dada por:

$$\alpha_i = x_i, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Logo:

$$A = X.$$

Como:

$$[X_\mu, X_\nu] = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} X_\lambda,$$

então:

$$[A, X] = [X_\mu, X_\mu] = 0,$$

logo o **grau** (“rank”) de  $O^+$  é UM, pois cada operador formado pela combinação linear dos geradores do grupo, só comuta consigo mesmo.

---

**Exemplo 3.5.3.** Calcular os geradores, a álgebra e o **grau** (“rank”) do grupo  $SU(2)$ .

---

Inicialmente, vamos estudar o grupo  $SU(2)$ . Este, é definido como o conjunto de matrizes complexas  $2 \times 2$ , tal que:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; UU^+ = E; \det U = +1.$$

O grupo  $SU(2)$  é o grupo que deixa invariante a quantidade  $|\mu|^2 + |v|^2$ , onde  $\mu$  e  $v$  são componentes de um vetor complexo a duas dimensões. Assim:

$$\begin{pmatrix} \mu' \\ v' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mu' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mu + bv \\ c\mu + dv \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\mu' = a\mu + bv,$$

$$v' = c\mu + dv.$$

Ora:

$$\begin{aligned} |\mu'|^2 &= (a\mu + bv) (a\mu + bv)^* = \\ &= (a\mu + bv) (a^*\mu^* + b^*v^*) = \\ &= aa^* \mu\mu^* + ab^* \mu v^* + a^*bv\mu^* + bb^*vv^* \rightarrow \end{aligned}$$

$$|\mu'|^2 = |a|^2 |\mu|^2 + |b|^2 |v|^2 + ab^* \mu v^* + ba^* v \mu^*.$$

Analogamente:

$$|v'|^2 = |c|^2 |\mu|^2 + |d|^2 |v|^2 + cd^* \mu v^* + c^*d \mu^* v.$$

Para que tenhamos:

$$|\mu'|^2 + |v'|^2 = |\mu|^2 + |v|^2,$$

é necessário que:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1; |b|^2 + |d|^2 = 1,$$

$$ab^* + cd^* = 0; a^*b + c^*d = 0.$$

Por outro lado, temos:

$$UU^+ = E \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1; |c|^2 + |d|^2 = 1;$$

$$ac^* + bd^* = 0; a^*c + b^*d = 0.$$

Sendo:

$$\det U = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \rightarrow ad - bc = 1.$$

Do conjunto de equações obtidas acima ligando **a, b, c, d** e seus respectivos complexos, é fácil ver que:

$$a = d^*; b = -c^* \quad \text{ou} \quad d = a^*; c = -b^*.$$

Assim:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Agora, determinemos os **geradores de SU(2)**. Eles são em número de três (3), pois:  $n^2 - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ .

Para uma transformação infinitesimal, segundo a Definição 3.3.2, virá:

$$F' = \left( 1 + \sum_{\ell=1}^r X_{\ell} \delta a_{\ell} \right) F,$$

ou seja;

$$\begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = \left( 1 + \sum_{\ell=1}^3 X_{\ell} \delta a_{\ell} \right) \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Sendo:

$$\begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + \delta\mu \\ \nu + \delta\nu \end{pmatrix},$$

vê-se que:

$$\begin{pmatrix} \mu + \delta\mu \\ \nu + \delta\nu \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta a & \delta b \\ -\delta b^* & \delta a^* \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$U = \begin{pmatrix} 1 + \delta a & \delta b \\ -\delta b^* & 1 + \delta a^* \end{pmatrix}.$$

Agora, estamos em condições de determinar os parâmetros infinitesimais  $(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3)$  e os respectivos geradores  $(X_1, X_2, X_3)$ , do grupo em estudo.

Assim, sendo:

$$UU^+ = E,$$

então:

$$\begin{pmatrix} 1 + \delta a & \delta b \\ -\delta b^* & 1 + \delta a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \delta a^* & -\delta b \\ \delta b^* & 1 + \delta a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas infinitésimos de 1ª ordem, virá:

$$\begin{pmatrix} 1 + \delta a + \delta a^* & -\delta b + \delta b \\ -\delta b^* + \delta b^* & 1 + \delta a + \delta a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$1 + \delta a + \delta a^* = 1 \quad \rightarrow \quad \delta a = -\delta a^*.$$

Consideremos:

$$\delta a = \frac{i}{2} \delta a_3, \text{ com } \delta a_3 \equiv \text{real}.$$

Por outro lado, temos:

$$\det U = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 + \delta a & \delta b \\ -\delta b^* & 1 + \delta a^* \end{vmatrix} \approx 1 + \delta a + \delta a^* = 1,$$

o que reproduz o resultado anterior.

Como não existe nenhuma restrição para  $\delta b$ , vamos escolhê-lo com a forma:

$$\delta b = \frac{1}{2} \delta a_2 + \frac{i}{2} \delta a_1, \text{ com } \delta a_2, \delta a_1 \equiv \text{reais}.$$

Então:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ -\delta b^* & 1+\delta a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2} \delta a_3 & \frac{1}{2} \delta a_2 + \frac{i}{2} \delta a_1 \\ -\frac{1}{2} \delta a_2 + \frac{i}{2} \delta a_1 & 1 - \frac{i}{2} \delta a_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \delta a_3 & \delta a_2 + i \delta a_1 \\ \delta a_2 - i \delta a_1 & -i \delta a_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \delta a_3 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \delta a_2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta a_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta a_1 + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta a_2 + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \delta a_3. \end{aligned}$$

Portanto:

$$U = E + i \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \sigma_j \delta a_j,$$

onde  $\{\sigma_j\}$  são as **matrizes de Pauli**, e que são, portanto, os **geradores de SU(2)**.

A álgebra dos geradores do grupo SU(2) é facilmente calculada, pois basta usar a regra de matrizes. Assim:

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Então:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i \sigma_3.$$

Portanto, é fácil ver que:

$$\left[ \frac{1}{2} \sigma_i, \frac{1}{2} \sigma_j \right] = i \varepsilon_{ijk} \left( \frac{1}{2} \sigma_k \right).$$

Vê-se, desse modo, que o grupo  $SU(2)$  tem a mesma álgebra do grupo  $O^+(3)$ , portanto o **grau** (“rank”) de  $SU(2)$  é o mesmo de  $O^+(3)$ , isto é: **UM**.

### Exercício 3.5.3

- Dado o conjunto de equações ligando os elementos de  $SU(2)$ , demonstre que:  $a = d^*$  e  $b = -c^*$ ;
- Complete o cálculo da álgebra do  $SU(2)$ .



**Teorema 3.5.2** Os grupos  $O^+(3)$  e  $SU(2)$  são Homeomórficos. A cada elemento de  $O^+(3)$  corresponde 2 elementos de  $SU(2)$ .

**Demonstração:**

Seja  $\mathbf{M}$  uma matriz Hermitiana de traço nulo e definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \bar{x} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 = x \sigma_1 + y \sigma_2 + z \sigma_3 = \\ &= x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iy \\ iy & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iy \\ iy & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O determinante de  $\mathbf{M}$  é dado por:

$$\det \mathbf{M} = -z^2 - (x-iy)(x+iy) = -z^2 - x^2 - y^2 = -(x^2 + y^2 + z^2).$$

Agora, consideremos uma transformação de similaridade, ou seja:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{U} \mathbf{M} \mathbf{U}^+.$$

Sendo  $\mathbf{U} \mathbf{U}^+ = \mathbf{E}$ , então  $\text{Tr } \mathbf{M}' = \text{Tr } \mathbf{M}$  e  $\det \mathbf{M}' = \det \mathbf{M}$ . Portanto, sendo:

$$M = \bar{x}' \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix},$$

teremos:

$$\det M' = -\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right).$$

Portanto:

$$\det M' = \det M \rightarrow -\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = -\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right),$$

o que significa dizer que o produto escalar  $(\bar{x}, \bar{x}) = x^2 + y^2 + z^2$ , é invariante sob essa transformação de  $SU(2)$ , justamente como o grupo de rotações  $O^+(3)$ .

No Exemplo 3.5.3 vimos que para o grupo  $SU(2)$ , temos:

$$U \cong E + i \sum_{j=1}^3 \delta \beta_j \sigma_j.$$

Então:

$$\begin{aligned} \delta M = M' - M &= U M U^+ - M = \sum_{j=1}^3 \delta x_j \sigma_j = \\ &\cong \left( E + i \sum_{j=1}^3 \delta \beta_j \sigma_j \right) \left( \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j \right) \left( E - i \sum_{k=1}^3 \delta \beta_k \sigma_k \right) - M = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \equiv \left( \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j - i \sum_{j,k=1}^3 x_j \delta\beta_k \sigma_j \sigma_k + i \sum_{\ell,j=1}^3 \delta\beta_\ell \sigma_\ell x_j \sigma_j \right) = \\
& = \left( M - i \sum_{j,k=1}^3 x_j \delta\beta_k \left( \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j \right) \right) - M = \\
& = -i \sum_{j,i=1}^3 x_j \delta\beta_k \left[ \sigma_j, \sigma_k \right].
\end{aligned}$$

Usando o resultado do Exemplo 3.5.3, virá:

$$\delta M = -i \sum_{j,k,\ell=1}^3 i x_j \delta\beta_k \varepsilon_{jkl} \sigma_\ell \rightarrow \delta M = 2 \sum_{j,k,\ell=1}^3 x_j \delta\beta_k \varepsilon_{jkl} \sigma_\ell.$$

Sendo:

$$\delta M = \sum_{\ell=1}^3 \delta x_\ell \sigma_\ell,$$

teremos:

$$\delta x_\ell = 2 \sum_{j,k=1}^3 x_j \delta\beta_k \varepsilon_{jkl}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\delta x_1 \equiv \delta x = 2 \sum_{k=1}^3 \left[ x_1 \delta\beta_k \varepsilon_{1k1} + x_2 \delta\beta_k \varepsilon_{2k1} + x_3 \delta\beta_k \varepsilon_{3k1} \right] = 2 (x_1 \delta\beta_2 \varepsilon_{121} + \\
+ x_1 \delta\beta_3 \varepsilon_{131} + x_2 \delta\beta_1 \varepsilon_{211} + x_2 \delta\beta_3 \varepsilon_{231} + x_3 \delta\beta_1 \varepsilon_{311} + x_3 \delta\beta_2 \varepsilon_{321}).
\end{aligned}$$

Usando-se a definição de  $\varepsilon_{jkl}$ , virá:

$$\delta x_1 \equiv \delta x = 2y\delta\beta_3 - 2z\delta\beta_2.$$

Analogamente, teremos:

$$\delta x_2 \equiv \delta y = -2x\delta\beta_3 + 2z\delta\beta_1,$$

$$\delta x_3 \equiv \delta z = 2x\delta\beta_3 - 2y\delta\beta_1.$$

No Exemplo 3.4.1, vimos que para o grupo  $O^+(3)$ , temos:

$$\delta x = y\delta\alpha_3 - z\delta\alpha_2,$$

$$\delta y = -x\delta\alpha_3 + z\delta\alpha_1,$$

$$\delta z = x\delta\alpha_2 - y\delta\alpha_1, \quad \text{então: } \boxed{\delta\alpha_j = 2\delta\beta_j}.$$

Vê-se, portanto, que o grupo  $SU(2)$  também descreve uma “rotação” como o  $O^+(3)$ . Isto sugere, portanto, que esses dois grupos sejam Homeomórficos. Calculemos então esse Homeomorfismo.

Para uma rotação finita  $\alpha$  em torno do eixo dos  $\mathbf{z}$ , o grupo  $O^+(3)$  é dado por:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 0 < \alpha < 2\pi.$$

Sendo:

$\delta\beta_j = \frac{1}{2}\delta\alpha_j$ , então o elemento correspondente do SU(2)

será:

$$U_z\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \exp(i a_j \sigma_j) = \exp(i a_3 \sigma_3) = \exp\left(i \frac{\alpha}{2} \sigma_3\right) \rightarrow$$

$$U_z(\alpha/2) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}.$$

Sendo:

$$R_z(\alpha + 2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 2\pi) & \text{sen}(\alpha + 2\pi) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha + 2\pi) & \cos(\alpha + 2\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então:

$$R_z(\alpha + 2\pi) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\alpha),$$

e

$$\begin{aligned} U_z\left(\frac{1}{2}(\alpha + 2\pi)\right) &= \begin{pmatrix} e^{i/2(\alpha+2\pi)} & 0 \\ 0 & e^{-i/2(\alpha+2\pi)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} e^{-i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= - \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = -U_z(\alpha).$$

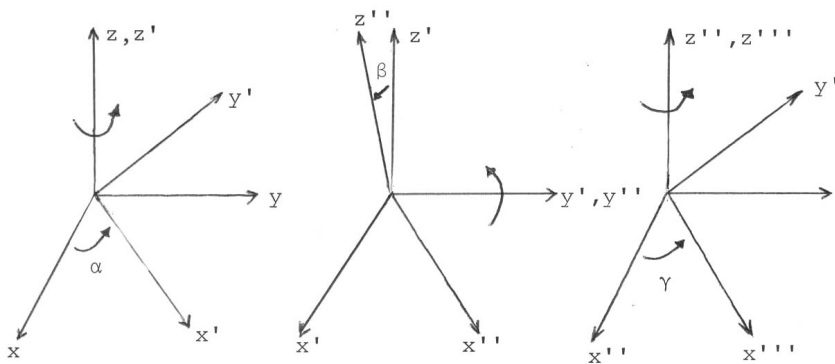
Portanto:

$$\begin{array}{l} +U(\alpha/2) \\ -U(\alpha/2) \end{array} \rightarrow R(\alpha).$$

Logo, o Homeomorfismo entre  $SU(2)$  e o  $O^+(3)$  é de 2 para 1. Assim, conhecidas as representações de  $SU(2)$ , automaticamente teremos as do grupo  $O^+(3)$ . C.Q.D.

**Exemplo 3.5.4** Encontre a representação geral do  $SU(2)$  em termos dos **ângulos de Euler**, tendo em vista o Homeomorfismo entre  $SU(2)$  e  $O^+(3)$ .

Se  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  forem rotações sucessivas, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio em torno dos  $z$ ,  $y'$  e  $z''$ , isto é:



então:

$$R(\alpha \beta \gamma) = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_x(\alpha).$$

Segundo o Teorema 3.5.2, temos:

$$R_z(\gamma) \leftrightarrow U_z(\gamma/2) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, sendo:

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

teremos:

$$R_y(\alpha) \leftrightarrow U_y(\alpha/2) = \exp\left(i \frac{\alpha}{2} \sigma_y\right),$$

e

$$R_x(\alpha) \leftrightarrow U_x(\alpha/2) = \exp\left(i \frac{\alpha}{2} \sigma_x\right).$$

Sendo:

$$U_j(\alpha/2) = \exp\left(i \frac{\alpha}{2} \sigma_j\right),$$

então:

$$\begin{aligned}
 U_j(\alpha/2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i \frac{\alpha}{2} \sigma_j\right)^n}{n!} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i \frac{\alpha}{2} \sigma_j\right)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i \frac{\alpha}{2} \sigma_j\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} .
 \end{aligned}$$

Sendo:

$$(\sigma_j)^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad (\sigma_j)^{2n+1} = \sigma_j.$$

E, ainda:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}; \quad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

teremos:

$$U_j\left(\frac{\alpha}{2}\right) = I \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sigma_j \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Portanto:

$$U_x\left(\frac{\alpha}{2}\right) = I \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sigma_x \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) =$$



$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$U_x\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & i \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ i \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

De modo análogo, teremos:

$$U_y\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$U_z\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}.$$

Assim, para o caso de nosso exemplo, teremos:

$$R(\alpha \beta \gamma) = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_x(\alpha) \leftrightarrow U_z(\gamma/2) U_y(\beta/2) U_x(\alpha/2).$$

$$R(\alpha \beta \gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & \text{sen}(\beta/2) \\ -\text{sen}(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \cos(\beta/2) & e^{-i\alpha/2} \sin(\beta/2) \\ -e^{i\alpha/2} \sin(\beta/2) & e^{-i\alpha/2} \cos(\beta/2) \end{pmatrix},$$

$R(\alpha \beta \gamma) \leftrightarrow$

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}} \cos(\beta/2) & e^{i\frac{(\gamma-\alpha)}{2}} \sin(\beta/2) \\ -e^{i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}} \sin(\beta/2) & e^{-i\frac{(\gamma+\alpha)}{2}} \cos(\beta/2) \end{pmatrix}.$$

**Exercício 3.5.4** Demonstre que:

- a)  $\exp\left(i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\sin(\alpha/2);$
- b)  $(\sigma_j)^{2n} = I; (\sigma_j)^{2n+1} = \sigma_j;$
- c)  $R(\alpha \beta \gamma) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha).$

### 3.6 Teoremas Gerais sobre as Álgebras de Lie

A seguir, enunciaremos apenas alguns teoremas gerais sobre as raízes das **Álgebras de Lie**, sem contudo, apresentarmos suas demonstrações. No entanto, daremos alguns exemplos para fixarmos o conteúdo dos mesmos.

**Teorema 3.6.1** Um conjunto de vetores linearmente independentes é um conjunto de raízes simples de uma **Álgebra de Lie**, se o produto escalar de quaisquer dois daqueles vetores é zero, ou é igual a menos a metade de um número inteiro do comprimento de um dos vetores, isto é:

$H : \alpha \text{ e } \beta \text{ são raízes simples de uma álgebra } \mathbf{A}$

$$T : (\alpha, \beta) = -N \frac{(\alpha, \alpha)}{2} = -\frac{M}{2} (\beta, \beta),$$

onde  $N, M$  são inteiros positivos ou nulos.

-----  
**Exemplo 3.6.1** Um conjunto de vetores se constituem nas raízes simples de uma **Álgebra de Lie**, se os ângulos entre eles forem de  $90^\circ$  ou  $120^\circ$  ou  $135^\circ$  ou  $150^\circ$ .  
 -----

Seja:

$$(\alpha, \alpha) = \lambda ; (\beta, \beta) = c\lambda,$$

onde  $\lambda$  e  $c$  são números reais e  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes simples de uma dada **Álgebra de Lie** (cf. Definição 3.5.3). Então:

$$(\alpha, \beta) = \sqrt{c} \lambda \cos \theta .$$

Segundo o Teorema 3.6.1, virá:

$$(\alpha, \beta) = \sqrt{c} \lambda \cos \theta = -\frac{N}{2} \lambda = -\frac{cM}{2} \lambda .$$

Sendo:

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 ,$$

e como

$$\cos \theta = 1, \text{ se } = \beta,$$

$$\cos \theta = -1, \text{ se } \alpha = -\beta ,$$

e já que  $k\alpha$  ( $k \neq \pm 1$ ) não é raiz da álgebra considerada (vide Definição 3.5.3a), então:

$$-1 \leq -\frac{N}{2\sqrt{c}} \leq 1,$$

$$-1 \leq -\frac{M\sqrt{c}}{2} \leq 1,$$

ou

$$\left| \frac{N}{\sqrt{c}} \right| \leq 2 ; \left| M\sqrt{c} \right| \leq 2.$$

Então:

$$|MN| \leq 4.$$

Excluindo-se o caso em que  $\alpha = \pm \beta$ , retira-se a condição de igualdade da desigualdade acima, então, teremos:

$$|MN| < 4.$$

Portanto:

a) Se  $M = 1$ , então:  $N = 1, 2, 3$ ;

b) Se  $M = 2$ , então:  $N = 1$ ;

c) Se  $M = 3$ , então:  $N = 1$ .

Sendo:

$$(\alpha, \beta) = \sqrt{c} \lambda \cos \theta = -\frac{N}{2} \lambda = \frac{Mc\lambda}{2},$$

então:  $\lambda = \frac{N}{M}$ . Assim, teremos:

$$\cos \theta = -\frac{N}{2\sqrt{c}} = -\frac{1}{2} N \frac{1}{\sqrt{N/M}} = -\frac{1}{2} \sqrt{MN},$$

e:

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, \text{ ou } -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

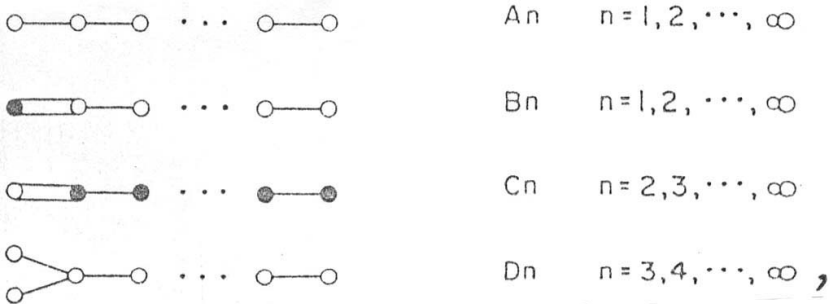
ou seja:

$$\theta = 120^\circ \text{ ou } 135^\circ \text{ ou } 150^\circ.$$

Por outro lado, se o produto escalar é zero, isto é:

$$N = M = 0, \text{ então } \cos\theta = 0 \rightarrow \theta = 90^\circ.$$

Em vista do resultado do Exemplo 3.6.1 e considerando ainda o Teorema 3.6.1, as **Álgebras de Lie** têm a seguinte classificação, cujos diagramas são devidos a Jan Arnoldus Schouten (Rowlatt, 1966). Assim:



onde o círculo branco ( $\circ$ ) representa uma raiz simples longa e o círculo achuriado ( $\bullet$ ), uma raiz curta. O ângulo entre as raízes é representado por uma linha simples ( $120^\circ$ ), ou por uma linha dupla ( $135^\circ$ ), ou por uma linha tripla ( $150^\circ$ ). Quando os círculos não são ligados, o ângulo entre eles é de  $90^\circ$ .

As álgebras  $A_n$  correspondem aos grupos  $SU(n+1)$ ; as álgebras  $B_n$  correspondem aos grupos  $\mathfrak{O}(2n+1)$ ; as álgebras  $D_n$  correspondem aos grupos  $\mathfrak{O}(2n)$ ; por fim, as álgebras  $C_n$  são chamadas de **simpléticas**, e correspondem aos grupos  $U(2n)$ .

**Teorema 3.6.2** Se  $\alpha$  é uma raiz simples de uma **Álgebra de Lie**, então  $\beta + \alpha$  ( $\beta \in \Sigma_+$ ) também será uma raiz ( $\in \Sigma_+$ ), se, e somente se:

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} - P(\beta, \alpha) < 0,$$

onde  $P(\beta, \alpha)$  é um inteiro definido por:

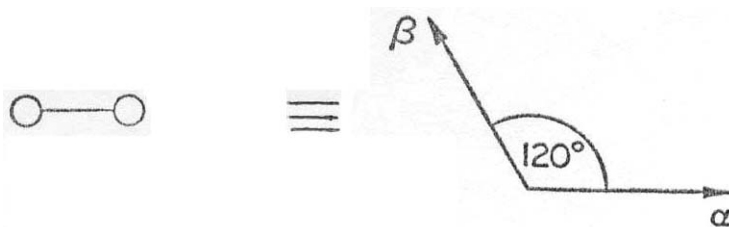
$$[\beta - P(\beta, \alpha)\alpha] \in \Sigma_+,$$

e

$$(\beta - [P(\beta, \alpha) + 1]\alpha) \notin \Sigma_+.$$

**Exemplo 3.6.2** Dadas duas raízes simples da álgebra  $A_2 \equiv SU(3)$ , encontre as demais raízes da mesma.

A álgebra  $A_2 \equiv SU(3)$  tem o seguinte **Diagrama de Schouten**:



Sendo:

$$(\alpha, \alpha) = (\alpha, \beta) = \lambda, \text{ então:}$$

$$(\alpha, \beta) = \lambda \cos \theta = -\frac{\lambda}{2}.$$

Agora, vejamos se  $\alpha + \beta \in \Sigma_+$ . Segundo o Teorema 3.6.2, temos:

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} - P(\beta, \alpha) < 0, \text{ com } [\beta - P(\beta, \alpha)\alpha] \in \Sigma_+.$$

Como:

$$\beta - \alpha \notin \Sigma_+, \text{ então } P(\beta, \alpha) = 0.$$

Logo, devemos ter:

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} < 0.$$

Por outro lado, sendo  $(\beta, \alpha) = -\frac{\lambda}{2}$  e  $(\alpha, \alpha) = \lambda$ , virá:

$$\frac{2\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda} = -1 < 0.$$

Portanto  $\alpha + \beta \in \Sigma_+$

Vejamos, agora, se  $\alpha + 2\beta \in \Sigma_+$ . Para que isto ocorra é necessário que:

$$\frac{2(\alpha + \beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} - P(\alpha + \beta, \beta) < 0.$$

Ora:

$$\alpha + \beta - \beta = \alpha \in \Sigma_+$$

Então:

$$\alpha + \beta - 2\beta = \alpha - \beta \notin \Sigma_{i+}.$$

Ora, sendo:

$$[\beta - P(\alpha + \beta, \beta)(\alpha + \beta)] \in \Sigma_+,$$

e  $P(\alpha + \beta, \beta) = 1$ , então:

$$\frac{2(\alpha + \beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} - 1 < 0.$$

Por outro lado, temos:

$$2(\alpha + \beta, \beta) = 2(\alpha, \beta) + 2(\beta, \beta) = -2x\frac{\lambda}{2} + 2\lambda = -\lambda + 2\lambda = \lambda$$

.

Assim:

$$\frac{2(\alpha + \beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} - 1 = \frac{\lambda}{\lambda} - 1 = 0 \Leftrightarrow 0.$$

Então:

$$\alpha + 2\beta \notin \Sigma_+.$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$2\alpha + \beta \notin \Sigma_+.$$

Assim:

$$\Sigma_+ \equiv (\alpha, \beta, \alpha + \beta),$$

$$\Sigma \equiv [\alpha, -\alpha, \beta, -\beta, (\alpha + \beta), -(\alpha, \beta)].$$

Por fim, calculemos o ângulo entre  $\alpha$  e  $(\alpha + \beta)$ .

Portanto:

$$(\alpha, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + (\alpha, \beta) = \lambda - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}.$$

Por outro lado, temos:



$$(\alpha, \alpha + \beta) = \sqrt{(\alpha, \alpha)} \cdot \sqrt{(\alpha + \beta, \alpha + \beta)} \cdot \cos \theta = \frac{\lambda}{2}.$$

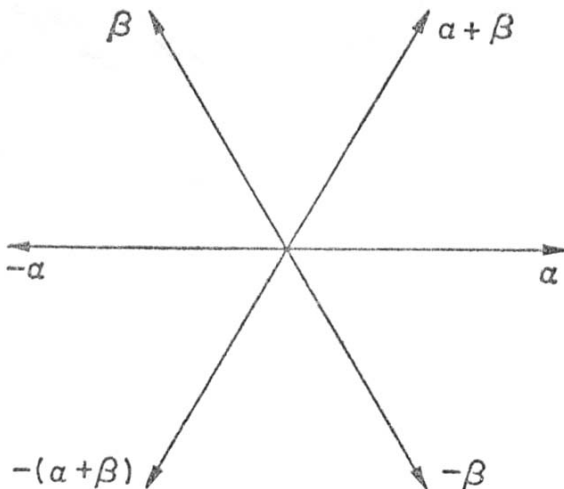
Sendo:

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta), (\alpha + \beta)] &= [\mu, (\alpha + \beta)] = \\ &= (\mu, \alpha) + (\mu, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha) + (\alpha + \beta, \beta) = \\ &= (\alpha, \alpha) + (\beta, \alpha) + (\alpha, \beta) + (\beta, \beta) = \\ &= \lambda - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + \lambda = 2\lambda - \lambda = \lambda. \end{aligned}$$

$$(\alpha, \alpha + \beta) = \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda} \cos \theta = \lambda \cos \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\theta = 60^\circ}.$$

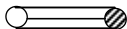
Em resumo, temos:



---

**Exercício 3.6.1**

- a) Encontre as raízes da álgebra  $A_1 \equiv \text{SU}(2)$ ;
- b) Encontre as raízes da álgebra  $G_2$  cujo **Diagrama de Schouten** é:




---

**Teorema 3.6.3** As relações de comutação entre os operadores que geram uma **Álgebra de Lie** simples, satisfazem às seguintes expressões:

$$\text{a) } [E_\alpha, E_\beta]_{\alpha, \beta \in \Sigma} = \begin{cases} N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta} & , \alpha+\beta \in \Sigma \\ 0 & \alpha+\beta \notin \Sigma \end{cases} ;$$

$$\text{b) } [E_\rho, E_{-\rho}] = F_\rho = \sum_{\mu \in \pi} a_\rho^\mu F_\mu ;$$

$$\text{c) } [F_\mu, F_\nu] = 0, \mu, \nu \in \pi ;$$

$$\text{d) } [F_\mu, E_\nu] = -(\mu, \nu) E_\nu ,$$

onde:

$$N_{\alpha,\beta}^2 = \frac{[P(\alpha,\beta)+1]}{2} Q(\alpha,\beta) (\beta,\beta),$$

$$N_{\alpha,\beta}^2 = N_{\beta,\alpha}^2 = N_{-\beta,-\alpha}^2 = \dots\dots\dots,$$

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha} = N_{-\alpha,-\beta} = -N_{-\beta,-\alpha},$$

e

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = P(\alpha,\beta) - Q(\alpha,\beta).$$

Sendo:

$$[\alpha - P(\alpha,\beta) \beta] \in \Sigma \quad \text{e} \quad \{\alpha - [P(\alpha,\beta) + 1] \beta\} \notin \Sigma,$$

$$[\alpha + Q(\alpha,\beta) \beta] \in \Sigma \quad \text{e} \quad \{\alpha + [Q(\alpha,\beta) + 1] \beta\} \notin \Sigma.$$

**Exercício 3.6.2** Usando o resultado do Teorema 3.6.3,

a) Mostre que se:

$$U_\alpha = E_\alpha + E_{-\alpha}, \quad \alpha \in \Sigma,$$

$$V_\alpha = i(E_\alpha - E_{-\alpha}), \quad \alpha \in \Sigma,$$

$$H_\rho = i F_\rho, \quad \rho \in \Gamma,$$

onde  $\Gamma$  é um conjunto de vetores ortogonais tais que:

$$\alpha = \sum_{\sigma \in \Gamma} \frac{(\alpha, \sigma)}{(\sigma, \sigma)} \sigma, \quad \alpha \in \Sigma; \quad (\sigma, \rho) = 0, \quad \forall \rho, \sigma \in \Gamma.$$

Então:

$$[U_\alpha, U_\beta] = N_{\alpha,\beta} U_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta} U_{\alpha-\beta},$$

$$[U_\alpha, V_\beta] = N_{\alpha,\beta} V_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,-\beta} V_{\alpha-\beta},$$

$$[V_\alpha, V_\beta] = -N_{\alpha,\beta} U_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta} U_{\alpha-\beta},$$

$$[U_\alpha, V_\alpha] = -2 \sum_{\rho \in \Gamma} a_\alpha^\rho H_\rho,$$

$$[H_\rho, U_\alpha] = -(\rho, \alpha) V_\alpha,$$

$$[H_\rho, V_\alpha] = (\rho, \alpha) U_\alpha,$$

$$[H_\sigma, H_\rho] = 0,$$

onde:

$$\alpha = \sum_{\rho \in \Gamma} a_\alpha^\rho \rho; \quad a_\alpha^\rho = \frac{(\alpha, \beta)}{(\rho, \rho)}; \quad (\rho, \rho) = 2;$$

b) Encontre as constantes de estrutura dos grupos  $B_1$  e  $A_2$ .

**Definição 3.6.1** Dado um grupo  $G$  com  $r$  geradores (dentre eles  $P$  que comutam entre si), chamam-se **vetores pesos** do grupo dado ao conjunto de **p-uplas** formadas pelos autovalores dos geradores que comutam. Esses vetores pesos são representados em um espaço  $R^P$ , e é chamado de **diagrama de pesos**. Cada ponto desse espaço representa um auto-vetor dos geradores que comutam.

**Exemplo 3.6.3** Dentre as oito matrizes geradoras do grupo  $SU(3)$ , as duas que comutam são representadas por:

$$G_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } G_8 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encontrar o diagrama de pesos correspondentes.

---

É fácil ver que os vetores colunas:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

são auto-estados de  $G_3$  e  $G_8$ , pois:

$$G_3 u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} u_1,$$

$$G_8 u_1 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} u_1.$$

Assim, o **vetor peso** correspondente ao auto-vetor  $u_1$ , será:

$$\left( +\frac{1}{2}, +\frac{1}{3} \right).$$

Para o auto-vetor  $u_2$ , temos:

$$G_3 u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} u_2,$$

$$G_8 u_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} u_2.$$

Portanto, o **vetor peso** de  $u_2$  será:

$$\left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right).$$

Para o auto-vetor  $u_3$ , temos:

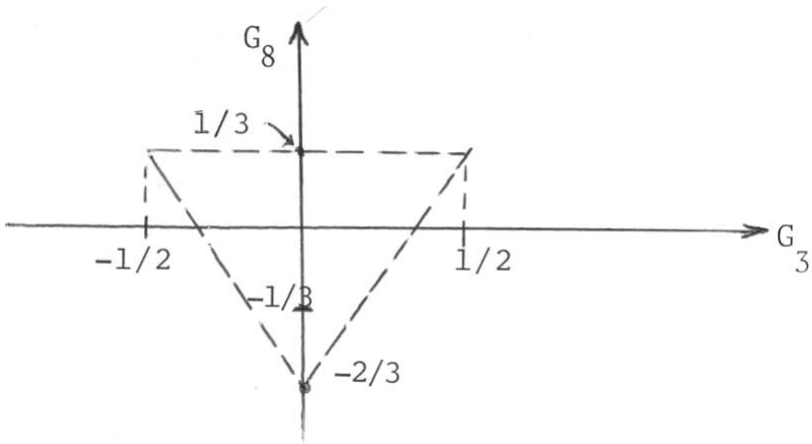
$$G_3 u_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 u_3,$$

$$G_8 u_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} u_3.$$

Portanto, o **vetor peso** de  $u_3$ , será:

$$\left( 0, -\frac{2}{3} \right).$$

O **diagrama de pesos** correspondente será:



**Teorema 3.6.4** A dimensão de uma representação irreduzível é dada por:

$$N = \prod_{\alpha \in \pi} (\lambda_{\alpha} + 1) \prod_{\substack{\beta \in \Sigma^+ \\ \beta \neq \pi}} \left[ \frac{(\lambda, \beta)}{(g, \beta)} + 1 \right],$$

onde:

$$\lambda_{\alpha} = 2 \frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}; \quad g = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha.$$

**Exercício 3.6.3** Mostre que o número de representações do grupo  $SU(3)$  é dado por:

$$N = \frac{1}{2} (n+1)(m+1)(n+m+2); \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots .$$

# CAPÍTULO 4

## Teoria do Momento Angular<sup>1</sup>

### 4.1 Representações Irredutíveis do Grupo SU(2)

#### 4.1.1 Representações Spinoriais

O Grupo SU(2) é dado (Cf. 3.2) por:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \text{ com } aa^* + bb^* = 1.$$

Tal grupo descreve uma transformação de um vetor coluna complexo de duas componentes (**spinor**), ou seja:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ -b^*u + a^*v \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$u' = a u + b v \equiv U_{11} u + U_{12} v, \quad (1)$$

$$v' = -b^* u + a^* v \equiv U_{21} u + U_{22} v. \quad (2)$$

Para estudar as representações irredutíveis de SU (2) em um espaço **(n+1)** dimensional, necessita-se de um conjunto de **(n+1)** funções (vetores) bases linearmente independentes, ou seja:

$$u^n, u^{n-1} v, u^{n-2} v^2, \dots, u v^{n-1}, v^n.$$

---

<sup>1</sup> Esta parte deste Capítulo foi ministrado pelo professor José Maria Filardo Bassalo no *Curso de Extensão*, realizado em 1985, na UFPA, sobre **Teoria de Grupos**.



Para concordar com os resultados da Mecânica Quântica, Wigner escolheu  $n = 2j \left( j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \right)$  e definiu a seguinte função monomial:

$$f_m^j(u; v) = \frac{u^{j+m} v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}, \text{ onde } m = j, j-1, \dots, 0, \dots, -j.$$

Assim, para um valor fixado de  $j$ , há  $(2j+1)$  polinômios linearmente independentes. Agora, tomemos a ação de  $U$  sobre  $f_m^j(u; v)$ , isto é:

$$\begin{aligned} f_m^j(u'; v') &= U f_m^j(u; v) = \sum_{m'=-j}^j U_{mm'} f_{m'}^j(u; v) = \\ &= \frac{(au + bv)^{j+m} (-b^*u + a^*v)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}, \quad [\text{usando-se (1) e (2)}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Sendo:

$$(au + bv)^{j+m} = \sum_{k=0}^{j+m} \frac{(j+m)!}{k!(j+m-k)!} a^{j+m-k} u^{j+m-k} b^k v^k,$$

e

$$(-b^*u + a^*v)^{j-m} = \sum_{\ell=0}^{j-m} \frac{(j-m)!}{\ell!(j-m-\ell)!} (-1)^{j-m-\ell} (b^*)^{j+m-\ell} u^{j-m-\ell} (a^*)^\ell v^\ell.$$

Então:

$$Uf_m^f(u;v) = \sum_{k=0}^{j+m} \sum_{\ell=0}^{j-m} (-1)^{j-m-\ell} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!\ell!(j+m-k)!(j-m-\ell)!} \times \\ \times a^{j+m-k} (a^*)^\ell (b^*)^{j-m-\ell} b^k u^{2j-k-\ell} v^{k+\ell}.$$

Fazendo-se:  $j - k - \ell = m'$ , virá:  $u^{2j-k-\ell} v^{k+\ell} = u^{j+m'} v^{j-m'}$ ,

então:

$$Uf_m^f(u;v) = \sum_{k=0}^{j+m} \sum_{m'=-j}^j (-1)^{m'-m+k} \cdot \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!} \times \\ \times a^{j+m-k} (a^*)^{j-m'-k} (b^*)^{k+m'-m} b^k \frac{u^{j+m'} v^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}.$$

Para o índice  $\ell$ , temos:

$$m' = j - k - \ell.$$

Se  $k = 0$  e  $\ell = 0$ , então:  $m' = j$ .

Se  $k = j + m$  e  $\ell = j - m$ , então:

$$m' = j - j - m - j + m = -j.$$

Portanto:

$$Uf_m^j(u;v) = \sum_{k=0}^{j+m} \sum_{m'=-j}^j (-1)^{m'-m+k} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k+m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!} \times \\ \times a^{j+m-k} (a^*)^{j-m'-k} (b^*)^{k+m'-m} b^k f_{m'}^j(u;v).$$

Usando-se a expressão (3), virá:

$$U_{mm'} = \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^{m'+k-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!} \times \quad (4)$$

$$\times a^{j+m-k} (a^*)^{j-m'+k} b^k (b^*)^{k+m'-m}$$

Na expressão (4) acima, o índice  $k$  varia de  $0$  até  $j+m$ . Porém, como  $(-n)! = \pm\infty$  ( $n=1,2,\dots$ ) então o  $U_{mm'}$  se anulará toda vez que o expoente de  $a$ ,  $a^*$  ou de  $b^*$ , atingir o valor negativo. É importante ainda observar que como  $m$  e  $m'$  variam de  $-j$  até  $+j$  em passos inteiros, então  $U_{mm'}$  é uma matriz  $(2j+1)(2j+1)$ .

---

**Exemplo 4.1.1.1** Encontrar a forma da matriz  $U_{mm'}$  para  $j = 1/2$ .

---

$$\text{Se } j = 1/2, \text{ então: } m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \text{ e } m' = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

Portanto:

$$U = \begin{matrix} m = 1/2 \rightarrow & \left( \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right) \\ m = -1/2 \rightarrow & \end{matrix}$$

Assim [lembrando que  $(-1)! = \pm\infty$  e  $0! = 1$ ], virá:

$$A = U_{1/2, 1/2} = \sum_{k=0}^1 (-1)^k \frac{\sqrt{1!0!1!0!}}{k!(-k)!(1-k)!k!} a^{1-k} (a^*)^k b^k (b^*)^k = \mathbf{a},$$

$$B = U_{1/2, -1/2} = \sum_{k=0}^1 (-1)^{-1+k} \frac{\sqrt{1!0!0!1!}}{k!(1-k)!(1-k)!(k-1)!} a^{1-k} (a^*)^{1+k} b_k \times$$

$$\times (b^*)^{-1+k} = \mathbf{b},$$

$$C = U_{-1/2, 1/2} = \sum_{k=0}^0 (-1)^{1+k} \frac{\sqrt{0!1!1!0!}}{k!(-k)!(-k)!(k+1)!} a^{-k} (a^*)^k b_k \times$$

$$\times (b^*)^{k+1} = \mathbf{b}^*,$$

$$D = U_{-1/2, -1/2} = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \frac{\sqrt{0!1!0!1!}}{k!(1-k)!(-k)!k!} a^{-k} (a^*)^{1+k} b_k \times$$

$$\times (b^*)^k = \mathbf{a}^*.$$

Portanto:

$$U_{m,m'} \equiv U_{1/2,1/2} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ -\mathbf{b}^* & \mathbf{a}^* \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 4.1.1.2** Mostrar que a matriz  $U_{mm'}$  é unitária.

Vamos a partir de:

$$A = \sum_{m=-j}^j f_m^{*j}(u', v') f_m^j(u; v) = \sum_{m=-j}^j \frac{(u^*)^{j+m} (v^*)^{j-m} (m')^{j+m} (u')^{j+m} (v')^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m)!(j-m)!}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=-j}^j \frac{(u' * u')^{j+m} (v' * v')^{j-m}}{(j+m)!(j-m)!} = \sum_{m=-j}^j \frac{[|u'|^2]^{j+m} [ |v'|^2 ]^{j-m}}{(j+m)!(j-m)!} = \\
&= \sum_{m=-j}^j \frac{[|au+bv|^2]^{j+m} [|-b*a+a*v|^2]^{j-m}}{(j+m)!(j-m)!}.
\end{aligned}$$

Agora, façamos:  $j+m = s$ . Então:

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{s=0}^{2j} \frac{[|au+bv|^2]^s [|-b*a+a*v|^2]^{2j-s}}{s! (2j-s)!} \times \frac{(2j)!}{(2j)!} = \\
&= \sum_{s=0}^{2j} \frac{[|u'|^2]^s [ |v'|^2 ]^{2j-s}}{s! (2j-s)!}.
\end{aligned}$$

Sendo:

$$\left[ |u'|^2 + |v'|^2 \right]^{2j} = \sum_{s=0}^{2j} \frac{(2j)!}{s!(2j-s)!} \times [ |u'|^2 ]^s [ |v'|^2 ]^{2j-s}.$$

Então:

$$A = \frac{[ |u'|^2 + |v'|^2 ]^{2j}}{(2j)!}.$$

Porém, para o SU (2) temos:  $|u'|^2 + |v'|^2 = |u|^2 + |v|^2$ , então:

$$A = \frac{\left[|u|^2 + |v|^2\right]^{2j}}{(2j)!} = \frac{\left[|u|^2 + |v|^2\right]^{2j}}{(2j)!} = \sum_{s=0}^{2j} \frac{(2j)! \left[|u|^2\right]^s \left[|v|^2\right]^{2j-s}}{(2j)! s! (2j-s)!}.$$

Fazendo:  $j + m = s$ , virá:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{m=-j}^j \frac{\left[|u|^2\right]^{j+m} \left[|v|^2\right]^{j-m}}{(j+m)! (j-m)!} = \sum_{m=-j}^j \frac{\left[|uu^*|\right]^{j+m} \left[|vv^*|\right]^{j-m}}{(j+m)! (j-m)!} = \\ &= \sum_{m=-j}^j \frac{u^{j+m} v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} \cdot \frac{(u^*)^{j+m} (v^*)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} = \sum_{m=-j}^j f_m^{*j}(u;v) f_m^j(u;v). \end{aligned}$$

Ora, sendo:

$$U f_m^j(u, v) = f_m^j(u', v') = \sum_{m'=-j}^j U_{mm'} f_{m'}^j(u, v),$$

então:

$$\sum_{m'=-j}^j f_m^{*j}(u', v') f_m^j(u, v) = \sum_{m'=-j}^j f_m^{*j}(u;v) f_m^j(u;v),$$

e

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-j}^j \left( \sum_{m'=-j}^j U_{mm'}^* f_{m'}^{*j}(u;v) \right) \left( \sum_{m''=-j}^j U_{mm''} f_{m''}^j(u;v) \right) = \\ &= \sum_{m=-j}^j f_m^{*j}(u;v) f_m^j(u;v), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \sum_{m'=-j}^j \left( \sum_{m=-j}^j \sum_{m''=-j}^j U_{mm'}^* U_{mm''}^* \right) \sum_{m''=-j}^j f_m^{*j}(u;v) f_{m''}^j(u;v) = \\ & = \sum_{m=-j}^j f_m^{*j}(u;v) f_m^j(u;v) . \end{aligned}$$

Se  $U$  for unitária, isto é:

$$U^+U = I \rightarrow \sum_{m=-j}^j U_{mm'}^* U_{mm''}^* = \delta_{m'm''} ,$$

então:

$$\begin{aligned} & \sum_{m'=-j}^j \sum_{m''=-j}^j \delta_{m'm''} f_m^{*j}(u;v) f_{m''}^j(u;v) = \\ & = \sum_{m''=-j}^j f_m^{*j}(u;v) f_{m''}^j(u;v) = \sum_{m=-j}^j f_m^{*j}(u;v) f_m^j(u;v) . \end{aligned}$$

**Exercício 4.1.1** Demonstre que a matriz  $U_{mm'}$  é uma representação de  $SU(2)$ .

### 4.1.2 Representação por Matrizes Rotação.

A representação geral do  $SU(2)$  em termos dos ângulos de Euler é dada por (Cf. Exemplo 3.5.4)

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) & e^{i(\alpha-\gamma)/2} \text{sen}(\beta/2) \\ -e^{i(\alpha-\gamma)/2} \text{sen}(\beta/2) & e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) \end{pmatrix} .$$

Portanto:

$$a = e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) \quad e \quad b = e^{i(\alpha-\gamma)/2} \text{sen}(\beta/2),$$

então:

$$\begin{aligned} U_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) &= \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^{m'+k-m} \cdot \frac{\sqrt{(j+m)! (j-m)! (j+m')! (j-m')!}}{k! (j-m'-k)! (j+m-k)! (m'-m+k)!} \times \\ &\times \left[ e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) \right]^{j+m-k} \left[ e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) \right]^{j-m'-k} \times \\ &\times \left[ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \text{sen}(\beta/2) \right]^k \left[ e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \cdot \text{sen}(\beta/2) \right]^{k+m'-m}. \end{aligned}$$

Sendo:

$$e^{i\frac{\gamma}{2}(j+m-k-j+m'+k+k-k-m'+m)} = e^{i\gamma m},$$

$$e^{i\frac{\alpha}{2}(j+m-k-j+m'+k-k+k+m'-m)} = e^{im'\alpha},$$

$$\left[ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]^{j+m-k+j-m'-k} = \left[ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]^{2j+m-m'-2k},$$

e

$$\left[ \text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]^{k+k+m'-m} = \left[ \text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]^{2k+m'-m},$$

teremos:



$$U_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^k \cdot \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!} \times \quad (7)$$

$$\times e^{im\gamma} [\cos(\beta/2)]^{2j+m-m'-2k} [-\sin(\beta/2)]^{m'-m+2k} e^{im'\alpha}$$

pois:

$$(-1)^{m'-m} = (-1)^{m'-m+2k} .$$

Em Mecânica Quântica é costume usar-se a seguinte matriz:

$$D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma) = U_{mm'}^*(\alpha, \beta, \gamma) \equiv e^{-im\gamma} d_{m'm}^j(\beta) e^{-im'\alpha}, \quad (8)$$

onde:

$$d_{m'm}^j(\beta) = \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^k \cdot \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!} \times \quad (9)$$

$$\times [\cos(\beta/2)]^{2j+m-m'-2k} [-\sin(\beta/2)]^{m'-m+2k}$$

**Teorema 4.1.2** As matrizes rotação  $D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$  são representações irredutíveis.

**Demonstração:**

Seja uma matriz A independente de  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , tal que:

$$(A D^j)_{mm'} = (D^j A)_{mm'}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma$$

ou

$$\sum_k A_{mk} D_{km'}^j = \sum_k D_{mk}^j A_{km'} .$$

Usando-se a expressão (8), virá:

$$\sum_k A_{mk} e^{-im'\gamma} d_{km}^j e^{-ik\alpha} = \sum_k e^{-ik\gamma} d_{mk}^j e^{-im\alpha} A_{km'} . \quad (10)$$

Inicialmente, vejamos quanto vale  $d_{km'}^j(\beta)$ . Usando-se a expressão (9), virá:

$$d_{km'}^j(\beta) = \frac{\sqrt{(j+k)!(j-k)!(j+m')!(j-m')!}}{0!(j-k)!(j+m)!(k-m')!} \times [\cos(\beta/2)]^{2j+m'-k} \times$$

$$\times [-\text{sen}(\beta/2)]^{k-m'} + \sum_{s \neq 0} \frac{j+m'(-1)^s \sqrt{(j+k)!(j-k)!(j+m')!(j-m')!}}{s!(j-k-s)!(j+k-s)!(k-m'+s)!} \times$$

$$\times [\cos(\beta/2)]^{2j+m'-k-2s} [-\text{sen}(\beta/2)]^{k-m'+2s} .$$

Para  $\beta = 0$ , virá:

$$d_{km'}^j(0) = \frac{\sqrt{(j+k)!(j-k)!(j+m')!(j-m')!}}{(j-k)!(j+k)!(k-m')!} \times (\cos 0^0)^{2j+m'-k} \times$$

$$\times (-\text{sen} 0^0)^{k-m'} .$$

Agora, se  $k \neq m'$ , então:

$$d_{km'}^j(0) = 0 .$$

Se  $k = m'$ , teremos:

$$d_{kk}^j(0) = \frac{\sqrt{(j+k)!(j-k)!(j+k)!(j-k)!}}{(j-k)!(j+k)!(k-k)!} (1)^{2j} (0)^0 = 1 .$$

Portanto:

$$d_{km'}^j(0) = \delta_{km'} .$$

Fazendo-se  $\beta = \gamma = 0$  na equação (10), virá:

$$\sum_k A_{mk} \delta_{km'} e^{-ik\alpha} = \sum_k \delta_{mk} e^{-im\alpha} A_{km'} ,$$

$$A_{mm'} e^{-im'\alpha} = e^{-im\alpha} A_{mm'} ,$$

ou:

$$e^{-im'\alpha} = e^{-im\alpha} ,$$

igualdade essa que só subsistirá se  $m = m'$ , o que indica, portanto que  $A_{mm'}$  é diagonal!

Agora, retomemos a expressão (10) e façamos  $\alpha = \gamma = 0$ , então:

$$\sum_k A_{mk} d_{km'}^j(\beta) = \sum_k d_{km}^j(\beta) A_{mk'} .$$

Quando  $k = m$  no 1º membro, e  $k = m'$  no 2º membro da expressão acima, teremos:

$$A_{mm} d_{mm'}^j(\beta) = d_{mm'}^j(\beta) A_{m'm'} .$$

Por fim, tomando-se  $m' = j$ , virá:

$$A_{mm} d_{mj}^j(\beta) = d_{mj}^j(\beta) A_{jj} .$$

Sendo  $d_{mj}^j(\beta) \neq 0, \forall \beta$ , então:  $A_{mm} = A_{jj}, \forall m$  .

Portanto, a matriz  $A$  é múltipla da unidade e pelo **lema de Schur**,

$D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$  é **irreduzível**.

---

**Exercício 4.1.2** Demonstre que  $d_{mj}^j(\beta) \neq 0, \forall \beta$ .

---

### 4.1.3 Representações por Harmônicos Esféricos

Tomemos as expressões (8,9) e façamos  $j = 1$ , Então:

$$D_{mm'}^1(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im\gamma} d_{m'm}^1(\beta) e^{-im'\alpha}.$$

Agora, sendo  $m, m' = -1, 0, 1$ , os elementos da matriz acima serão:

$$D_{11}^1 = e^{-i\gamma} d_{11}^1(\beta) e^{-i\alpha},$$

$$d_{11}^1(\beta) = \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k \sqrt{2!0!2!0!}}{k!(-k)!(2-k)!k!} [\cos(\beta/2)]^{2-2k} \cdot [-\sin(\beta/2)]^{2k}.$$

Como  $(-n)! = \pm \infty$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), então:

$$d_{11}^1(\beta) = \frac{2!}{0!0!2!0!} \cos^2(\beta/2) = \frac{1 + \cos \beta}{2}.$$

Portanto:

$$D_{11}^1 = e^{-i\gamma} \left( \frac{1 + \cos \beta}{2} \right) e^{-i\alpha}.$$

De maneira análoga, obtém-se os demais elementos da matriz  $D_{mm'}^1$ , cuja forma é:

$$D_{m'm}^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{matrix} m'=1 \rightarrow \\ \\ m'=0 \rightarrow \\ \\ m'=-1 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} \frac{1+\cos\beta}{2} e^{-i\gamma} & -e^{-i\alpha} \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & e^{-i\alpha} \frac{1-\cos\beta}{2} e^{i\gamma} \\ \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} & \cos\beta & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ e^{i\alpha} \frac{1-\cos\beta}{2} e^{-i\gamma} & e^{i\alpha} \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & e^{i\alpha} \frac{1+\cos\beta}{2} e^{i\gamma} \end{pmatrix} \quad (11)$$

**Exercício 4.1.3.1** Encontre os demais elementos da matriz

$$D_{m'm}^1(\alpha, \beta, \gamma).$$

Dada a matriz  $D_{m'm}^1(\alpha, \beta, \gamma)$ , demonstra-se (Rose, 1967) que a mesma é ligada à matriz rotação  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  através de uma transformação de similaridade, isto é ( $T \equiv$  transposta):

$$D_{m'm}^1(\alpha, \beta, \gamma) = (U R U^{-1})^T = (U^{-1})^T (R)^T (U)^T, \quad (12)$$

onde:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma & \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\gamma & -\sin\beta \cos\gamma \\ -\cos\alpha \cos\beta \sin\gamma - \sin\alpha \cos\gamma & -\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma & \sin\beta \sin\gamma \\ \cos\alpha \sin\beta & \sin\alpha \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad (13)$$

e

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}; \quad U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

---

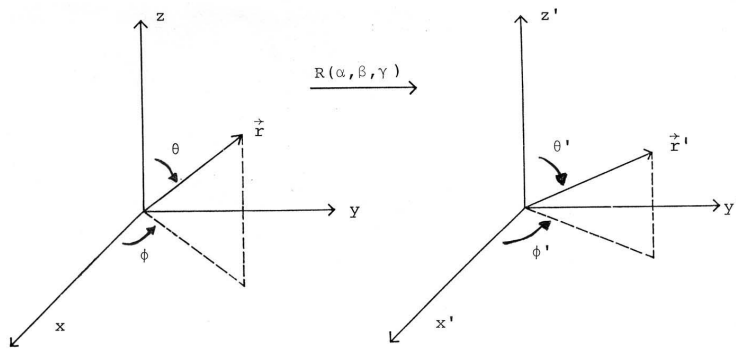
**Exercício 4.1.3.2** Verifique a expressão (12).

---

Seja  $\vec{r}$  um vetor unitário caracterizado pelas seguintes coordenadas esféricas  $(\theta, \phi)$ . Aplicando-se a matriz rotação  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  a esse vetor, obtém-se o vetor  $\vec{r}'$  caracterizado, no novo sistema de coordenadas girando segundo os **ângulos de Euler**  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , pelas coordenadas  $(\theta', \phi')$ , isto é:

$$\vec{r}' = R(\alpha, \beta, \gamma) \vec{r} . \quad (14)$$

Geometricamente, temos



A figura acima nos mostra que:

$$\vec{r} = \text{sen}\theta \cos\phi \vec{I} + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \vec{J} + \cos\theta \vec{K} \equiv \begin{pmatrix} \text{sen}\theta \cos\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

e

$$\vec{r}' = \text{sen}\theta' \cos\phi' \vec{I} + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \vec{J} + \cos\theta' \vec{K} \equiv \begin{pmatrix} \text{sen}\theta' \cos\phi' \\ \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix}.$$

Usando-se as expressões (13) e (14), virá:

$$\begin{pmatrix} \text{sen}\theta'\text{cos}\phi' \\ \text{sen}\theta'\text{sen}\phi' \\ \text{cos}\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos}\alpha\text{cos}\beta\text{cos}\gamma - \text{sen}\alpha\text{sen}\gamma & \text{sen}\alpha\text{cos}\beta\text{cos}\gamma + \text{cos}\alpha\text{sen}\gamma & -\text{sen}\beta\text{cos}\gamma \\ -\text{cos}\alpha\text{cos}\beta\text{sen}\gamma - \text{sen}\alpha\text{cos}\gamma & -\text{sen}\alpha\text{cos}\beta\text{sen}\gamma + \text{cos}\alpha\text{cos}\gamma & \text{sen}\beta\text{sen}\gamma \\ \text{cos}\alpha\text{sen}\beta & \text{sen}\alpha\text{sen}\beta & \text{cos}\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{sen}\theta\text{cos}\phi \\ \text{sen}\theta\text{sen}\phi \\ \text{cos}\theta \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo-se esse produto matricial, mostra-se que:

$$\text{cos}\theta' = \text{sen}\beta\text{sen}\theta\text{cos}(\phi - \alpha) + \text{cos}\beta\text{cos}\theta. \quad (15)$$

A expressão (15) pode ser obtida da seguinte maneira:

$$Y_1^0(\theta', \phi') = \sum_{m=-1}^1 D_{m'0}^1(\alpha, \beta, \gamma) Y_1^{m'}(\theta, \phi), \quad (16)$$

onde  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  é chamado de **Harmônico Esférico** e definido por (Jackson, 1992):

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (17)$$

com:

$$Y_1^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m (Y_1^m)^*(\theta, \phi), \quad (18)$$

e

$$P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - \cos^2\theta)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{d(\cos\theta)^{\ell+m}} (\cos^2\theta - 1)^\ell. \quad (19)$$

Desenvolvendo-se a expressão (16), virá:

$$Y_1^0 = D_{-10}^1 Y_1^{-1} + D_{00}^1 Y_1^0 + D_{10}^1 Y_1^1 .$$

Usando-se as expressões (11), (17), (18) e (19), é fácil ver que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta' = & e^{i\alpha} \frac{\text{sen}\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen}\theta e^{-i\phi} + \cos\beta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta + \\ & + e^{-i\alpha} \frac{\text{sen}\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen}\theta e^{i\phi}, \end{aligned}$$

e

$$\cos\theta' = \text{sen}\theta \text{sen}\beta \cos(\phi - \alpha) + \cos\beta \cos\theta,$$

que é idêntica à expressão (15),

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$Y_1^m(\theta', \phi') = \sum_{m'=-1}^1 D_{m'm}^1(\alpha, \beta, \gamma) Y_1^{m'}(\theta, \phi) . \quad (20)$$

**Exercício 4.1.3.3** Demonstre a expressão (20).

De um modo geral, pode-se demonstrar que (Cushing, 1975):

$$Y_\ell^m(\theta', \phi') \equiv O_R Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D_{m'm}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) Y_\ell^{m'}(\theta, \phi) . \quad (21)$$

**Exercício 4.1.3.4** Mostre que:



$$\text{a) } D_{m0}^{\ell}(\alpha, \beta, 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell}^{*m}(\beta, \alpha);$$

$$\text{b) } D_{0k}^{\ell}(0, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell}^k(\beta, \gamma)$$

$$\text{c) } D_{00}^{\ell}(0, \beta, 0) = P_{\ell}(\cos\beta) .$$

## 4.2 Operador de Momento Angular

### 4.2.1 Momento Angular Orbital: Conceito Clássico

Na Mecânica Clássica, o momento angular orbital é definido por:

$$\vec{L}_C = \vec{r} \times \vec{p} ,$$

onde:  $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$  , é o momento linear.

### 4.2.2 Momento Angular Orbital: Conceito Quântico

Segundo a representação de Schrödinger da Mecânica Quântica, o momento linear clássico  $\vec{p}$  é substituído por:

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla .$$

Portanto, em Mecânica Quântica, o momento angular é definido por (daqui em diante, faremos  $\hbar \equiv 1$ ).

$$\hat{L}_{OM} \equiv \hat{L} = -i\vec{r} \times \nabla .$$

### 4.2.3 A Álgebra dos Operadores de Momento Angular

Inicialmente, calculemos o operador  $\widehat{L}$  em coordenadas cartesianas. Assim sendo:

$$\vec{r} \times \nabla = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} = \vec{I} (y\partial_z - z\partial_y) + \vec{J} (z\partial_x - x\partial_z) + \vec{K} (x\partial_y - y\partial_x) ,$$

onde  $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$  , etc.,

então:

$$\widehat{L}_x = -i(y\partial_z - z\partial_y); \widehat{L}_y = -i(z\partial_x - x\partial_z); \widehat{L}_z = -i(x\partial_y - y\partial_x) .$$

(22a,b,c)

Obtidas as expressões para os componentes cartesianos do operador  $\widehat{L}$  , calculemos o comutador entre os mesmos. Assim:

$$\begin{aligned} \left[ \widehat{L}_x, \widehat{L}_y \right] &= \widehat{L}_x \widehat{L}_y - \widehat{L}_y \widehat{L}_x = -(y\partial_z - z\partial_y)(z\partial_x - x\partial_z) + \\ &\quad + (z\partial_x - x\partial_z)(y\partial_z - z\partial_y) = \\ &= -y\partial_z(z\partial_x) + y\partial_z(x\partial_z) + z\partial_y(z\partial_x) - z\partial_x(x\partial_z) + z\partial_x(y\partial_z) - z\partial_x(z\partial_y) - \\ &\quad - x\partial_z(y\partial_z) + x\partial_z(z\partial_y) = -y(\partial_x + z\partial_{zx}^2 + yx\partial_{zz}^2 + z^2\partial_{yx}^2 - zx\partial_{yz}^2 + yz\partial_{xz}^2 + \\ &\quad - z^2\partial_{xy}^2 - yx\partial_{zz}^2 + x(\partial_y + z\partial_{zy}^2)) . \end{aligned}$$

Sendo  $\partial_{\alpha\beta}^2 = \partial_{\beta\alpha}^2$  ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ) , virá:

$$\left[ \widehat{L}_x, \widehat{L}_y \right] = -y\partial_x + x\partial_y = +i \left[ -i \left( x\partial_y - y\partial_x \right) \right] \rightarrow$$

$$\left[ \widehat{L}_x, \widehat{L}_y \right] = i\widehat{L}_z .$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$\left[ \widehat{L}_z, \widehat{L}_x \right] = i\widehat{L}_y \quad \text{e} \quad \left[ \widehat{L}_y, \widehat{L}_z \right] = i\widehat{L}_x .$$

Assim, podemos escrever que:

$$\left[ \widehat{L}_i, \widehat{L}_j \right] = i\epsilon_{ijk}\widehat{L}_k . \quad (23)$$

ou, simbolicamente:

$$\left[ \widehat{L} \times \widehat{L} \right] = i\widehat{L} .$$

**Exercício 4.2.3** Complete a demonstração da expressão (23).

[É oportuno observar que comparando-se a expressão (23) com a regra de comutação dos geradores do grupo  $\mathbf{O}(3)$  (Cf. **3.2.a**), vê-se que os componentes cartesianos do operador de momento angular e aqueles geradores satisfazem a mesma álgebra, a menos do fator  $i\hbar$  (estamos considerando  $\hbar = 1$ ).]

#### 4.2.4 Auto-Funções e Auto-Valores dos Operadores $\widehat{L}^2$ e $\widehat{L}_z$

Inicialmente, vamos escrever os operadores  $\widehat{L}^2$  e  $\widehat{L}_z$  em coordenadas esféricas. Para isso, tomemos as expressões (22a,b,c), ou seja:

$$\widehat{L}_x = -i(y\partial_z - z\partial_y); \widehat{L}_y = -i(z\partial_x - x\partial_z); \widehat{L}_z = -i(x\partial_y - y\partial_x).$$

As relações entre coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  e cartesianas  $(x, y, z)$ , são dadas por:

$$x = r\sin\theta\cos\phi; y = r\sin\theta\sin\phi; z = r\cos\theta; \quad (24a,b,c)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \cos\theta = \frac{z}{r}; \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}. \quad (24d,e,f)$$

Derivando-se  $r^2$  em relação a  $x, y, z$ , respectivamente, teremos:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi; \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\phi; \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\theta. \quad (25a,b,c)$$

Por outro lado, derivando-se  $\cos\theta = \frac{z}{r}$  em relação a  $x, y, z$ , respectivamente, teremos:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}; \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}; \frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}. \quad (26a,b,c)$$

Por fim, derivando-se  $\operatorname{tg}\phi = \frac{y}{x}$  em relação a  $x, y, z$ , respectivamente, virá:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}; \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}; \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \quad (27 a,b,c)$$

**Exercício 4.2.4.1** Demonstre o grupo de equações (25), (26) e (27).

Tomemos o operador  $\widehat{L}_z$  e vamos escrevê-lo em coordenadas esféricas. Então, segundo (22 c), tem-se:

$$\hat{L}_z = -i(x\partial_y - y\partial_x) .$$

Agora, passemos de  $(x,y,z) \rightarrow (r,\theta,\phi)$ . Ora:

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial \phi} ;$$

[Lembrar que:  $f(r,\theta)$ , então:  $df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi$ .]

$$\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial \phi} ;$$

$$\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial \phi} .$$

Portanto, usando-se o grupo de equações (24) e as equações acima, teremos:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z = -i \left[ r \sin \theta \cos \phi \left( \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - r \sin \theta \sin \phi \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] . \end{aligned}$$

Agora, usando-se os grupos de equações (25), (26) e (27), teremos:

$$\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \equiv -1\partial_\phi . \quad (28a)$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$\hat{L}_x = i(\sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi) ; \quad (28b)$$

$$\hat{L}_y = i(\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi) ; \quad (28c)$$

-----  
**Exercício 4.2.4.2** Complete a demonstração do grupo das equações (28).  
 -----

Obtidos os operadores  $\widehat{L}_x$ ,  $\widehat{L}_y$  e  $\widehat{L}_z$  em coordenadas esféricas, vamos obter o operador  $\widehat{L}^2$  nesse tipo de coordenadas. Assim,

$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2 .$$

Usando-se o grupo de equações (28), virá:

$$\widehat{L}^2 = -(\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi)^2 - (\cos\phi\partial_\theta - \text{cotg}\theta\text{sen}\phi\partial_\phi)^2 - \partial_{\phi\phi}^2 .$$

Inicialmente, calculemos:

$$\begin{aligned} (\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi)^2 &= (\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi) (\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi) = \\ &= \text{sen}\phi\partial_\theta (\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi) + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi (\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi) = \\ &= \text{sen}^2\phi\partial_{\theta\theta}^2 + \text{sen}\phi\cos\phi(-\text{cosec}^2\theta\partial_\phi + \text{cotg}\theta\partial_{\theta\phi}^2) + \text{cotg}\theta\cos\phi[\cos\phi\partial_\theta + \\ &+ \text{sen}\phi\partial_{\phi\theta}^2 + \text{cotg}\theta(-\text{sen}\phi\partial_\theta + \cos\phi\partial_{\phi\phi}^2)] = \\ &= \text{sen}^2\phi\partial_{\theta\theta}^2 - \text{sen}\phi\cos\phi\text{cosec}^2\theta\partial_\phi + \text{sen}\phi\cos\phi\text{cotg}\theta\partial_{\theta\phi}^2 + \\ &+ \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\text{sen}\phi\partial_{\phi\theta}^2 - \text{cotg}^2\theta\cos\phi\text{sen}\phi\partial_\phi + \\ &+ \text{cotg}^2\theta\cos^2\phi\partial_{\phi\phi}^2 . \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos:

$$\begin{aligned} (\cos\phi\partial_\theta - \text{cotg}\theta\text{sen}\phi\partial_\phi)^2 &= \cos^2\phi\partial_{\theta\theta}^2 + \text{sen}\phi\cos\phi\text{cosec}^2\theta\partial_\phi + \\ &- \text{sen}\phi\cos\phi\text{cotg}\theta\partial_{\theta\phi}^2 + \text{cotg}\theta\text{sen}^2\phi\partial_\theta - \text{cotg}\theta\text{sen}\phi\cos\phi\partial_{\phi\theta}^2 + \end{aligned}$$

$$+ \cot g^2 \theta \operatorname{sen} \phi \cos \phi \partial_\phi + \cot g^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi \partial_{\phi\phi}^2 .$$

Portanto:

$$\widehat{L}^2 = - \left[ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \partial_\theta (\operatorname{sen} \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2 \right]. \quad (29)$$

**Exercício 4.2.4.3** Complete a demonstração da equação (29).

Sendo os operadores  $\widehat{L}^2$  e  $\widehat{L}_z$  funções de  $(\theta, \phi)$ , suas equações de auto-valores serão, respectivamente:

$$\widehat{L}^2 f(\theta, \phi) = L^2 f(\theta, \phi), \quad (30)$$

$$\widehat{L}_z g(\theta, \phi) = L_z g(\theta, \phi), \quad (31)$$

Agora, calculemos os auto-valores  $L^2$  e  $L_z$ . Para isso, usaremos as equações (29) e (28a). Inicialmente, resolvamos a equação (30):

$$- \left[ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \partial_\theta (\operatorname{sen} \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2 \right] f(\theta, \phi) = L^2 f(\theta, \phi),$$

$$\left[ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \partial_\theta (\operatorname{sen} \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2 + L^2 \right] f(\theta, \phi) = 0 .$$

Para resolver a equação diferencial acima, usaremos a técnica da separação de variáveis (Arfken, 1970; Bassalo, 1989; Mathews e Walker, 1965). Assim, fazendo-se  $f(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ , virá:

$$\left( \partial_\theta^2 + \cot g \theta \partial_\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \partial_\phi^2 + L^2 \right) \Theta(\theta)\Phi(\phi) = 0 .$$

Separando-se as variáveis  $\theta$  e  $\phi$ , a equação acima se transformará em:

$$\sin^2\theta \frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} + \cos\theta\sin\theta \frac{\dot{\Theta}}{\Theta} + L^2\sin\theta = -\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi}, \quad (32)$$

ou

$$h(\theta) = j(\phi) \rightarrow \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = \text{constante.}$$

Razões físicas, impõem que:  $\Phi(\phi+2\pi) = \Phi$ , então:

$$\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = -m^2; \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

portanto:

$$\boxed{\Phi = \exp(im\phi)}. \quad (33)$$

Obtido  $\Phi(\phi)$ , voltemos à equação (32). Então:

$$\sin^2\theta \frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} + \cos\theta\sin\theta \frac{\dot{\Theta}}{\Theta} + L^2\sin\theta - m^2 = 0.$$

Fazendo-se  $\cos\theta = x$ , teremos (Cf. Bassalo, op. cit.):

$$(1-x^2) \frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left( L^2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta(x) = 0,$$

cuja solução é:

$$\Theta(x) = P_\ell^m(\cos\theta), \quad \text{se: } L^2 = P(P+1),$$

onde:

$$m = -P, (-P+1), \dots, 0, \dots, (P-1), P.$$

Assim, a auto-função do operador  $\widehat{L}^2$  será:



$$f(\theta, \phi) = A_{\ell, m} e^{im\phi} P_{\ell}^m(\cos \theta).$$

$$\text{Escolhendo-se a constante } A_{\ell, m} = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi} \cdot \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}}$$

obteremos o harmônico esférico [vide equação (17)]. Desse modo, a equação de autovalores para o operador  $\widehat{L}^2$  tomará a forma:

$$\widehat{L}^2 Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell}^m(\theta, \phi). \quad (\hbar \equiv 1) \quad (34)$$

Resolvida a equação (30), passemos a resolver a equação (31), isto é:

$$\widehat{L}_z g(\theta, \phi) = L_z g(\theta, \phi).$$

Sendo  $\widehat{L}_z = -i\partial_{\phi}$ , então:

$$-i\partial_{\phi} g(\theta, \phi) = L_z g(\theta, \phi)$$

$$-i \frac{\partial g}{\partial \phi} = L_z g \rightarrow \frac{\partial g}{g} = iL_z \partial \phi.$$

Integrando-se a equação acima, virá:

$$\ln g = iL_z \phi \rightarrow g = \exp(iL_z \phi).$$

Razões físicas impõem que  $g(\phi + 2\pi) = g(\phi)$ , então:

$$\boxed{L_z = m}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Assim, a auto-função do operador  $\widehat{L}_z$  será:

$$g(\phi) = \exp(im\phi).$$

Ora sendo:

$$\widehat{L}_z g = L_z g = mg,$$

então:

$$-i \frac{\partial}{\partial \phi} e^{im\phi} = m e^{im\phi}.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação acima por

$$\sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi} \cdot \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta), \text{ vê-se que:}$$

$$\boxed{\widehat{L}_z Y_\ell^m(\theta, \phi) = m Y_\ell^m(\theta, \phi)}. \quad (35)$$

É oportuno observar que os operadores  $\widehat{L}^2$  e  $\widehat{L}_z$  têm a mesma auto-função  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ . Tal situação decorre do fato de que esses operadores são comutáveis, isto é:

$$\left[ \widehat{L}^2, \widehat{L}_z \right] = 0 .$$

**Exercício 4.2.4.4** Demonstre que:

$$\left[ \widehat{L}^2, \widehat{L}_i \right] = 0 , \quad (i = x, y, z) .$$

### 4.2.5 Operador de Momento Angular Total

A introdução do conceito de spin do elétron em Mecânica Quântica por Uhlenbeck e Goudsmit (1925) como sendo um momento angular intrínseco dessa partícula, isto é:

$$\begin{aligned} \widehat{S}^2 \phi &= S(S + 1) \phi , \\ \widehat{S}_z \phi &= S_z \phi \end{aligned} \quad (\hbar \equiv 1)$$

onde  $S_z = -S, -S+1, \dots, 0, \dots, S-1, S$ , com  $(S=1/2)$ , levou à generalização desse conceito às demais partículas. Assim, as partículas que têm spin inteiro são chamadas de **bosônicas**, e as que têm spin fracionário são chamadas de **fermiônicas**. Por outro lado, como uma partícula possui também momento angular orbital, há necessidade portanto de definir um momento angular total, ou seja:

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S} .$$

Em analogia com os operadores de momento angular orbital  $\hat{L}$  e de spin  $\hat{S}$ , o operador  $\hat{J}$  satisfaz à seguinte regra de comutação:

$$\left[ \hat{J}_i, \hat{J}_j \right] = i\epsilon_{ijk} \hat{J}_k , \quad (36)$$

ou, simbolicamente:

$$\left[ \hat{J} \times \hat{J} \right] = i\hat{J} .$$

Sendo ainda  $\hat{J}$  um operador de momento angular, então:

$$\hat{J}^2 Y_j^m(\theta, \phi) = j(j+1) Y_j^m(\theta, \phi) , \quad (37a)$$

$$\hat{J}_z Y_j^m(\theta, \phi) = m Y_j^m(\theta, \phi) , \quad (37b)$$

onde  $m = -j, -j+1, \dots, 0, \dots, j-1, j$ .

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

e

$$\left[ \hat{J}^2, \hat{J}_i \right] = 0, \quad \forall_i = x, y, z . \quad (37c)$$

---

**Exercício 4.2.5** Demonstre a equação (37c).

---

### 4.2.6 Operadores “ladder” (escada)

Os operadores “ladder” são definidos por:

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y \quad , \quad (38a)$$

$$\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y \quad . \quad (38b)$$

Da definição acima, é fácil ver que:

$$\hat{J}_+^\perp = \hat{J}_- \quad \text{e} \quad \hat{J}_-^\perp = \hat{J}_+ \quad ,$$

onde ( $\perp$ ) significa operador Hermitiano conjugado.

Agora, vamos escrever o operador  $\hat{J}^2$  em termos desses operadores “ladder”. Assim, sendo:

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$$

e

$$\hat{J}_+ \hat{J}_- = \left( \hat{J}_x + i\hat{J}_y \right) \left( \hat{J}_x - i\hat{J}_y \right) = \hat{J}_x^2 - i\hat{J}_x \hat{J}_y + i\hat{J}_y \hat{J}_x + \hat{J}_y^2 \quad ,$$

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \left( \hat{J}_x - i\hat{J}_y \right) \left( \hat{J}_x + i\hat{J}_y \right) = \hat{J}_x^2 + i\hat{J}_x \hat{J}_y - i\hat{J}_y \hat{J}_x + \hat{J}_y^2 \quad ,$$

então:

$$\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ = 2\hat{J}_x^2 + 2\hat{J}_y^2 \quad .$$

Portanto:

$$\boxed{\hat{J}^2 = \frac{1}{2} \left( \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ \right) + \hat{J}_z^2} \quad . \quad (39)$$

Usando-se as equações (36) e (38,a,b) vamos calcular alguns comutadores envolvendo os operadores  $\hat{J}^2$ ,  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{J}_+$ , e  $\hat{J}_-$ . Assim:

$$\begin{aligned} [\hat{J}_z, \hat{J}_+] &= [\hat{J}_z, \hat{J}_x + i\hat{J}_y] = [\hat{J}_z, \hat{J}_x] + i[\hat{J}_z, \hat{J}_y] = \\ &= i\hat{J}_y + i(-i\hat{J}_x) = \hat{J}_x + i\hat{J}_y = \hat{J}_+ , \\ [\hat{J}_z, \hat{J}_+] &= \hat{J}_+ . \end{aligned} \quad (40a)$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_-] = -\hat{J}_- , \quad (40b)$$

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z . \quad (40c)$$

**Exercício 4.2.6.1** Demonstre as equações (40 b,c).

Por outro lado, usando-se as equações (39) e (40 a, b,c), virá:

$$\begin{aligned} [\hat{J}^2, \hat{J}_+] &= \left[ \left\{ \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+) + \hat{J}_z^2 \right\} \hat{J}_+ \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+), \hat{J}_+ \right] + [\hat{J}_z^2, \hat{J}_+] . \end{aligned}$$

Sendo,  $[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$ , então:

$$\begin{aligned} [\hat{J}^2, \hat{J}_+] &= \frac{1}{2} \hat{J}_+ [\hat{J}_-, \hat{J}_+] + \frac{1}{2} [\hat{J}_+, \hat{J}_+] \hat{J}_- + \frac{1}{2} \hat{J}_- [\hat{J}_+, \hat{J}_+] + \\ &+ \frac{1}{2} [\hat{J}_-, \hat{J}_+] \hat{J}_+ + \hat{J}_z [\hat{J}_z, \hat{J}_+] + [\hat{J}_z, \hat{J}_+] \hat{J}_z = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{J}^2, \hat{J}_+] &= \frac{1}{2} \hat{J}_+ [\hat{J}_-, \hat{J}_+] + \frac{1}{2} [\hat{J}_+, \hat{J}_+] \hat{J}_- + \frac{1}{2} \hat{J}_- [\hat{J}_+, \hat{J}_+] + \\
&+ \frac{1}{2} [\hat{J}_-, \hat{J}_+] \hat{J}_+ + \hat{J}_z [\hat{J}_z, \hat{J}_+] + [\hat{J}_z, \hat{J}_+] \hat{J}_z = \\
&= \frac{1}{2} \hat{J}_+ (-2\hat{J}_z) + \frac{1}{2} (-2\hat{J}_z) \hat{J}_+ + \hat{J}_z \hat{J}_+ + \hat{J}_+ \hat{J}_z = \\
&= -\hat{J}_+ \hat{J}_z - \hat{J}_z \hat{J}_+ + \hat{J}_z \hat{J}_+ + \hat{J}_+ \hat{J}_z , \\
[\hat{J}^2, \hat{J}_+] &= 0 . \tag{41a}
\end{aligned}$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_-] = 0 . \tag{41b}$$

**Exercício 4.2.6.2** Demonstre a equação (41b).

De posse dessa álgebra de comutadores envolvendo os operadores  $\hat{J}^2$ ,  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{J}_+$ , e  $\hat{J}_-$ , vamos calcular as auto-funções e os auto-valores dos operadores “**ladder**”. Seja  $\psi_{jm} \equiv |jm\rangle$  (esta última, é a notação de Dirac) uma auto-função de  $\hat{J}^2$  e  $\hat{J}_z$ , com os respectivos auto-valores  $j(j+1)$  e  $m$  (lembrar que  $\hbar \equiv 1$ ), isto é:

$$\hat{J}^2 \psi_{jm} = j(j+1) \psi_{jm} ,$$

$$\hat{J}_z \psi_{jm} = m \psi_{jm} .$$

Como  $\hat{J}^2$  comuta com  $\hat{J}_+$ , [equação (41a)], então:

$$\hat{J}^2 (\hat{J}_+ \psi_{jm}) = \hat{J}_+ (\hat{J}^2 \psi_{jm}) = \hat{J}_+ [j(j+1) \psi_{jm}] = j(j+1) (\hat{J}_+ \psi_{jm}) .$$

Portanto,  $(\hat{J}_+ \psi_{jm})$  é ainda auto-função de  $\hat{J}^2$  com o mesmo auto-valor  $j(j+1)$ . O mesmo ocorre para  $(\hat{J}_- \psi_{jm})$ . Porém, em virtude a equação (40a), tem-se:

$$\hat{J}_z \hat{J}_+ = \hat{J}_+ + \hat{J}_+ \hat{J}_z ,$$

então:

$$\begin{aligned} \hat{J}_z (\hat{J}_+ \psi_{jm}) &= (\hat{J}_+ + \hat{J}_+ \hat{J}_z) \psi_{jm} = \hat{J}_+ \psi_{jm} + \hat{J}_+ (\hat{J}_z \psi_{jm}) = \\ &= \hat{J}_+ \psi_{jm} + m \hat{J}_+ \psi_{jm} = (m+1) (\hat{J}_+ \psi_{jm}) , \end{aligned}$$

o que mostra que  $(\hat{J}_+ \psi_{jm})$  é também auto-função de  $\hat{J}_z$ , porém com auto-valor  $(m+1)$ . Assim,  $\hat{J}_+$  *levanta* o auto-valor de  $\hat{J}_z$  de uma unidade, ou seja:

$$\hat{J}_+ \psi_{j,m} = N_+ \psi_{j,m+1} . \quad (42a)$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$\hat{J}_z (\hat{J}_- \psi_{jm}) = (m-1) (\hat{J}_- \psi_{jm}) , \quad (42b)$$

o que mostra que  $(\hat{J}_- \psi_{jm})$  é também auto-função de  $\hat{J}_z$ , porém com auto-valor  $(m-1)$ . Assim,  $\hat{J}_-$  *abaixa* o auto-valor de  $\hat{J}_z$  de uma unidade, ou seja:

$$\hat{J}_- \psi_{j,m} = N_- \psi_{j,m-1} . \quad (42c)$$

[É oportuno observar que as expressões (42a,c) justificam o nome de “**ladder**” (escada) para os operadores  $\hat{J}_+$  e  $\hat{J}_-$ .  $\hat{J}_+$  é chamado de operador *levantador* e  $\hat{J}_-$  de *abaixador*.]

---

**Exercício 4.2.6.3** Demonstre a equação (42b).

---

Agora, calculemos os valores de  $N_+$  e  $N_-$ . Sendo as funções  $\psi_{jm}$  e  $\psi_{jm\pm 1}$  normalizadas, isto é:

$$(\psi_{jm}, \psi_{jm}) = 1 \quad \text{e} \quad (\psi_{jm\pm 1}, \psi_{jm\pm 1}) = 1,$$

então:

$$(\hat{J}_+ \psi_{jm}, \hat{J}_+ \psi_{jm}) = (N_+ \psi_{jm+1}, N_+ \psi_{jm+1}) = |N_+|^2.$$

Por outro lado, desenvolvendo-se o 1º membro da equação acima, virá:

$$(\hat{J}_+ \psi_{jm}, \hat{J}_+ \psi_{jm}) = (\psi_{jm}, \hat{J}_+^\perp \psi_{jm}) = (\psi_{jm}, \hat{J}_- \psi_{jm}).$$

Porém:

$$\begin{aligned} \hat{J}_- \hat{J}_+ &= (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) = \hat{J}_x^2 + i\hat{J}_x \hat{J}_y - i\hat{J}_y \hat{J}_x + \hat{J}_y^2 = \\ &= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + i[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + i[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = \hat{J}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z + 1). \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} (\hat{J}_+ \psi_{jm}, \hat{J}_+ \psi_{jm}) &= (\psi_{jm}, [\hat{J}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z + 1)]\psi_{jm}) = \\ &= (\psi_{jm}, \hat{J}^2 \psi_{jm}) - (\psi_{jm}, \hat{J}_z[\hat{J}_z + 1]\psi_{jm}) = \\ &= j(j+1)(\psi_{jm}, \psi_{jm}) - (\psi_{jm}, \hat{J}_z[m+1]\psi_{jm}) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= j(j+1) - m(m+1) = j^2 + j - m^2 - m + mj - mj = \\
 &= j(j-m) + (j-m) + m(j-m) = (j-m)(j+m+1) .
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$|N_+|^2 = (j-m)(j+m+1) .$$

Escolhendo-se o fator de fase igual a 1, virá:

$$N_+ = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} . \quad (43a)$$

De maneira análoga demonstra-se que:

$$N_- = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} . \quad (43b)$$

**Exercício 4.2.6.4** Demonstre a equação (43b).

### 4.2.7 Adição de Dois Momentos Angulares

Até agora, vimos como obter as auto-funções ( $\Psi_{jm}$ ) que diagonalizam os operadores  $\hat{J}^2$  e  $\hat{J}_z$ , bem como determinamos seus auto-valores [ $j(j+1)$  e  $m$ ] respectivos. Em vista disso, pode-se agora pensar no problema de como encontrar a função de onda de um sistema composto de dois ou mais momentos angulares. A necessidade para compor momentos angulares surge quando tratamos de partículas simples cujo momento angular total é a soma de duas partes: orbital e spin; e quando tratamos processos entre estados de momento angular bem definidos como, por exemplo, espalhamento entre partículas. Aqui, trataremos apenas da adição de dois momentos angulares.

Sejam  $\Psi_{j_1 m_1}$  e  $\Psi_{j_2 m_2}$  auto-funções dos operadores de momento angular  $\hat{J}_1$  e  $\hat{J}_2$ , isto é:

$$\widehat{J}_1^2 \Psi_{j_1 m_1} = j_1(j_1 + 1) \Psi_{j_1 m_1} ; \widehat{J}_{1z} \Psi_{j_1 m_1} = m_1 \Psi_{j_1 m_1} , \quad (44a,b)$$

$$\widehat{J}_2^2 \Psi_{j_2 m_2} = j_2(j_2 + 1) \Psi_{j_2 m_2} ; \widehat{J}_{2z} \Psi_{j_2 m_2} = m_2 \Psi_{j_2 m_2} , \quad (45a,b)$$

$$[\widehat{J}_{1i}, \widehat{J}_{1j}] = i \varepsilon_{ijk} \widehat{J}_{1k} ; [\widehat{J}_{2i}, \widehat{J}_{2j}] = i \varepsilon_{ijk} \widehat{J}_{2k} . \quad (46a,b)$$

Como os operadores  $\widehat{J}_1$  e  $\widehat{J}_2$  atuam em espaços vetoriais distintos, então:

$$[\widehat{J}_{1i}, \widehat{J}_{2j}] = 0 \quad , \quad \forall i, j. \quad (47)$$

Definidos os operadores  $\widehat{J}_1$  e  $\widehat{J}_2$ , vamos construir um operador ( $\widehat{J}$ ), soma entre eles, isto é:

$$\widehat{J} = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2 ; \widehat{J}_i = \widehat{J}_{1i} + \widehat{J}_{2i} ; (i = x, y, z). \quad (48a,b)$$

As relações de comutação entre os componentes desse operador  $\widehat{J}$  podem ser obtidas através das equações (46a,b), (47) e (48a,b). Assim:

$$\begin{aligned} [\widehat{J}_x, \widehat{J}_y] &= \left[ \left( \widehat{J}_{1x} + \widehat{J}_{2x} \right), \left( \widehat{J}_{1y} + \widehat{J}_{2y} \right) \right] = \\ &= \left[ \widehat{J}_{1x} + \widehat{J}_{1y} \right] + \left[ \widehat{J}_{1x} + \widehat{J}_{2y} \right] + \left[ \widehat{J}_{2x} + \widehat{J}_{1y} \right] + \left[ \widehat{J}_{2x} + \widehat{J}_{2y} \right] = \\ &= i \widehat{J}_{1z} + i \widehat{J}_{2z} = i \left( \widehat{J}_{1z} + \widehat{J}_{2z} \right) = i \widehat{J}_z , \\ &\quad \boxed{[\widehat{J}_x, \widehat{J}_y] = i \widehat{J}_z} . \end{aligned}$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$\boxed{[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{J}_k}, \quad (i, j, k = x, y, z) . \quad (49)$$

**Exercício 4.2.7.1** Complete a demonstração da equação (49).

A equação (49) nos mostra que o operador  $\hat{J}$  é também um operador de momento angular e, portanto, podemos escrever:

$$\hat{J}^2 \psi_{jm} = j(j+1) \psi_{jm} , \quad (50a)$$

$$\hat{J}_z \psi_{jm} = m \psi_{jm} , \quad (50b)$$

$$\hat{J}_{\pm} \psi_{jm} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \psi_{j, m \pm 1} , \quad (50c)$$

onde  $\psi_{jm}$  é uma representação acoplada, e que é conectada às representações desacopladas  $\psi_{j_1 m_1}$  e  $\psi_{j_2 m_2}$  através de uma transformação unitária, isto é:

$$\psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} . \quad (51)$$

Na expressão acima, os elementos  $C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$  são chamados de **Coefficientes de Clebsch-Gordan** – CG – da transformação unitária e  $\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \left( \equiv \psi_{j_1 m_1} \otimes \psi_{j_2 m_2} \right)$  representa o produto direto ou tensorial entre as representações desacopladas. [Os coeficientes C.G. têm várias notações; adotaremos a notação do Rose (op. cit.).]

**Teorema 4.2.7.1** Os números quânticos de projeção ( $m$ ,  $m_1$  e  $m_2$ ) não são independentes; eles são relacionados através de  $m = m_1 + m_2$ .

**Demonstração:**

Tomemos a equação (51) e apliquemos à mesma o operador  $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$ , isto é:

$$\hat{J}_z \psi_{jm} = (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}) \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}.$$

Sendo  $\psi_{j_1 m_1}$  e  $\psi_{j_2 m_2}$  representações em espaços distintos, então:

$$\hat{J}_{1z} (\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}) = (\hat{J}_{1z} \psi_{j_1 m_1}) (\psi_{j_2 m_2}) = m_1 (\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}),$$

$$\hat{J}_{2z} (\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}) = \psi_{j_1 m_1} (\hat{J}_{2z} \psi_{j_2 m_2}) = m_2 (\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}),$$

e

$$\hat{J}_z \psi_{jm} = m \psi_{jm},$$

virá:

$$m \psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} (m_1 + m_2) C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}.$$

Usando-se ainda a equação (51), teremos:

$$\sum_{m_1, m_2} (m - m_1 - m_2) C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} = 0.$$

Como  $\Psi_{j_1 m_1} \Psi_{j_2 m_2}$  são linearmente independentes, virá

$$(m - m_1 - m_2) C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) = 0 ,$$

o que mostra que os coeficientes C.G. são nulos, a menos que:

$$\boxed{m = m_1 + m_2} \quad \text{C.Q.D.} \quad (52)$$

Quanto aos **alcances** (“ranges”) de **j** e **m**, demonstra-se que (Rose, op. cit.):

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2| \quad (53a)$$

ou

$$\Delta(j_1 j_2 j) \equiv \text{Relação triangular,}$$

onde

$$j_1 \geq |m_1| ; j_2 \geq |m_2| ; j \geq |m| ,$$

e

$$m = \pm j, \pm (j-1), \dots,$$

e mais ainda:

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1) . \quad (53b)$$

**Exercício 4.2.7.2** Demonstre as equações (53a,b).

**Teorema 4.2.7.2** Os **Coefficientes de Clebsch-Gordan** satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade:

$$\sum_{m_1} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) C(j_1 j_2 j'; m_1 m_2 m) = \delta_{jj'}.$$

**Demonstração:**

Apliquemos a equação (51) às funções  $\Psi_{jm}$  e  $\Psi_{j'm}$ , e efetuemos o seu produto escalar. Como tais funções são ortogonais, esse produto escalar valerá:

$$C(j_1 j_2 j_3 ; m_1 m_2 m_3) = (-1)^{j_2 + m_2} \left( \frac{2j_3 + 1}{2j_1 + 1} \right)^{1/2} C(j_3 j_2 j_1 ; -m_3 m_2 - m_1), \quad (56a)$$

$$C(j_1 j_2 j_3 ; m_1 m_2 m_3) = (-1)^{j_1 - m_1} \left( \frac{2j_3 + 1}{2j_2 + 1} \right)^{1/2} C(j_3 j_1 j_2 ; m_3 - m_1 m_2), \quad (56b)$$

$$C(j_1 j_2 j_3 ; m_1 m_2 m_3) = (-1)^{j_2 + m_2} \left( \frac{2j_3 + 1}{2j_1 + 1} \right)^{1/2} C(j_2 j_3 j_1 ; -m_2 m_3 m_1), \quad (56c)$$

Tais propriedades podem ser demonstradas através da fórmula deduzida por E. Racah, em 1942 (Cf. Rose, op. cit.):

$$\begin{aligned} C(j_1 j_2 j_3 ; m_1 m_2 m_3) &= \delta_{m_3, m_1 + m_2} \left[ (2j_3 + 1) \frac{(j_1 + j_2 - j_3)!(j_3 + j_1 - j_2)!(j_3 + j_2 - j_1)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!} \right] \times \\ &\times (j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!(j_2 - m_2)!(j_3 + m_3)!(j_3 - m_3)!^{1/2} \times \\ &\times \sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} [(j_1 + j_2 - j_3 + \nu)!(j_1 - m_1 - \nu)!(j_2 + m_2 - \nu)! \times \\ &\times (j_3 - j_2 + m_1 + \nu)!(j_3 - j_1 - m_2 + \nu)!]^{-1}. \end{aligned} \quad (57)$$

---

**Exercício 4.2.7.3** Usando a **Fórmula de Racah**, [equação (57)], demonstre as equações (56,a,b,c).

---

**Exemplo 4.2.7** Uma partícula de spin  $1/2$  move-se numa órbita com  $P = 1$ . Obter explicitamente as auto-funções  $\Psi_{3/2, 3/2}$ ;  $\Psi_{3/2, 1/2}$  e  $\Psi_{1/2, 1/2}$ .

Para calcularmos as auto-funções  $\Psi_{3/2, 3/2}$ ;  $\Psi_{3/2, 1/2}$  e  $\Psi_{1/2, 1/2}$ , vamos usar a equação (51), isto é:

$$\Psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) \Psi_{j_1 m_1} \Psi_{j_2 m_2},$$

onde:  $j_1 = 1, j_2 = 1/2, m_1 = -j_1 \dots + j_1$  e  $m_2 = -j_2 \dots + j_2$ .

Assim:

$$\Psi_{3/2, 3/2} = \sum_{m_1, m_2} C\left(1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}; m_1 m_2 \frac{3}{2}\right) \Psi_{1 m_1} \Psi_{1/2 m_2}.$$

Sendo:

$$m_1 + m_2 = m \quad \text{e} \quad m_1 = -1, 0, 1,$$

virá:

$$\begin{aligned} \Psi_{3/2, 3/2} = & C_1 \left(1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}; 1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}\right) \Psi_{1,1} \Psi_{1/2, 1/2} + \\ & + C_0 \left(1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}; 0 \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right) \Psi_{1,0} \Psi_{1/2, 3/2} + \\ & + C_{-1} \left(1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}; -1 \frac{5}{2} \frac{3}{2}\right) \Psi_{1,-1} \Psi_{1/2, 5/2}. \end{aligned}$$

Ora, como  $m_2 \leq j_2 (=1/2)$ , então  $C_0 = C_{-1} = 0$ . Portanto:

$$\Psi_{3/2,3/2} = C_1 \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,1/2} .$$

Para calcular o coeficiente C.G.  $C_1$ , usaremos a condição de ortogonalidade das auto-funções, isto é:

$$(\Psi_{3/2,3/2}, \Psi_{3/2,3/2}) = 1; \quad (\Psi_{1,1}, \Psi_{1/2,1/2}) = 1;$$

$$(\Psi_{1/2,1/2}, \Psi_{1/2,1/2}) = 1 .$$

Por outro lado, em virtude as auto-funções  $\Psi_{j_1 m_1}$  e  $\Psi_{j_2 m_2}$  situarem-se em espaços vetoriais distintos, teremos:

$$\left( \Psi_{j_1 m_1}, \Psi_{j_2 m_2} \right) = 0,$$

então:

$$\begin{aligned} (\Psi_{3/2,3/2}, \Psi_{3/2,3/2}) &= (C_1 \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,1/2}, C_1 \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,1/2}) = \\ &= C_1^2 (\Psi_{1,1}, \Psi_{1,1}) (\Psi_{1/2,1/2}, \Psi_{1/2,1/2}) = C_1^2 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 . \end{aligned}$$

Portanto:  $\boxed{\Psi_{3/2,3/2} = \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,1/2}}$  . (A)

Agora determinemos a auto-função  $\Psi_{3/2,1/2}$ . Para isso, vamos usar o operador abaixador  $\hat{J}_-$ , pois, como sabemos [Eqs. (42c) e (43b)]:

$$\hat{J}_- \Psi_{jm} = N_- \Psi_{j, m-1} = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \Psi_{j, m-1} .$$

Assim:



$$\hat{J}_- \Psi_{3/2,3/2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 1\right)} \Psi_{3/2,1/2} = \sqrt{3} \Psi_{3/2,1/2}.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \hat{J}_- \Psi_{3/2,3/2} &= (\hat{J}_{-(1)} + \hat{J}_{-(2)}) \Psi_{3/2,3/2} = \\ &= (\hat{J}_{-(1)} + \hat{J}_{-(2)}) \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,1/2} = \\ &= (\hat{J}_{-(1)} \Psi_{1,1}) \Psi_{1/2,1/2} + \Psi_{1,1} \hat{J}_{-(2)} \Psi_{1/2,1/2}. \end{aligned}$$

Ora:

$$\hat{J}_{-(1)} \Psi_{1,1} = \sqrt{(1+1)(1-1+1)} \Psi_{1,0} = \sqrt{2} \Psi_{1,0},$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{-(2)} \Psi_{1/2,1/2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} \Psi_{1/2,-1/2} = \\ &= \Psi_{1/2,-1/2}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\sqrt{3} \Psi_{3/2,1/2} = \sqrt{2} \Psi_{1,0} \Psi_{1/2,-1/2} + \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,-1/2},$$

$$\boxed{\Psi_{3/2,1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{2} \Psi_{1,0} \Psi_{1/2,1/2} + \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,-1/2} \right]}. \quad (\text{B})$$

Por fim, para calcularmos a auto-função  $\Psi_{1/2,1/2}$ , usaremos novamente a equação (51). Assim:

$$\Psi_{1/2,1/2} = \sum_{m_1, m_2} C \left( 1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}; m_1 m_2 \frac{1}{2} \right) \Psi_{1m_1} \Psi_{1/2 m_2}.$$

Sendo  $m_1 + m_2 = m$  e  $m_1 = 1, 0, -1$ , virá:

$$\begin{aligned} \Psi_{1/2,1/2} = & C_1 \left( 1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}; 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) \Psi_{1,1} \Psi_{1/2, -1/2} + \\ & + C_0 \left( 1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}; 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) \Psi_{1,0} \Psi_{1/2, 1/2} + \\ & + C_{-1} \left( 1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}; -1 \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right) \Psi_{1,-1} \Psi_{1/2, 3/2}. \end{aligned}$$

Ora, como  $m_2 \leq j_2 (=1/2)$ , então  $C_{-1} = 0$ , portanto:

$$\Psi_{1/2,1/2} = C_1 \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,-1/2} + C_0 \Psi_{1,0} \Psi_{1/2,1/2}. \quad (C)$$

Para calcular os coeficientes  $C_1$  e  $C_0$ , vamos usar a condição de ortogonalidade das auto-funções. Assim:

$$\begin{aligned} (\Psi_{1/2,1/2}, \Psi_{1/2,1/2}) &= 1 = \\ &= [(C_1 \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,-1/2} + C_0 \Psi_{1,0} \Psi_{1/2,1/2}), \\ &\quad (C_1 \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,-1/2} + C_0 \Psi_{1,0} \Psi_{1/2,1/2})], \\ &= C_1^2 (\Psi_{1,1}, \Psi_{1,1}) (\Psi_{1/2,-1/2}, \Psi_{1/2,-1/2}) + \\ &+ C_0^2 (\Psi_{1,0}, \Psi_{1,0}) (\Psi_{1/2,1/2}, \Psi_{1/2,1/2}) = C_1^2 + C_0^2 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{C_1^2 + C_0^2 = 1} . \quad (D)$$

Por outro lado, temos:  $(\Psi_{3/2,1/2}, \Psi_{1/2,1/2}) = 0$ .

Então, usando-se as expressões (B) e (C), virá:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} \Psi_{1,0} \Psi_{1/2,1/2} + \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,-1/2} \right), \left( C_1 \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,-1/2} + C_0 \Psi_{1,0} \Psi_{1/2,1/2} \right) \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} C_0 (\Psi_{1,0}, \Psi_{1,0}) (\Psi_{1/2,1/2}, \Psi_{1/2,1/2}) + \frac{C_1}{\sqrt{3}} (\Psi_{1,1}, \Psi_{1,1}) (\Psi_{1/2,-1/2}, \Psi_{1/2,-1/2})$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} C_0 + \frac{C_1}{\sqrt{3}} = 0} . \quad (E)$$

Resolvendo-se as equações (D) e (E), virá:

$$C_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} ; C_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

então:

$$\boxed{\Psi_{1/2,1/2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Psi_{1,1} \Psi_{1/2,-1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{1,0} \Psi_{1/2,1/2}} \quad (F)$$

**Exercício 4.2.7.4** Encontre:

- As demais auto-funções do Exemplo 4.2.7;
- As auto-funções do acoplamento entre os momentos angulares  $j_1 = 1$  e  $j_2 = 1$ .

## 4.2.8 Operadores Tensoriais e o Teorema de Wigner-Eckart.

**Definição 4.2.8.1** Um **Operador Tensor Esférico Irredutível de grau (“rank”) L** é um conjunto de  $2L+1$  funções

$$\widehat{T}_L^M (M=-L, -L+1, \dots, +L)$$

que se transforma sob a representação  $(2L+1)$  do grupo de rotações da seguinte maneira:

$$\widehat{R} \widehat{T}_L^M \widehat{R}^{-1} = \sum_{M'=-L}^L D_{MM'}^L(\alpha\beta\gamma) \widehat{T}_L^{M'}, \quad (58)$$

onde  $\widehat{R} = \exp(-i\theta \vec{n} \cdot \widehat{J})$  é o operador rotação, tal que:

$$\psi' = \widehat{R} \psi,$$

e

$$\widehat{O}' = \widehat{R} \widehat{O} \widehat{R}^{-1}, \quad (\widehat{O} \equiv \text{operador qualquer}).$$

Ao estudar esses tipos de tensores, Racah, em 1942, deu uma outra definição equivalente a essa dada acima, porém, em termos de regras de comutação envolvendo os operadores “**ladder**”. Então:

**Definição 4.2.8.2** Um **Operador Tensor Esférico Irredutível de grau (“rank”) L** é um conjunto de  $2L+1$  funções

$$\widehat{T}_L^M (M=-L, -L+1, \dots, +L),$$

tal que:

$$\left[ \widehat{J}_{\pm}, \widehat{T}_L^M \right] = \left[ (L \mp M) (L \pm M + 1) \right]^{1/2} \widehat{T}_L^{M \pm 1}, \quad (59a)$$

$$\left[ \widehat{J}_z, \widehat{T}_L^M \right] = \widehat{T}_L^M. \quad (59b)$$

[É oportuno observar que a demonstração da equivalência entre essas duas definições pode ser vista em Rose (op. cit.).]

A Álgebra dos **Tensores Esféricos Irredutíveis** tem certas analogias com os **Tensores Cartesianos**  $T_{ijk\dots}$  definidos por:

$$T'_{ijk\dots} = \sum_{\ell mn\dots} a_{i\ell} a_{jm} a_{kn\dots} T_{\ell mn\dots},$$

onde os  $a_{rs}$  são elementos de uma matriz ortogonal  $3 \times 3$ . Para esses tensores (Bassalo, 1973), a soma de dois deles de mesmo **grau** (“rank”), é um tensor de igual **grau**. Por outro lado, o produto de dois tensores cartesianos é um tensor cujo **grau** é a soma dos graus dos tensores fatores. Finalmente, um tensor cartesiano pode ser reduzido de um número par em seu **grau**, fazendo-se pares de índices iguais e somando-se sobre eles.

No entanto, na Álgebra dos tensores esféricos irredutíveis, enquanto a soma de dois deles de um mesmo **grau**, é um tensor de igual **grau**, o seu produto é diferente. Assim, um tensor de **grau**  $L$  pode ser construído de dois tensores de **grau**,  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente, desde que  $(L_1, L_2, L)$  satisfaça à regra do triângulo da adição de momentos angulares e os números quânticos de projeção correspondentes  $(M_1, M_2, M)$  se somem algebricamente, ou seja:

$$\widehat{T}_L^M(A_1, A_2) = \sum_{M_1, M_2} C(L_1, L_2, L; M_1, M_2, M) \widehat{T}_{L_2}^{M_2}(A_1) \widehat{T}_{L_1}^{M_1}(A_2), \quad (60)$$

com  $\Delta(L_1, L_2, L)$  e  $M = M_1 + M_2$ . (Os símbolos  $A_1$  e  $A_2$  representam outras variáveis das quais os tensores dependem além de  $L$  e  $M$ . Por exemplo, para os harmônicos esféricos,  $A_{1,2}$  representam as coordenadas angulares de um ponto no espaço.)

**Teorema 4.2.8 – Teorema de Wigner-Eckart.** A dependência do elemento de matriz  $\langle j'm' | \hat{T}_L^M | jm \rangle$  sobre os números quânticos de projeção  $(m, m')$ , está inteiramente contida no **Coefficiente de Clebsch-Gordan** através da relação:

$$\langle j'm' | \hat{T}_L^M | jm \rangle = C(jj'L; mm'M) \langle j || \hat{T}_L || j \rangle, \quad (61)$$

onde  $\langle j || \hat{T}_L || j \rangle$  é chamado de **Elemento de Matriz Reduzido** do tensor  $\hat{T}_L^M$ , e  $j, m, j', m'$  são números quânticos de momento angular.

**Demonstração:**

Tomemos a equação (59b) e calculemos o seu produto escalar entre os estados  $|j'm'\rangle$  e  $|jm\rangle$ . Assim:

$$\langle j'm' | [\hat{J}_z, \hat{T}_L^M] | jm \rangle = \langle j'm' | M \hat{T}_L^M | jm \rangle.$$

Desenvolvendo-se o comutador e aplicando a equação (50b), virá:

$$\begin{aligned}
\langle j'm' | [\hat{J}_z, \hat{T}_L^M - \hat{T}_L^M \hat{J}_z] | jm \rangle &= m' \langle j'm' | M \hat{T}_L^M | jm \rangle - m \langle j'm' | \hat{T}_L^M | jm \rangle = \\
&= M \langle j'm' | \hat{T}_L^M | jm \rangle \rightarrow \\
(m'-m-M) \langle j'm' | \hat{T}_L^M | jm \rangle &= 0 . \quad (62)
\end{aligned}$$

A expressão (62) nos mostra que  $\langle j'm' | \hat{T}_L^M | jm \rangle = 0$ , a menos que  $m' = m+M$ .

Agora, tomemos a equação (59a) e calculemos o seu produto escalar entre os estados  $|j'm'\rangle$  e  $|jm\rangle$ . Assim:

$$\langle j'm' | [\hat{J}_\pm, \hat{T}_L^M] | jm \rangle \langle j'm' | [(L \mp M)(L \pm M + 1)]^{1/2} \hat{T}_L^{M \pm 1} | jm \rangle .$$

Desenvolvendo-se o comutador do 1º membro, virá:

$$\langle j'm' | \hat{J}_\pm, \hat{T}_L^M - \hat{T}_L^M \hat{J}_\pm | jm \rangle = [(L \mp M)(L \pm M + 1)]^{1/2} \langle j'm' | \hat{T}_L^{M \pm 1} | jm \rangle .$$

Sendo:

$$\langle j'm' | \hat{J}_\pm = \hat{J}_\pm^+ | j'm' \rangle = \hat{J}_\mp | j'm' \rangle ,$$

e usando-se a equação (50c), virá:

$$\begin{aligned}
& [(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)]^{1/2} \langle j' m'_{\mp 1} | \widehat{T}_L^M | jm \rangle + \\
& - [(j' \mp m)(j' \pm m + 1)]^{1/2} \langle j' m' | \widehat{T}_L^M | jm \pm 1 \rangle = \\
& = [(L \mp M)(L \pm M + 1)]^{1/2} \langle j' m' | \widehat{T}_L^{M \pm 1} | jm \rangle. \tag{63}
\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo:

$$\widehat{J}' = \widehat{J} + \widehat{L}; \quad (\widehat{J}'_{\mp} = \widehat{J}_{\mp} + \widehat{L}_{\mp}), \tag{64a,b}$$

então, usando-se a equação (51), virá:

$$\psi_{j'm'} = \sum_{\mu, \lambda} C(jLj', \mu\lambda m') \psi_{j\mu} \psi_{L\lambda}. \tag{51}$$

Aplicando-se a essa equação, a equação (64b), virá:

$$\widehat{J}'_{\mp} \psi_{j'm'} = (\widehat{J}_{\mp} + \widehat{L}_{\mp}) \sum_{m, M} C(jLj', mM m') \psi_{jm} \psi_{LM}.$$

Usando-se as equações (50c) e (51), teremos:

$$\begin{aligned}
& [(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)]^{1/2} \psi_{j'm' \mp 1} = \sum_{m, M} [(j \pm m)(j \mp m + 1)]^{1/2} \times \\
& \times C(jLj', mM m') \psi_{j'm' \mp 1} \psi_{LM} + \sum_{m, M} [(L \pm M)(L \mp M + 1)]^{1/2} \times \\
& \times C(jLj', mM m') \psi_{jm} \psi_{LM \mp 1},
\end{aligned}$$

então:



$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu, \lambda} [(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)]^{1/2} C(jLj', \mu \lambda m' \mp 1) \psi_{j\mu} \Psi_{L\lambda} = \\
& = \sum_{m, M} [(j \pm m)(j \mp m + 1)]^{1/2} C(jLj', mMm') \psi_{j'm' \mp 1} \Psi_{LM} + \\
& + \sum_{m, M} [(L \pm M)(L \mp M + 1)]^{1/2} \times C(jLj', mMm') \psi_{jm} \Psi_{LM \mp 1}.
\end{aligned}$$

Fazendo-se no 2º membro da equação acima  $mK1 = \mu$  e  $M = \lambda$ , no 1º termo,  $m = \mu$  e  $MK1 = \lambda$ , no 2º termo virá:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu, \lambda} [(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)]^{1/2} C(jLj', \mu \lambda m' \mp 1) \psi_{j\mu} \Psi_{L\lambda} = \\
& = \sum_{\mu, \lambda} [(j \mp \mu)(j \pm \mu + 1)]^{1/2} C(jLj', \mu \pm 1 \lambda m') \psi_{j\mu} \Psi_{L\lambda} + \\
& + \sum_{\mu, \lambda} [(L \mp \lambda)(L \pm \lambda + 1)]^{1/2} \times C(jLj', \mu \lambda \pm 1 m') \psi_{j\mu} \Psi_{L\lambda}.
\end{aligned}$$

Igualando-se os coeficientes de ambos os lados da equação acima em que  $\mu = m$  e  $\lambda = M$ , e transformando-se o 1º termo do 2º membro para o 1º membro, virá:

$$\begin{aligned}
& [(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)]^{1/2} C(jLj', mMm' \mp 1) + \\
& - [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} C(jLj', m \pm 1Mm') = \\
& = [(L \mp M)(L \pm M + 1)]^{1/2} \times C(jLj', mM \pm 1m'). \quad (65)
\end{aligned}$$

Por fim, comparando-se as equações (63) e (65) vê-se que  $\langle j'm' | \hat{T}_L^M | jm \rangle$  é proporcional ao **Coefficiente de Clebsch-Gordan**  $C(jLj',mMm')$ , então:

$$\boxed{\langle j'm' | \hat{T}_L^M | jm \rangle = C(jLj',mMm') \langle j' || \hat{T}_L || j \rangle}. \quad \text{C.Q.D.}$$

Demonstrado o **Teorema de Wigner-Eckart (TWE)**, é oportuno fazermos alguns comentários sobre o mesmo.

1) O **TWE** separa as propriedades geométricas (de simetria) representadas pelo **Coefficiente de Clebsch-Gordan** de um processo físico das propriedades físicas desse mesmo processo, representadas pelo fator  $\langle j' || \hat{T}_L || j \rangle$ , que é denominado de **Elemento de Matriz Reduzido**. Portanto, esse TWE é de grande utilidade prática pois os **Coefficientes de Clebsch-Gordan** acham-se tabelados em muitos livros, como por exemplo o de Condon e Shortley, 1935;

2) Como o **TWE** envolve **Coefficientes de Clebsch-Gordan** e sendo que, para estes, temos  $\Delta(jLj')$  e  $m'=M+m$ , então oTWE traduz a **Lei da Conservação do Momento Angular**;

3) Como os componentes do tensor esférico irredutível  $\hat{T}_L^M$  podem representar os múltiplos ( $2^L - \text{pólos}$ ) de um **Campo de Maxwell**, então L representa o momentum anular da radiação emitida ou absorvida. Portanto, através do **TWE**, pode-se deduzir algumas regras de seleção da interação entre partículas carregadas e um campo de radiação.

---

**Exercício 4.2.8.1** Mostre que um tensor esférico irreduzível de grau (“rank”) 1 é relacionado a um operador vetor  $(V_x, V_y, V_z)$ , através das expressões:

$$T_1^1 = -\frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}}; \quad T_1^0 = A_z; \quad T_1^{-1} = \frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}}.$$


---

**Exercício 4.2.8.2** Mostre a equivalência entre as definições 4.2.8.a e 4.2.8.b.

---

**Exercício 4.2.8.3** Obtenha as condições que  $j$  e  $j'$  e  $m$  e  $m'$  devem satisfazer para que:

$$\text{I. } \langle jm | \hat{P}_x | j'm' \rangle \neq 0;$$

$$\text{II. } \langle jm | \hat{P}_y | j'm' \rangle \neq 0;$$

$$\text{III. } \langle jm | \hat{P}_z | j'm' \rangle \neq 0;$$

$$\text{IV. } \langle jm | \hat{P}^2 | j'm' \rangle \neq 0;$$

onde  $|\hat{P}|$  é o operador de momento linear.

**(Sugestão:** Defina os operadores  $\hat{P}_+ = \hat{P}_x + i\hat{P}_y$  e  $\hat{P}_- = \hat{P}_x - i\hat{P}_y$ , e use o resultado do Exercício 4.2.8.1)

---

# CAPÍTULO 5

## Teoria de Grupo e a Classificação das Partículas Elementares<sup>1</sup>

### 5.1 $O^+(3)$ e o Potencial Esfericamente Simétrico

A aplicação da Teoria de Grupos à Física das Partículas Elementares, é decorrente do sucesso de tal teoria no estudo das simetrias dos cristais e na do momento angular, bem como na dificuldade de encontrar a forma explícita da função potencial para a interação forte.

Antes de estudarmos a classificação das Partículas Elementares que interagem fortemente (**hádrons**), vamos estudar o espectro de energia de um sistema físico sob a ação de um potencial esfericamente simétrico, já que tal estudo nos mostrará uma relação entre a simetria do grupo de rotação  $O^+(3)$  e o estado de energia desse sistema físico. Em analogia, determinaremos a relação entre o espectro de massa dos hádrons e a simetria dos grupos  $SU(2)$  e  $SU(3)$ .

Seja uma partícula (por exemplo, um elétron) colocada em um potencial esfericamente simétrico definido por  $V(r)$ . A **equação de Schrödinger** para estados ligados da mesma é dada por:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (1a)$$

ou:

---

<sup>1</sup> Esta parte deste Capítulo foi ministrado pelo professor José Maria Filardo Bassalo no *Curso de Extensão*, realizado em 1985, na UFPA, sobre **Teoria de Grupos**.

$$\mathbf{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) . \quad (1b)$$

A solução dessa equação é dada por (Ram, 1967):

$$\Psi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_n(r)y_\ell^m(\theta, \phi) , \quad (2)$$

onde  $R_n(r)$  é solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right\} R(r) = 0, \quad (3)$$

e  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  satisfaz à seguinte equação de auto-valores:

$$\widehat{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \phi) . \quad (4)$$

Sendo  $\widehat{L}^2$  o quadrado do operador de momento angular  $\widehat{L}$  dado por:

$$\widehat{L}^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right\} , \quad (5)$$

ele satisfaz à seguinte regra de comutação:

$$\left[ \widehat{L}_i, \widehat{L}_j \right] = i\hbar \epsilon_{ijk} \widehat{L}_k \quad , \quad (i, j, k = x, y, z). \quad (6)$$

Tais operadores  $\widehat{L}_i$  ( $i=x, y, z$ ) representam os geradores do grupo  $O^+(3)$ , conforme vimos no Capítulo 4.

As várias soluções das equações (1a,b) representadas pela equação (2), são usualmente chamadas de **estados**, e dependem de três números inteiros quânticos: **n** (energia), **ℓ** (momento angular) e **m** (magnético). Por outro lado, a energia **E** correspondente a esses

estados depende apenas de  $\mathbf{n}$  e  $\ell$ . [Contudo, se  $V(r)$  for Coulombiano, então  $\mathbf{E}$  só dependerá de  $\mathbf{n}$ .] Assim, como  $\mathbf{m}$  varia de  $-\ell$  até  $+\ell$ , então a energia  $\mathbf{E}$  apresenta uma degenerescência igual a  $(2\ell + 1)$  com respeito ao número quântico  $\mathbf{m}$ . Tal degenerescência decorre do fato de que o potencial é esféricamente simétrico, isto é, não depende de  $\phi$  e  $\theta$ . Em outras palavras, isso significa dizer que a Hamiltoniana definida na equação (1b) é invariante por rotações do grupo  $O^+(3)$ .

Em linguagem da Mecânica Quântica, tal invariância significa dizer que a Hamiltoniana (1a,b) comuta com o operador  $\widehat{L}$ , isto é, que o momento angular é conservado e, em conseqüência, a mesma Hamiltoniana comuta com o operador  $\widehat{R}$  definido por:

$$\widehat{R} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta \widehat{L} \cdot \widehat{\mathbf{n}}\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^3 L_i \theta_i\right), \quad (7a,b)$$

de tal modo que:

$$\psi'(\vec{r}) = \widehat{R} \psi(\vec{r}). \quad (7c)$$

A degenerescência dos  $(2\ell + 1)$  estados de mesma energia será removida se introduzirmos na Hamiltoniana (1a,b) um termo que não seja invariante pelas transformações do grupo  $O^+(3)$ . Da Mecânica Quântica sabe-se que tal termo decorre da introdução de um campo de indução magnética  $\vec{B}$  constante conhecido como **efeito Zeeman**. Esse termo, que é o que quebra a simetria do  $O^+(3)$ , é calculado usando-se a teoria das perturbações.

**Exercício 5.1.1** Mostre que  $[\widehat{H}, \widehat{L}] = 0$ .

## 5.2 SU(2) e os Multipletos de Isospin

### 5.2.1 Introdução Histórica

As experiências de Rutherford sobre o espalhamento de partículas  $\alpha$  através de uma lâmina delgada metálica (ouro, por exemplo) e realizadas entre 1908 e 1911, levaram à descoberta do núcleo atômico e, conseqüentemente, à formulação do modelo atômico do tipo planetário por parte do próprio Rutherford. Segundo esse modelo, o átomo era formado por um “caroço” central carregado positivamente, sendo rodeado por elétrons em órbitas circulares, constituindo a chama da **eletrosfera**. Em 1919, ainda Rutherford, ao realizar experiências sobre a transmutação química de elementos, mostrou que o núcleo atômico por ele descoberto, era constituído de partículas carregadas positivamente e denominadas posteriormente de **prótons**. Em continuação dessas experiências, Rutherford aventou ainda a possibilidade de existirem partículas descarregadas no núcleo atômico. Todavia, a descoberta de tais partículas neutras só aconteceu em 1932 através das experiências de Chadwick, razão pela qual esse físico inglês é considerado o descobridor do **nêutron**.

O fato de prótons e nêutrons serem partículas constituintes do núcleo atômico, e ainda que prótons, embora juntos, não se repelirão eletrostaticamente, levou Heisenberg (e, independentemente, Iwanenko e Majorana), ainda em 1932, a propor a hipótese de que tais partículas eram mantidas juntas no núcleo atômico através de uma nova força na natureza e que, contudo, tal força era independente da carga. Assim, as partículas constituintes do núcleo, os prótons e os nêutrons, eram dois estados diferentes da mesma partícula: o **núcleon**. Para diferenciá-los, foi introduzido um novo número quântico  $I(=1/2)$ , denominado **isospin**, com projeções  $I_z = +1/2$  para o próton, e  $I_z = -1/2$  para o nêutron. [Mais tarde, a descoberta de outras partículas, tais

como os **píons** ( $\pi$ ), os **káons** (K), os **sigma** ( $\Sigma$ ), os **xi** ( $\Xi$ ), os **ro** ( $\rho$ ), e as partículas isoladas **lâmbda** ( $\Lambda$ ) e **eta** ( $\eta$ ), levou à classificação das partículas pelos multipletos de isospin. No entanto, tais partículas só se diferenciam pelo número quântico I, sendo independentes da carga elétrica.]

Muito embora o isospin nada tenha a ver com o spin, porém seus componentes (inteiros e semi-inteiros) obedecem às mesmas relações matemáticas dos estados que correspondem a valores inteiros do número quântico de momento angular. Ora, como as representações do grupo  $O^+(3)$  descrevem apenas estados de momento angular inteiro, então, havia necessidade de escolher outro grupo cujas representações envolvendo também números quânticos fracionários, pudessem então explicar os estados desses multipletos: **singleto**, **duplete**, **tripleto**, etc. Assim, o grupo que satisfaz tal condição é o  $SU(2)$ .

### 5.2.2 Álgebra e representações do $SU(2)$

No Capítulo 3 vimos que o grupo  $SU(2)$  é um grupo de **grau** (“rank”) 1, cujas representações são matrizes  $T(n \times n)$ , e que satisfazem à seguinte álgebra:

$$[T_i, T_j] = i \epsilon_{ijk} T_k, \quad (i, j, k=1, 2, 3). \quad (8)$$

Pois bem, as transformações infinitesimais desse grupo  $SU(2)$  são dadas por:

$$\psi^{\alpha'} = \left( I + i \sum_{\ell=1}^3 \delta\alpha_{\ell} T_{\ell} \right) \psi^{\alpha}. \quad (9)$$



onde  $I$  é a matriz identidade,  $T_\ell = \frac{\sigma_\ell}{2}$  ( $\sigma_\ell \equiv$  **Matrizes de Pauli**),

$\psi^\alpha$  é uma função de onda que é denominada de **spinor**.

[No caso do núcleon, tal spinor é representado por  $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ .]

Sendo o grupo **SU(2)** de **grau 1**, conforme nos referimos acima, então só existe um gerador na forma diagonal e, portanto, a dimensionalidade  $D(p)$  das representações irredutíveis desse grupo e estudadas no Capítulo 4, pode ser expressa em termos de apenas um parâmetro, **p**, isto é:

$$D(p) = p + 1, \quad (10a)$$

onde a conexão de **p** com o número quântico de spin isotópico **I**, é dada por:

$$p = 2I \rightarrow D(p) = 2I + 1, \quad (10b)$$

onde:  $I = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

**Exemplo 5.2.2** Mostrar que as matrizes dadas por:

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e que correspondem às partículas com  $I = 1/2$  (dupletos), tais como:  $(p, n)$ ,  $(\Xi^0, \Xi^-)$ ,  $(K^+, K^0)$  e  $(K^-, \bar{K}^0)$  satisfazem à equação (8).

Assim:

$$\begin{aligned}
 [T_1, T_2] &= T_1 T_2 - T_2 T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \underline{iT_3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [T_1, T_3] &= T_1 T_3 - T_3 T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i^2 \\ -i^2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= -\underline{iT_2}.
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, encontram-se os demais comutadores, completando a demonstração solicitada.

**Exercício 5.2.2.1** Complete o Exemplo 5.2.2.

**Exercício 5.2.2.2** Mostre que as matrizes dadas por:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e que corresponde às partículas com  $I=1$  (tripletos), tais como  $(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ ,  $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$  e  $(\rho^+, \rho^0, \rho^-)$ , satisfazem à equação (8).

### 5.2.3 Diagramas de pesos das representações irredutíveis de SU(2)

Quando duas partículas interagem, seus isospins se combinam para produzir estados com diferentes multiplicidades. Tais estados resultantes são obtidos através do produto tensorial entre os multipletos correspondentes às partículas interagentes. Uma maneira prática em realizar esse produto tensorial é através do diagrama de pesos de cada representação irredutível do grupo correspondente.

Assim, inicialmente, vamos construir o diagrama de pesos da representação irredutível de SU(2) correspondente ao isospin  $I = 1/2$ . Tal diagrama é obtido através dos auto-valores da representação irredutível diagonal, isto é:

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para resolver as equações de auto-estados correspondentes, vamos tomar os seguintes spinores:

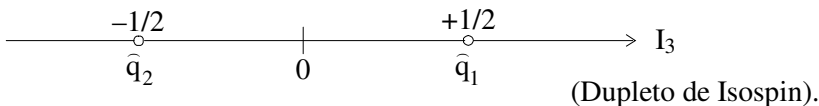
$$\hat{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ então:}$$

$$T_3 \hat{q}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{q}_1 \equiv I_3 \hat{q}_1,$$

e

$$T_3 \hat{q}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \hat{q}_2 \equiv I_3 \hat{q}_2.$$

Portanto, o diagrama de peso será:



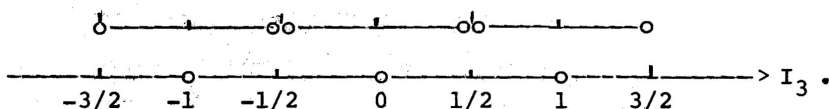
**Exercício 5.2.3** Encontre o diagrama de pesos para a representação irreduzível de  $SU(2)$  e correspondente ao isospin  $I = 1$ .

### 5.2.4 Série e Coeficientes de Clebsch-Gordan do $SU(2)$

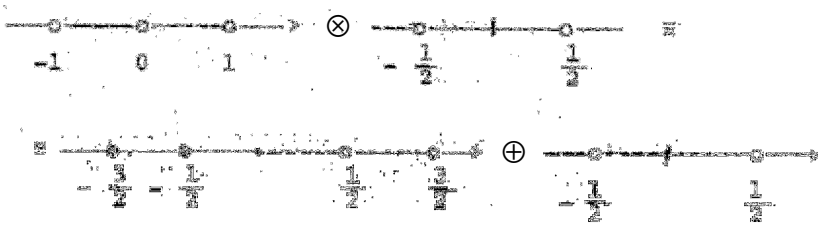
Conhecido como se obtém o diagrama de pesos de uma representação irreduzível de  $SU(2)$ , vamos efetuar o produto tensorial de duas delas. Por exemplo, efetuem os produtos  $3 \otimes 2$ , isto é:



Para obtermos a representação resultante (Williams, 1971), superpomos em cada peso da primeira representação (3), o centro de gravidade da segunda (2), ou seja:



Vê-se, portanto, que a representação resultante é redutível, pois a mesma pode ser decomposta em duas representações irreduzíveis: um quadruplete e um duplete. Assim:



ou seja:  $3 \otimes 2 = 4 \oplus 2$ , que é chamada então de **Série de Clebsch-Gordan** para o problema em questão.

Como  $SU(2)$  é homeomorfo ao  $O^3(3)$ , então os **Coefficientes de Clebsch-Gordan** de  $SU(2)$  são os mesmos de  $O^3(3)$ , já por nós tratado no Capítulo 4.

**Exercício 5.2.4** Encontre a **Série de Clebsch-Gordan** para o produto  $2 \otimes 2$ , onde  $2$  é um duplete do  $SU(2)$ .

Ao completarmos esse pequeno estudo sobre o  $SU(2)$ , é oportuno observar que os multipletos de isospin  $I$  (ou de carga) decorrentes do  $SU(2)$ , são constituídos por partículas que apresentam uma degenerescência em relação às suas massas dada por  $2I+1$ , isto é, todas as partículas de um dado multipletos têm a mesma massa. Como o isospin  $I$  é uma quantidade conservada nas interações fortes, diz-se, então, que a Hamiltoniana de interação forte é invariante por transformações de  $SU(2)$  no espaço de isospin. Contudo, tais multipletos se diferenciam pela carga elétrica  $e$ , sendo esta sensível à interação eletromagnética, portanto, a quebra de degenerescência desses multipletos ocorrerá quando um termo (que seja função da interação eletromagnética), é acrescentado à Hamiltoniana de interação forte.

## 5.3 SU(3), os Supermultipletos de Mesmo Spin-Paridade ( $J^P$ ) e os Quarks

### 5.3.1 Introdução Histórica

No final de 1947, as partículas elementares já identificadas eram as seguintes: elétron ( $e^-$ ) (J. J. Thomson, 1897); fóton ( $\gamma$ ) (Einstein, 1905; Lewis, 1926); próton (p) (Rutherford, 1919); nêutron (n) (Chadwick, 1932); pósitron ( $e^+$ ) (C. D. Anderson, 1932); múons ( $\mu^+, \mu^-$ ) (C. D. Anderson e S.H. Neddermeyer, 1936); e píons ( $\pi^+, \pi^-$ ) (Lattes, Muirhead, Occhialini e Powell, 1947). Por outro lado, as partículas previstas teoricamente por essa mesma época, eram: neutrino ( $\nu$ ) (Pauli, 1930) e pión-neutro ( $\pi^0$ ) (Kemmer, 1938), partículas essas que foram posteriormente identificadas por Cowan e Reines (1953) e por Bjorklund, Crandall, Moyer e York (1950), respectivamente. (Ver em Bassalo, 1987, 1990, 1994, as referências completas dos trabalhos citados neste Capítulo, e que não se encontram nas referências indicadas no final do livro. Mais detalhes sobre as partículas elementares, ver Veltman, 2003 e Abdalla, 2006.)

Em 20 de dezembro de 1947, a revista *Nature* trazia um trabalho assinado por Rochester e Butler, da Universidade de Manchester, no qual esses físicos apresentavam os resultados de suas experiências relacionadas com a penetração de raios cósmicos em câmaras de Wilson colocadas em grandes altitudes. Ao examinarem cerca de 5000 fotografias dessas experiências, Rochester e Butler concluíram que novos tipos de partículas, carregadas e neutras, haviam sido criadas no processo de colisão entre os raios cósmicos e o material da câmara de Wilson<sup>2</sup>. Novas experiências desses físicos de

---

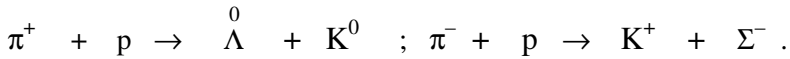
<sup>2</sup> A primeira evidência da existência de uma nova partícula que não correspondia a nenhuma conhecida foi observada por Leprince-Ringuet e M. l'Héritier, em 1944, ao examinarem a incidência de raios cósmicos em uma **câmara de Wilson**, instalada no alto de uma montanha.

Manchester, bem como de outros físicos, confirmaram a existência da dessas novas partículas, como também a de outras partículas. E mais ainda, o processo de decaimento dessas novas partículas envolviam partículas já conhecidas, principalmente núcleons e píons.

No entanto, o estudo em detalhes dessas partículas só foi possível ser feito depois da construção do **cosmotron** de 3Gev do laboratório de Brookhaven e da instalação, no mesmo, de uma **câmara de bolhas** de hidrogênio líquido (que havia sido inventada por Glaser, em 1952), para poder produzir e observar suas interações. Essas partículas foram denominadas de **estranhas** porque elas eram produzidas por interação forte entre píons e núcleons (vida média da ordem de  $10^{-23}$ s), porém seu modo de decaimento ocorria por interação fraca (vida média da ordem de  $10^{-10}$ s). Assim, no período de 1947 a 1960, foram descobertas naturalmente e/ou produzidas artificialmente, as seguintes partículas estranhas (na notação atual): **káons** ( $K^+$ ,  $K^0$ ,  $K^-$ ,  $\bar{K}^0$ ), que são mésons, porque suas massas [ $-266 m_e$  ( $m_e \equiv$  massa do elétron)] são menores que a massa dos núcleons ( $\sim 1840m_e$ ); **hyperons** [nome dado por Leprince-Ringuet (1953):  $\Lambda^0$ ;  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^0$ ,  $\Xi^-$ ], cujas massas ( $>2000m_e$ ) são maiores que as dos núcleons. Tais partículas, juntamente com as já conhecidas [píons –  $280m_e$  e núcleons], foram denominadas de **hádrons** por Okun. Estas, por sua vez, foram divididas em dois grupos: **mésons** (píons, káons) de spin inteiro; **bárions** (núcleons, hyperons) de spin fracionário.

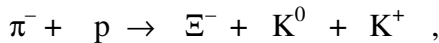
A primeira tentativa para compreender as propriedades das partículas estranhas foi feita por Pais, em 1952, ao formular a hipótese de que elas deveriam ser produzidas em pares, isto é, sua produção deveria ser **associada**. Assim, para poder explicar o mecanismo dessa produção associada, Pais propôs a existência de um novo número quântico aditivo, que seria “par” para as partículas normais (núcleons

e píons) e “ímpar” para as estranhas. Essa hipótese foi plenamente confirmada no **cosmotron** de Brookhaven, em 1953, quando Fowler, Shutt, Thorndike e Whittemore observaram as seguintes reações:



(par) + (par) = (ímpar) + (ímpar) (par) + (par) = (ímpar) + (ímpar)

Contudo, apesar do relativo sucesso do esquema de Pais, a produção da partícula estranha  $\Xi^-$  não se enquadrava nesse esquema, já que ela é produzida pela reação:



em franco desacordo com o esquema de Pais, pois: (par)+(par)  $\neq$  (ímpar) + (ímpar) + (ímpar).

Em vista das dificuldades apresentadas pelo **modelo de Pais** no sentido de explicar algumas reações envolvendo a produção de partículas estranhas, uma nova tentativa foi feita no sentido de entender o mecanismo de produção de tais partículas. Com efeito, Gell-Mann e, independentemente, Nakano e Nishijima, no mesmo ano de 1953, propuseram a existência de um novo número quântico denominado **estranheza** por Gell-Mann e **eta**, por Nishijima. Assim, segundo esses físicos, esse novo número quântico **S** (como passou a ser conhecido) se conserva nas interações fortes e eletromagnéticas e muda de uma unidade positiva ou negativa, nas interações fracas. E mais ainda, as anti-partículas hadrônicas têm S sinal contrário ao de suas respectivas partículas e as demais partículas hadrônicas têm  $S = 0$ . Em vista disso, é fácil ver que as interações fortes vistas acima, são explicadas considerando a conservação da estranheza, se forem atribuídos os seguintes valores de S: + 1, para as partículas  $K^+$  e  $K^0$ ; - 1 para  $\Lambda$  e  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$ ; -2, para as partículas  $\Xi^-$   $\Xi^+$ ; 0 para os píons e núcleons.



A construção em 1953 do **bevatron** do **Laboratório Lawrence de Radiação** da Universidade da Califórnia, em Berkeley, que acelerava prótons a uma energia cinética de 62 BeV, permitiu a descoberta de anti-partículas pesadas. Assim, em 1955, Chamberlain, Segrè, Wiegand e Ypsilantis produziram os primeiros anti-prótons ( $\bar{p}$ ) bombardeando átomos de cobre com prótons altamente energéticos, numa reação nuclear do tipo:  $p + p + p + p + \bar{p} + p$ . Logo depois, em 1956, Cork, Lambertson, Piccioni e Wenzel, produziram anti-nêutrons ( $\bar{n}$ ) ao estudarem a colisão de anti-prótons com a matéria. A produção de antiprótons e a construção de **câmaras de bolhas**, permitiu a produção de antihyperons em experiências envolvendo a colisão de um feixe de antiprótons de alta energia ( $\sim 3$  BeV), com prótons de hidrogênio líquido componente da câmara de bolhas. Desta maneira, por exemplo, foram descobertas as anti-partículas  $\bar{\Sigma}^-$ ,  $\bar{\Xi}^-$  e  $\bar{\Xi}^0$ .

Analisando as reações envolvendo as partículas estranhas, Gell-Mann e Pais (1954) e, independentemente, Nishijima (1954) estenderam o Princípio da Conservação do Spin Isotópico às interações fortes daquelas partículas. Portanto, em analogia com os isospins já conhecidos dos núcleons (p, n) e dos píons ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ ), isto é,  $I_3 = +1/2, -1/2$  e  $I_3 = 1, 0, -1$ , respectivamente, aqueles físicos atribuíram então isospin aos estados das partículas estranhas até então conhecidas, obedecendo ao seguinte esquema:  $I_3 = \Lambda^0 = 0$ , pois essa partícula só aparece com um estado de carga nula. Por outro lado, como as  $\Sigma$  aparecem em três estados de carga ( $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$ ), então  $I_3 = 1, 0, -1$ , respectivamente. Já as partículas “cascata” ( $\Xi$ ) como só apresentam dois estados de carga ( $\Xi^0$ ,  $\Xi^-$ ), então  $I_3 = +1/2, -1/2$ , respectivamente. Contudo, para os káons (K) houve, no princípio, uma certa dificuldade em definir o spin isotópico para os mesmos, já que se conheciam três estados de carga deles:  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K^0$ . No entanto, Gell-Mann e Pais, em 1955, ao estudarem o famoso “paradoxo  $\theta - \tau$ ”, isto

é, o fato de que os mésons  $\theta$  e  $\tau$ , (o nome  $\tau$  foi dado por Powell, em 1949) decaíam, respectivamente, em dois e três píons, sugeriram que  $\Theta^0(K^0)$  e  $\bar{K}^0(\bar{\Theta}^0)$  eram partículas distintas<sup>3</sup>. Em vista disso, concluíram que os mésons káons só apresentavam dois estados de carga ( $K^+$ ,  $K^0$ ), e, portanto,  $I_3 = +1/2, -1/2$ , respectivamente. O outro estado de carga  $K^-$ , juntamente com  $\bar{K}^0$ , formavam, então o par de anti-partículas dos káons.

Por outro lado, a Lei de Conservação dos Bárions, isto é, o número de bárions menos o número de anti-bárions deve permanecer constante nas interações físicas<sup>4</sup> conforme indicam experiências de produção e decaimento de partículas envolvendo bárions, associado ao fato experimental de que a carga e a componente  $I_3$  do isospin devem ser conservados nas interações fortes, levaram Gell-Mann e Nishijima, nos trabalhos referidos acima, a proporem a seguinte fórmula para o cálculo da carga elétrica de um hádron:

$$Q = e \left( I_3 + \frac{B+S}{2} \right), \text{ (e } \equiv \text{ carga do elétron)}$$

onde  $B$  é o número bariônico (que vale +1 para os bárions, -1 para os anti-bárions, e 0 para as demais partículas), e  $S$  é a estranheza já referida anteriormente. Logo depois, em 1956, Schwinger propôs o número quântico **hipercarga  $Y$**  para substituir a soma  $B+S$  na **fórmula de Gell-Mann-Nishijima**, e que representava duas vezes a carga média das partículas de mesmo isospin  $I$ . A partir daí, os físicos

---

<sup>3</sup> Tiomno, em 1950, na sua Tese de Doutorado em Princeton, já aventara a hipótese de que um bóson neutro pudesse ser diferente de sua anti-partícula.

<sup>4</sup> É oportuno salientar que as teorias modernas de Grande Unificação prevêem uma violação dessa Lei. Nelas, há a previsão do decaimento de prótons em partículas não-bariônicas, com vida média da ordem de  $10^{30}$  anos.

experimentais observaram que a produção de partículas por interação forte conservavam sempre os números quânticos  $I_3$  e  $Y$ .

A série de informações obtidas pelos físicos experimentais envolvendo os núcleons, os píons e as partículas estranhas, informações essas obtidas principalmente após a Segunda Guerra Mundial, clamava por uma ordenação na classificação dessas partículas, a exemplo de que fizera Mendeleiev, em 1869, com os elementos químicos Boyleanos, através de sua célebre **Tabela Periódica dos Elementos**. Muitas tentativas foram feitas no sentido de classificar as partículas elementares na suposição de que algumas delas são mais elementares do que outras (Segré, 1977). Por exemplo, em 1949, Fermi e Yang formularam um modelo para explicar os píons, segundo o qual, tais partículas piônicas eram estados dinamicamente ligados de núcleons ( $N$  e  $\bar{N}$ ). Contudo, a idéia de aplicar a **Álgebra do Grupo de Lie** à classificação das partículas elementares somente foi dada por Sakata, em 1956. Com efeito, assumindo o próton ( $p$ ) o nêutron ( $n$ ) e a lâmbda ( $\Lambda$ ) e as respectivas anti-partículas ( $\bar{p}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{\Lambda}$ ) como representações tripletos irredutíveis  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$  do  $SU(3)$ , Sakata mostrou que o produto tensorial entre essas duas representações ( $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ ), daria multipletos em que os mésons até então conhecidos, eram então formados por combinações de pares desses tripletos  $SU(3)$ , segundo o esquema:

$$\pi^+ = p\bar{n}; \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (p\bar{p} - n\bar{n}); \quad \pi^- = \bar{p}n; \quad K^+ = p\bar{\Lambda};$$

$$K^0 = n\bar{\Lambda}; \quad K^- = \Lambda\bar{p}; \quad \bar{K}^0 = \Lambda\bar{n}.$$

Contudo, através de novo produto tensorial entre o octeto obtido do produto  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$  e novamente o triplete  $\mathbf{3}$ , isto é,  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{15} \oplus \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}$ , Sakata não conseguiu dispor todos os bárions até então

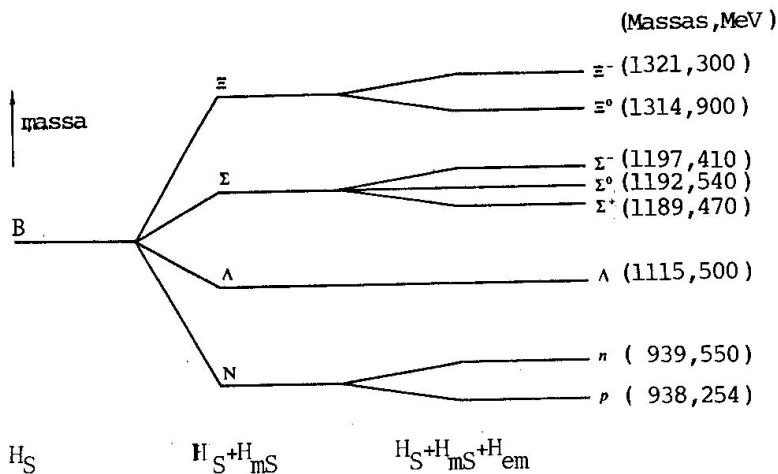
conhecidos nos multipletos formados por esse produto tensorial. Por exemplo, muito embora ele tenha mostrado que os elementos  $N\bar{N}\Lambda$  ( $S = -1$ ) e  $\bar{N}\Lambda\Lambda$  ( $S = -2$ ) de um desses multipletos pudessem representar as partículas **sigma** [ $\Sigma$  ( $\Sigma^+ = p\bar{n}\Lambda$ ;  $\Sigma^- = \bar{p}n\Lambda$ )] e **cascata** [ $\Xi$  ( $\Xi^- = \bar{p}\Lambda\Lambda$ ;  $\Xi^0 = \bar{n}\Lambda\Lambda$ )], o mesmo não acontecia com o elemento  $pn\bar{\Lambda}$  ( $S = 1$ ), já que este não representava nenhum bárion conhecido, pois não existem bárions com  $S = +1$ . Além do mais, algumas previsões decorrentes deste **modelo de Sakata**, não foram confirmadas experimentalmente, como aconteceu, por exemplo, com a não detecção de um bárion estranho de carga +2 e com a não confirmação do spin 3/2 para  $\Xi$ , ambos previstos por Sakata (experimentalmente o spin medido para  $\Xi$  era 1/2). Desta maneira, foi abandonado o modelo Sakatiano.

Para contornar tais dificuldades, desdobramentos do **modelo de Sakata** foram tentados. Assim Ikeda, Ogawa e Ohnuki (1959), Ohnuki (1960), Yamaguchi (1959) e Wess (1960), estudaram os bárions e os mésons pseudoescalares no contexto do SU(3), sem, contudo, lograrem muito êxito, a não ser a previsão de um novo méson pseudoescalar por Ohnuki, no trabalho de 1960 referido acima. Porém, o modelo que obteve maior sucesso foi o desenvolvido por Gell-Mann e, independentemente, por Ne'eman, em 1961, no qual foi admitido como supermultiplete básico, o octeto do SU(3).

Para chegarem a esse modelo, esses físicos estudaram o octeto mesônico vetorial, do qual falaremos mais adiante.

Nesse modelo, por exemplo, as partículas do octeto bariônico ( $n$ ,  $p$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Xi^0$ ,  $\Xi^-$ ) caracterizado por  $J^P = 1/2^+$ , se constituiriam em oito estados degenerados da Hamiltoniana de interação muito forte ( $H_s$ ), que seria invariante por SU(3). Por interação meio-forte ( $H_{ms}$ ), aquela degenerescência seria quebrada na hipercarga  $Y$  em quatro partes:  $N$  ( $Y = 1$ ),  $\Sigma$  e  $\Lambda$  ( $Y = 0$ ) e  $\Xi$  ( $Y = -1$ ),

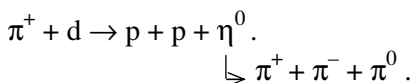
mantendo, no entanto, a simetria do SU(2) isto é, invariância do I. Por fim, a quebra de degenerescência do I seria conseguida através de interação eletromagnética ( $H_{em}$ ), quando então apareceriam os multipletos de isospin. Dentro desse esquema, o diagrama de massas dos bárions segundo o SU(3) será dado por



Um dos primeiros sucessos desse **modelo de Gell-Mann-Ne'eman**, conhecido como **Modelo do Octeto ou "Eightfold Way"**<sup>5</sup>, foi a confirmação da existência de uma nova partícula.

<sup>5</sup> O nome "via octupla" foi dado por Gell-Mann tendo em vista que seu modelo envolvia três oitos. O primeiro deles representa os oito geradores do grupo SU(3) ( $3^2 - 1 = 8$ ); o segundo relaciona-se com o número de partículas de cada octeto básico; e o terceiro relaciona-se com a frase atribuída a Buda segundo a qual o homem, para aliviar seus sofrimentos deverá seguir oito caminhos religiosos relativos a **Nobreza de seu julgamento, das suas intenções, palavras, ações, trabalho, pensamento, concentração** e da sua vida.

Com efeito, em 1961, eram conhecidos os quatro mésons  $K(K^+, K^0, K^-, \bar{K}^0)$  e os três **píons**  $\pi(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ , todas essas partículas com o mesmo spin-paridade, isto é,  $0^-$ . Portanto, à semelhança do octeto **bariônico**, esses sete mésons sugeriam a existência de um outro octeto – o **mesônico**. Deste modo, o **modelo do octeto**, previa, então, a existência de um oitavo méson, (esse méson foi denominado por Gell-Mann, em 1962, de  $\chi^0$ , e hoje se denomina  $\eta^0$ ). É oportuno salientar, que essa partícula já havia sido prevista teoricamente por Ohnuki, em 1960, conforme dissemos anteriormente) e que foi logo detectado experimentalmente por Pevsner e colaboradores, em 1961, numa reação do tipo:



No entanto, esse primeiro sucesso do **modelo do octeto** não foi completo, pois havia uma pequena dificuldade com a massa desse méson, já que ao ser a mesma estimada por intermédio da fórmula de Gell-Mann-Okubo, encontrou-se o valor de 615 Mev, enquanto a experiência de Pevsner encontrara 549 Mev. A fórmula de massa de Gell-Mann-Okubo, inicialmente obtida por Gell-Mann (1961) para o octeto dos bárions e posteriormente generalizada por Okubo (1962) para qualquer múltiplo isotópico, foi deduzida através da teoria das perturbações em 1ª ordem, estudada era Mecânica Quântica, tendo o seguinte aspecto:

$$\bar{M} = M_0 + M_1 Y + M_2 \left[ I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right],$$

onde  $M_0$ ,  $M_1$  e  $M_2$  são constantes,  $I$  e  $Y$  representam, respectivamente, o isospin e a hipercarga de um dado isomúltiplo, e

$\bar{M}$  a massa média da partícula. Tal fórmula aplicada ao octeto dos bárions dava o seguinte resultado:

$$m_N + m_{\Xi} = \frac{1}{2} \left( 3m_{\Lambda} + m_{\Sigma} \right),$$

em bom acordo (erro de apenas 0.7%) com as massas conhecidas desse octeto bariônico. Por outro lado, ao ser aplicada essa mesma fórmula ao octeto mesônico referido acima, encontrou-se:

$$m_{\eta} = \frac{1}{3} \left( 4m_K - m_{\pi} \right),$$

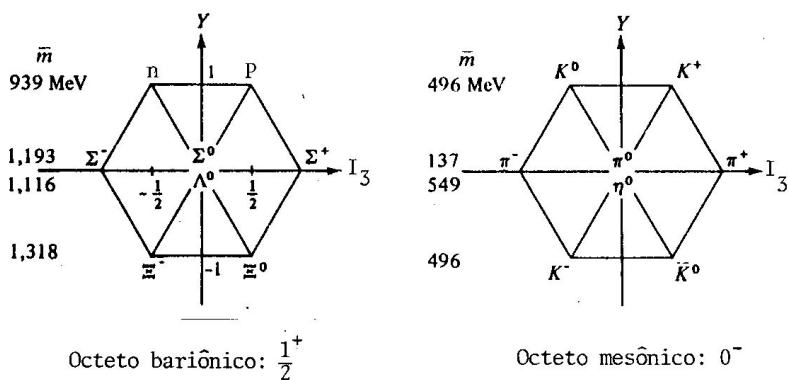
que, ao ser aplicada às massas conhecidas dos **píons** e dos **káons**, obtém-se o valor de 615 Mev para a massa da **eta** ( $\eta$ ), contra o valor experimental de 549 Mev, conforme vimos anteriormente. Essa dificuldade, no entanto, foi contornada inicialmente por de Swart (1963), de maneira “ad hoc”, e depois por Coleman e Schnitzer, em 1964, que ao usarem a “aproximação de mistura de partículas”<sup>6</sup>, demonstraram a **fórmula de Gell-Mann-Okubo** para mésons, isto é:

$$\bar{m}^2 = m_0^2 + m_1^2 Y^2 + m_2^2 \left[ I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right],$$

---

<sup>6</sup> Essa aproximação havia sido utilizada por Gell-Mann e Pais (1955) (mistura de  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$  devido à interação fraca), Glashow (1961) (mistura  $\rho - \omega$  devido à interação eletromagnética), e por Okubo (1963) [mistura  $\omega - \phi$  devido à interação desconhecida responsável pela quebra de simetria de SU(3)].

sob o argumento<sup>7</sup> que os mésons são bósons e que, portanto, a sua Hamiltoniana é do tipo Klein(1926)-Gordon(1926), na qual aparece  $\mathbf{m}^2$  ao invés de  $\mathbf{m}$ . (A presença de  $\mathbf{m}$  na fórmula de Gell-Mann-Okubo para o octeto bariônico foi justificada pelo fato de que os bárions são férmions e, portanto, a sua Hamiltoniana é do tipo Dirac, que envolve apenas a massa da partícula).



Assim, quando a fórmula de Coleman-Schnitzer-Feynman foi aplicada ao **méson**  $\eta^0$ , obteve-se o valor 567 Mev, bem próximo ao seu valor experimental de 549 Mev. Na figura anterior, estão representados os dois octetos básicos do **modelo de Gell-Mann-Ne'eman-Okubo**.

O espetacular sucesso do **modelo do octeto de Gell-Mann-Ne'eman-Okubo**, foi a previsão e posterior descoberta da partícula  $\Omega^-$ . Por ocasião desse modelo (1962), eram conhecidas

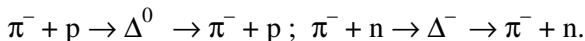
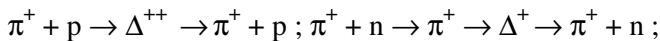
<sup>7</sup> Esse argumento havia sido sugerido por R. P. Feynman na *Gatlingburg Conference* (1958).



nove ressonâncias<sup>8</sup> bariônicas e caracterizadas por  $J^P = 3/2^+$ , a saber. Em 1952, Anderson, Fermi, Long, Martin e Nagle com auxílio do ciclotron da Universidade de Chicago, descobriram a primeira ressonância bariônica com massa de 1236 Mev e hipercarga +1, ao estudarem o espalhamento elástico de píons de alta energia por prótons de uma câmara de bolhas de hidrogênio-líquido, numa reação do tipo:



Tal reação foi interpretada como um estado excitado do núcleon. A continuação do estudo do espalhamento elástico de píons de alta energia por núcleons<sup>9</sup> (prótons e nêutrons), mostrou que existem quatro estados de carga da mesma e, portanto, seu spin isotópico é  $I = 3/2$ . Tais estados, na notação atual, são:  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^0$ ,  $\Delta^-$ , e que derivam das seguintes reações:

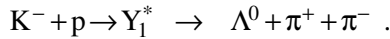


A primeira ressonância bariônica estranha ( $S = -1$ ) com massa de 1385 Mev foi descoberta por Alvarez e colaboradores, em 1960, ao estudarem o espalhamento de káons por prótons de uma câmara de bolhas, numa reação do tipo:

---

<sup>8</sup> As ressonâncias (nome emprestado da Física Nuclear) correspondem a pólos nas amplitudes de espalhamento localizadas em certas regiões do plano complexo da energia.

<sup>9</sup> Outras ressonâncias bariônicas nucleônicas foram descobertas por Diddens *et al.* em 1963, tais como:  $N^*[1920, 3/2^-, (1/2)]$ ;  $N^*[1690, 5/2^+, (1/2)]$ ;  $N^*[2190, 7/2, (1/2)]$  e  $\Delta (1950, 7/2^+, 3/2)$ . Nessa notação, o 1º número representa a massa em Mev (estamos considerando  $c = 1$ , pois:  $E = mc^2$ ), o 2º o spin-paridade ( $J^P$ ) e o 3º o isospin I.



A análise de outras reações de espalhamento de káons por prótons e nêutrons, mostrou que essas ressonâncias estranhas apresentam um isospin 1, se assemelhando, portanto aos  $\Sigma^s$  excitados, ou seja:

$$\Sigma^{+*}, \Sigma^{0*}, \Sigma^{-*} .$$

Por fim, em 1962, foi descoberta uma outra ressonância bariônica estranha ( $S = -2$ ) com massa de 1530 Mev, ainda no estudo do espalhamento de káons por prótons, no *Lawrence Radiation Laboratory*, por meio de reações do tipo:

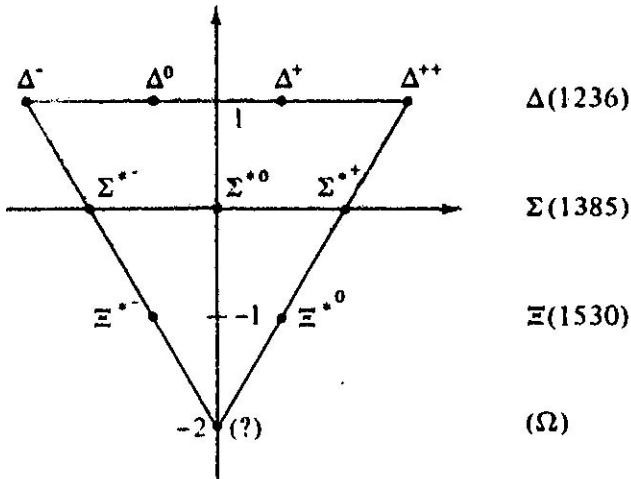


A análise de 80 exemplos de reações desse tipo levou Schlein, Carmony, Pjerrou, Slater, Stork e Ticho, em 1963, a assinalarem o spin-paridade  $3/2^+$  a essa ressonância de spin isotópico  $I = 1/2$ . Portanto, tais ressonâncias se assemelham a  $\Xi^s$  excitados, isto é:  $\Xi^{*0}, \Xi^{*-}$ .

Pois bem, de posse dessas informações sobre a existência de nove ressonâncias bariônicas e analisando membros de multipletos de SU(3) oriundos do produto tensorial:

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 27 ,$$

Gell-Mann observou que as nove ressonâncias acima referidas poderiam fazer parte do decuplete do produto acima, segundo o esquema:



Portanto, observou Gell-Mann que o decuplete seria completado com uma ressonância bariônica de estranheza  $-3$  ( $Y = B+S = 1 - 3 = -2$ ), de spin-paridade  $3/2^+$ , e deveria ser um singlete isotópico. Para determinar a massa dessa ressonância, Gell-Mann usou sua fórmula de massa, encontrando o valor de 1675 Mev, através da seguinte expressão (“Equal-Spacing Rule”):

$$m_{\Sigma} - m_{\Delta} = m_{\Xi} - m_{\Sigma} = m(\Omega^-) - m_{\Xi} .$$

Desse modo, Gell-Mann anunciou na *1962 International Conference on High-Energy Physics* realizado no CERN, Genebra, a existência da partícula  $\Omega^-$ , que completava o decuplete de bárions. Tal partícula foi descoberta em 1964, por Barnes e colaboradores (depois do exame de 97000 fotografias), em uma reação do tipo:



Ao ser estudada a distribuição de massa efetiva ou massa invariante, do sistema de dois píons que é formado nas reações acima, observou-se um pico no espectro de massa daquela distribuição. Ao ser analisado esse pico através do “plot” de Dalitz<sup>10</sup> observou-se que se tratava de uma nova ressonância [denominada por Gell-Mann (1962) de  $\rho$ ] com massa de 765 Mev, e largura de pico da ordem de 120 Mev. Outras experiências desse tipo mostraram que essa ressonância é não-estranha, tem isospin 1 e, portanto, é formada de três estados de carga:

$$\rho^+, \rho^0, \rho^- .$$

Poucos meses depois da descoberta do méson- $\rho$ , Maglic, Alvarez, Rosenfeld e Stevenson ao estudarem o espalhamento de anti-prótons por prótons de uma câmara de bolhas do **bevatron** de Berkeley, e em uma reação do tipo:

$$\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^+ + \pi^- ,$$

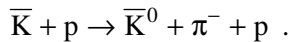
descobriram, no espectro de massa efetiva versus número de eventos para estados neutros de três píons ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ ), um pico em torno de 783 Mev, e largura da ordem de 12 Mev. A análise desse pico através do “plot” de Dalitz mostrou tratar-se de uma nova ressonância mesônica neutra e também não estranha, recebendo o nome de méson- $\omega^0$ <sup>11</sup>. O fato de não ter sido observado nenhum pico no espectro de massa efetiva versus número de eventos para estados de carga de três píons ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^{+(-)}$ ), presumiu-se que essa partícula é um isosinglete.

---

<sup>10</sup> Dalitz, em 1953, desenvolveu um diagrama bidimensional do espaço de fase para analisar a formação de estados ressonantes decorrentes do espalhamento de partículas com a formação de três ou mais partículas no estado final da reação em estudo.

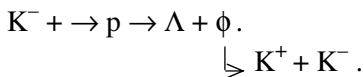
<sup>11</sup> Essa partícula se enquadrou no **modelo do octeto** com o singlete do produto  $8 \otimes 8$ , e recebeu esse nome por parte de Gell-Mann (1962). Por sua vez, Sakurai, ainda em 1962, interpretou essa partícula como um singlete unitário.

A primeira ressonância mesônica estranha<sup>12</sup> foi descoberta, ainda em 1961, por Alston, Alvarez, Eberhard, Good, Graziano, Ticho e Wojcicki, ao observarem o espalhamento de káons por prótons na câmara de bolhas do *Lawrence Radiation Laboratory*, em uma reação do tipo:



Ao ser analisado o espectro de massa do sistema  $\bar{K}^0\pi^-$ , foi observado um pico em torno de 892 Mev e largura de 50 Mev, ao qual foi dado o nome de  $K^*$ . Novas experiências desse tipo, isto é, espalhamento de káons por prótons, realizadas em 1962, mostraram que há quatro combinações de carga-hipercarga para  $K^*$ , a saber  $K^{+*}$  e  $K^{0*}$ , com  $Y = +1$ , e  $K^{+*}$  e  $\bar{K}^{0*}$ , com  $Y = -1$ , formando, portanto, dois conjuntos de dupletos de isospin ( $I = 1/2$ ): um de partículas e um de anti-partículas, exatamente análogo aos dupletos de káons.

Em 1963, Schlein e colaboradores e, independentemente, Connolly e colaboradores, ao estudarem ainda o espalhamento de káons por prótons, descobriram<sup>13</sup> uma outra ressonância mesônica de spin-paridade  $1^-$ , de massa 1019 MeV, largura da ordem de 4 MeV denotada por  $\phi$ , e resultante de uma reação do tipo:

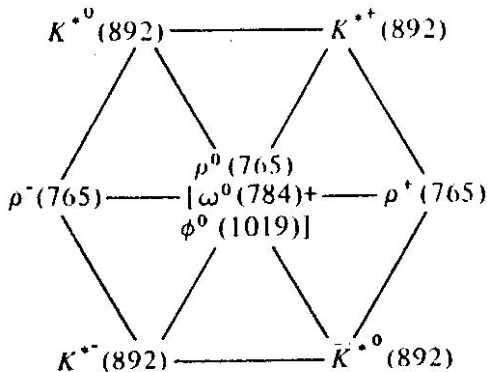



---

<sup>12</sup> Uma primeira evidência teórica da existência de tal partícula foi apresentada por Tiomno, Videira e Zagury e, independentemente, por Gell-Mann na *1960 International Conference on High-Energy Physics*, Rochester, USA.

<sup>13</sup> Essa ressonância, como hipótese teórica, já havia sido tratada por Gell-Mann (1962), com o nome de  $B^0$ .

Como não foi observado nenhum  $\phi$  carregado, isso sugeriu aos físicos que essa partícula fosse considerada como um isosinglete. Pois bem, essas eram as ressonâncias mesônicas pseudo-vetorial ( $1^-$ ) conhecidas à época do **modelo do octeto**, isto é: dois dupletos  $K^*$  (892 MeV), formados, respectivamente, por partículas e anti-partículas; um triplete  $\rho$  (765 MeV); e dois singletos  $\omega^0$  (783 MeV) e  $\phi^0$  (1019 MeV), segundo o esquema:



A primeira dificuldade que surgiu com o **modelo do octeto**, foi a impossibilidade de enquadrar essas ressonâncias mesônicas com um octeto mesônico pseudo-vetorial  $1^-$ , à semelhança do que ocorrera com o octeto mesônico pseudo-escalar  $0^-$  usando-se, em tal enquadramento, a fórmula de massa do octeto, quer com  $m$  (Gell-Mann-Okubo), quer com  $m^2$  (Coleman-Schnitzer). Em vista dessa dificuldade, procurou-se explicar<sup>14</sup> as partículas físicas  $\omega^0$  e  $\phi^0$ , como combinações lineares entre  $\omega_8$  e  $\omega_1$ , respectivamente, singlete de isospin de um octeto e singlete, ambos de SU(3), isto é:

$$|\omega_1\rangle = |\phi^0\rangle \cos\theta + |\omega^0\rangle \sin\theta,$$

<sup>14</sup> Dashen (1963); Glashow (1963); Sakurai (1963).

$$|\omega_8\rangle = -|\phi^0\rangle \sin\theta + |\omega^0\rangle \cos\theta,$$

com  $m_{\omega_1} \cong 944 \text{ MeV}$ ,  $m_{\omega_8} \cong 870 \text{ MeV}$  e  $\theta \cong 36^\circ$ .

O noneto formado pelas ressonâncias mesônicas pseudo-vetoriais ( $1^-$ ) visto acima, parece ser uma característica dos mésons. Com efeito, em 1964, Alvarez e colaboradores e, independentemente, Goldberg e colaboradores, estudando ainda o espalhamento de káons por prótons de uma câmara de bolhas, descobriram uma nova ressonância mesônica não-estranha e pseudo-escalar ( $0^-$ ), com massa da ordem de 960 MeV e denominada  $\eta^{0'}$  ou  $X^0$ . Assim, essa partícula e mais o octeto mesônico pseudo-escalar ( $0^-: K^+, K^0; K^-, \bar{K}^0; \pi^+, \pi^0, \pi^-, \eta$ ), formavam um novo noneto de mésons, desta vez, pseudo-escalar. A razão da formação desse noneto decorria do fato de que os quadrados dos elementos daquele octeto apresentavam uma pequena discrepância com relação à **fórmula de Gell-Mann-Okubo-Coleman-Schnitzer**. Portanto, as partículas reais  $\eta^0$  e  $\eta^{0,15}$  podem ser consideradas como uma mistura de  $\eta_8$  e  $\eta_1$ , isto é, isosinglete do octeto e isosinglete, ambos de SU(3), respectivamente, à semelhança das partículas  $\omega^0$  e  $\phi^0$ . Porém, neste caso, como o quadrado da massa de  $\eta^0$  (549 MeV) se ajusta muito bem à fórmula de massa do modelo do octeto, apenas uma pequena parcela da massa de  $\eta^{0'}$  compõe a massa de  $\eta_8$  enquanto  $\eta_1$  deve ter quase toda a massa de  $\eta^{0'}$  (958 MeV).

As dificuldades apontadas acima e relacionadas com os octetos dos mésons (pseudo-escalar e pseudo-vetorial), associado ainda ao fato de que não havia evidência experimental, nem do supermultiplete composto de 27 partículas e nem do antidecuplete bariônico, levaram Gell-Mann e, independentemente, Zweig, em

---

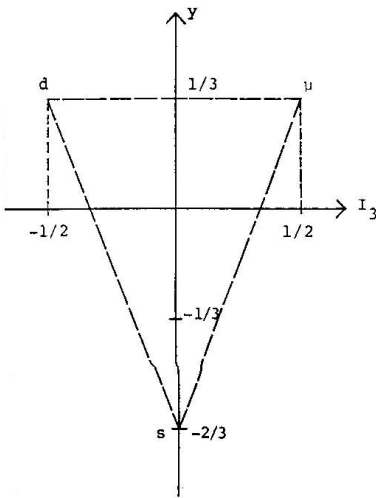
<sup>15</sup> Essa ressonância foi descoberta em 1964, por G. Kalbfleisch *et al.* e, independentemente, por M. Goldberg *et al.*



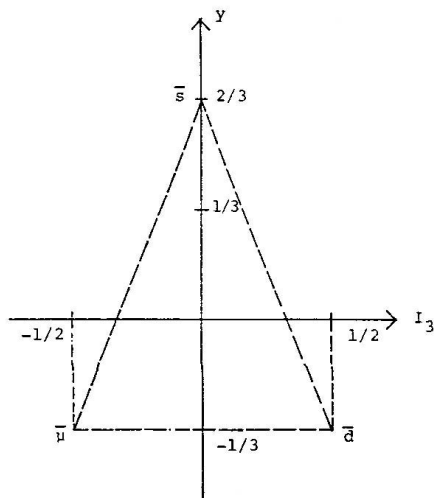
1964, a proporem uma outra representação fundamental do SU(3) para a classificação das partículas elementares. Desta vez, esses físicos consideraram um triplete como essa representação fundamental, porém, não o triplete do Sakata e sim um triplete constituído por novas partículas denominadas de **quarks** por Gell-Mann, e de **aces** por Zweig. No entanto, umas das grandes dificuldades em se considerar esse triplete fundamental, é que as partículas que o constitui deverão ter cargas elétricas e números bariônicos, ambos fracionários, segundo o seguinte esquema:

QUARK	B	J	S	I	$I_3$	Y	Q
$\mu$ (up)	1/3	1/2	0	1/2	1/2	1/3	2/3
d (down)	1/3	1/2	0	1/2	-1/2	1/3	-1/3
s (strange)	1/3	1/2	-1	0	0	-2/3	-1/3
ANTIQUARK							
$\bar{\mu}$	-1/3	1/2	0	1/2	-1/2	-1/3	-2/3
$\bar{d}$	-1/3	1/2	0	1/2	+1/2	-1/3	+1/3
$\bar{s}$	-1/3	1/2	+1	0	0	+2/3	+1/3

Usando-se a tabela acima, vê-se que o diagrama de pesos (Y versus  $I_3$ ) desses dois triplets  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$ , tem o seguinte aspecto:



Triplete de Quarks



Triplete de Antiquarks

Conhecido o diagrama de pesos dessa representação fundamental de SU(3), podemos obter os octetos mesônicos ( $0^-$ ,  $1^-$ ), o octeto bariônico ( $1/2^+$ ) e o decuplo bariônico ( $3/2^+$ ), através, respectivamente, dos seguintes produtos tensoriais:

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8; \quad 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 ,$$

produtos esses que podem ser feitos graficamente através da mesma regra usada para os múltiplos de SU(2), isto é, superpomos em cada peso do primeiro fator do produto considerado, o centro de gravidade do segundo fator. Assim, usando essa técnica pode-se mostrar, por exemplo, que:

$$\pi^+ = \mu d^-; \quad \pi^- = \bar{\mu} \bar{d}; \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - \mu\bar{\mu}); \quad K^+ = \bar{s}u;$$

$$K^0 = d\bar{s}; \quad K^- = \bar{\mu}s; \quad \bar{K}^0 = s\bar{d}; \quad \eta^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\mu\bar{\mu} - d\bar{d} + 2s\bar{s});$$

$$|\eta^0'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mu\bar{\mu} + d\bar{d} + s\bar{s}); \quad \Delta^{++} = \mu\mu\mu ;$$

$$\Delta^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mu\mu d + \mu d\mu + d\mu\mu); \quad \Lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mu d d + d\mu d + d d\mu);$$

$$\Delta^- = d d d; \quad \Sigma^{+*} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mu\mu s + \mu s\mu + s\mu\mu) ;$$

$$\Sigma^{0*} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mu d s + d\mu s + \mu s d + d s\mu + s d\mu);$$

$$\Sigma^{-*} = \frac{1}{\sqrt{3}}(dds + dsd + sdd) ; \Xi^{0*} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mu ss + s\mu s + ss\mu) ;$$

$$\Xi^{-*} = \frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd) ; \Omega^{-} = sss .$$

O modelo de quarks, com seus respectivos **sabores** (“flavours”)  $\mu$ ,  $d$ ,  $s$ , despertou um grande interesse por parte dos físicos experimentais que passaram, então, a idealizar experiências com a intenção de detectá-los. Assim, desde 1965, são realizadas experiências no sentido de encontrar quarks isolados, sendo a que maior repercussão obteve foi a realizada em 1977, por Fairbank, Larue e Hebard, físicos da Universidade de Stanford que, através de uma versão moderna da experiência de Millikan, anunciaram haver obtido partículas com cargas elétricas de  $1/3$  e  $-1/3$  da carga do elétron. Contudo, até o presente momento (05/2007), as experiências realizadas com o objetivo de detectar quarks livres, não são conclusivas.<sup>16</sup>

### 5.3.2 Álgebra e Representações Irredutíveis do SU(3)

No Capítulo 3, vimos que o grupo SU(3) é um grupo de matrizes unitárias (3x3) e de determinante +1. Tal grupo tem **grau** (“rank”) 2 ( $n-1 = 3-1=2$ ) e 8 geradores ( $n^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ ), o que significa dizer que ele tem 8 parâmetros independentes reais. Além do mais, as matrizes A que compõem esse grupo deixam invariante a

---

<sup>16</sup> Em dezembro de 2006, o consórcio de pesquisas **DZero** do *Tevatron* do *Fermilab* anunciou que havia encontrado um novo par **quark top-antiquark top**. Esses quarks foram descobertos, também, no *Fermilab*, em 1994-1995, independentemente, pelas colaborações **CDF** e **DZero**. [Alexander Hellemans, *Scientific American Brasil* **5** (59), pg. 16 (Abril, 2007).]

expressão  $|\mu|^2 + |\nu|^2 + |\omega|^2$ , onde  $\mu$ ,  $\nu$  e  $\omega$  são componentes de um vetor complexo. Portanto:

$$\begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \\ \omega' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \\ \omega \end{pmatrix}; AA^+ = I; \det A = +1.$$

Ainda naquele Capítulo, vimos que as transformações infinitesimais de SU(3) são dadas por:

$$A = I + i \sum_{\ell=1}^8 \delta a_{\ell} \chi_{\ell}, \quad (11)$$

onde  $\chi_{\ell}$  são os geradores do grupo SU(3), e satisfazem à seguinte expressão:

$$\left[ \chi_{\alpha}, \chi_{\beta} \right] = C_{\alpha\beta}^{\gamma} \chi_{\gamma}, \quad (12)$$

com  $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$  denominados de **constantes estrutura do grupo**, e  $\delta a_{\ell}$  são números reais.

Ora, como  $AA^+ = I$ , então:

$$\left( I + i \sum_{\ell=1}^8 \delta a_{\ell} \chi_{\ell} \right) \left( I - i \sum_{\ell=1}^8 \delta a_{\ell} \chi_{\ell}^+ \right) = I,$$

$$\left( I + i \sum_{\ell=1}^8 \delta a_{\ell} \right) (\chi_{\ell} - \chi_{\ell}^+) + 0 (\delta a_{\ell}^2) = I,$$

logo  $\chi_{\ell} = \chi_{\ell}^+$ , isto é, as oito matrizes geradoras do grupo SU(3) são Hermitianas. Além do mais, como  $\det A = +1$ , então  $\chi_{\ell}$  são matrizes

de **traço nulo**. Por fim, como o **grau** (“rank”) de  $SU(3)$  vale 2, então, apenas duas dessas matrizes geradoras são diagonais e comutam entre si.

Em analogia com o  $SU(2)$ , cujos geradores são as matrizes de Pauli, conforme vimos no Capítulo 3, escolheu para os 8 geradores do  $SU(3)$ , as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

### Exercício 5.3.2.1

- a) Usando o fato de que  $\det A = +1$ , demonstre que as matrizes  $\chi_\ell$  da equação (11) têm traço nulo;
- b) Mostre que apenas as matrizes  $\lambda_3$  e  $\lambda_8$  definidas em (13) comutam entre si;
- c) Usando as matrizes de Gell-Mann definidas em (13):
  - c1) Calcule as constantes de estrutura do grupo  $SU(3)$  e definidas por (12);
  - c2) Demonstre que  $\text{TR}(2\lambda_i 2\lambda_j) = 2\delta_{ij}$ ;
  - c3) Sendo:

$$\left\{ 2\lambda_i, 2\lambda_j \right\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} + 2d_{ij}^k \lambda_k$$

onde  $\{ \}$  é o anti-comutador, calcule os coeficientes  $d_{ij}^k$ .

### A. Representações do SU(3)

Com o objetivo de obter as representações do SU(3), e em analogia com o caso do momento angular, vamos escrever as matrizes geradoras do SU(3) em função de operadores **ladder** (“escada”: **levantador** e **abaixador**, vide Capítulo 4), assim definidos:

$$I_{\pm} \equiv (\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad (14a)$$

$$U_{\pm} \equiv (\lambda_6 \pm i\lambda_7) , \quad (14b)$$

$$V_{\pm} \equiv (\lambda_4 \pm i\lambda_5) . \quad (14c)$$

Além desses operadores **ladder**, vamos definir ainda os seguintes operadores:

$$I_3 \equiv \lambda_3 , \quad (14d)$$

$$Y \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_8 , \quad (14e)$$

$$U_3 - V_3 = \sqrt{3} \lambda_8 ,z \quad (14f)$$

$$I_3 + U_3 + V_3 = 0 \quad (14g)$$

---

**Exercício 5.3.2.2** Obtenha as formas explícitas das matrizes definidas pelo grupo de equações (14).

---

Usando a definição desses nove operadores e mais a regra de comutação entre as matrizes  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) dada pela equação (12) é fácil mostrar as seguintes regras de comutação entre tais operadores:

$$\begin{aligned}
 [I_3, I_{\pm}] &= \pm I_{\pm}; & [I_3, U_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} U_{\pm}; & [I_3, V_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} V_{\pm}; \\
 [U_3, I_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} I_{\pm}; & [U_3, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm}; & [U_3, V_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} V_{\pm}; \\
 [V_3, I_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} I_{\pm}; & [V_3, U_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} U_{\pm}; & [V_3, V_{\pm}] &= \mp V_{\pm}; \\
 [Y, I_{\pm}] &= 0; & [Y, U_{\pm}] &= \pm U_{\mp}; & [Y, V_{\pm}] &= \pm V_{\mp}; \\
 [Y, I_3] &= 0; & [I_{\pm}, U_{\mp}] &= [U_{\pm}, V_{\mp}] = [V_{\pm}, I_{\mp}] = 0; \\
 [I_{+}, I] &= 2I_3; & [U_{+}, U_{-}] &= 2U_3; & [V_{+}, V_{-}] &= -2V_3.
 \end{aligned} \tag{15}$$


---

**Exercício 5.3.2.3** Demonstre as relações de comutação indicadas no grupo de equações (15).

---

Como as regras de comutação entre esses operadores são uma generalização das regras de comutação para o isospin (I), então os operadores U e V caracterizam dois outros tipos de spin: **spin U** e **spin V**.

---

**Exemplo 5.3.2.1** Calcular o efeito dos operadores  $I_{\pm}$ ,  $U_{\pm}$ , e  $V_{\pm}$ .

Seja  $|I_3, Y\rangle$  um auto-vetor dos operadores  $I_3$  e  $Y$ , isto é:

$$I_3 |I_3, Y\rangle = I_3 |I_3, Y\rangle ; Y |I_3, Y\rangle = Y |I_3, Y\rangle .$$

Sendo:

$$[I_3, I_{\pm}] = \pm I_{\pm} ,$$

então:

$$\begin{aligned} I_3 (I_{\pm} |I_3, Y\rangle) &= (\pm I_{\pm} + I_{\pm} I_3) |I_3, Y\rangle = \\ &= \pm (I_{\pm}) |I_3, Y\rangle + I_{\pm} (I_3 |I_3, Y\rangle) = \\ &= \pm (I_{\pm}) |I_3, Y\rangle + I_3 (I_{\pm} |I_3, Y\rangle) , \quad \text{ou} \\ I_3 (I_{\pm} |I_3, Y\rangle) &= (I_3 \pm 1) (I_{\pm} |I_3, Y\rangle) . \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo:

$$[Y, I_{\pm}] = 0 ,$$

então:

$$Y (I_{\pm} |I_3, Y\rangle) = I_{\pm} (Y |I_3, Y\rangle) = Y (I_{\pm} |I_3, Y\rangle) .$$

Portanto, o operador  $I_{\pm}$  provoca  $\Delta Y = 0$  e  $\Delta I_3 = \pm 1$  .

Agora, vejamos o operador  $U_{\pm}$  . Assim, sendo:

$$[I_3, U_{\pm}] = \mp \frac{1}{2} U_{\pm} ,$$

então:

$$\begin{aligned} I_3 (U_{\pm} |I_3, Y\rangle) &= \left( \mp \frac{1}{2} U_{\pm} + U_{\pm} I_3 \right) |I_3, Y\rangle = \\ &= \mp \frac{1}{2} U_{\pm} |I_3, Y\rangle + U_{\pm} (I_3 |I_3, Y\rangle) = \end{aligned}$$



$$= \mp \frac{1}{2} U_{\pm} |I_3, Y\rangle + I_3 U_{\pm} |I_3, Y\rangle, \text{ ou}$$

$$I_3 (U_{\pm} |I_3, Y\rangle) = \left( I_3 \mp \frac{1}{2} \right) (U_{\pm} |I_3, Y\rangle).$$

Por outro lado, sendo:

$$[Y, U_{\pm}] = \pm U_{\pm},$$

então:

$$\begin{aligned} Y (U_{\pm} |I_3, Y\rangle) &= (\pm U_{\pm} + U_{\pm} Y) |I_3, Y\rangle = \\ &= (\pm U_{\pm} |I_3, Y\rangle) + U_{\pm} (Y |I_3, Y\rangle) = \\ &= (\pm U_{\pm} |I_3, Y\rangle) + Y (U_{\pm} |I_3, Y\rangle), \text{ ou} \end{aligned}$$

$$Y (U_{\pm} |I_3, Y\rangle) = (Y \pm 1) (U_{\pm} |I_3, Y\rangle).$$

Portanto, o operador  $U_{\pm}$  provoca  $\Delta Y = \pm 1$  e  $\Delta I_3 = \mp \frac{1}{2}$ .

Finalmente, vejamos o operador  $V_{\pm}$ . Assim, sendo:

$$[I_3, V_{\pm}] = \pm \frac{1}{2} V_{\pm},$$

então:

$$\begin{aligned} I_3 (V_{\pm} |I_3, Y\rangle) &= \left( \pm \frac{1}{2} V_{\pm} + V_{\pm} I_3 \right) |I_3, Y\rangle = \\ &= \left( \pm \frac{1}{2} V_{\pm} \right) |I_3, Y\rangle + (V_{\pm} I_3) |I_3, Y\rangle = \\ &= \left( \pm \frac{1}{2} V_{\pm} \right) |I_3, Y\rangle + V_{\pm} (I_3 |I_3, Y\rangle), \text{ ou} \end{aligned}$$

$$I_3 (V_{\pm} | I_3, Y \rangle) = \left( I_3 \pm \frac{1}{2} \right) (V_{\pm} | I_3, Y \rangle) .$$

Por outro lado, sendo:

$$[Y, V_{\pm}] = \pm V_{\pm} ,$$

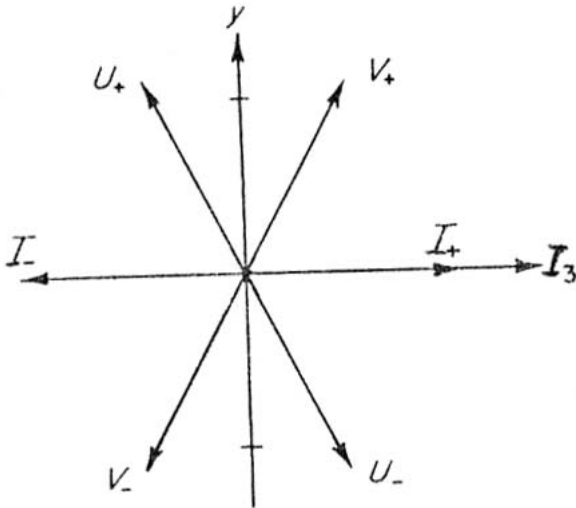
então:

$$\begin{aligned} Y (V_{\pm} | I_3, Y \rangle) &= (\pm V_{\pm} + V_{\pm} Y) | I_3, Y \rangle = \\ &= (\pm V_{\pm}) | I_3, Y \rangle + (V_{\pm} Y) | I_3, Y \rangle = \\ &= (\pm V_{\pm}) | I_3, Y \rangle + Y (V_{\pm} | I_3, Y \rangle) , \text{ ou} \end{aligned}$$

$$Y (V_{\pm} | I_3, Y \rangle) = (Y \pm 1) (V_{\pm} | I_3, Y \rangle) .$$

Desse modo, o operador  $V_{\pm}$  provoca  $\Delta Y = \pm 1$  e  $\Delta I_3 = \pm \frac{1}{2}$ .

A atuação desses três operadores **ladder** (“escada”) está indicada na figura abaixo:



Sendo o grupo  $SU(3)$  de **grau** (“rank”) 2, então existem dois geradores na forma diagonal  $(\lambda_3, \lambda_8)$  e, portanto, a dimensionalidade  $N$  das representações irredutíveis  $D^{(N)}(p, q)$  desse grupo, é expressa em função dos parâmetros  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  da seguinte forma:

$$N = \frac{1}{2} (p+1) (q+1) (p+q+2), \text{ onde } p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

A demonstração da equação (16) é feita calculando-se o número de componentes independentes dos tensores irredutíveis  $T_{b_1 b_2 \dots b_q}^{a_1 a_2 \dots a_p}$  de **grau**  $(p, q)$ , simétrico nos índices superiores e nos inferiores, e de traço nulo. Tais tensores se transformam por intermédio das transformações  $A$  definidas em (11), da seguinte maneira:

$$T_{b_1 b_2 \dots b_q}^{a_1 a_2 \dots a_p} = A_{a_1 \alpha_1} A_{a_2 \alpha_2} \dots A_{a_p \alpha_p} A_{b_1 \beta_1}^* A_{b_2 \beta_2}^* \dots A_{b_q \beta_q}^* \cdot T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \quad (17)$$

**Exercício 5.3.2.4** Demonstre a equação (16).

## B. Representações Duais

Para cada representação irredutível do grupo  $SU(3)$ , existe uma **representação dual** ou **contragrediente** que pode ou não ser distinta da que lhe deu origem. Com efeito, consideremos a seguinte equação de transformação:

$$\psi' = A\psi, \quad (18a)$$

onde  $A$  é dado pela equação (11). Tomando-se o conjugado da equação (18a), virá:

$$\psi'^* = A^* \psi^* , \quad (18b)$$

ou:

$$\psi'^* = \left[ I + i \sum_{\ell=1}^{\infty} \delta a_{\ell} (-X_{\ell}^*) \right] \psi^* . \quad (18c)$$

Em geral, nem sempre é possível obter uma transformação de similaridade  $S$  tal que tenhamos [isso só ocorre para o  $SU(2)$ ]:

$$S X_{\ell} S^{-1} = (-X_{\ell}^*) ,$$

portanto, as representações  $D^N(p, q) \equiv N$  e sua dual  $D^N(q, p) = \bar{N}$ , nem sempre são iguais.

Na tabela a seguir, vamos apresentar algumas representações irredutíveis do  $SU(3)$ :

Tensor Irredutível	(p,q)	Dimensão (N)	Representação (multipleteo)
Escalar	(0,0)	1	<b>1</b>
$T^i$	(1,0)	3	<b>3</b>
$T_i$	(0,1)	3	$\bar{\mathbf{3}}$
$T_j^i$	(1,1)	8	<b>8</b> $\equiv$ $\bar{\mathbf{8}}$
$T^{ij}$	(2,0)	6	<b>6</b>
$T_{ij}$	(0,2)	6	$\bar{\mathbf{6}}$
$T^{ijk}$	(3,0)	10	<b>10</b>
$T_{ijk}$	(0,3)	10	$\bar{\mathbf{10}}$
$T_k^{ij}$	(2,1)	15	<b>15</b>
$T_{jk}^i$	(1,2)	15	$\bar{\mathbf{15}}$
$T_{kl}^{ij}$	(2,2)	27	<b>27</b> $\equiv$ $\bar{\mathbf{27}}$

---

**Exercício 5.3.2.5** Encontre uma matriz  $S$  para a qual, tem-se:

$$S\lambda_8 S^{-1} = -\lambda_{-8}.$$


---

### 5.3.3 Diagramas de Pesos das Representações Irredutíveis de $SU(3)$

As relações de comutação vistas no grupo de equações (15) mostram que  $Y$  e  $I_3$  comutam. Por outro lado, como o grupo  $SU(3)$  é de “rank” 2, então só existem esses dois operadores lineares que comutam entre si. Assim, podemos combiná-los para formar um vetor

$$\vec{E} = (I_3, M); \quad \left( M \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} Y = \lambda_8 \right).$$

Tal definição, associada com as regras de comutação dadas pelo grupo de equações (15), mostram que:

$$\begin{aligned} [\vec{E}, I_{\pm}] &= \pm \vec{i} I_{\pm}; & [\vec{E}, V_{\pm}] &= \pm \vec{K} V_{\pm}; & [\vec{E}, U_{\pm}] &= \pm \vec{\ell} U_{\pm}; \\ [I_+, I_-] &= 2\vec{i} \cdot \vec{E}; & [V_+, V_-] &= 2\vec{K} \cdot \vec{E}; & [U_+, U_-] &= 2\vec{\ell} \cdot \vec{E}, \end{aligned} \quad (19)$$

onde os vetores unitários  $\vec{i}, \vec{K}, \vec{\ell}$  são dados por:

$$\vec{i} = (1, 0); \quad \vec{K} = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad \vec{\ell} = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (20a,b,c)$$

-----  
**Exemplo 5.3.3.1** Demonstrar o grupo de equações (19) e (29).  
 -----

Para fazermos as demonstrações solicitadas, vamos usar o grupo de equações (13), (14) e (15). Então:

$$\text{a) } \left[ \bar{\mathbf{E}}, \mathbf{I}_{\pm} \right] = \left[ \left( \mathbf{I}_3, \mathbf{M} \right), \mathbf{I}_{\pm} \right] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left[ \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_{\pm} \right] = \pm \mathbf{I}_{\pm} \\ \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{Y}, \mathbf{I}_{\pm} \right] = 0 \end{array} \right\} = \pm (1,0) \mathbf{I}_{\pm} = \pm \bar{\mathbf{i}}_{\pm};$$

$$\text{b) } \left[ \bar{\mathbf{E}}, \mathbf{V}_{\pm} \right] = \left[ \left( \mathbf{I}_3, \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{Y} \right), \mathbf{V}_{\pm} \right] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left[ \mathbf{I}_3, \mathbf{V}_{\pm} \right] = \pm \frac{1}{2} \mathbf{V}_{\pm} \\ \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{Y}, \mathbf{V}_{\pm} \right] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{V}_{\pm} \end{array} \right\} = \pm \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \mathbf{V}_{\pm} = \pm \bar{\mathbf{K}} \mathbf{V}_{\pm};$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } [\vec{E}, U_{\pm}] &= \left[ \left( I_3, \frac{\sqrt{3}}{2} - Y \right), U_{\pm} \right] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} [I_3, U_{\pm}] = \pm U_{\pm} \\ \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - Y, U_{\pm} \right] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - U_{\pm} \end{array} \right\} = \pm \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) U_{\pm} = \pm \vec{\ell}, U_{\pm} ;
 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \underline{[I_+, I_-]} = 2I_3 .$$

Ora:

$$\vec{i} \cdot \vec{E} = (1 \times I_3, + 0 \times M) = I_3, \text{ então:}$$

$$\underline{[I_+, I_-]} = 2 \vec{i} \vec{E} ;$$

$$\text{e) } [V_+, V_-] = -2 V_3 .$$

Ora:

$$2\vec{K} \cdot \vec{E} = \frac{2}{2} \times I_3 + \frac{2\sqrt{3}}{2} \times M = I_3 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - Y =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Por outro lado, temos:

$$\left. \begin{array}{l} U_3 - V_3 = \sqrt{3} \lambda_8 \\ U_3 + V_3 + I_3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 2V_3 + I_3 = -\sqrt{3} \lambda_8 \rightarrow 2V_3 = -\sqrt{3} \lambda_8 - I_3.$$

$$2V_3 = -\sqrt{3} \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2\vec{K} \cdot \vec{E}.$$

Portanto:

$$\underline{[V_+, V_-]} = +2\vec{K} \cdot \vec{E} ;$$

$$\text{f) } [U_+, U_-] = -2V_3 .$$

Ora:

$$\begin{aligned} 2\vec{\ell} \cdot \vec{E} &= -\frac{2}{2} I_3 + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} Y = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{3}{2} \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\left. \begin{array}{l} U_3 - V_3 = \sqrt{3} \lambda_8 \\ U_3 + V_3 + I_3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 2U_3 + I_3 = \sqrt{3} \lambda_8 \rightarrow 2U_3 = \sqrt{3} \lambda_8 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\vec{\ell} \cdot \vec{E} ;$$



então:

$$\underline{\left[ U_+, U_- \right] = +2 \vec{\ell} \cdot \vec{E} .}$$

**Exercício 5.3.3.1** Definindo os operadores:

$$P_I = e^{i\pi\lambda_2} ; P_K = e^{i\pi\lambda_5} ; P_P = e^{i\pi\lambda_7} ,$$

demonstre que:

$$a) P_I^{-1} \vec{E} P_I = \vec{E} - 2 \vec{i} \left( \vec{i} \cdot \vec{E} \right) ;$$

$$b) P_K^{-1} \vec{E} P_K = \vec{E} - 2 \vec{K} \left( \vec{K} \cdot \vec{E} \right) ;$$

$$c) P_\ell^{-1} \vec{E} P_\ell = \vec{E} - 2 \vec{\ell} \left( \vec{\ell} \cdot \vec{E} \right) .$$

**Definição 5.3.3.1** Chama-se de **peso** do vetor  $\vec{E}$  ao seu auto-valor, e denota-se o mesmo por  $\vec{e}$ . Assim:

$$\vec{E} | \vec{e}, \gamma \rangle = \vec{e} | \vec{e}, \gamma \rangle , \quad (21)$$

onde  $\gamma$  denota outros números quânticos diferentes de  $M \left( \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} Y \right)$ ,

$I_3$ . O  $\vec{e}$  é um vetor bi-dimensional cujas componentes são os números quânticos  $I_3$  e  $M$ , isto é:  $\vec{e} \equiv (I_3, M)$ .

**Teorema 5.3.3.1** Seja  $| \vec{e}, \gamma \rangle$  um auto-estado de  $\vec{E}$ , com auto-valor  $\vec{e}$ :

a) Se  $I_\pm | \vec{e}, \gamma \rangle = 0$ , então:

$$\vec{E} I_\pm | \vec{e}, \gamma \rangle = (\vec{e} \pm \vec{i}) I_\pm | \vec{e}, \gamma \rangle ;$$

b) Se  $V_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle = 0$ , então:

$$\bar{E} V_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle = (\bar{e} \pm \bar{K}) V_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle ;$$

c) Se  $U_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle = 0$ , então:

$$\bar{E} U_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle = (\bar{e} \pm \bar{\ell}) U_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle .$$

**Demonstração:**

a) Sendo  $[\bar{E}, I_{\pm}] = \pm i I_{\pm}$ , então:

$$\bar{E} I_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle = (\pm i I_{\pm} + I_{\pm} \bar{E}) | \bar{e}, \gamma \rangle =$$

$$= \pm i I_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle + I_{\pm} \bar{E} | \bar{e}, \gamma \rangle =$$

$$= \pm i I_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle + \bar{e} I_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle , \text{ ou:}$$

$$\underline{\bar{E} I_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle = (\bar{e} \pm i) I_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle .}$$

b) Sendo  $[\bar{E}, V_{\pm}] = \pm \bar{K} V_{\pm}$ , então:

$$\bar{E} V_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle = (\pm \bar{K} V_{\pm} + V_{\pm} \bar{E}) | \bar{e}, \gamma \rangle =$$

$$= \pm \bar{K} I_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle + V_{\pm} \bar{E} | \bar{e}, \gamma \rangle =$$

$$= \pm \bar{K} V_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle + \bar{e} V_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle , \text{ ou:}$$

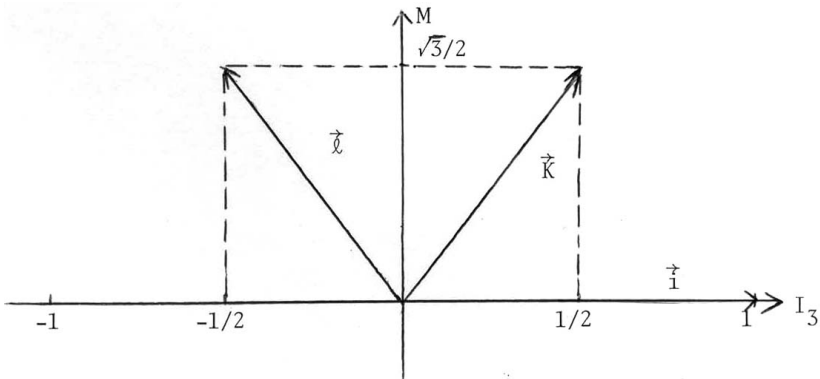
$$\underline{\vec{E} V_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle = (\bar{e} \pm \vec{K}) V_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle .}$$

c) Sendo  $[\vec{E}, U_{\pm}] = \pm \vec{\ell} U_{\pm}$ , então:

$$\begin{aligned} \vec{E} U_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle &= (\pm \vec{\ell} U_{\pm} + U_{\pm} \vec{E}) | \bar{e}, \gamma \rangle = \\ &= \pm \vec{\ell} U_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle + U_{\pm} \vec{E} | \bar{e}, \gamma \rangle = \\ &= \pm \vec{\ell} U_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle + \bar{e} U_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle, \text{ ou:} \end{aligned}$$

$$\underline{\vec{E} U_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle = (\bar{e} \pm \vec{\ell}) U_{\pm} | \bar{e}, \gamma \rangle .} \quad \text{C.Q.D.}$$

Esse teorema tem a seguinte interpretação geométrica no diagrama bi-dimensional dos auto-valores  $[\bar{e} (I_3, M)]$  de  $\vec{E}$ : Dado um peso qualquer representado pelo vetor  $\bar{e}$ , obtém-se um outro peso adicionando-se algebricamente um dos vetores  $\vec{i}, \vec{K}$  e  $\vec{\ell}$ , conforme se aplique ao vetor  $\bar{e}$ , respectivamente, os operadores  $I_{\pm}, V_{\pm}$  e  $U_{\pm}$ . No diagrama de pesos  $(I_3, M)$ , os vetores  $\vec{i}, \vec{K}$  e  $\vec{\ell}$ , têm a seguinte representação:



**Teorema 5.3.3.2** Seja  $|\bar{e}, \gamma\rangle$  um auto-vetor do operador  $\bar{E}$ , cujo autor-valor vale  $\bar{e}$ , então:

$$\bar{E} P_j |\bar{e}, \gamma\rangle = \{\bar{e} - 2\bar{j}(\bar{j} \cdot \bar{e})\} P_j |\bar{e}, \gamma\rangle,$$

onde  $\bar{j} = \bar{i}, \bar{K}$  ou  $\bar{l}$ . Em complemento, a degenerescência de  $P_j |\bar{e}, \gamma\rangle$  é a mesma de  $|\bar{e}, \gamma\rangle$ .

**Demonstração:**

Sendo (cf. Exercício 5.3.3.1)  $P_i^{-1} \bar{E} P_i = \bar{E} - 2\bar{i}(\bar{i} \cdot \bar{E})$ ,  
então:

$$P_i P_i^{-1} \bar{E} P_i = P_i \left[ \bar{E} - 2\bar{i}(\bar{i} \cdot \bar{E}) \right],$$

$$\bar{E} P_i = P_i \left[ \bar{E} - 2\bar{i}(\bar{i} \cdot \bar{E}) \right].$$

Portanto:

$$\bar{E} P_i |\bar{e}, \gamma\rangle = \left\{ P_i \left[ \bar{E} - 2\bar{i}(\bar{i} \cdot \bar{E}) \right] \right\} |\bar{e}, \gamma\rangle =$$

$$= P_i \bar{E} |\bar{e}, \gamma\rangle - 2\bar{i} P_i (\bar{i} \cdot \bar{E}) |\bar{e}, \gamma\rangle =$$

$$= \bar{e} P_i |\bar{e}, \gamma\rangle - 2\bar{i} P_i (\bar{i} \cdot \bar{e}) |\bar{e}, \gamma\rangle =$$

$$= \bar{e} P_i |\bar{e}, \gamma\rangle - 2\bar{i} (\bar{i} \cdot \bar{e}) P_i |\bar{e}, \gamma\rangle, \quad \text{ou:}$$

$$\bar{E} P_i |\bar{e}, \gamma\rangle = \left[ \bar{e} - 2\bar{i}(\bar{i} \cdot \bar{e}) \right] P_i |\bar{e}, \gamma\rangle.$$


---

Por outro lado, sendo  $P_i = e^{i\pi\lambda_2}$ , então:

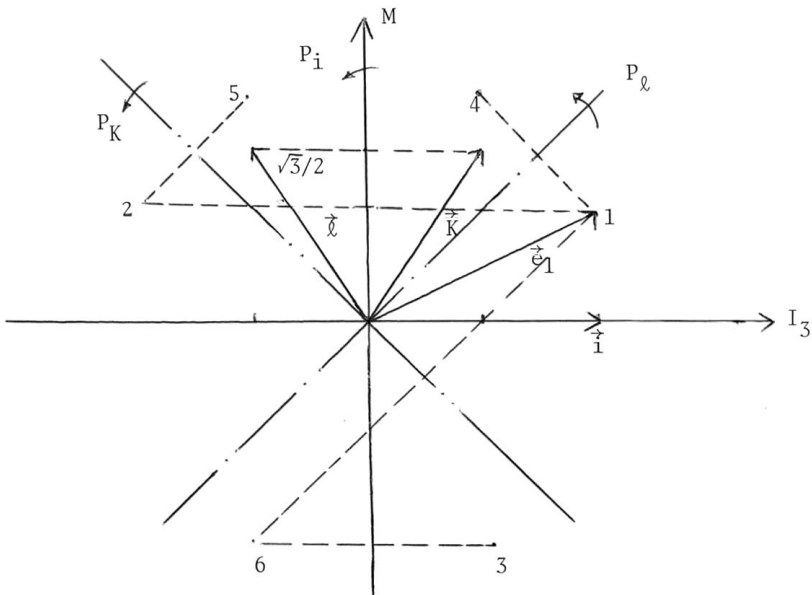
$$P_i^+ = e^{-i\pi\lambda_2^+} = e^{-i\pi\lambda_2}; \quad (\lambda_2^+ = \lambda_2),$$

e

$$P_i P_i^+ = e^{i\pi\lambda_2} \cdot e^{-i\pi\lambda_2} = I,$$

então  $P_i$  é unitário, logo ele preserva a multiplicidade do estado  $|\bar{e}, \gamma\rangle$ . De maneira análoga, demonstra o restante do teorema para  $P_K$  e  $P_P$ . C.Q.D.

Esse teorema tem a seguinte interpretação geométrica no diagrama bi-dimensional do auto-valores  $[\bar{e} (I_3, M)]$  de  $\bar{E}$ : Se  $\bar{e}_1$  é um auto-valor de  $\bar{E}$ , pode-se obter outros auto-valores de  $\bar{E}$  através dos operadores  $P_i, P_K$  e  $P_P$  que representam, respectivamente, reflexões em relação a retas perpendiculares aos vetores  $\bar{i}, \bar{K}$  e  $\bar{l}$ , conforme mostra a figura a seguir:



### **Regras Práticas para a Construção do Diagrama de Pesos de uma Representação Irredutível de SU(3).**

As relações de comutação dadas pelos grupos de equações (15), (19) e (20), acrescidas dos resultados dos Teoremas 5.3.3.1 e 5.3.3.2 e do Exemplo 5.3.2.1, permitem enunciar as seguintes regras práticas para a construção do diagrama de pesos (supermultipletos) de uma representação irredutível do grupo SU(3). (Leon, 1973; Williams, 1971; Swart, 1963; Ferreira, 1982; Armony, 1970.)

1) O diagrama de pesos de uma representação irredutível  $D^N(p,q)$  geralmente possui a forma hexagonal não re-entrante, representada num diagrama bidimensional :

$$I_3 \text{ e } Y \left( \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} M \right);$$

2) O valor máximo de  $I_3 = \frac{1}{2}(p+q)$  e seu correspondente  $Y = \frac{1}{2}(p-q)$ ;

3) O valor máximo de  $Y = \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}q$  e seu correspondente  $I_3 = \frac{p}{2}$ .

(Esta regra equivale a tomar o peso de máximo  $I_3$  e aplicar  $\mathbf{q}$  vezes o operador  $U_+$ );

4) O valor mínimo de  $Y = -\frac{2}{3}p - \frac{1}{3}q$  e seu correspondente  $I_3 = \frac{q}{2}$ .

(Esta regra equivale a tomar o peso máximo de  $I_3$  e aplicar  $\mathbf{p}$  vezes o operador  $V_-$ );

5) Todos os pesos da fronteira do diagrama de pesos têm multiplicidade um; na medida em que se caminha da fronteira para o interior do diagrama, a multiplicidade aumenta de uma unidade, até a forma diagonal transformar-se em triangular; dentro e sobre a forma triangular, a multiplicidade é constante;

6) O diagrama de pesos de uma representação irredutível do  $SU(3)$  é completamente especificada pelos números inteiros  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , os quais dão o número de espaços entre os pesos, em dois lados adjacentes da fronteira do diagrama em questão;

7) Os isomultipletos  $SU(2)$  de um dado peso, são obtidos através do operador  $I_{\pm}$ ;

8) Quando  $\mathbf{p}$  ou  $\mathbf{q}$  é nulo, o diagrama de pesos tem sempre a forma triangular de multiplicidade um;

9) Os pesos de uma representação irredutível são enumerados de 1 a  $\mathbf{n}$ , com a notação  $|\bar{n}, N\rangle$  ( $N \equiv$  dimensão da representação), e obedecendo à seguinte regra:

9a) Dentro de um isomultipeto (paralelo ao eixo  $I_3$ ), os pesos são ordenados de modo que  $I_3$  decresça;

9b) Os isomultipletos pertencentes a um mesmo  $Y$  são ordenados de modo que  $I$  decresça;

9c) Os pesos para diferentes  $Y$  são ordenados de modo que  $Y$  decresça;

9d) Para a representação dual, adota-se a convenção oposta de a) e c).

**Exemplo 5.3.3.2** Construa os diagramas de pesos das seguintes representações irredutíveis de  $SU(3)$ :

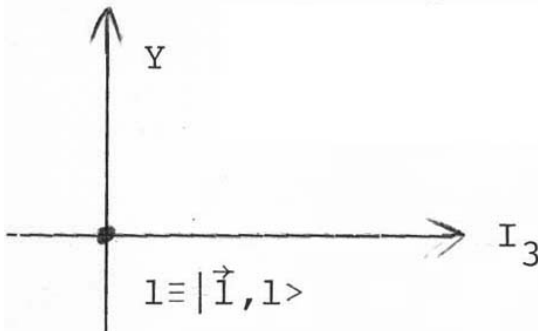
$D^1(0,0)$ ;  $D^3(1,0)$ ;  $D^3(0,1)$ ;  $D^6(2,0)$ ;  $D^8(1,1)$  e  $D^{10}(3,0)$ .

a)  $D(0,0) = \mathbf{1}$  (Singleto)

Usando-se a regra 2, temos:

$$R_2) \rightarrow I_3^{\text{máx}} = \frac{1}{2}(0+0) = 0; Y = \frac{1}{3}(0-0) = 0.$$

Portanto, o diagrama de pesos será:





b)  $D(1,0) = \mathbf{3}$  (Tripleto)

Usando-se as regras **2** e **4**, tem-se:

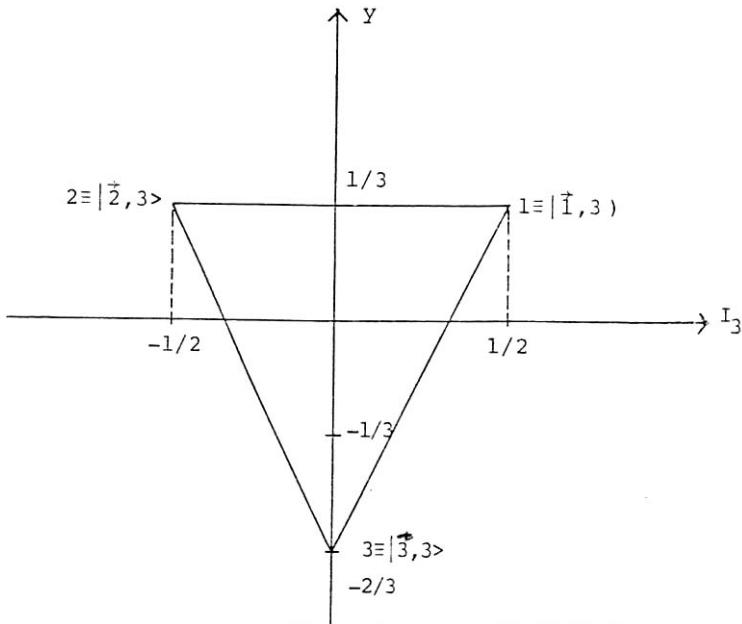
$$R2) \rightarrow I_3^{\text{máx}} = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}; Y = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3} \therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right),$$

$$R4) \rightarrow Y^{\text{min}} = -\frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 0 = -\frac{2}{3}; I_3 = \frac{0}{2} = 0 \therefore \left(0, -\frac{2}{3}\right).$$

Para obtermos o terceiro peso vamos usar o resultado do Exemplo 5.3.2.1. Assim, aplicando-se o operador L ao peso  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ , virá:

$$\left(\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right).$$

Por fim, usando-se a regra **9**, o diagrama de pesos de  $D(1,0)$  será:



c)  $D(0,1) = \bar{\mathbf{3}}$  (Antitripleto)

Usando-se as regras **2** e **3**, virá:

$$R2) \rightarrow I_3^{\text{máx}} = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}; Y = \frac{1}{3}(0-1) = -\frac{1}{3} \therefore \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right),$$

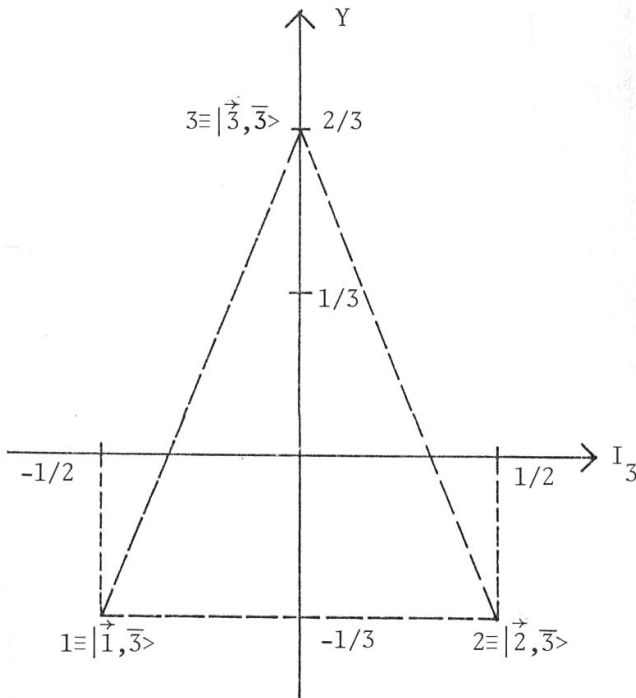
$$R3) \rightarrow Y^{\text{máx}} = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = -\frac{2}{3}; I_3 = \frac{0}{2} = 0 \therefore \left(0, \frac{2}{3}\right).$$

Para obtermos o terceiro peso vamos usar o resultado do Exemplo 5.3.2.1. Assim, aplicando-se o operador  $L$  ao peso  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ , virá:

$$\left(\frac{1}{2} - 1, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right).$$

O diagrama de  $D(0,1)$  será obtido usando-se a regra **9**.

Então:



d)  $D(2,0) = \mathbf{6}$  (Sexteto)

Usando-se as regras **2**, **3** e **4** virá:

$$R2) \rightarrow I_3^{\text{máx}} = \frac{1}{3}(2+0) = 1; Y = \frac{1}{3}(2-0) = \frac{2}{3} \therefore \left(1, \frac{2}{3}\right),$$

$$R3) \rightarrow Y^{\text{máx}} = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{2}{3}; I_3 = \frac{2}{2} = 1 \therefore \left(1, \frac{2}{3}\right),$$

$$R4) \rightarrow Y^{\text{min}} = -\frac{2}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 0 = -\frac{4}{3}; I_3 = \frac{0}{2} = 0 \therefore \left(0, -\frac{4}{3}\right).$$

Vê-se que as regras **2** e **3** dão o mesmo peso. Portanto, falta ainda encontrar 4 pesos. Como o peso  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$  tem  $I = 1$ , ele faz parte de Isotripleto. Para obter os dois pesos restantes desse triplete, vamos aplicar, sucessivamente, o operador  $L$  em  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ . Então, tem-se:

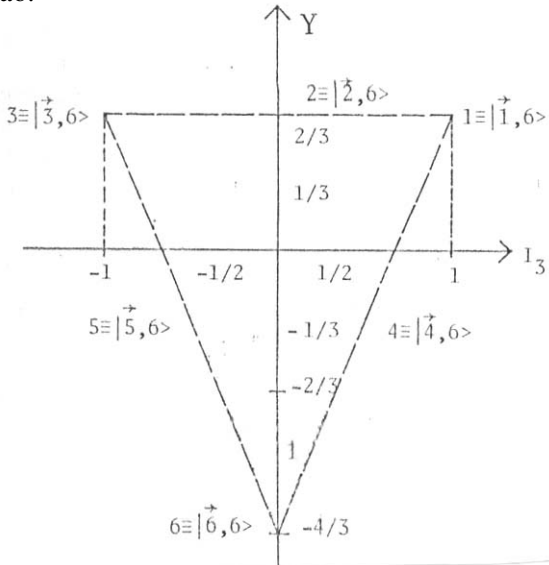
$$\left(1 - 1, \frac{2}{3}\right) = \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ e } \left(0 - 1, \frac{2}{3}\right) = \left(-1, \frac{2}{3}\right).$$

Os dois pesos finais que completam o sexteto procurado, serão obtidos usando-se o resultado do Exemplo 5.3.2.1. Assim, toma-se o peso  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$  e aplica-se, sucessivamente, os operadores  $V_-$  e  $L$ .

Então, tem-se:

$$\left(1 - \frac{1}{2}, \frac{2}{3} - 1\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \text{ e } \left(\frac{1}{2} - 1, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right).$$

Por fim, o diagrama de  $D(2,0)$  será obtido usando-se a regra 9. Então:



e)  $D(1,1) = \mathbf{8}$  (Octeto)

Usando-se as regras 2, 3 e 4 virá:

$$R2) \rightarrow I_3^{\text{máx}} = \frac{1}{2}(1+1) = 1; Y = \frac{1}{3}(1-1) = 0 \therefore (1,0),$$

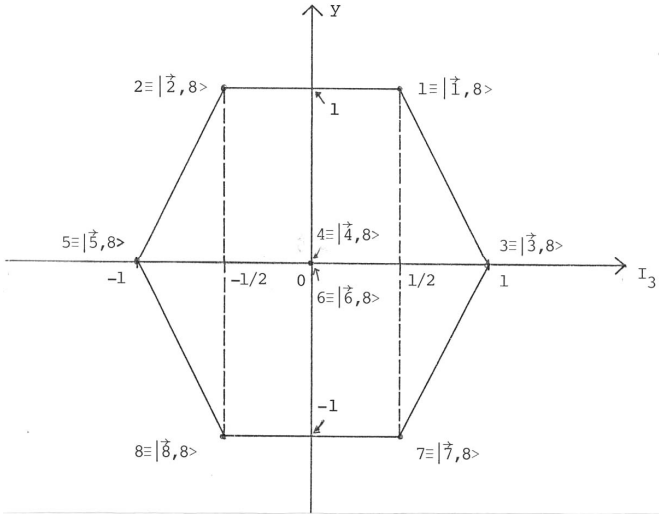
$$R3) \rightarrow Y^{\text{máx}} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 = 1; I_3 = \frac{1}{2} \therefore \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$R4) \rightarrow Y^{\text{mín}} = -\frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 = -1; I_3 = \frac{1}{2} \therefore \left(\frac{1}{2}, -1\right).$$

Para obtermos os pesos correspondentes a esses três multipletos (dois isodupletos e um isotripleto), vamos aplicar o operador  $L$ . Então, para o isotripleto  $(1,0)$ , têm-se  $(1-1,0) = (0,0)$  e  $(0-1,0) = (-1,0)$ . Para os dois isodupletos, virá:

$$\left(\frac{1}{2}-1,1\right)=\left(-\frac{1}{2},1\right) \text{ e } \left(\frac{1}{2}-1,-1\right)=\left(-\frac{1}{2},-1\right).$$

Deste modo, aplicando-se as regras **5** e **9**, o diagrama de pesos de  $D(1,1)$  tem o seguinte aspecto:



f)  $D(3,0) = \mathbf{10}$  (Decuplete)

Usando-se as regras **2**, **3** e **4** virá:

$$R2) \rightarrow I_3^{\text{máx}} = \frac{1}{2}(3+0) = \frac{3}{2}; Y = \frac{1}{3}(3-0) = 1 \therefore \left(\frac{3}{2}, 1\right),$$

$$R3) \rightarrow Y^{\text{máx}} = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 0 = 1; I_3 = \frac{3}{2} \therefore \left(\frac{3}{2}, 1\right),$$

$$R4) \rightarrow Y^{\text{mín}} = -\frac{2}{3} \times 3 - \frac{1}{3} \times 0 = -2; I_3 = \frac{0}{2} = 0 \therefore (0, -2).$$

Vê-se que as regras **2** e **3** dão o mesmo peso. Portanto, falta ainda encontrar 8 pesos. Como o peso  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$  tem  $I_3 = \frac{3}{2}$ , então ele faz parte de isoquadripleto. Para obtê-lo, vamos aplicar,

sucessivamente, o operador  $L$  em  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ . Então, têm-se:

$$\left(\frac{3}{2}-1, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{2}-1, 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{2}-1, 1\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right).$$

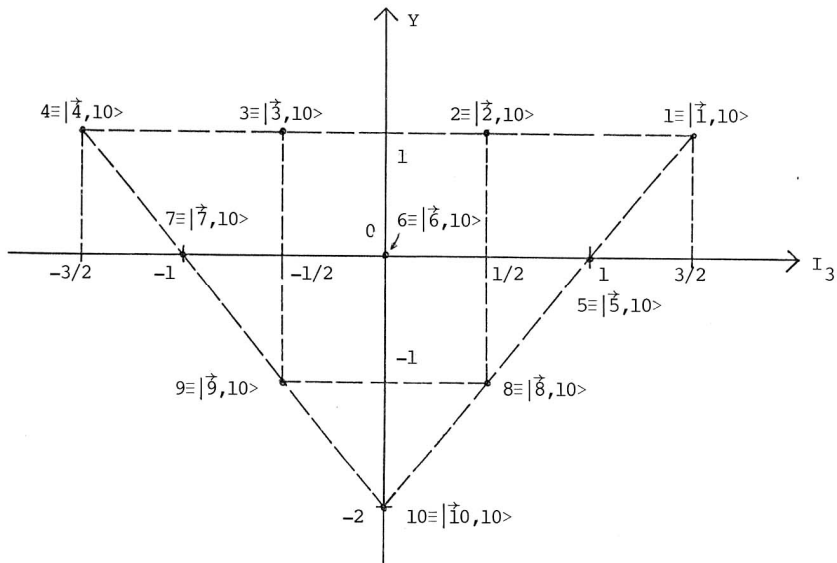
Para obter os cinco pesos restantes vamos partir do peso  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$  e aplicar, de início, o operador  $V_-$ , usando-se para isso, o resultado do Exemplo 5.3.2.1. Então, tem-se:  $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}, 1-1\right) = (1, 0)$ . Como esse

último peso tem  $I_3 = 1$ , trata-se, portanto, de um isotripleto. Assim, para encontrar seus dois outros componentes, basta aplicar nele e, sucessivamente, o operador  $L$ . Assim, virá:  $(1-1, 0) = (0, 0)$  e  $(0-1, 0) = (-1, 0)$ . Por fim, para encontrar os dois últimos pesos que compõem o decuplo procurado, bastará aplicar no peso  $(1, 0)$ , primeiro o operador  $V_-$  e depois o operador  $L$ . Assim, teremos:

$$\left(1-\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{2}-1, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Por fim, o diagrama de  $D(3, 0)$  será obtido usando-se a regra

**9.** Então:



**Exercício 5.3.3.2** Tomando-se como auto-vetores dos operadores  $I_3$  e  $Y$ , os vetores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

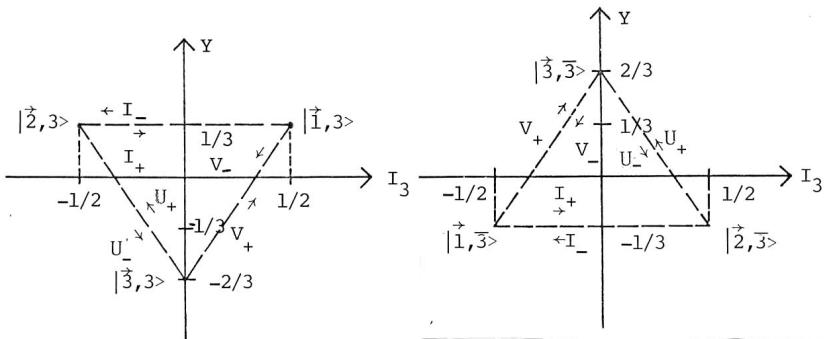
calcule os respectivos auto-valores, e construa o diagrama  $(I_3, Y)$  correspondente.

**Exercício 5.3.3.3** Encontre o diagrama de pesos das seguintes representações irredutíveis de  $SU(3)$ :

- a)  $D(0, 2) = \bar{\mathbf{6}}$ ; b)  $D(0, 3) = \bar{\mathbf{10}}$ ; c)  $D(2, 2) = \mathbf{27} = \bar{\mathbf{27}}$ ;
- d)  $D(6, 0) = \mathbf{28}$ ; e)  $D(0, 6) = \bar{\mathbf{28}}$ ; f)  $D(4, 1) = \mathbf{35}$ ;
- g)  $D(3, 3) = \mathbf{64} = \bar{\mathbf{64}}$ .

**Exemplo 5.3.3.3** Usando os resultados dos Exemplos 5.3.2.1 e 5.3.3.2, aplique os operadores  $I_{\pm}$ ,  $U_{\pm}$ ,  $V_{\pm}$  nos pesos das representações  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$ .

Segundo o Exemplo 5.3.3.2, as representações  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$  têm os seguintes diagramas  $(I_3, Y)$ :



a) Aplicação do operador  $I_{\pm}$ .

Segundo o Exemplo 5.3.2.1, dado um peso (auto-vetor)  $|I_3, Y\rangle$ , então:

$$I_{\pm} |I_3, Y\rangle = \alpha |I_3 \pm 1, Y\rangle.$$

Como os grupos  $O^+(3)$  e  $SU(2)$  são Homeomórficos (Teorema 3.5.2, Capítulo 3), é fácil mostrar que o operador  $I_{\pm}$  é semelhante ao operador de momento angular  $J_{\pm}$  (Cf. Armony, op. cit.), portanto [Cf. Eq. (43 a,b), Cap. 4]:

$$\alpha = \sqrt{(I \mp I_3)(I \pm I_3 + 1)}.$$

Em vista disto, temos:

$$I_+ |\bar{1}, 3\rangle = 0; I_- |\bar{1}, 3\rangle = |\bar{2}, 3\rangle;$$

$$I_+ |\bar{2}, 3\rangle = |\bar{1}, 3\rangle; I_- |\bar{2}, 3\rangle = 0;$$

$$I_+ |\bar{3}, 3\rangle = 0; I_- |\bar{3}, 3\rangle = 0;$$

$$I_+ |\bar{1}, \bar{3}\rangle = |\bar{2}, \bar{3}\rangle; I_- |\bar{1}, \bar{3}\rangle = 0; I_+ |\bar{2}, \bar{3}\rangle = 0; I_- |\bar{2}, \bar{3}\rangle = |\bar{1}, \bar{3}\rangle;$$

$$I_+ |\bar{3}, \bar{3}\rangle = 0; I_- |\bar{3}, \bar{3}\rangle = 0.$$

b) Aplicação do operador  $U_{\pm}$ .

Segundo o Exemplo 5.3.2.1, dado um peso  $|I_3, Y\rangle$ , temos:

$$U_{\pm} |I_3, Y\rangle = \beta |I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1\rangle.$$



Aplicando a expressão acima a cada um dos pesos de  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$ , virá (Cf. figura anterior).

$$U_+ |\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{3}\rangle = U_+ |\bar{\mathbf{2}}, \mathbf{3}\rangle = U_+ |\bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{3}}\rangle = U_+ |\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}\rangle = 0,$$

e

$$U_- |\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{3}\rangle = U_- |\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3}\rangle = U_- |\bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{3}}\rangle = U_- |\bar{\mathbf{2}}, \bar{\mathbf{3}}\rangle = 0.$$

Para os demais pesos, tem-se:

$$U_+ |\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}\rangle = \beta_1 |\bar{\mathbf{2}}, \mathbf{3}\rangle.$$

Por outro lado, segundo a equação (9), temos:

$$\left[ U_+, U_- \right] = 2 \bar{\ell} \bar{\mathbf{E}},$$

então:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} | [U_+, U_-] | \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} \rangle &= \langle \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} | U_+ U_- - U_- U_+ | \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} \rangle = \\ &= \langle \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} | U_+ U_- | \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} \rangle - \langle \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} | U_- U_+ | \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} \rangle = -\beta_1^2, \text{ pois:} \end{aligned}$$

$$\langle \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} | U_- = U_+ | \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} \rangle, \text{ portanto:}$$

$$\langle \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} | [U_+, U_-] | \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} \rangle = \langle \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} | 2 \bar{\ell} \bar{\mathbf{E}} | \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3} \rangle = -\beta_1^2.$$

Ora, segundo a equação (20c) e a definição de  $\bar{\mathbf{E}} = (I_3, M)$ , teremos:

$$2 \bar{\ell} \bar{\mathbf{E}} = 2 \left( -\frac{1}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left( -\frac{2}{3} \right) \right) = -1, \text{ portanto:}$$

$$\langle \bar{3}, 3 | 2 \bar{l} \cdot \bar{E} | \bar{3}, 3 \rangle = -1 = -\beta_1^2 \rightarrow \underline{\beta_1 = \pm 1}.$$

Escolhendo-se  $\beta_1 = 1$ , virá:

$$\underline{U_+ | \bar{3}, 3 \rangle = | \bar{2}, 3 \rangle}.$$

Agora, calculemos:

$$U_+ | \bar{2}, \bar{3} \rangle = \beta_2 | \bar{3}, 3 \rangle.$$

Analogamente ao caso anterior, teremos:

$$\begin{aligned} \langle \bar{2}, 3 | [U_+, U_-] | \bar{2}, \bar{3} \rangle &= \langle \bar{2}, \bar{3} | U_+ U_- - U_- U_+ | \bar{2}, \bar{3} \rangle = \\ &= \langle \bar{2}, \bar{3} | U_+ U_- | \bar{2}, \bar{3} \rangle - \langle \bar{2}, \bar{3} | U_- U_+ | \bar{2}, \bar{3} \rangle = -\beta_2^2. \end{aligned}$$

Sendo:

$$2 \bar{l} \cdot \bar{E} = 2 \left( -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left( -\frac{1}{3} \right) \right) = -1,$$

portanto:

$$-1 = -\beta_2^2 \rightarrow \beta_2 = 1, \text{ e}$$

$$\underline{U_+ | \bar{2}, \bar{3} \rangle = | \bar{3}, \bar{3} \rangle}.$$

Analogamente, mostra-se que:

$$\underline{U_- | \bar{2}, \bar{3} \rangle = | \bar{3}, \bar{3} \rangle} \text{ e } \underline{U_- | \bar{3}, \bar{3} \rangle = | \bar{2}, \bar{3} \rangle}.$$

c) Aplicação do operador  $V_{\pm}$ .

Segundo o Exemplo 5.3.2.1, dado um peso  $|l_3, Y\rangle$ , teremos:

$$V_{\pm} |I_3, Y\rangle = \gamma |I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1\rangle .$$

Aplicando a expressão acima a cada um dos pesos de  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$ , virá (Cf. figura anterior).

$$V_+ |\bar{1}, 3\rangle = V_+ |\bar{2}, 3\rangle = V_+ |\bar{2}, \bar{3}\rangle = V_+ |\bar{3}, \bar{3}\rangle = 0$$

e

$$V_- |\bar{2}, 3\rangle = V_- |\bar{3}, 3\rangle = V_- |\bar{1}, \bar{3}\rangle = V_- |\bar{2}, \bar{3}\rangle = 0.$$

Para os demais pesos, teremos:

$$V_+ |\bar{3}, \bar{3}\rangle = \gamma_1 |\bar{1}, 3\rangle .$$

Sendo [Cf. equação (19)], virá:

$$[V_+, V_-] = 2 \bar{K} \cdot \bar{E} ,$$

então:

$$\begin{aligned} \langle \bar{3}, 3 | [V_+, V_-] | \bar{3}, 3 \rangle &= \langle \bar{3}, 3 | V_+ V_- - V_- V_+ | \bar{3}, 3 \rangle = \\ &= \langle \bar{3}, 3 | V_+ V_- | \bar{3}, 3 \rangle - \langle \bar{3}, 3 | V_- V_+ | \bar{3}, 3 \rangle = -\gamma_1^2 . \end{aligned}$$

Por outro lado, segundo a equação (20b) e usando-se a definição de  $\bar{E} = (I_3, M)$ , virá:

$$2 \bar{K} \cdot \bar{E} = 2 \left( \frac{1}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left( -\frac{2}{3} \right) \right) = -1 ,$$

então:

$$\langle \bar{3}, 3 | [V_+, V_-] | \bar{3}, 3 \rangle = 2 \langle \bar{3}, 3 | \bar{K} \cdot \bar{E} | \bar{3}, 3 \rangle = -1 ,$$

portanto:

$$-\gamma_1^2 = -1 \rightarrow \gamma_2 = 1, \text{ logo:}$$

$$\underline{V_+ |\bar{3}, \bar{3}\rangle = |\bar{1}, \bar{3}\rangle}.$$

Analogamente, mostra-se que:

$$V_+ |\bar{1}, \bar{3}\rangle = |\bar{3}, \bar{3}\rangle; V_- |\bar{1}, \bar{3}\rangle = |\bar{3}, \bar{3}\rangle \text{ e } V_- |\bar{3}, \bar{3}\rangle = |\bar{1}, \bar{3}\rangle.$$

**Exercício 5.3.3.4** Complete o Exemplo 5.3.3.3.

### 5.3.4. Série e Coeficientes de Clebsch-Gordan de SU(3).

As representações irredutíveis de SU(3) podem ser obtidas do produto tensorial entre elas, através de:

**Definição 5.3.4.1** Dadas duas representações irredutíveis

$$D^{(\mu)}(p_1, q_1) \text{ e } D^{(\nu)}(p_2, q_2) \text{ de } SU(3),$$

a representação produto tensorial entre elas é definida por:

$$D^{(\mu)}(p_1, q_1) \otimes D^{(\nu)}(p_2, q_2) = \sum_{P, Q} \sigma(P, Q) D^{(\lambda)}(P, Q), \quad (22)$$

onde  $\sigma(P, Q)$  é um número inteiro não-negativo. Essa série definida por (22) é denominada de **Série de Clebsch-Gordan** (cf. Definição 2.6.1, Capítulo 2).

Por outro lado, como a cada representação irredutível de SU(3) podemos associar uma **base** (auto-estado) do espaço vetorial

subjacente a ela, então a **base** correspondente do produto tensorial de duas representações irredutíveis de  $SU(3)$  será dada por:

**Definição 5.3.4.2** Dadas duas representações irredutíveis

$D^{(\mu_1)}(p_1, q_1)$  e  $D^{(\mu_2)}(p_2, q_2)$  e suas respectivas bases:

$$\psi_{\mathbf{v}_1}^{(\mu_1)}(v_1=1,2,\dots,\mu_1) \quad \text{e} \quad \phi_{\mathbf{v}_2}^{(\mu_2)}(v_2=1,2,\dots,\mu_2).$$

Se  $\omega_{\mathbf{v}}^{(\mu)}(v = 1,2,\dots,\mu)$  for uma base do produto tensorial entre essas duas representações, então:

$$\omega_{\mathbf{v}}^{(\mu_\gamma)} = \sum_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v} \end{pmatrix} \psi_{\mathbf{v}_1}^{(\mu_1)} \phi_{\mathbf{v}_2}^{(\mu_2)}, \quad (23)$$

onde  $\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v} \end{pmatrix}$  são chamados os **Coefficientes de Clebsch-Gordan** (Cf. Definição 2.6.2, Cap. 2).

(Em alguns textos, usa-se a seguinte notação, que passaremos a adotar

$$\psi_{\mathbf{v}}^{(\mu)} \equiv |\mu \mathbf{v} \rangle .)$$

**Exercício 5.3.4.1** Demonstre que:

$$a) \sum_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu'_{\gamma'} \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}' \end{pmatrix} = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}; \quad (24a)$$

$$b) \sum_{\mu, \mathbf{v}, \gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \mathbf{v}'_1 & \mathbf{v}'_2 & \mathbf{v} \end{pmatrix} = \delta_{\mathbf{v}'_1 \mathbf{v}_1} \delta_{\mathbf{v}'_2 \mathbf{v}_2}. \quad (24b)$$

Para realizar o somatório indicado na equação (22), existem dois métodos: gráfico e tensorial.

### 5.3.4.1 Gráfico<sup>17</sup>

Para uma transformação infinitesimal de SU(3), tem-se:

$$\psi'_a = A_a \psi_a, \text{ onde } A_a = I + \sum_{\ell=1}^8 \delta_{aP} X_{Pa}. \quad [\text{Eq. (11)}]$$

Em vista disso, o produto tensorial de duas dessas transformações será dado por:

$$\begin{aligned} \psi'_1 \otimes \psi'_2 &= A_1 A_2 \psi_1 \otimes \psi_2 = \\ &= \left( I + i \sum_{\ell=1}^{\infty} \delta a_{\ell} X_{\ell_1} \right) \left( I + i \sum_{\ell=1}^{\infty} \delta a_{\ell} X_{\ell_2} \right) \psi_1 \otimes \psi_2 = \\ &= \left[ \left( I + i \sum_{\ell=1}^{\infty} \delta a_{\ell} \right) (X_{\ell_1} + X_{\ell_2}) + 0 (\delta a^2_{\ell}) \right] \psi_1 \otimes \psi_2. \quad (25) \end{aligned}$$

Por outro lado, como o produto tensorial de duas representações é também uma representação (Teorema 2.4.1, Capítulo 2), então:

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi'_1 \otimes \psi'_2 = A \psi = \\ &= \left( I + i \sum_{\ell=1}^{\infty} \delta a_{\ell} X_{\ell_1} \right) \psi_1 \otimes \psi_2. \quad (26) \end{aligned}$$

Comparado-se (25) e (26), virá:

$$X_{\ell_1} + X_{\ell_2} = X_{\ell}.$$

<sup>17</sup> Existe um outro método gráfico devido a D. R. Speiser (1962). Exemplos de sua aplicação podem ser vistos em de Swart (op. cit.).

Ora, como  $I_3$  e  $Y$  são operadores diagonais, então:

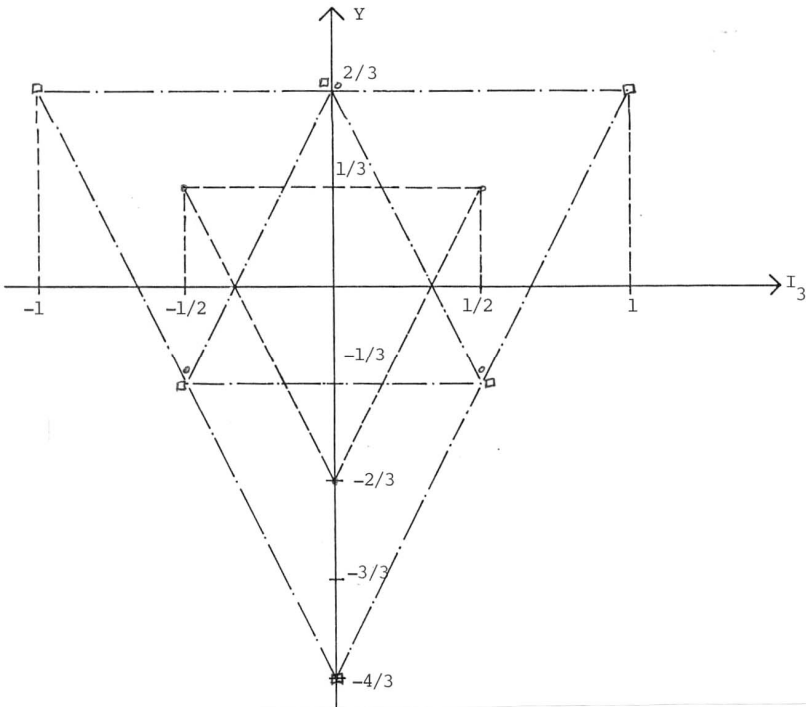
$$I_3^{(1\otimes 2)} = I_3^{(1)} + I_3^{(2)}, \quad (27a)$$

$$Y^{(1\otimes 2)} = Y^{(1)} + Y^{(2)}. \quad (27b)$$

Portanto, para efetuar graficamente o produto tensorial de duas representações irredutíveis do  $SU(3)$ , basta adicionarmos os respectivos diagramas de peso dessas representações.

**Exemplo 5.3.4.1** Efetuar o seguinte produto tensorial  $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}$ , onde  $\mathbf{3}$  é um supermultiplete de  $SU(3)$ .

Usando-se o resultado do Exemplo 5.3.4.2, teremos:



A figura anterior nos mostra que:  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$ .

---

**Exercício 5.3.4.2** Efetue, graficamente, os seguintes produtos tensoriais entre supermultipletos do SU(3):

a)  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{6}$ ; b)  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{8}$ ; c)  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ ; d)  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ ; e)  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{10}$ .

---

### 5.3.4.2 Tensorial

Para efetuarmos o produto tensorial de duas representações irredutíveis do SU(3) por intermédio do método tensorial, basta construirmos todos os produtos possíveis a partir dos tensores equivalentes às representações irredutíveis cujo produto se deseja efetuar.

---

**Exemplo 5.3.4.2** Efetuar, tensorialmente, o seguinte produto entre os supermultipletos  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$  do SU(3).

---

No item 5.3.2., vimos que:

$$\mathbf{3} \rightarrow T^i ; \bar{\mathbf{3}} \rightarrow T_j .$$

Então, para efetuarmos o produto tensorial entre essas duas representações, vamos construir todos os produtos possíveis com esses dois tensores.

$$T^i T_j \equiv S$$

Usando-se a definição (17), virá:

$$\bar{T}^i T_i = A_{ij} A_{ik}^* T^j T_k = T^j (A^+)_{ki} A_{ij} T_k =$$

$$= T^j (A^+ A)_{kj} T_k = T^j \delta_{kj} T_k = T^j T_j ,$$



logo, o produto  $T^i T_i$  é um invariante, portanto ele é um escalar cujo **rank** é (0,0), isto é, 1.

$$\text{II) } T^i T_j - \frac{1}{3} \delta_j^i T^k T_k \equiv T^i j.$$

Calculemos o traço desse tensor, ou seja:

$$T^i T_i = T^i T_i - \frac{1}{3} \delta_i^i T^k T_k .$$

Sendo  $\delta_i^i = 3$ , então:

$T^i_i = 0$ , portanto, o tensor  $T^i_j$  tem oito componentes.

Por outro lado, é fácil ver que:

$$\begin{aligned} T^i T_j &= T^i T_j + \frac{1}{3} \delta_j^i T^k T_k - \frac{1}{3} \delta_j^i T^k T_k = \\ &= \frac{1}{3} \delta_j^i T^k T_k + \left( T^i T_j - \frac{1}{3} \delta_j^i T^k T_k \right) = \\ &\equiv S + T^i_j . \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} .$$

**Exercício 5.3.4.3** Usando o método tensorial, efetue os seguintes produtos tensoriais entre supermultipletos de SU(3):

a)  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ ; b)  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ .

**Exemplo 5.3.4.3** Usando a Definição (23), calcule os **Coefficientes de Clebsch-Gordan** para o singlete do produto tensorial



$$\begin{aligned}
|\bar{1}, 1\rangle &= \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} |\bar{1}, 3\rangle |\bar{1}, \bar{3}\rangle + \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} |\bar{2}, 3\rangle |\bar{2}, \bar{3}\rangle + \\
&+ \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} |\bar{3}, 3\rangle |\bar{3}, \bar{3}\rangle = \\
&= \alpha |\bar{1}, 3\rangle |\bar{1}, \bar{3}\rangle + \beta |\bar{2}, 3\rangle |\bar{2}, \bar{3}\rangle + \gamma |\bar{3}, 3\rangle |\bar{3}, \bar{3}\rangle .
\end{aligned}$$

Para calcularmos os **Coefficientes de Clebsch-Gordan**  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , apliquemos ao auto-vetor  $|\bar{1}, 1\rangle$  os operadores  $I_+$  e  $V_+$ . Assim:

$$I_+ |\bar{1}, 1\rangle = I_+ \left[ \alpha |\bar{1}, 3\rangle |\bar{1}, \bar{3}\rangle + \beta |\bar{2}, 3\rangle |\bar{2}, \bar{3}\rangle + \gamma |\bar{3}, 3\rangle |\bar{3}, \bar{3}\rangle \right].$$

Ora, como  $I_+$  é um operador que faz  $I_3$  crescer de uma unidade e como  $|\bar{1}, 1\rangle$  tem um  $I_3$  máximo, então:

$$I_+ |\bar{1}, 1\rangle = 0.$$

Por outro lado, usando-se o resultado do Exemplo 5.3.3.3, virá:

$$\begin{aligned}
I_+ |\bar{1}, 1\rangle = 0 &= \alpha |\bar{1}, 3\rangle |\bar{2}, \bar{3}\rangle + \beta |\bar{1}, 3\rangle |\bar{2}, \bar{3}\rangle = \\
&= (\alpha + \beta) |\bar{1}, 3\rangle |\bar{2}, \bar{3}\rangle \Rightarrow \underline{\alpha = -\beta}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, usando-se os Exemplos 5.3.2.1 e 5.3.3.3, e o fato de que  $|\bar{1}, 1\rangle$  é um singlete, então:

$$\begin{aligned}
V_+ |\bar{1}, 1\rangle = 0 &= \alpha |\bar{1}, 3\rangle |\bar{3}, \bar{3}\rangle + \gamma |\bar{1}, 3\rangle |\bar{3}, \bar{3}\rangle = \\
&= (\alpha + \gamma) |\bar{1}, 3\rangle |\bar{3}, \bar{3}\rangle \Rightarrow \underline{\alpha = -\gamma}.
\end{aligned}$$

Como os auto-vetores das representações irredutíveis de  $SU(3)$  são ortogonais, isto é:

$$\begin{aligned} \langle \bar{1}, 1 | \bar{1}, 1 \rangle &= \langle \bar{1}, \bar{3} | \langle \bar{1}, 3 | \bar{1}, 3 \rangle | \bar{1}, \bar{3} \rangle + \langle \bar{2}, \bar{3} | \langle \bar{2}, 3 | \bar{2}, 3 \rangle | \bar{2}, \bar{3} \rangle = \\ &= \langle \bar{3}, \bar{3} | \langle \bar{3}, 3 | \bar{3}, 3 \rangle | \bar{3}, \bar{3} \rangle = 1, \end{aligned}$$

portanto:

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Escolhendo-se o sinal mais (+), virá:

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Exercício 5.3.4.4** Calcule os seguintes **Coefficientes de Clebsch-Gordan** de:

a)  $3 \otimes \bar{3} \rightarrow 8,$

b)  $8 \otimes 8 \rightarrow 10.$

### 5.3.5 Fatores Isoescalares e Teorema de Wigner- Eckart

Como o  $SU(2) \subset SU(3)$ , então existe uma relação entre os **Coefficientes de Clebsch-Gordan** desses grupos, dada por (Williams, op. cit.):

$$\begin{pmatrix} \mu_{(1)} & \mu_{(2)} & \mu_{(\gamma)} \\ \nu_{(1)} & \nu_{(2)} & \nu \end{pmatrix} = C(I_{(1)} I_{(2)} I; I_{3(1)} I_{3(2)} I_3) \times$$

$$\times \left( \begin{array}{cc|c} \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \mu^{(\gamma)} \\ \mathbf{I}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)} & \mathbf{I}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)} & \mathbf{I}, \mathbf{Y} \end{array} \right), \quad (28)$$

onde

$$\left( \begin{array}{cc|c} \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \mu^{(\gamma)} \\ \mathbf{I}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)} & \mathbf{I}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)} & \mathbf{I}, \mathbf{Y} \end{array} \right)$$

é chamado de **fator isoescalar** e que satisfaz à:

$$\begin{aligned} |\mu, \nu\rangle_{\gamma} = & \sum_{\substack{\mathbf{I}_{3(1)}, \mathbf{I}_{3(2)} \\ \mathbf{Y}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(2)}}} \left( \begin{array}{cc|c} \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \mu^{(\gamma)} \\ \mathbf{I}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)} & \mathbf{I}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)} & \mathbf{I}, \mathbf{Y} \end{array} \right) \times \\ & \times |\mathbf{I}_3, \mathbf{Y}, \mu_{(1)} \mu_{(2)}\rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

onde:

$$|\mathbf{I}_3, \mathbf{Y}, \mu_{(1)} \mu_{(2)}\rangle = \sum_{\mathbf{I}_{3(1)}, \mathbf{I}_{3(2)}} C(\mathbf{I}_{(1)} \mathbf{I}_{(2)} \mathbf{I}; \mathbf{I}_{3(1)} \mathbf{I}_{3(2)} \mathbf{I}_3) \times \quad (30)$$

$$\times |\mu_{(1)} \nu_{(2)}\rangle |\mu_{(2)} \nu_{(2)}\rangle.$$

De maneira análoga ao caso de SU(2), existe também um Teorema de Wigner-Eckart para o SU(3):

$$\begin{aligned} \langle \mu_{(2)}, \nu_{(2)} | T_{(\mu, \nu)} | \mu_{(1)}, \nu_{(1)} \rangle = \\ = \sum_{\gamma} \left( \begin{array}{ccc} \mu^{(1)} & \mu & \mu_{(2)} \gamma \\ \nu_{(1)} & \nu & \nu_{(2)} \end{array} \right) \langle \mu_{(2)} \| T(\mu) \| \mu_{(1)} \rangle_{\gamma}, \end{aligned} \quad (31)$$

cuja demonstração encontra-se em Swart (op.cit.).

O termo  $\langle \mu_{(2)} \| T(\mu) \| \mu_{(1)} \rangle_{\gamma}$  é chamado de **Elemento de Matriz Reduzido**, que independe dos números quânticos associados a  $\nu$ .

---

**Exercício 5.3.4.5** Calcule os fatores isoescalares para o decuplo do produto  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ .

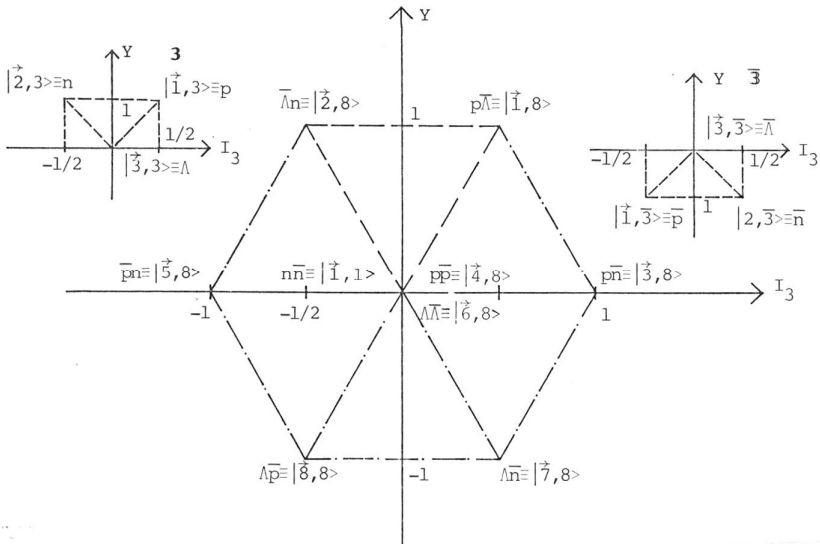
---

## 5.4 Modelos em SU(3) para as Partículas Elementares

### 5.4.1 Modelo de Sakata

A descoberta de um grande número de partículas elementares, principalmente após a *Segunda Guerra Mundial*, ensejou que se tentasse uma classificação das mesmas partindo da hipótese de que algumas delas são mais elementares do que outras. A primeira tentativa foi feita por Fermi e Yang, em 1949, conforme vimos anteriormente. Segundo esses dois Nobelitas, os píons eram estados dinamicamente ligados de núcleons e anti-núcleons.

No entanto, a idéia de aplicar a Álgebra dos Grupos de Lie à classificação das partículas elementares foi sugerida por Shoichi Sakata, em 1956, ao assumir que o próton, o nêutron e a partícula  $\Lambda$  constituíam um tripleto SU(3) fundamental, a partir do qual as demais partículas são derivadas. Assim, ao efetuar o produto tensorial entre o tripleto  $(p, n, \Lambda)$  e o anti-triplo  $(\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda})$ , Sakata enquadró os mésons até então conhecidos como elementos daquele produto. Vejamos de que maneira. Usando o método gráfico usado no item 5.3.4.a, o produto tensorial  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$  de Sakata, será:



A figura acima nos mostra que  $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ . Portanto, é fácil ver que o octeto resultante pode representar os oito mésons conhecidos à época de Sakata, de acordo com o seguinte esquema (observar que  $Y = B + S$ ):

$$K^+ = ap \bar{\Lambda}, \text{ pois } Y(K^+) = Y(p \bar{\Lambda}) = 1 ;$$

$$K^0 = bn \bar{\Lambda}, \text{ pois } Y(K^0) = Y(n \bar{\Lambda}) = 1 ;$$

$$K^- = c \bar{n} \Lambda, \text{ pois } Y(K^-) = Y(n \bar{\Lambda}) = 1 ;$$

$$\bar{K}^0 = d \bar{p} \Lambda, \text{ pois } Y(\bar{K}^0) = Y(\bar{p} \Lambda) = 1 ;$$

$$\pi^+ = ep \bar{n}, \text{ pois } Y(\pi^+) = Y(p \bar{n}) = 0 ;$$

$$\pi^- = fn \bar{p}, \text{ pois } Y(\pi^-) = Y(n \bar{p}) = 0 ; e$$

$$\pi^0 = gn \bar{n} + hp \bar{p}, \text{ pois } Y(\pi^0) = Y(n \bar{n} + p \bar{p}) = 0 .$$

Por outro lado os coeficientes a,b,...,h são calculados através dos **Coefficientes de Clebsch-Gordan** do produto tensorial  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ . Assim, usando a Equação (23) e os **Coefficientes de Clebsch-Gordan** tabelados em Armony (op. cit.), virá:

$$|K^+ \rangle \equiv |\bar{1}, 8 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} |\bar{1}, 3 \rangle | \bar{3}, \bar{3} \rangle = p\bar{n} \Rightarrow a=1;$$

$$|K^0 \rangle \equiv |\bar{2}, 8 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} |\bar{2}, 3 \rangle | \bar{3}, \bar{3} \rangle = n\bar{\Lambda} \Rightarrow b=1;$$

$$|K^- \rangle \equiv |\bar{7}, 8 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} |\bar{3}, 3 \rangle | \bar{2}, \bar{3} \rangle = \bar{n}\Lambda \Rightarrow c=1;$$

$$|\bar{K}^0 \rangle \equiv |\bar{8}, 8 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} |\bar{3}, 3 \rangle | \bar{1}, \bar{3} \rangle = \bar{p}\Lambda \Rightarrow d=1;$$

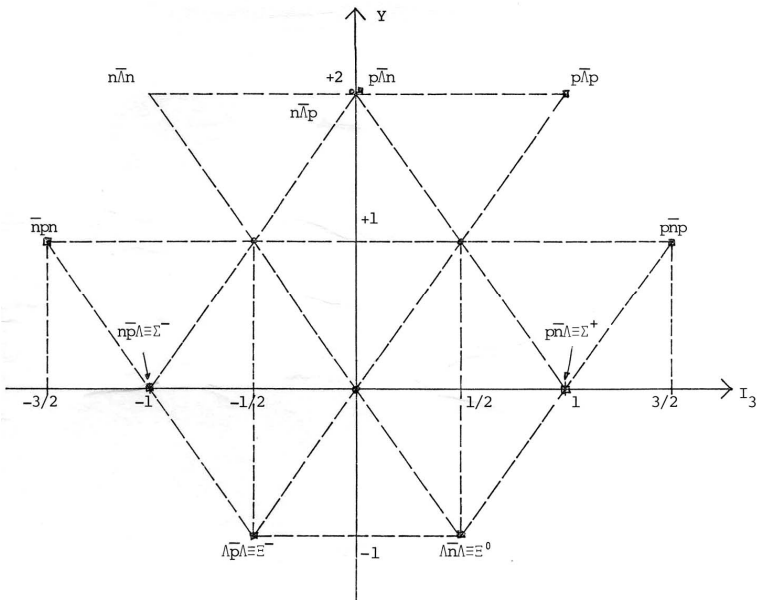
$$|K^+ \rangle \equiv |\bar{3}, 8 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} |\bar{1}, 3 \rangle | \bar{2}, \bar{3} \rangle = p\bar{n} \Rightarrow e=1;$$

$$|K^- \rangle \equiv |\bar{5}, 8 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} |\bar{2}, 3 \rangle | \bar{1}, \bar{3} \rangle = n\bar{p} \Rightarrow f=1 \quad e$$



$$\begin{aligned}
 |\pi^0\rangle &\equiv |\bar{4}, 8\rangle = \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} |\bar{1}, 3\rangle |\bar{1}, \bar{3}\rangle + \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} |\bar{2}, 3\rangle |\bar{2}, \bar{3}\rangle = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p\bar{p} + n\bar{n})^{17} \Rightarrow g=h = \frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Para obter os bárions até então conhecidos através de seu modelo, Sakata tentou encontrá-los por intermédio do seguinte produto tensorial:  $\mathbf{8} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{15} \oplus \bar{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{3}$ , efetuado entre o octeto obtido do produto  $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$  e o tripleto fundamental. Tal produto tem o seguinte resultado gráfico:



<sup>18</sup> Em muitos livros que estudam a Física das Partículas Elementares (Lee, 1981), aparece um sinal menos nessa expressão, fato esse que decorre da definição do

spinor  $\begin{pmatrix} p \\ \bar{n} \end{pmatrix}$ , isto é:  $\begin{pmatrix} -\bar{p} \\ n \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} \bar{p} \\ -n \end{pmatrix}$ .

Pela figura anterior, vê-se que somente alguns bárions podem ser enquadrados nesse produto. Por exemplo, temos:

$$\Sigma^+ \alpha p \bar{n} \Lambda, \text{ pois } Y(\Sigma^+) = Y(p \bar{n} \Lambda) = 0 ;$$

$$\Sigma^- \alpha n \bar{p} \Lambda, \text{ pois } Y(\Sigma^-) = Y(n \bar{p} \Lambda) = 0 ;$$

$$\Xi^0 \alpha \bar{n} \Lambda \Lambda, \text{ pois } Y(\Xi^0) = Y(\bar{n} \Lambda \Lambda) = -1, \text{ e}$$

$$\Xi^- \alpha \bar{p} \Lambda \Lambda, \text{ pois } Y(\Xi^-) = Y(\bar{p} \Lambda \Lambda) = -1 .$$

Apesar desse relativo sucesso do **modelo de Sakata**, algumas previsões do mesmo não foram confirmadas experimentalmente, por exemplo, o bárion estranho  $\mathbf{pp} \bar{\Lambda}$  de carga  $+2e$  não foi observado através de nenhuma experiência, bem como o spin  $3/2$  previsto para as partículas  $\Xi$  não concordava com o valor experimental:  $1/2$ . Em vista dessas dificuldades apresentadas pelo **modelo de Sakata**, o mesmo foi esquecido.

### 5.4.2 Modelo do Octeto

Com o objetivo de contornar as dificuldades apresentadas pelo modelo de Sakata e seus derivados [(Ikeda, Ogawa e Ohnuki (1959); Yamaguchi (1959); Ohnuki (1960); Wess (1960)], Gell-Mann e, independentemente, Yuval Ne'eman em 1961, propuseram tomar como supermultipeto básico característico das partículas elementares, o octeto de  $SU(3)$  já que eles haviam observado que os mésons vetoriais ( $1^-$ ), os mésons pseudo-escalares ( $0^-$ ) e os bárions ( $1/2^+$ ) até então conhecidos, poderiam constituir-se em octetos fundamentais. Desta forma, as partículas constituintes de cada octeto seriam oito estados diferentes de uma só entidade. Para interações que Gell-Mann chamou de **muito fortes** elas seriam indistinguíveis; para interações

**meio fortes** a simetria seria quebrada na hipercarga  $Y$  em quatro partes:

$$Y = 1 \left( I = \frac{1}{2} \right), Y = 0 \ (I = 1, I = 0) \text{ e } Y = -1 \left( I = \frac{1}{2} \right).$$

Porém, a simetria de  $SU(2)$ , isto é, a invariância em  $I$  seria ainda mantida. Por fim, a quebra de degenerescência do  $I$  seria conseguida através de interação eletromagnética, quando então apareceriam os isomultipletos.

O primeiro sucesso desse **modelo do octeto** ou **via octupla** (“Eight-fold Way”), foi o cálculo das massas das partículas componentes do octeto bariônico em bom acordo com as massas experimentais conhecidas, como veremos a seguir.

#### 5.4.2.1 Fórmula de Massa de Gell-Mann-Okubo

As desigualdades entre as massas de um supermultipletto de  $SU(3)$  (por exemplo, o do octeto bariônico), mostram claramente que a simetria desse grupo é quebrada. Já vimos anteriormente (itens 5.1 e 5.2) que quebras de simetria ocorrem também em Física Atômica, pela ação do **efeito Zeeman**, e em isomultipletos de  $SU(2)$ , pela ação da interação eletromagnética. O fato de que a interação eletromagnética conserva a paridade  $\mathbf{P}$ , o momento angular  $\mathbf{J}$  e o número bariônico  $\mathbf{B}$ , significa dizer que devemos esperar que todos os membros de um isomultipletto deverão ter o mesmo  $\mathbf{B}$  e o mesmo  $\mathbf{J}^{\mathbf{P}}$ . Assim, como o octeto de  $SU(3)$  tem também o mesmo  $\mathbf{B}$  e o mesmo  $\mathbf{J}^{\mathbf{P}}$ , Gell-Mann concluiu então que existe uma outra interação que quebra essa degenerescência da massa do octeto mais naturalmente que o eletromagnetismo, interação essa que ele denominou de **meio-forte**. Assim, desprezando a interação eletromagnética em presença dessa

nova interação, Gell-Mann escreveu então que a Hamiltoniana para qualquer supermultiplete de SU(3) é dada por:

$$H \cong H_s + H_{ms}; \quad s = \text{“strong”}; \quad ms = \text{“medium strong”}$$

Ora, como a massa de uma partícula é justamente a energia de repouso, então:

$$M_c = \langle a | H | a \rangle = \langle a | H_s | a \rangle + \langle a | H_{ms} | a \rangle,$$

onde  $|a\rangle \equiv |\mu\nu\rangle$  com  $\mu$  indicando a representação e  $\nu = (I, I_3, Y)$ . Sendo o estado  $|a\rangle$  invariante por SU(3), isto é, todos os componentes de um dado supermultiplete têm a mesma massa, então:

$$\langle a | H_s | a \rangle = \langle a | U^{-1} H_s U | a \rangle = \langle b | H_s | b \rangle \equiv M_0,$$

portanto:

$$M_a = M_0 + \langle a | H_{ms} | a \rangle. \quad (31)$$

Embora  $H_{ms}$  quebre a simetria de SU(3), ele conserva  $I(I_3)$  e  $Y$  no mesmo isomultiplete, portanto:

$$[H_{ms}, I_{\pm}] = [H_{ms}, I_3] = [H_{ms}, Y] = 0,$$

o que significa dizer que  $\Delta I(I_3) = 0$  e  $\Delta Y = 0$ . Deste modo, o operador  $H_{ms}$  se transforma como um operador tensor do tipo  $\sum_{\mu} T_{\mu, \nu=0}$  onde  $\nu = 0$  significa  $I = I_3 = Y = 0$ . Assim, para calcularmos

o termo  $\langle a | H_{ms} | a \rangle$ , vamos usar o Teorema de Wigner-Eckart para o SU(3) que é dado pela Equação (31):

$$\langle a | H_{ms} | a \rangle \equiv \langle \mu_{(1)}, \nu_{(1)} | \sum_{\mu} T(\mu_1 0) | \mu_{(1)}, \nu_{(1)} \rangle =$$

$$= \sum_{\mu} \begin{pmatrix} \mu_{(1)} & \mu & \mu_{(1)}\gamma \\ \nu_{(1)} & 0 & \nu_{(1)} \end{pmatrix} \langle \mu_{(1)} || T(\mu) || \mu_{(1)} \rangle \gamma. \quad (33)$$

Ora, segundo o **modelo do octeto**, temos:

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}_s \oplus \mathbf{8}_a \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27}.$$

No entanto, como as representações  $\mathbf{10}$  e  $\overline{\mathbf{10}}$  não têm elemento com  $I = Y = 0$ , então:

$$\langle a | H_{ms} | a \rangle = \sum_{\gamma, \mu} \begin{pmatrix} 8 & \mu & 8_{\gamma} \\ \nu_{(1)} & 0 & \nu_{(1)} \end{pmatrix} a_{\mu\gamma}, \quad (34)$$

onde:

$$a_{\mu\gamma} = \langle 8 || T(\mu) || 8 \rangle \gamma, \quad \mu = 1, 8 \text{ e } 27,$$

$\nu_{(1)}$  é o auto-vetor  $\bar{e} = |IY\rangle$  correspondente a uma dada partícula, e  $0 \equiv \bar{0}\mu\rangle$  é o singlete da representação  $\mu$ .

#### 5.4.2.1.1 Fórmula de Massa para o Octeto Bariônico $1/2^+$ : $\mathbf{N}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Xi}$ .

Aplicando as Equações (32) e (34) para cada partícula representando um isomultiplete  $SU(2)$ , virá:

$$M(\mathbf{N}) = M_o + \begin{pmatrix} 8 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8_s \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} a_{8_s} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8_a \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} a_{8_a} + \begin{pmatrix} 8 & 27 & 8 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} a_{27},$$

$$M(\mathbf{\Sigma}) = M_o + \begin{pmatrix} 8 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8_s \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} a_{8_s} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8_a \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} a_{8_a} + \begin{pmatrix} 8 & 27 & 8 \\ 3 & 18 & 3 \end{pmatrix} a_{27},$$

$$M(\Lambda) = M_o + \begin{pmatrix} 8 & 1 & 8 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8_s \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} a_{8s} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8_a \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} a_{8a} + \begin{pmatrix} 8 & 27 & 8_s \\ 6 & 18 & 6 \end{pmatrix} a_{27},$$

$$M(\Xi) = M_o + \begin{pmatrix} 8 & 1 & 8 \\ 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8_s \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix} a_{8s} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8_a \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix} a_{8a} + \begin{pmatrix} 8 & 27 & 8_s \\ 7 & 18 & 7 \end{pmatrix} a_{27}.$$

Usando-se uma tabela de **Coefficientes de Clebsch-Gordan** (Cf. de Swart, op. cit.), virá:

$$M(N) = M_o + a_1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} a_{8s} + \frac{1}{2} a_{8a} + \frac{1}{3\sqrt{5}} a_{27}, \quad (35a)$$

$$M(\Sigma) = M_o + a_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} a_{8s} + 0 - \frac{1}{9\sqrt{5}} a_{27}, \quad (35b)$$

$$M(\Lambda) = M_o + a_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} a_{8s} + 0 - \frac{1}{\sqrt{5}} a_{27}, \quad (35c)$$

$$M(\Xi) = M_o + a_1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} a_{8s} - \frac{1}{2} a_{8a} + \frac{1}{3\sqrt{5}} a_{27}. \quad (35d)$$

Resolvendo-se o sistema de Equações (35), teremos:

$$a_1' = \frac{1}{8} \left[ 2 M(N) + 2 M(\Xi) + M(\Lambda) + 3 M(\Sigma) \right], \quad (36a)$$

$$a_{8s}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ 3 M(\Sigma) - M(\Lambda) - M(N) - M(\Xi) \right], \quad (36b)$$

$$a_{8a}' = \left[ M(N) - M(\Xi) \right], \quad (36c)$$

$$a_{27}' = -\frac{9}{8\sqrt{5}} \left[ 3 M(\Lambda) + M(\Sigma) - 2 M(N) - 2 M(\Xi) \right], \quad (36d)$$

onde:

$$a'_{\mu\gamma} = M_0 + a_{\mu\gamma}.$$

Em seu trabalho de 1961, Gell-Mann formulou a hipótese de que o operador  $H_{\mu s}$  se transforma apenas como o operador  $\sum_{\gamma} T(8_{\gamma}, 0)$ , isto é, admitiu que  $a'_{27} \approx 0$ , então:

$$\boxed{M(N) + M(\Xi) = \frac{1}{2} [3M(\Lambda) + M(\Sigma)]}. \quad (37)$$

Quando essa fórmula foi aplicada aos valores das massas das partículas envolvidas na mesma, verificou-se que:

$$a'_1 \approx 1150 \text{ MeV}/c^2; \quad a'_{8s} \approx 91 \text{ MeV}/c^2; \quad a'_{8a} \approx -379 \text{ MeV}/c^2; \\ \text{e } a'_{27} \approx 12 \text{ MeV}/c^2,$$

confirmando, desse modo, a hipótese de Gell-Mann ( $a'_{27} \approx 0$ ).

#### 5.4.2.1.2 Fórmula de Massa para o Octeto Mesônico Pseudo-Escalar $0^-$ : $K, \pi, \eta, \bar{K}$

Um dos primeiros sucessos da Equação (37) foi a confirmação da existência de um novo méson que completaria um outro octeto básico, desta vez, o de mésons pseudo-escalares  $0^-$ , como veremos a seguir. Na época do **modelo do octeto de Gell-Mann-Ne'eman** (1961), já eram conhecidos experimentalmente os três píons ( $\pi^+, \pi^-, \pi^0$ ), o duplete de cáons ( $K^+, \bar{K}^0$ ) e seu anti-duplete ( $K^-, \bar{K}^0$ ). Por outro lado, Ohnuki em 1960, ao examinar várias representações de SU(3), identificou os píons e os cáons como membros de um octeto e, portanto, predisse a existência de um novo méson pseudo-escalar, e logo depois descoberto por Pevsner et al., em 1961. (Tal partícula recebeu, posteriormente, a denominação de  $\eta^0$ .)

Como os dupletos e antidupletos de káons têm a mesma massa média, a Equação (37) aplicada a esse octeto dá o seguinte resultado:

$$M(K) = \frac{1}{4} \left[ 3M(\eta^0) + M(\pi) \right] \quad (38)$$

Usando-se na Equação (38) as massas dos píons e dos káons, encontra-se que (vamos usar  $c = 1$ ):

$$M(\eta^0) \approx 615 \text{ MeV.}$$

No entanto, o valor experimental encontrado por Pevsner *et al.* foi de 549 MeV. Para contornar tal dificuldade, de Swart em 1963, utilizou uma fórmula análoga à Equação (38), porém, envolvendo os quadrados das massas das partículas. Tal hipótese, havia sido sugerida por Feynman (1958), já que, como os mésons são bósons de spin zero, os mesmos devem satisfazer à Equação de Klein (1926)-Gordon (1926), equação essa que contém o termo quadrático da massa. Assim, para os mésons, de veremos ter:

$$m^2(K) = \frac{1}{4} \left[ 3m^2(\eta^0) + m^2(\pi) \right], \quad (39)$$

o que, agora, dá um valor 567 MeV para a massa do méson  $\eta^0$ , em bom acordo com o valor experimental (549 MeV). (É oportuno observar que essa fórmula foi deduzida por Coleman e Schnitzer, em 1964, utilizando para tal dedução a “aproximação da mistura de partículas”.)

#### 5.4.2.1.3 Fórmula de Massa para o Octeto Mesônico Pseudo-Vetorial $1^-$ : $\rho$ , $K^*$ , $\bar{K}^*$ , $\omega$

A primeira grande dificuldade com o **modelo do octeto**, ocorreu com o enquadramento das ressonâncias mesônicas pseudo-



vetoriais  $1^-$  até então conhecidas á época desse modelo, pois que, ao ser usada uma fórmula análoga à equação (39), isto é:

$$m^2(K^*) = \frac{1}{4} \left[ 3m^2(\omega_1) + m^2(\rho) \right], \quad (40a)$$

e usando-se os valores conhecidos das massas do  $k^*$  (892 MeV) e do  $\rho$  (765 Mev), vê-se que:

$$m(\omega_1) = 944 \text{ MeV}. \quad (40b)$$

Ora, o valor experimental da massa da partícula  $\omega^0$  é 738 MeV, de acordo com a experiência de Maglic *et al.* (1961). Por outro lado, o outro méson pseudo-vetorial conhecido – o  $\phi^0$  –, tem uma massa de 1019 MeV, conforme os resultados experimentais e obtidos independentemente por Schlein *et al.* e Connolly *et al.*, em 1963. Tais valores (738 e 1019) são bastantes diferentes do valor teórico 944 calculado por intermédio da Equação (40a). Para contornar essa dificuldade, Dashen, Glashow e Sakurai, em trabalhos distintos e realizados no mesmo ano de 1963, consideraram  $\omega^0$  e  $\phi^0$  como misturas dos estados puros  $\omega_8$  e  $\omega_1$ , respectivamente, isosinglete de um octeto e singleto, ambos de SU(3), ou seja:

$$|\omega_1\rangle = |\phi^0\rangle \cos \theta + |\omega^0\rangle \sin \theta, \quad (41a)$$

$$|\omega_8\rangle = -|\phi^0\rangle \sin \theta + |\omega^0\rangle \cos \theta. \quad (41b)$$

Porém, sendo:

$$\begin{aligned} m^2(\omega_1) &\equiv \langle \omega_1 | m^2 | \omega_1 \rangle = \\ &= \langle (\langle \phi^0 | \cos \theta + \langle \omega^0 | \sin \theta) | m^2 | (\cos \theta | \phi^0 \rangle + \sin \theta | \omega^0 \rangle) \rangle = \\ &= \cos^2 \theta \langle \phi^0 | m^2 | \phi^0 \rangle + \sin^2 \theta \langle \omega^0 | m^2 | \omega^0 \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= m^2(\phi^0) \cos^2 \theta + m^2(\omega^0) \sin^2 \theta = \\
 &= m^2(\phi^0) (1 - \sin^2 \theta) + m^2(\omega^0) \sin^2 \theta ,
 \end{aligned}$$

portanto:

$$m^2(\omega_1) = m^2(\phi^0) + \sin^2 \theta \left[ m^2(\omega^0) - m^2(\phi^0) \right].$$

Usando-se os valores experimentais das massas de  $\phi^0$  (1019 Mev) e  $\omega^0$  (738 Mev), e mais o valor teórico da massa de  $\omega_1$  dada por (40b), virá:

$$\sin^2 \theta \approx 1/3 ; \quad \cos^2 \theta \approx 2/3 ; \quad \theta \approx 36^\circ .$$

Agora, tomando-se a equação (41b), virá:

$$\begin{aligned}
 m^2(\omega_8) &\equiv \langle \omega_8 | m^2 | \omega_8 \rangle = \\
 &= \langle (\langle \omega^0 | \cos \theta - \langle \phi^0 | \sin \theta) | m^2 | \cos \theta | \omega^0 \rangle - \sin \theta | \phi^0 \rangle) \rangle \\
 &= m^2(\omega^0) \cos^2 \theta + m^2(\phi^0) \sin^2 \theta \approx 754846 ,
 \end{aligned}$$

ou:

$$\underline{m(\omega_8) \approx 870 \text{ MeV} ,}$$

que é próximo do valor experimental de  $\omega^0$  (738 MeV).

#### 5.4.2.1.4 Fórmula de Massa para o Octeto Bariônico 3/2<sup>+</sup>: $\Delta$ , $\Sigma^*$ , $\Xi^*$ , $\Omega^-$ .

O maior sucesso do **modelo do octeto** foi a previsão (com posterior descoberta) da partícula  $\Omega^-$  que completaria o decuplete de ressonâncias bariônicas 3/2<sup>+</sup> conhecidas à época daquele modelo. Para chegar a essa previsão, Gell-Mann deduziu uma fórmula para o

cálculo da massa para cada isomultiplete SU(3) do decuplete  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} \rightarrow$

**10**. Assim, usando-se a Equação (33), virá:

$$\langle a | H_{m_s} | a \rangle = \sum_{\mu} \begin{pmatrix} 10 & \mu & 10 \\ \nu_{(1)} & 0 & \nu_{(2)} \end{pmatrix} b_{\mu}, \quad (42)$$

onde:

$$b_{\mu} \equiv \langle 10 | T(\mu) | 10 \rangle, \quad \mu = 1, 8, 27.$$

Agora, aplicando-se a Equação (42) para cada partícula do isomultiplete do decuplete considerado, teremos:

$$M(\Delta) = M_o + \begin{pmatrix} 10 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 10 & 8 & 10 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} b_8 + \begin{pmatrix} 10 & 27 & 10 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} b_{27},$$

$$M(\Sigma^*) = M_o + \begin{pmatrix} 10 & 1 & 10 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 10 & 8 & 10 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} b_8 + \begin{pmatrix} 10 & 27 & 10 \\ 5 & 18 & 5 \end{pmatrix} b_{27},$$

$$M(\Xi^*) = M_o + \begin{pmatrix} 10 & 1 & 10 \\ 8 & 1 & 8 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 10 & 8 & 10 \\ 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} b_8 + \begin{pmatrix} 10 & 27 & 10 \\ 8 & 18 & 8 \end{pmatrix} b_{27},$$

$$M(\Omega^-) = M_o + \begin{pmatrix} 10 & 1 & 10 \\ 10 & 1 & 10 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 10 & 8 & 10 \\ 10 & 6 & 10 \end{pmatrix} b_8 + \begin{pmatrix} 10 & 27 & 10 \\ 10 & 18 & 10 \end{pmatrix} b_{27}.$$

Usando-se uma tabela de **Coefficientes de Clebsch-Gordan** (Cf. Armony, op. cit.), teremos:

$$M(\Delta) = M_o + b_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} b_8 + \frac{1}{3\sqrt{7}} b_{27}, \quad (43a)$$

$$M(\Sigma^*) = M_o + b_1 + 0 + \frac{5}{9\sqrt{7}} b_{27}, \quad (43b)$$

$$M(\Xi^*) = M_o + b_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} b_8 + \frac{1}{3\sqrt{7}} b_{27}, \quad (43c)$$

$$M(\Omega^-) = M_o + b_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} b_8 + \frac{1}{\sqrt{7}} b_{27}. \quad (43d)$$

Assumindo-se  $b_{27} \approx 0$ , virá:

$$M(\Sigma^*) - M(\Delta) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} b_8 ; \quad M(\Xi^*) - M(\Sigma^*) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} b_8 ;$$

$$M(\Omega^-) - M(\Xi^*) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} b_8 ,$$

portanto:

$$\boxed{M(\Sigma^*) - M(\Delta) = M(\Xi^*) - M(\Sigma^*) = M(\Omega^-) - M(\Xi^*)} , \quad (44)$$

que é a famosa “**equal-mass spacing rule**” deduzida por Gell-Mann, em 1962. Usando-se a expressão (44) e mais as massas das ressonâncias bariônicas então conhecidas [ $M(\Delta) = 1236$  MeV;  $M(\Sigma^*) = 1835$  MeV e  $M(\Xi^*) = 1530$  MeV], pôde então Gell-Mann prever a existência da partícula  $\Omega^-$ , com massa aproximada de 1675 MeV, e logo depois descoberta por Barnes e colaboradores, em 1964, com a massa de 1672 MeV.

#### 5.4.2.1.5 Fórmula de Massa de Okubo

Usando o método tensorial, Okubo, em 1962, deduziu uma fórmula geral para o cálculo da massa de qualquer isomultiplete. Para

isso, ele usou o método das perturbações em 1ª ordem, assumindo então que o operador  $H_{ms}$  se transforma como um membro de um octeto, isto é, como um tensor de traço nulo do tipo:

$$T_j^i = V^i V_j - \frac{1}{3} \delta_j^i V^k V_k, \text{ portanto:}$$

$$M \approx M_0 + \langle a | T_j^i | a \rangle \rightarrow M = M_0 + M_1 Y + M_2 \left[ I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]. \quad (45)$$

É fácil ver que essa **Fórmula de Okubo** reproduz os resultados obtidos por Gell-Mann, quer para os octetos [Equação (37)], quer para o decuplete [Equação (44)].

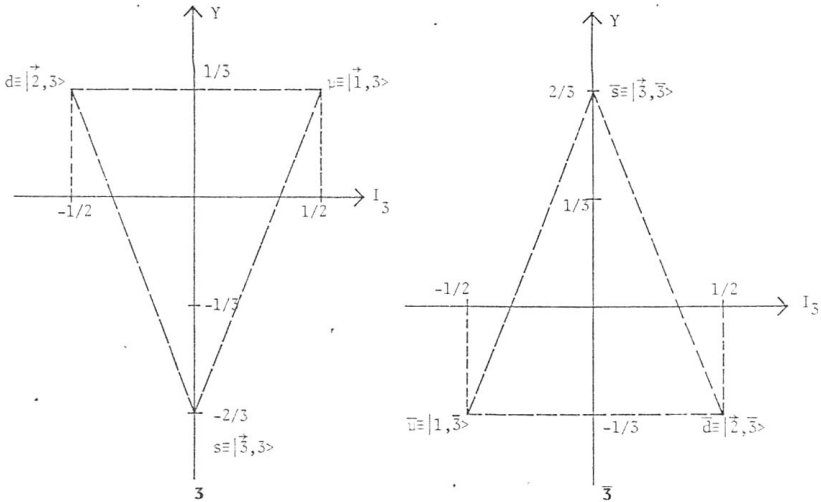
### Exercício 5.4.2.1

- Obtenha as Equações (36a,b,c,d);
- Calcule os **Coefficientes de Clebsch-Gordan** (CG) utilizados na dedução das Equações (35a,b,c,d) e (43a,b,c,d);
- Use a Equação (45) para demonstrar as Equações (37) e (44)

### 5.4.3 Modelo de Quarks

Depois que o **modelo do octeto** ficou bem estabelecido (apesar de apresentar algumas falhas, como por exemplo, a não evidência de partículas pertencentes quer ao supermultiplete **27**, quer ao anti-decuplete  $\overline{10}$ ), Gell-Mann e, independentemente, Zweig, em 1964, propuseram uma outra representação fundamental de SU(3) para as partículas elementares: o triplete **3** e seu respectivo dual  $\overline{3}$ . No entanto, tal escolha não era uma volta ao **modelo de Sakata**, pois que essas novas partículas (denominadas de **quarks** por Gell-Mann e de **aces** por Zweig) a partir das quais todas as partículas até então

conhecidas poderiam ser obtidas, apresentavam características extremamente revolucionárias, tais como, carga elétrica  $Q$  e número bariônico  $B$  (Hiper carga  $Y$ ) fracionários. Usando-se os resultados do Exemplo 5.3.3.2, os diagramas de peso desses dois tripletos fundamentais têm o seguinte aspecto:



Usando-se a **fórmula de Gell-Mann-Nishijima**:

$$Q = e \left( I_3 + \frac{Y}{2} \right); \quad (Y \equiv B + S)$$

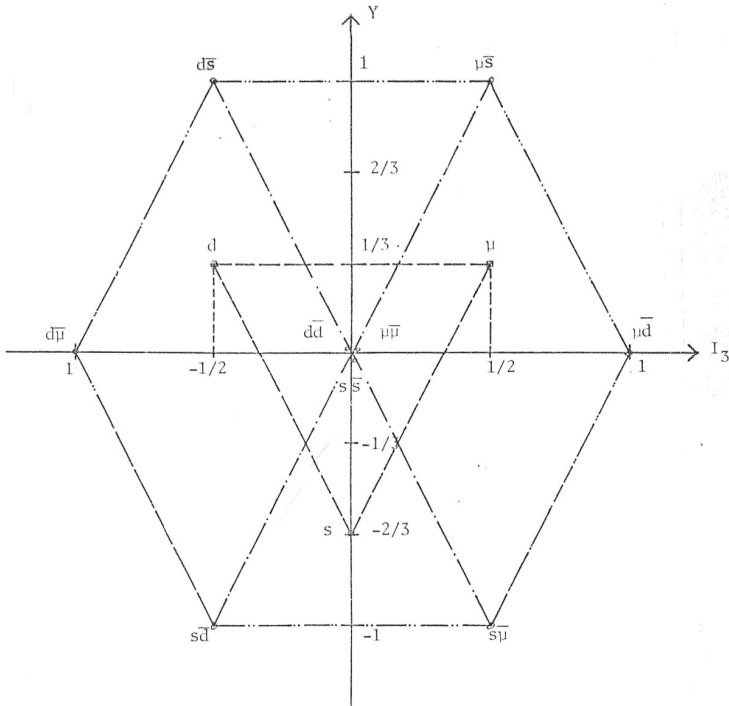
é fácil mostrar que:

$$Q(u) = \frac{2}{3}e; \quad Q(\bar{u}) = -\frac{2}{3}e; \quad Q(d) = Q(s) = -\frac{1}{3}e; \quad Q(\bar{d}) = Q(\bar{s}) = \frac{1}{3}e.$$

Para enquadrar as partículas mesônicas e bariônicas nesse esquema de **quarks**, basta efetuar adequados produtos tensoriais entre os tripletos  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$ .

### 5.4.3.1 Mésons

A estrutura quarkônica dos mésons é obtida através do produto tensorial  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ . Para efetuarmos esse produto tensorial, seguiremos os mesmos passos usados no **modelo de Sakata** (item 5.4.1). Portanto:



Usando-se ainda a analogia com o **modelo de Sakata**, é fácil ver que a estrutura quarkônica do octeto mesônico pseudo-escalar  $O^-$ , tem o seguinte aspecto:

$$K^+ = u\bar{s}; \quad K^0 = d\bar{s}; \quad \pi^+ = u\bar{d}; \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}); \quad \pi^- = \bar{u}d;$$

$$K^- = \bar{u}s; \quad \bar{K}^0 = \bar{d}s.$$

Para completar esse octeto mesônico, vamos usar a Equação (23). Então:

$$|\bar{6}, 8\rangle = \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} |\bar{1}, 3\rangle + |\bar{1}, \bar{3}\rangle + \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} |2, 3\rangle + |2, \bar{3}\rangle + \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 8 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} |\bar{3}, 3\rangle + |\bar{3}, \bar{3}\rangle.$$

Usando-se uma tabela de **Coefficientes de Clebsch-Gordan** (Cf. Armony, op. cit.), virá:

$$|\bar{6}, 8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} u\bar{u} - \frac{1}{\sqrt{6}} d\bar{d} + \frac{2}{\sqrt{6}} s\bar{s}, \quad \text{ou: } \eta^0 \equiv |\bar{6}, 8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (2s\bar{s} - d\bar{d} + u\bar{u}).$$

Por fim, o singlete resultante do produto tensorial  $3 \otimes 3$  será obtido ainda através da Equação (23). Portanto,

$$|\bar{1}, 1\rangle = \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} |\bar{1}, 3\rangle + |\bar{1}, \bar{3}\rangle + \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} |2, 3\rangle + |2, \bar{3}\rangle + \begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} |\bar{3}, 3\rangle + |\bar{3}, \bar{3}\rangle.$$

Usando-se o resultado do Exemplo 5.3.4.3, virá

$$\eta^0 \equiv |\bar{1}, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} - d\bar{d} - s\bar{s}).$$

Neste momento, é oportuno fazermos uma observação com relação aos sinais envolvendo a estrutura quarkônica (**quark – antiquark**) dos mésons. Esses sinais dependem de como se define o anti-spinor de (u,d), isto é se  $(\bar{u}, -\bar{d})$  ou se  $(-\bar{u}, \bar{d})$ . Por exemplo, a segunda escolha é feita no livro do Gasiorowicz, 1979.



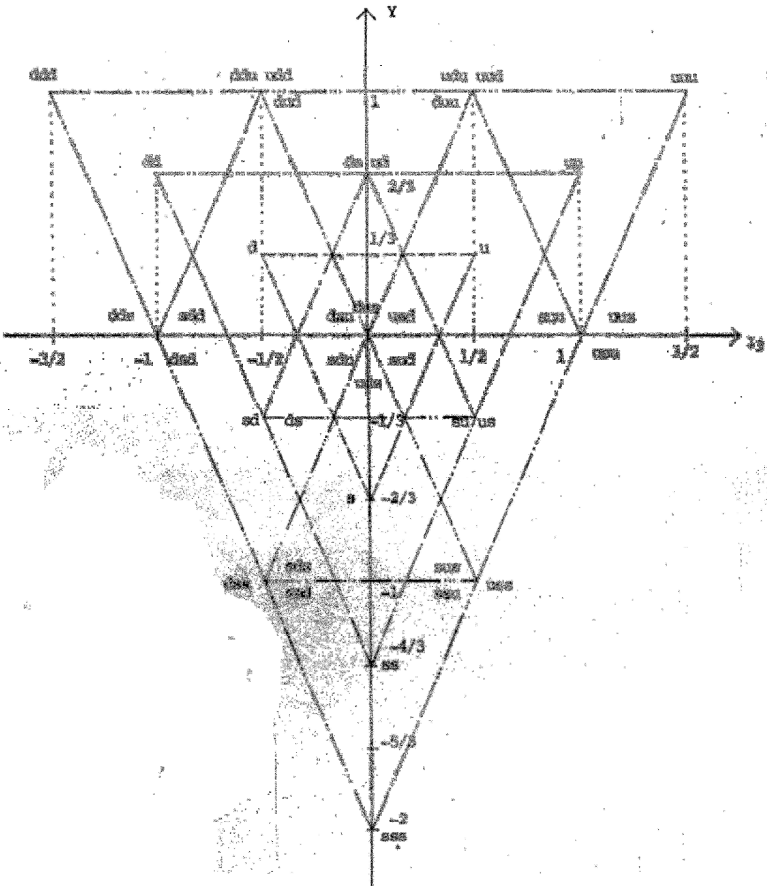
---

**Exercício 5.4.3.1.1** Obtenha a estrutura quarkônica do octeto mesônico pseudo-vetorial  $1^-$ .

---

### 5.4.3.2 Bárions

A estrutura quarkônica dos bárions, quer do octeto  $1/2^+$ , quer a do decuplo  $3/2^+$ , é obtida através do seguinte produto tensorial:  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ . Para efetuarmos esse produto tensorial usaremos o método gráfico desenvolvido no item 5.3.4.a, e o resultado é mostrado na figura abaixo:



Usando-se a Equação (23) e as propriedades dos operadores  $I_{\pm}$ ,  $U_{\pm}$  e  $V_{\pm}$  traduzidas pelas Equações (19) e (20), mostra-se que:

$$\Delta^{++} = uuu; \Delta^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu); \Delta^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(udd + ddu + dud);$$

$$\Delta^- = ddd; (\Sigma^+)^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu); (\Sigma^-)^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(dds + sdd + dsd);$$

$$(\Sigma^0)^* = \frac{1}{\sqrt{6}}(usd + dus + dsu + uds + sdu + sud);$$

$$(\Xi^-)^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(ssd + dss + sds); (\Xi^0)^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(uss + ssu + sus); \Omega^- = sss.$$

**Exemplo 5.4.3.2.1** Encontre a estrutura quarkônica do decuplo  $3/2^+$ .

Conforme vimos acima, o decuplo  $3/2^+$  é obtido através do seguinte produto tensorial:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}.$$

Na figura anterior, vê-se que:

$$\begin{aligned} |\bar{1}, 10\rangle &\equiv \Delta^{++} = |\bar{1}, 3\rangle |\bar{1}, 3\rangle |\bar{1}, 3\rangle = \\ &= |u\rangle |u\rangle |u\rangle \equiv uuu. \end{aligned}$$

Para obtermos os demais componentes do tetrapleto ( $\Delta$ ), vamos partir do peso  $|\bar{1}, 10\rangle$  e aplicar sucessivamente o operador  $L_-$ . Assim:

$$\begin{aligned} L_- |\bar{1}, 10\rangle &= \alpha |\bar{2}, 10\rangle; \quad \alpha = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3 - 1)} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} + 1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)} = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad L_- \Delta^{++} = \sqrt{3} \Delta^+ . \end{aligned}$$

Por outro lado, temos (Cf. Exemplo 5.3.3.3):

$$\begin{aligned} L_- |uuu\rangle &= (L_-^{(3,a)} + L_-^{(3,b)} + L_-^{(3,c)}) |u\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c = \\ &= (L_-^{(3,a)} |u\rangle_a) (|u\rangle_b |u\rangle_c) + |u\rangle_a (L_-^{(3,b)} |u\rangle_b) |u\rangle_c + \\ &\quad + (|u\rangle_a |u\rangle_b) (L_-^{(3,c)} |u\rangle_c) = \\ &= |d\rangle |u\rangle |u\rangle + |u\rangle |d\rangle |u\rangle + |u\rangle |u\rangle |d\rangle \equiv duu + udu + uud . \end{aligned}$$

Então:

$$\sqrt{3} \Delta^+ = duu + udu + uud ,$$

$$\Delta^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} (duu + udu + uud) .$$

Sendo:

$$\Delta^+ \equiv |\bar{2}, 10\rangle ,$$

então, analogamente ao caso anterior, virá:

$$I_- |\bar{2}, 10\rangle = \beta |\bar{3}, 10\rangle \equiv \beta \Delta^0; \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)} = \\ = \sqrt{4} = 2,$$

$$I_- \Delta^+ = 2\Delta^0.$$

Porém:

$$I_- \Delta^+ = I_- \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (duu + udu + uud) \right] = \\ = \left( I_-^{(3,a)} + I_-^{(3,b)} + I_-^{(3,c)} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (|d\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c + \right. \\ \left. + |u\rangle_a |d\rangle_b |u\rangle_c + |u\rangle_a |u\rangle_b |d\rangle_c) \right] = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} (|d\rangle_a |d\rangle_b |u\rangle_c + |d\rangle_a |u\rangle_b |d\rangle_c + |d\rangle_a |d\rangle_b |u\rangle_c + \\ + |u\rangle_a |d\rangle_b |d\rangle_c + |d\rangle_a |u\rangle_b |d\rangle_c + |u\rangle_a |d\rangle_b |d\rangle_c) \equiv \\ \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (2ddu + 2dud + 2udd).$$

Então:

$$2\Delta^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (2ddu + 2dud + 2udd) \Rightarrow$$

$$\Delta^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (ddu + dud + udd).$$

Sendo:

$$\Delta^0 \equiv |\bar{3}, 10\rangle,$$

então, analogamente ao caso anterior, teremos:

$$I_- |\bar{3}, 10\rangle = \gamma |\bar{4}, 10\rangle \equiv \gamma \Delta^-; \quad \gamma = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} - 1 \right)} = \sqrt{3},$$

$$I_- \Delta^0 = \sqrt{3} \Delta^-.$$

Porém:

$$\begin{aligned} I_- \Delta^0 &= I_- \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (ddu + dud + udd) \right] = \\ &= \left( I_-^{(3,a)} + I_-^{(3,b)} + I_-^{(3,c)} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (|d\rangle_a |d\rangle_b |u\rangle_c + \right. \\ &\quad \left. + |d\rangle_a |u\rangle_b |d\rangle_c + |u\rangle_a |d\rangle_b |d\rangle_c) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|d\rangle_a |d\rangle_b |d\rangle_c + |d\rangle_a |d\rangle_b |d\rangle_c + |d\rangle_a |d\rangle_b |d\rangle_c) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (3ddd). \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (3ddd) = \sqrt{3} \Delta^- \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta^- = ddd}.$$

Agora, para obtermos o peso  $|\bar{5}, 10\rangle$ , vamos tomar o peso  $|\bar{1}, 10\rangle$  e aplicar o operador  $V_-$ . Então:

$$V_- |\bar{1}, 10\rangle = \delta |\bar{5}, 10\rangle \quad \text{ou} \quad V_- \Delta^{++} = \delta (\Sigma^+)^*.$$

Para calcularmos o valor de  $\delta$ , vamos usar a relação de comutação  $[V_+, V_-] = 2 \vec{K} \cdot \vec{E}$  e o fato de que:

$$V_+|\bar{1},10\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \bar{1},10|V_+ = \delta \langle \bar{5},10|.$$

Então:

$$\langle \bar{1},10|[V_+,V_-]|\bar{1},10\rangle = \langle \bar{1},10|2\bar{K}\cdot\bar{E}|\bar{1},10\rangle = 2\bar{K}\cdot\bar{E},$$

$$\langle \bar{1},10|V_+V_- - V_-V_+|\bar{1},10\rangle = \langle \bar{1},10|V_+V_-|\bar{1},10\rangle = \delta^2,$$

portanto:

$$2\bar{K}\cdot\bar{E} = \delta^2.$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\bar{K} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad \bar{E} = \left(I_3, \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1\right), \text{ pois:}$$

$$|\bar{1},10\rangle = \left(\frac{3}{2}, 1\right).$$

Então:

$$2\bar{K}\cdot\bar{E} = 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\delta = \sqrt{3}}.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} V_-|\bar{1},10\rangle &= (V_-^{(3,a)} + V_-^{(3,b)} + V_-^{(3,c)})(|u\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c) = \\ &= |s\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c + |u\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + |u\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c. \end{aligned}$$

Portanto:

$$suu + usu + uus = \sqrt{3}(\Sigma^+)^* \Rightarrow$$

$$\boxed{(\Sigma^+)^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(suu + usu + uus)}.$$

Para determinarmos o tripleto  $(\Sigma^{+, \cdot, 0})^*$ , vamos tomar o peso  $(\Sigma^+)^*$  e aplicar sucessivamente o operador  $L_-$ . Assim:

$$L_- |\bar{5}, 10\rangle \equiv L_- (\Sigma^+)^* = \gamma |\bar{6}, 10\rangle \equiv \gamma (\Sigma^0)^*; \quad \gamma = \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} = \sqrt{2},$$

$$\text{ou:} \quad L_- (\Sigma^+)^* = \sqrt{2} (\Sigma^0)^*.$$

Por outro lado, e em analogia com os casos anteriores, teremos:

$$\begin{aligned} L_- (\Sigma^+)^* &= L_- \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (\text{suu} + \text{usu} + \text{uus}) \right] = \\ &= \left( L_-^{(3,a)} + L_-^{(3,b)} + L_-^{(3,c)} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (|s\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c + \right. \\ &\quad \left. + |u\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + |u\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|d\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + |d\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c + |s\rangle_a |d\rangle_b |u\rangle_c + \\ &\quad + |u\rangle_a |d\rangle_b |s\rangle_c + |s\rangle_a |u\rangle_b |d\rangle_c + |u\rangle_a |s\rangle_b |d\rangle_c) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (\text{dsu} + \text{dus} + \text{sdu} + \text{uds} + \text{sud} + \text{usd}). \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (\text{dsu} + \text{dus} + \text{sdu} + \text{uds} + \text{sud} + \text{usd}) = \sqrt{2} (\Sigma^0)^* \Rightarrow$$

$$\boxed{(\Sigma^0)^* = \frac{1}{\sqrt{6}} (\text{dsu} + \text{dus} + \text{sdu} + \text{uds} + \text{sud} + \text{usd})}.$$

Sendo:

$$\left(\Sigma^0\right)^* \equiv |\bar{6}, 10\rangle,$$

então, analogamente ao visto anteriormente, teremos

$$I_- |\bar{6}, 10\rangle \equiv I_- \left(\Sigma^0\right)^* = \varepsilon |\bar{7}, 10\rangle \equiv \varepsilon \left(\Sigma^-\right)^*; \quad \varepsilon = \sqrt{1(1+1) - 0(0-1)} = \sqrt{2}.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} I_- \left(\Sigma^0\right)^* &= I_- \left[ \frac{1}{\sqrt{6}} (dsu + dus + sdu + uds + sud + usd) \right] = \\ &= \left( I_-^{(3,a)} + I_-^{(3,b)} + I_-^{(3,c)} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{6}} (|d\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + |d\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c + \right. \\ &\quad \left. + |s\rangle_a |d\rangle_b |u\rangle_c + |u\rangle_a |d\rangle_b |s\rangle_c + |s\rangle_a |u\rangle_b |d\rangle_c + |u\rangle_a |s\rangle_b |d\rangle_c) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (dds + dsd + dds + sdd + dsd + sdd) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2dds + 2dsd + 2sdd). \end{aligned}$$

Por fim, temos:

$$\frac{2}{\sqrt{6}} (dds + dsd + sdd) = \sqrt{2} \left(\Sigma^-\right)^* \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\Sigma^-\right)^* = \frac{1}{\sqrt{3}} (dds + dsd + sdd)}.$$



Agora, para obtermos o peso  $|\bar{8},10\rangle \equiv (\Xi^0)^*$ , vamos tomar o peso  $|\bar{5},10\rangle$  e aplicar o operador  $V_-$ . Então:

$$V_-|\bar{5},10\rangle \equiv V_-(\Sigma^+)^* = k|\bar{8},10\rangle \equiv (\Xi^0)^* .$$

Para calcularmos o valor de  $k$ , vamos usar a relação de comutação  $[V_+, V_-] = 2 \vec{K} \cdot \vec{E}$ . Então:

$$\langle \bar{5},10 | [V_+, V_-] | \bar{5},10 \rangle = \langle \bar{5},10 | 2 \vec{K} \cdot \vec{E} | \bar{5},10 \rangle = 2 \vec{K} \cdot \vec{E} ,$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{5},10 | V_+ V_- - V_- V_+ | \bar{5},10 \rangle &= \langle \bar{5},10 | V_+ V_- | \bar{5},10 \rangle + \\ &- \langle \bar{5},10 | V_- V_+ | \bar{5},10 \rangle . \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$V_+|\bar{5},10\rangle = \lambda|\bar{1},10\rangle ; \quad \langle \bar{5},10 | V_+ = k \langle \bar{8},10 | ; \quad \langle \bar{5},10 | V_- = \lambda \langle \bar{1},10 | .$$

Portanto:

$$2 \vec{K} \cdot \vec{E} = k^2 - \lambda^2 .$$

Sendo:

$$\vec{K} = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) ; \vec{E} = (1, 0) \quad \text{então:} \quad 2 \vec{K} \cdot \vec{E} = 2 \left( \frac{1}{2} \right) = 1, \quad \text{e} \quad k^2 - \lambda^2 = 1 .$$

Por outro lado, temos:

$$V_-|\bar{5},10\rangle = \left( V_-^{(3,a)} + V_-^{(3,b)} + V_-^{(3,c)} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (suu + usu + uus) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( V_-^{(3,a)} + V_-^{(3,b)} + V_-^{(3,c)} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (|s\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c + |u\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + \right. \\
&\quad \left. + |u\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c) \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (|s\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + |s\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c + |s\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + \\
&\quad + |u\rangle_a |s\rangle_b |s\rangle_c + |s\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c + |u\rangle_a |s\rangle_b |s\rangle_c) = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} (ssu + sus + uss) .
\end{aligned}$$

Então:

$$k(\Xi^o)^* = \frac{2}{\sqrt{3}} (ssu + sus + uss) .$$

Ora, para determinarmos  $k$  teremos de determinar o valor de  $\lambda$ . Então:

$$V_+ |\vec{5}, 10\rangle = \lambda |\vec{1}, 10\rangle \equiv \lambda \Delta^{++} = \lambda uuu .$$

Ora:

$$\begin{aligned}
V_+ |\vec{5}, 10\rangle &= \left( V_+^{(3,a)} + V_+^{(3,b)} + V_+^{(3,c)} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (|s\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c + \right. \\
&\quad \left. + |u\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + |u\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c) \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (|u\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c + |u\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c + |u\rangle_a |u\rangle_b |u\rangle_c) \equiv \frac{3}{\sqrt{3}} (uuu) .
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\lambda(uuu) = \frac{3}{\sqrt{3}}(uuu) \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{\sqrt{3}} .$$

Por outro lado, sendo:

$$k^2 - \lambda^2 = 1, \quad \text{então: } k^2 = 1 + \frac{9}{3} = 4 \rightarrow k = 2 ,$$

portanto:

$$\boxed{(\Xi^0)^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(ssu + sus + uss)} .$$

Para obtermos o outro elemento do duplete  $\Xi^*$ , basta aplicar ao elemento calculado anteriormente, o operador  $I_-$ . Assim:

$$I_- |\bar{8}, 10\rangle \equiv I_- (\Xi^0)^* = \mu |\bar{9}, 10\rangle \equiv \mu (\Xi^0)^* ; \mu = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)} = 1.$$

Ora:

$$\begin{aligned} I_- (\Xi^0)^* &= I_- \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (|s\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + |s\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c + |u\rangle_a |s\rangle_b |s\rangle_c) \right] = \\ &= \left( I_-^{(3,a)} + I_-^{(3,b)} + I_-^{(3,c)} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (|s\rangle_a |s\rangle_b |u\rangle_c + \right. \\ &\quad \left. + |s\rangle_a |u\rangle_b |s\rangle_c + |u\rangle_a |s\rangle_b |s\rangle_c) \right] , \end{aligned}$$

portanto:

$$\left(\Xi^{-}\right)^{*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |d\rangle_a |s\rangle_b |s\rangle_c + |s\rangle_a |d\rangle_b |s\rangle_c + |s\rangle_a |s\rangle_b |d\rangle_c \right) ,$$

ou:

$$\boxed{\left(\Xi^{-}\right)^{*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( dss + sds + ssd \right) } .$$

Por fim, obtém-se o peso  $\vec{1}\bar{1}0,10 \equiv \Omega^{-}$  aplicando-se ao peso  $\vec{1}\bar{8},10 \equiv \left(\Xi^0\right)^{*}$ , o operador  $V_-$ , ou seja:

$$V_- \vec{1}\bar{8},10 \equiv v \vec{1}\bar{1}0,10 \equiv v \Omega^{-} .$$

Em analogia com os casos anteriores, é fácil mostrar que:  
 $\vec{1}\bar{1}0,10 \equiv \Omega^{-} = sss$  .

---

**Exercício 5.4.3.2.1** Complete o Exemplo 5.4.3.2.1.

---

## CAPÍTULO 6

### O Princípio da Indistinguibilidade e o Grupo de Permutação: Férmions, Bósons e Gentíleons

#### 6.1 Gentíleons

##### 6.1.1 Introdução

Em recentes trabalhos (Cattani e Fernandes, 1982; 1983; 1984; 1975; 1986; 1987a,b; Cattani, 1989; 1995) realizamos uma análise detalhada do problema da indistinguibilidade de  $N$  partículas idênticas em mecânica quântica. Mostramos rigorosamente, de acordo com os postulados da Mecânica Quântica e o Princípio da Indistinguibilidade que, além de *Bósons* e *Férmions*, poderia existir matematicamente uma outra espécie de partículas que chamamos de *Gentíleons*. Esta análise foi realizada usando as representações irredutíveis do *Grupo de Permutação (Grupo Simétrico)*  $S_N$  no espaço de Hilbert. Contudo, nossos primeiros trabalhos sobre o assunto (Cattani e Fernandes, 1982; 1984), que foram tomados como um ponto de partida para investigar a existência da uma nova espécie de partículas (*Gentíleons*) é muito intrincado e complexo do ponto de vista matemático. Usamos a teoria de grupos mostrada nos livros de Weyl (1932), Hamermesh (1962), e Rutherford (1948). Esses trabalhos são de difícil entendimento por parte dos físicos que não estão familiarizados com a *Teoria do Grupo de Permutação* e suas representações no espaço de Hilbert. Assim, agora iremos deduzir nossos principais resultados adotando um formalismo matemático mais didático e mais simples. Apresentaremos neste

capítulo os nossos cálculos de tal modo que estudantes graduados em física com um conhecimento básico de teoria de grupos serão capazes de entender nossas previsões.

Na Seção 6.1.2 é analisado o problema da indistinguibilidade das partículas idênticas em mecânica quântica.

Na Seção 6.2 vemos como conectar a permutação de partículas com as autofunções do operador energia  $H$  usando o *Grupo de Permutação*.

Na Seção 6.3 mostramos em detalhes o cálculo das autofunções de energia de um sistema com  $N = 3$  partículas.

Na Seção 6.4 fornecemos os resultados essenciais para o caso geral de sistemas de  $N$  partículas idênticas.

Na Seção 6.5 apresentamos o Sumário e as Conclusões.

### **6.1.2 A Indistinguibilidade de Partículas Idênticas em Mecânica Quântica**

Partículas idênticas não podem ser distinguidas por meio de qualquer propriedade inerente, pois de outro modo elas não seriam idênticas sob todos os aspectos. Em Mecânica Clássica, partículas idênticas não perdem sua “individualidade”: apesar da identidade de suas propriedades físicas: elas em algum instante podem ser “numeradas” e podemos seguir o movimento subsequente de cada uma de suas trajetórias. Desse modo, em qualquer instante as partículas podem ser identificadas.

Em Mecânica Quântica (Landau e Lifschitz, 1958; Schiff, 1955; Merzbacher, 1961), a situação é completamente diferente, uma vez que, devido às relações de incerteza, o conceito de trajetória de uma particular cessa de ter qualquer significado. Portanto, localizando e numerando as partículas em algum instante, não podemos identificá-las em instantes subsequentes: se localizarmos uma das partículas, não podemos dizer qual das partículas chegaram nesse ponto. Isto é verdade,

por exemplo, para elétrons em um único átomo, para nêutrons em um único núcleo ou para partículas que interagem entre si em distâncias apreciáveis. Contudo, elétrons de diferentes átomos ou nêutrons de diferentes núcleos, numa boa aproximação, podem ser considerados *distinguíveis*, pois estão bem separados uns dos outros.

Então, em Mecânica Quântica, não há em princípio a possibilidade de seguir separadamente partículas idênticas durante o movimento e, portanto distingui-las. Assim, em Mecânica Quântica, partículas idênticas perdem inteiramente suas individualidades, ou seja, tornam-se indistinguíveis. Este fato é denominado **Princípio da Indistinguibilidade de Partículas Idênticas** e desempenha um papel fundamental na Mecânica Quântica de partículas idênticas (Landau e Lifschitz, 1958; Schiff, 1955; Merzbacher, 1961).

Vamos considerar um sistema isolado com energia total  $E$  composto por um número constante  $N$  de partículas idênticas descrito pela Mecânica Quântica. Sendo  $H$  o operador Hamiltoniano do sistema, a autofunção de energia  $\Psi$ , obedece a equação  $H\Psi = E\Psi$ . O operador  $H$  e  $\Psi$  são funções de  $\mathbf{x}_1, s_1, \dots, \mathbf{x}_N, s_N$ , onde  $\mathbf{x}_j$  e  $s_j$  denotam a coordenada de posição e a orientação de spin, respectivamente da  $j^{\text{ésima}}$  partícula. Abreviaremos o par  $(\mathbf{x}_j, s_j)$  por um único número  $j$  e denominemos  $1, 2, \dots, N$  de *configuração da partícula*. O conjunto de todas as configurações será chamado de *espaço de configuração*  $\varepsilon^{(N)}$ . Assim, teremos simplesmente  $H = H(1, 2, \dots, N)$  e  $\Psi = \Psi(1, 2, \dots, N)$ . Estes estados quânticos  $\Psi$  formam um espaço de Hilbert  $L_2(\varepsilon^{(N)})$  de todas as funções de quadrado integráveis sobre  $\varepsilon^{(N)}$ .

Definamos por  $P_i$  o “operador permutação” ( $i = 1, 2, \dots, N!$ ) que geram todas as permutações possíveis das  $N$  partículas no espaço  $\varepsilon^{(N)}$ . Uma vez que as partículas são idênticas as propriedades físicas do sistema devem ser invariantes por permutações. Na próxima seção mostraremos como usar o

*Grupo de Permutação*  $S_N$  (ou *Grupo Simétrico*) para descrever o sistema quântico de  $N$ -partículas.

## 6.2 O Grupo de Permutação e suas Representações nos Espaços de Configuração e de Hilbert

Como vimos acima,  $P_i$  é o “operador permutação” ( $i = 1, 2, \dots, N!$ ) que gera todas as permutações possíveis das  $N$  partículas no espaço  $\varepsilon^{(N)}$ . As permutações  $P_i$  de índices  $1, 2, \dots, N$  constituem um grupo de simetria (Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Boerner, 1963; Jansen e Boon, 1967; Matsen, 1970)  $S_N$  de ordem  $n = N!$ , visto no Capítulo 1.

Por causa da identidade das partículas,  $H$  e  $\Psi$ , obtidos meramente permutando as partículas, devem ser fisicamente equivalentes, isto é,  $[P_i, H] = 0$  e  $|P_i \Psi|^2 = |\Psi_i|^2 = |\Psi|^2$ . Isto implica que as permutações são transformações unitárias e que o espectro de energia  $E$  é  $N!$ - degenerado. Assumimos que todas as funções  $\{\Psi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$  são diferentes e ortonormais. Para cada operador  $P_i$  do grupo  $S_N$  podemos associar, em uma correspondência um-a-um, um operador unitário  $U(P_i)$  em  $L_2(\varepsilon^{(N)})$  (Merzbacher, 1961; Roman, 1960).

Agora, façamos  $n = N!$  e indiquemos por  $\{\Psi_k\}_{k=1,2,\dots,n}$  o conjunto de autofunções de energia  $n$ -degenerado, onde  $\Psi_k = U(P_k)\Psi$ . É evidente que uma combinação linear das funções  $\Psi_k$  é também solução da equação de onda  $H\Psi = E\Psi$ . Além disso, desde que  $[U(a), H] = 0$  vemos que  $H U(a) \Psi_k = U(a) H \Psi_k = U(a) E \Psi_k = E U(a)\Psi_k$ . Isto significa que se  $\Psi_k$  é uma autofunção de  $H$ ,  $U(a)\Psi_k$  é também uma autofunção de  $H$ . Portanto, ela deve ser igual a uma combinação linear dos autovetores degenerados, ou seja (Merzbacher, 1961; Roman, 1960):

$$U(a)\Psi_k = \sum_{j=1,\dots,n} \Psi_j D_{jk}(a) , \quad (1)$$



onde  $D_{jk}(a)$  são coeficientes complexos que dependem do elemento do grupo. De acordo com a Eq. (1) as autofunções n-degeneradas de H geram um subespaço n-dimensional do espaço  $L_2(\varepsilon^{(N)})$  do sistema, e as operações do grupo transformam qualquer vetor que está inteiramente contido nesse subespaço em um outro vetor inteiramente contido no mesmo subespaço, i.e., as operações de simetria deixam o subespaço invariante.

Repetidas aplicações das operações de simetria dão (Merzbacher, 1961; Roman, 1960):

$$\begin{aligned} U(b)U(a)\Psi_k &= \sum_{j=1\dots n} U(b)\Psi_k D_{jk}(a) = \\ &= \sum_{j=1\dots n} \sum_{i=1\dots n} \Psi_i D_{ik}(b)D_{jk}(a), \end{aligned} \quad (2)$$

e também

$$U(ba)\Psi_k = \sum_{i=1\dots n} \Psi_i D_{ik}(ba). \quad (3)$$

Uma vez que  $U(ba) = U(b)U(a)$  os lados esquerdos das Eqs. (2) e (3) são idênticos. Portanto, comparando os lados direitos dessas mesmas equações obtemos a equação básica:

$$D_{ik}(ba) = \sum_{j=1\dots n} D_{ij}(b)D_{jk}(a). \quad (4)$$

Assim, o grupo de permutação  $S_N$  ou “grupo de simetria” do sistema, definido no espaço de configuração  $\varepsilon^{(N)}$ , induz um grupo de transformações unitárias U no espaço de Hilbert linear n-dimensional  $L_2(\varepsilon^{(N)})$ . Mostramos [ver Eqs.(1-3)] que as operações unitárias definidas por U podem ser escritas numa forma matricial introduzindo um conjunto completo de vetores base no espaço vetorial n-dimensional de  $\Psi$ . Este espaço de Hilbert  $L_2(\varepsilon^{(N)})$  é chamado de “espaço de representação”. O conjunto D de matrizes quadradas n x n formam um grupo de *dimensão (grau)* n igual a ordem de  $S_N$ . O conjunto completo

de matrizes  $D$  é dito formar uma “representação unitária  $n$ -dimensional de  $S_N$ ”.

As autofunções  $\{\Psi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$  são todas diferentes e ortonormais uma vez que elas são soluções da mesma equação de Schrödinger. Estas funções podem ser usadas (Hamermesh, 1962; Landau e Lifschitz, 1958; Schiff, 1955; Merzbacher, 1961; Roman, 1960; Boerner, 1963; Jansen e Boon, 1967; Matsen, 1970) com as *Formas* (“*shapes*”) ou *Diagramas de Young*, para determinar as *representações irredutíveis* do grupo  $S_N$  no espaço de configuração  $\epsilon^{(N)}$  e no espaço de Hilbert  $L_2(\epsilon^{(N)})$ . Para fazer isto, as *funções base das representações irredutíveis* usando as formas de A.Young são construídas considerando  $\{\Psi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$  como uma base unitária ortogonal. É importante notar que escolhendo estas funções base particulares estamos determinando simultaneamente as representações irredutíveis de  $S_N$  e as autofunções do operador  $H$  que são obtidas por combinações lineares e permutações de  $\{\Psi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ . Este método será usado no Apêndice A6.I para construir as representações irredutíveis e as autofunções de energia para o caso trivial de  $N=2$  e para o caso não-trivial mais simples de  $N=3$ .

Na seção seguinte (Seção 6.4) usando o método apresentado no Apêndice A6.I iremos mostrar em detalhes como obter as autofunções de energia de um sistema com  $N=3$  partículas fracamente interagentes.

### 6.3 Sistemas com $N=3$ Partículas

Consideremos um sistema composto por  $N=3$  partículas fracamente interagentes. Assumiremos que uma autofunção típica de energia  $E$  das partículas é escrita como  $\Psi = \Psi(1,2,3) = u(1)v(2)w(3)$ , onde as funções  $(u,v,w)$  no produto são todas diferentes e ortogonais. De acordo com nossa análise apresentada no Apêndice A6.I o espaço de Hilbert 6-dim  $L_2(\epsilon^{(3)})$

gerado por vetores base unitários ortogonais  $(u,v,w)$  é composto por dois subespaços 1-dim  $h([3])$  e  $h([1^3])$ , e um subespaço 4-dim  $h([2,1])$ .

Primeiro, vamos considerar os dois *subespaços 1-dim* no espaço de Hilbert os quais são representados pelas seguintes autofunções  $\varphi_s$  and  $\varphi_a$ :

$$\begin{aligned} \varphi_s = & [u(1)v(2)w(3) + u(1)v(3)w(2) + u(2)v(1)w(3) + \\ & + u(2)v(3)w(1) + u(3)v(1)w(3) + u(3)v(2)w(1)]/\sqrt{6}, \end{aligned} \quad (5)$$

que é *completamente simétrica*, associada à *forma de Young horizontal* [3].

$$\begin{aligned} \varphi_a = & [u(1)v(2)w(3) - u(1)v(3)w(2) - u(2)v(1)w(3) + \\ & + u(2)v(3)w(1) + u(3)v(1)w(2) - u(3)v(2)w(1)]/\sqrt{6}, \end{aligned} \quad (6)$$

que é *completamente antissimétrica*, associada à *forma de Young vertical* [1<sup>3</sup>].

O subespaço 4-dim  $h([2,1])$ , associado à *forma de Young intermediária* [2,1] é representada pelo autoestado  $Y([2,1])$ . Este subespaço  $h([2,1])$  quebra-se em dois subespaços 2-dim,  $h_+([2,1])$  e  $h_-([2,1])$ , que são gerados pelos vetores base  $\{Y_1, Y_2\}$ ,  $\{Y_3, Y_4\}$  e representados pelas funções de onda  $Y_+([2,1])$  e  $Y_-([2,1])$ , respectivamente. Os estados  $Y([2,1])$ ,  $Y_+([2,1])$  e  $Y_-([2,1])$  são dados respectivamente, por:

$$Y_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

onde:

$$Y_1 = [u(1)v(2)w(3) + u(2)v(1)w(3) - u(2)v(3)w(1) - \\ - u(3)v(2)w(1)] / \sqrt{4},$$

$$Y_2 = [u(1)v(2)w(3) + 2u(1)v(3)w(2) - u(2)v(1)w(3) + \\ + u(2)v(3)w(1) - 2u(3)v(1)w(2) - u(3)v(2)w(1)] / \sqrt{12},$$

$$Y_3 = [-u(1)v(2)w(3) + 2u(1)v(3)w(2) - u(2)v(1)w(3) - \\ - u(2)v(3)w(1) + 2u(3)v(1)w(2) - u(3)v(2)w(1)] / \sqrt{12}$$

e

$$Y_4 = [u(1)v(2)w(3) - u(2)v(1)w(3) - u(2)v(3)w(1) + \\ + u(3)v(2)w(1)] / \sqrt{4}.$$

Como mostrado no Apêndice A6.I, as funções  $Y_+([2,1])$  e  $Y_-([2,1])$  têm iguais propriedades de simetria por permutação, isto é,  $P_i Y_{\pm} = D^{(2)}(P_i) Y_{\pm}$  onde  $D^{(2)}(P_i)$  são matrizes irredutíveis (2x2) que definem uma representação unitária de  $S_3$  em  $\epsilon^{(3)}$  e em subespaços irredutíveis 2-dimensional de  $L_2(\epsilon^{(3)})$ .

Como sabemos (Landau e Lifschitz, 1958; Schiff, 1955; Merzbacher, 1961; Roman, 1960), a função totalmente simétrica  $\varphi_s$  definida pela Eq. (5) descreve os *Bósons* e a função completamente anti-simétrica  $\varphi_a$  dada pela Eq. (6) descreve os *Férmions*. Quando dois *Férmions* ocupam o mesmo estado temos  $\varphi_a = 0$  o que implica que dois *Férmions* são proibidos de ocupar o mesmo estado. Esta espécie de restrição não existe para *Bósons* uma vez que  $\varphi_a \neq 0$  quando três *Bósons* ocupam o mesmo estado.

Vemos da Eq. (7) que  $Y_{\pm} \neq 0$  quando 1 ou 2 partículas ocupam o mesmo estado, Contudo  $Y_{\pm} = 0$  quando 3 partículas ocupam o mesmo estado.

A partir desses resultados verificamos que as funções  $Y([2,1])$  devem representar partículas que são diferentes de *Bósons* ou *Férmions*. Esta nova espécie de partículas foi chamada de *Gentileons* (Cattani e Fernandes, 1984). Este nome foi adotado em honra ao físico italiano Giovanni Gentile Jr. Há cerca de seis décadas (Gentile Jr., 1940; 1941; 1942) ele inventou, sem qualquer justificativa quanto-mecânica ou qualquer outra, uma paraestatística em um contexto termodinâmico. Ele obteve uma função distribuição estatística para um sistema de  $N$  partículas interagindo fracamente assumindo que os estados quânticos de uma partícula individual podem ser ocupados por um número finito arbitrário  $d$  de partículas. As Estatísticas de Fermi e de Bose são casos particulares desta paraestatística para  $d = 1$  e  $d = \infty$ , respectivamente. Uma recente análise detalhada de um gás ideal  $d$ -dimensional em paraestatísticas foi realizada por Vieira e Tsallis (1987).

Nossa análise que dá suporte, dentro do contexto da Mecânica Quântica e da Teoria de Grupos, a existência matemática de novos estados  $Y([2,1])$  associados com a forma de Young intermediária  $[2,1]$ , justifica, de certo modo, a hipótese de Gentile.

#### **6.4 Sistemas Compostos por $N$ Partículas Idênticas. O Princípio Estatístico.**

No Apêndice A6.I e na Seção 6.2 estudamos em detalhes os casos de sistemas compostos por  $N = 2$  e 3 partículas. Mostramos como obter as representações irredutíveis de  $S_2$  e  $S_3$  nos espaços de configuração  $\varepsilon^{(2)}$  e  $\varepsilon^{(3)}$  e nos espaços

de Hilbert  $L_2(\varepsilon^{(2)})$  e  $L_2(\varepsilon^{(3)})$ . Construimos também para esses casos as autofunções do operador Hamiltoniano  $H$ .

Nesta Seção apresentaremos somente os principais resultados para sistemas de  $N$ -partículas que obtivemos em trabalhos anteriores (Cattani e Fernandes, 1982; 1983; 1984).

Mostramos (Cattani e Fernandes, 1982; 1983; 1984) que as dimensões  $f(\alpha)$  das matrizes quadradas irredutíveis  $f(\alpha) \times f(\alpha)$  assumem os valores  $1^2, 2^2, \dots, (N-1)^2$  e para cada representação irredutível  $(\alpha)$  é associado um subespaço  $h(\alpha)$  no espaço de Hilbert  $L_2(\varepsilon^{(N)})$  com dimensão  $f(\alpha)$ .

Há somente duas representações irredutíveis 1-dim [ $f(\alpha) = 1$ ] dadas pelas partições  $(\alpha) = [N]$  and  $(\alpha) = [1^N]$ . O primeiro caso é descrito pela *forma de Young horizontal* com  $N$  espaços. No segundo caso temos uma *forma de Young vertical* com  $N$  colunas. As funções de onda associadas a elas são, respectivamente:

$$\varphi_s = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{i=1}^n \Psi_i \quad (8)$$

e

$$\varphi_a = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{i=1}^n \delta_{P_i} \Psi_i, \quad (9)$$

onde  $\delta_{P_i} = \pm 1$ , se  $P_i$  é uma permutação par ou ímpar.

As demais representações têm dimensões  $f(\alpha)$  indo de  $2^2$  até  $(N-1)^2$  e são descritas por várias *formas de Young intermediárias* (Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Boerner, 1963; Jansen e Boon, 1967; Matsen, 1970). Para cada *forma*  $[\alpha]$  há uma representação irredutível descrita por  $f(\alpha) \times f(\alpha)$  matrizes quadradas  $D_{ik}^{(\alpha)}$  com dimensão  $f(\alpha)$ . Os

“tableaux” com a mesma *forma*  $[\alpha]$  têm representações equivalentes e as diferentes *formas* não podem ter representações equivalentes. Há uma correspondência um-a-um entre cada *forma*  $[\alpha]$  e as matrizes irreduzíveis matrizes  $D_{ik}^{(\alpha)}$ .

Para cada *forma*  $[\alpha]$  é associado um subespaço  $h(\alpha) \in L_2(\varepsilon^{(N)})$  com dimensão  $\tau = f(\alpha)$  gerada por bases unitárias  $\{Y_i\}_{i=1,2,\dots,\tau}$ . Neste subespaço  $h(\alpha)$  a autofunção energia  $Y(\alpha)$  é dada por:

$$Y(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \begin{pmatrix} Y_1(\alpha) \\ Y_2(\alpha) \\ \vdots \\ Y_\tau(\alpha) \end{pmatrix} \quad (10)$$

onde as funções  $\{Y_i\}_{i=1,2,\dots,\tau}$ , são construídas aplicando os operadores Young às funções  $\{\Psi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ , obedecendo a condição  $\langle Y_i | Y_n \rangle = \delta_{in}$ .

Por intermédio de permutações  $Y(\alpha) \in h(\alpha)$  é transformada em  $X(\alpha) \in h(\alpha)$  dada por  $X(\alpha) = U(P_i) Y(\alpha)$ , onde  $U(P_i)$  é um operador unitário. Esta operação de permutação pode ser também representado por uma matriz unitária  $T(\alpha): X(\alpha) = T(\alpha) Y(\alpha)$ . Como os subespaços  $h(\alpha)$  são classes de equivalência (Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Matsen, 1970), diferentes subespaços têm diferentes propriedades de simetria que são definidas pela matriz  $T(\alpha)$ . Isto significa que se  $T(\alpha) \in h(\alpha)$  e  $T(\beta) \in h(\beta)$ , então  $T(\alpha) \neq T(\beta)$  se  $\alpha \neq \beta$ .

Sendo  $T(\alpha)^+ T(\alpha) = 1$  o módulo ao quadrado de  $Y(\alpha)$  é invariante por permutação, isto é:

$$|Y|^2 = Y(\alpha)^+ Y(\alpha) = X(\alpha)^+ X(\alpha) = |X|^2.$$

Assim, a função  $|\Phi(\alpha)|^2 = Y(\alpha)^+ Y(\alpha) = \sum_i |Y_i|^2$  pode ser interpretada como uma *função densidade de probabilidade*.

Notamos que para casos 1-dim as propriedades de simetria do autoestado  $Y(\alpha)$  são muito simples porque  $T = \pm 1$ , enquanto para multi-dimensionais  $h(\alpha)$  as propriedades de simetria não são tão evidentes porque elas são definidas pela matriz  $T(\alpha)$  que tem  $\tau^2$  componentes. De qualquer modo verifica-se que o número de ocupação dos estados das partículas não é nem fermiônico nem bosônico.

Para obter a autofunção energia nossa hipótese básica foi a de que  $[U(P_i), H] = 0$ . Conseqüentemente,  $[U(P_i), S(t)] = 0$ , onde  $S(t)$  é o operador de evolução temporal para o sistema.

Os valores esperados de um operador arbitrário Hermiteano  $A = A(1,2,\dots,N)$  para os auto-estados de energia  $Y(\alpha)$  e  $X(\alpha)$  são definidos por:

$$\langle A_y \rangle = \langle Y(\alpha) | A | Y(\alpha) \rangle = (1/\tau) \sum_i \langle Y_i(\alpha) | A | Y_i(\alpha) \rangle$$

e

$$\langle A_x \rangle = \langle X(\alpha) | A | X(\alpha) \rangle = (1/\tau) \sum_i \langle X_i(\alpha) | A | X_i(\alpha) \rangle,$$

respectivamente. Como  $X(\alpha) = T(\alpha) Y(\alpha)$  vemos que

$$\begin{aligned} \langle A_x \rangle &= \langle X(\alpha) | A | X(\alpha) \rangle = \langle Y(\alpha) T(\alpha)^+ A T(\alpha) | Y(\alpha) \rangle = \\ &= \langle Y(\alpha) | A | Y(\alpha) \rangle = \langle A_y \rangle, \end{aligned}$$

implicando que  $[U(P_i), A(t)] = 0$ . Como  $U(P_i)$  comuta com  $S(t)$  a relação  $[U(P_i), A(t)] = [U(P_i), S^+(t)A(t)S(t)] = 0$  é satisfeita. Isto significa que  $\langle A_y(t) \rangle = \langle A_x(t) \rangle$  para qualquer instante  $t$ . Isso expressa o fato de que, uma vez que as partículas são idênticas, qualquer permutação das mesmas não leva a qualquer efeito observável. Esta conclusão está de acordo com o



postulado da indistinguibilidade (Landau e Lifschitz, 1958; Schiff, 1955; Merzbacher, 1961; Roman, 1960).

O número de ocupação dos estados e as propriedades de simetria dos estados de energia quânticos  $Y(\alpha)$  associados com as formas intermediárias de Young são completamente diferentes das formas vertical (fermiônica) e horizontal (bosônica). Isto nos levou a propor a seguinte afirmação a qual é tomada como um princípio (*Princípio Estatístico*): “*Bósons, Férmions e Gentíleons são representados por Formas de Young horizontal, vertical e intermediária, respectivamente*”.

## 6.5 Sumário e Conclusões

Mostramos que além de *Bósons* e *Férmions* pode existir matematicamente uma nova espécie de partículas, que denominamos *Gentíleons*. Nossa análise teórica foi mostrada em detalhes usando Teoria de Grupos básica adotada em Curso de Física de Graduação.

Usando a Teoria de Grupo de Permutações estudamos em detalhes o caso trivial de sistemas formados por 2 partículas e o mais simples, porém não-trivial caso de sistemas formados por 3 partículas. Para o caso geral de sistemas de N-partículas somente apresentamos uma breve revisão dos principais resultados obtidos em trabalhos precedentes (Cattani e Fernandes, 1982; 1983; 1984; 1975; 1986; 1987a,b; Cattani, 1989; 1995).

De acordo com propriedades matemáticas exóticas e surpreendentes das representações intermediárias da Teoria de Grupo de Permutações (Cattani e Fernandes, 1983; 1984; 1975; 1986; 1987a,b; Cattani, 1989; 1995) os sistemas gentiliônicos não podem coalescer, *Gentíleons* são sempre confinados em seus sistemas e não podem aparecer como uma partícula livre.

Baseado nessas propriedades exóticas conjecturamos (Cattani e Fernandes, 1983; 1984; 1975; 1986; 1987a,b; Cattani,

1989; 1995) que *quarks* podem ser *Gentíleons* pois podemos explicar, a partir de primeiros princípios, confinamento de *quarks*, a conservação do número bariônico e a não-coalescência de mésons e bárions.

Finalmente, admitindo que somente *Bósons* e *Férmions* possam existir na Natureza, permanece o problema de descobrir as regras de seleção que proíbem a existência de *Gentíleons*.

## APÊNDICE A6.I

### Representações do Grupo $S_N$ no Espaço de Configuração $\varepsilon^{(N)}$ e no Espaço de Hilbert $L_2(\varepsilon^{(N)})$ .

Apresentaremos a seguir as idéias básicas concernentes as representações do grupo  $S_N$  no espaço de configuração  $\varepsilon^{(N)}$ . Uma análise mais detalhada e completa sobre esse assunto pode ser encontrada em muitos livros (Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Boerner, 1963; Jansen e Boon, 1967; Matsen, 1970).

Se consideramos uma aplicação homomórfica

$$P_i : D^{(\mu)}(P_i) \quad (A6.I.1)$$

entre os elementos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  do grupo  $S_N$  e um conjunto de matrizes quadradas ( $\mu \times \mu$ )  $D^{(\mu)}(P_1), D^{(\mu)}(P_2), \dots, D^{(\mu)}(P_n)$  ( $n = N!$ ) tal que:

$$D^{(\mu)}(P_i)D^{(\mu)}(P_j) = D^{(\mu)}(P_i P_j), \quad (A6.I.2)$$

então as matrizes  $D^{(\mu)}(P_1), D^{(\mu)}(P_2), \dots, D^{(\mu)}(P_n)$  são ditas ser uma representação matricial  $\mu$ -dimensional do grupo  $S_N$  no espaço de configuração  $\varepsilon^{(N)}$ . Se a aplicação homomórfica de  $S_N$  sobre  $D(P_i)$  se reduz a um isomorfismo a representação é dita ser *fiel*.

Em geral todas as matrizes  $D^{(\mu)}(P_i)$  de uma representação  $\mu$ -dimensional podem ser postas simultaneamente na forma:

$$D^{(\mu)}(P_i) = \begin{pmatrix} D^{(k)}(P_i) & A(P_i) \\ 0 & D^{(m)}(P_i) \end{pmatrix} \quad (\text{A6.I.3})$$

onde  $D^{(k)}(P_i)$  e  $D^{(m)}(P_i)$  são blocos diagonais com  $k + m = \mu$ . Quando, por uma transformação similar, todas as matrizes  $D^{(\mu)}(P_i)$  podem ser postas na forma diagonal, isto é, quando  $A(P_i) = 0$ , a representação é denominada *reduzível*. Se as matrizes não podem ser colocadas em uma estrutura de bloco diagonal a representação é dita *irreduzível*.

Consideremos, por exemplo, o mais simples porém não trivial caso do grupo de permutação  $S_3$  e definamos  $P_1 = I =$  identidade  $= (123)$ ,  $P_2 = (213)$ ,  $P_3 = (132)$ ,  $P_4 = (321)$ ,  $P_5 = (312)$  e  $P_6 = (231)$ . Podemos mostrar (vide, por exemplo, Bassalo e Cattani, 2005) que  $S_3$  têm duas representações irreduzíveis 1-dim ( $D_1^{(1)}$  e  $D_2^{(1)}$ ) e somente uma representação irreduzível 2-dim ( $D^{(2)}(P_i)$ ).

Para as duas representações 1-dim as matrizes  $D^{(1)}(P_i)$  são dadas por:

$$D_1^{(1)}(P_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 6); \quad (\text{A6.I.4a})$$

$$D_2^{(1)}(P_i) = 1 \quad (i = 1, 5 \text{ and } 6) \quad (\text{A6.I.4b})$$

e

$$D_2^{(1)}(P_i) = -1 \quad (i = 2, 3 \text{ and } 4), \quad (\text{A6.I.4c})$$

as quais são representações homomórficas.

Para a representação 2-dim as matrizes  $D^{(2)}(P_i)$  são dadas por:

$$D^{(2)}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(2)}(P_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

$$D^{(2)}(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A6.I.5a,b,c})$$

$$D^{(2)}(P_4) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(2)}(P_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

$$D^{(2)}(P_6) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A6.I.5d,e,f})$$

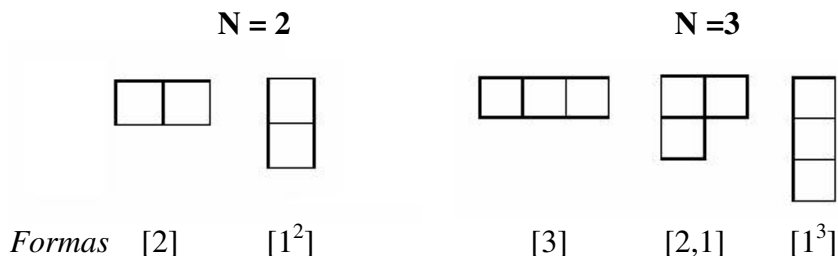
as quais são uma representação fiel. Uma vez que as matrizes mostradas nas Eqs. (A6.I.5a-f) são todas ortogonais esta representação irredutível é dita *ortogonal*.

Há um número infinito de representações de um dado grupo. Obtivemos acima as representações irredutíveis de  $S_3$  usando as propriedades de multiplicação das permutações  $P_i$ . As outras duas representações irredutíveis de  $S_3$  podem ser obtidas, por exemplo, levando em conta (1) rotações de vetores em um espaço Euclidiano 3-dim e (2) rotações de um triângulo equiângulo no plano (x,y) (Jansen e Boon, 1967).

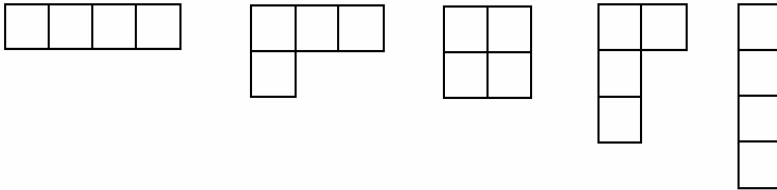
### **Determinação das Representações de $S_N$ por Intermédio das Formas de Young**

No caso geral a determinação das representações de  $S_N$  é realizada usando métodos mais gerais e poderosos desenvolvidos por Young e Frobenius (Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Boerner, 1963; Jansen e Boon, 1967;

Matsen, 1970). Eles consideraram a *expressão substitucional*  $\Pi = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_n P_n$ , onde  $P_1, P_2, \dots, P_n$  são as  $n$  permutações distintas de  $S_N$  e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são coeficientes numéricos e levando em conta as partições de número  $N$ . Qualquer partição do número  $N$  denotado por  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$ , onde  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = N$ , com  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$  será representada simplesmente por  $[\alpha]$ , quando não houver confusão de notação. Os primeiros trabalhos (Boerner, 1963) usando esta abordagem foi realizada, em torno de 1900, independentemente por Frobenius e por Young (clérigo do interior da Inglaterra). Para cada partição  $[\alpha]$  de  $N$  é construída uma *forma*, (“*shape*”) denominada *Forma (ou Diagrama) de Young*, denotada por  $[\alpha]$ , tendo  $\alpha_1$  espaços na primeira linha,  $\alpha_2$  na segunda linha e assim por diante (Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Boerner, 1963; Jansen e Boon, 1967; Matsen, 1970). Por *forma* queremos dizer caixa vazia, i.e., o contorno sem os números. Mostramos abaixo todas as possíveis *formas* associadas com  $N = 2, 3$  e 4 partículas.



**N=4**



*Formas* [4]                    [3,1]                    [2,2]                    [2,3]                    [1<sup>4</sup>]

Os  $N$  números  $1, 2, \dots, N$  são arranjados nos espaços da *forma*  $[\alpha]$  em  $N! = n$  maneiras. Cada um desses arranjos é denominado um *tableau*  $T$  e existem  $N!$  *tableaux* com a mesma *forma*. O *tableau*  $T$ , para uma dada *forma*, é chamado *tableau padrão* (*standard tableau*) se os números crescem em cada linha de  $T$  da esquerda para a direita e em cada coluna de  $T$  de cima para baixo.

Os *tableaux* são construídos como segue: insira os números  $1, 2, 3, \dots, N$  na *forma* em qualquer ordem para obter um *tableau de Young*. Uma vez que o *tableau* tenha sido fixado, consideramos dois tipos de permutações (Weyl, 1932). *Permutações Horizontais*  $p$  são permutações que trocam somente números na mesma linha. *Permutações Verticais*  $q$  que trocam somente números na mesma coluna. Assim, definimos o *operador de Young* por  $YO = P Q$  onde as quantidades  $P$  e  $Q$  são dadas por:

$$P = \sum_p p \quad (\text{"simetrizador"}) \quad (\text{A6.I.6a})$$

e

$$Q = \sum_q \delta_q q \text{ (antisimetrizador)}, \quad (\text{A6.I.6b})$$

onde são feitas as somas sobre as permutações horizontais  $p$  e verticais  $q$  e  $\delta_q$  é a paridade da permutação  $q$ . Os *tableaux* são obtidos pela aplicação dos *operadores de Young* sobre o *tableau* padrão inicial.

Vamos indicar por  $T_1^\alpha, T_2^\alpha, \dots, T_n^\alpha$  os diferentes *tableaux* da mesma *forma*  $[\alpha]$  gerados pelas permutações definidas pelo operador  $Y$ . Qualquer permutação aplicada ao *tableau* da *forma*  $[\alpha]$  não altera a *forma*  $[\alpha]$ .

Denotando por  $P_{ik}^\alpha$  as permutações que mudam  $T_k^\alpha$  em  $T_i^\alpha$ , temos  $T_i^\alpha = P_{ik}^\alpha T_k^\alpha$ . As matrizes  $D_{ik}$  de uma representação irredutível de grau  $f(\alpha)$  de  $S_N$  é calculada através da equação (Rutherford, 1948):

$$e_{ii} P e_{kk} = D_{ik} e_{ik} ,$$

onde  $e_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, f$ ) são bases unitárias que satisfazem as equações  $e_{ij} e_{jk} = e_{ik}$  e  $e_{ij} e_{hk} = 0$  ( $h \neq j$ ). O parâmetro  $f(\alpha)$  chamado *grau* da representação irredutível, dá a dimensão das matrizes irredutíveis.

Os elementos  $D_{ik}$  das matrizes irredutíveis ( $f \times f$ ) podem ser determinadas adotando três diferentes bases unitárias  $e_{ik}$ : (1) *natural*, (2) *semi-normal* e (3) *ortogonal*. Note que os valores encontrados para os elementos das matrizes  $D_{ik}$  dependem da escolha das bases unitárias (Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Boerner, 1963; Jansen e Boon, 1967; Matsen, 1970). Certamente estas três representações irredutíveis são equivalentes.

Apresentemos agora uma breve revisão das propriedades fundamentais das representações irredutíveis de  $S_N$  no espaço de configuração  $\varepsilon^{(N)}$  :

(1) Para cada partição  $(\alpha)$  há uma representação irredutível descrita pelas matrizes quadradas  $D_{ik}^{(\alpha)}$  com dimensão  $f(\alpha)$ . Assim, os *quadros* com a mesma *forma*  $[\alpha]$  têm representações equivalentes e as *formas* diferentes não podem ter representações equivalentes. Há uma correspondência um-a-um entre cada *forma*  $[\alpha]$  e as matrizes irredutíveis  $D_{ik}^{(\alpha)}$ .

(2) As dimensões  $f(\alpha)$  das matrizes quadradas irredutíveis assumem os valores  $1^2, 2^2, \dots, (N-1)^2$ .

(3) Há somente duas representações irredutíveis 1- dadas pelas partições  $(\alpha) = [N]$  e  $(\alpha) = [1^N]$ . O primeiro caso é descrito pela *forma* horizontal com  $N$  espaços. No segundo caso temos uma *forma* vertical com  $N$  linhas. As demais representações têm dimensões indo de  $2^2$  até  $(N-1)^2$  e são descritas por várias *formas* ocupadas por 3, 4, ...,  $N$  partículas, respectivamente (Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Boerner, 1963; Jansen e Boon, 1967; Matsen, 1970).

### **Sistemas com $N = 2$ e $N = 3$ Partículas: Determinação das Funções Bases de suas Representações Irredutíveis, de seus Autovalores de Energia e de suas Representações Irredutíveis nos Espaços de Configuração e de Hilbert.**

Mostraremos agora como determinar as representações irredutíveis para o caso trivial  $N = 2$  e o mais simples porém não-trivial caso de  $N = 3$  usando os *operadores Young*. Isto é feito construindo *funções bases das representações irredutíveis* (Hamermesh, 1962; Matsen, 1970) usando bases unitárias ortogonais. Tomaremos como bases unitárias as  $n = N!$  autofunções ortogonais degeneradas de energia  $\{\Psi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$  as quais geram um espaço de Hilbert  $n$ -dim  $L_2(\epsilon^{(N)})$ .

Dividiremos o processo usado para determinar (Hamermesh, 1962; Matsen, 1970) as representações irredutíveis em três partes **a**, **b** e **c**.



### (a) Construção dos Operadores Young

Seguindo as receitas para construir os operadores Young  $Y = PQ$ , definidos pelas Eqs. (A6.I.6a,b) obtemos os seguintes operadores  $Y$ , associados com as respectivas formas (Hamermesh, 1962; Matsen, 1970):

**N = 2**

$$\textit{forma [2]} : \quad YO[2] = [I + P(1,2)]/2 \quad (\text{A6.I.7a})$$

$$\textit{forma [1^2]} : \quad YO[1^2] = [I - P(1,2)]/2. \quad (\text{A6.I.7b})$$

**N = 3**

*forma [3]:*

$$\begin{aligned} YO[3] &= [\sum_i P_i]/6 = \\ &= [I + P(132) + P(213) + P(231) + P(312) + P(321)]/6, \quad (\text{A6.I.8a}) \end{aligned}$$

*forma [1^3]:*

$$\begin{aligned} YO[1^3] &= [\sum_i \delta_i P_i]/6 = \\ &= [I - P(132) - P(213) + P(231) + P(312) - P(321)]/6 \quad (\text{A6.I.8b}) \end{aligned}$$

*forma [2,1] :*

$$YO_{11}[2,1] = [I + P(213) - P(231) - P(321)]/\sqrt{4} \quad (\text{A6.I.9a})$$

$$YO_{12}[2,1] = [P(132) - P(213) + P(231)]/2 - P(312)]/\sqrt{4} \quad (\text{A6.I.9b})$$

$$YO_{21}[2,1] = [P(132) - P(231) + P(312) - P(321)]/\sqrt{4} \quad (\text{A6.I.9c})$$

$$YO_{22}[2,1] = [I - P(213) - P(312) + P(321)]/\sqrt{4} \quad (\text{A6.I.9d})$$

Vamos indicar por  $e_1 = \Psi(1,2)$  e  $e_2 = P(1,2)\Psi(1,2)$  os vetores base unitários do espaço 2-dim de Hilbert  $L_2(\varepsilon^{(2)})$ . Similarmente, por  $e_1 = \Psi(1,2,3)$ ,  $e_2 = \Psi(1,3,2)$ ,  $e_3 = \Psi(2,1,3)$ ,  $e_4 = \Psi(2,3,1)$ ,  $e_5 = \Psi(3,1,2)$  e  $e_6 = \Psi(3,2,1)$  os vetores base unitários do espaço 6-dim de Hilbert  $L_2(\varepsilon^{(3)})$  obtidos pelas permutações  $P_i e_1 = P_i \Psi(1,3,2)$  ( $i = 1,2,\dots,6$ ).

### **(b) Construção das Funções Base e as Autofunções de Energia.**

Para construirmos as *funções base* para as *representações irredutíveis* (Weyl, 1932; Matsen, 1970) de  $S_2$  e  $S_3$  temos que aplicar os operadores Young YO definidos pelas Eqs.(A6.I.8) e (A6.I.9) nas funções  $\Psi = \Psi(1,2)$  and  $\Psi(1,2,3)$  respectivamente. Nessas condições, obtemos:

Para  $N = 2$  as autofunções normalizadas completamente simétrica,  $\varphi_s$  e. anti-simétrica,  $\varphi_a$  de dois subespaços 1-dim são dadas por:

$$\varphi_s = (e_1 + e_2)/\sqrt{2} \quad e \quad \varphi_a = (e_1 - e_2)/\sqrt{2} \quad (\text{A6.I.10a,b})$$

Para  $N= 3$  teremos os seguintes autovetores:

$$\textit{forma} [3]: \varphi_s = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)/\sqrt{6} \quad (\text{A6.I.11a})$$

$$\textit{forma} [1^3]: \varphi_a = (e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6)/\sqrt{6} \quad (\text{A6.I.11b})$$

*forma* [2,1]:

$$Y_{11} = (e_1 + e_3 - e_4 - e_6) / \sqrt{4} \quad (\text{A6.I.12a})$$

$$Y_{12} = (e_2 - e_3 + e_4 - e_5) / \sqrt{4} \quad (\text{A6.I.12b})$$

$$Y_{21} = (e_2 - e_4 + e_5 - e_6) / \sqrt{4} \quad (\text{A6.I.12c})$$

$$Y_{22} = (e_1 - e_3 - e_5 + e_6) / \sqrt{4}. \quad (\text{A6.I.12d})$$

Para  $N = 3$  os vetores base unitários  $\{e_i\}_{i=1,2,\dots,6}$  geram um espaço de Hilbert 6-dim o qual é composto por dois subespaços Hilbert 1-dim,  $h([3])$  e  $h([1^3])$ , e um subespaço 4-dim  $h([2,1])$ . Como as funções  $Y_{rs}(r,s=1,2,3,4)$  formam um conjunto de funções linearmente independentes em  $h([2,1])$  podemos construir por um processo de ortonormalização os vetores-base  $\{Y_i\}_{i=1,\dots,4}$  do subespaço  $h([2,1])$  que são dados por:

$$Y_1 = (e_1 + e_3 - e_4 - e_6) / \sqrt{4} \quad (\text{A6.I.13a})$$

$$Y_2 = (e_1 + 2e_2 - e_3 + e_4 - 2e_5 - e_6) / \sqrt{12} \quad (\text{A6.I.13b})$$

$$Y_3 = (-e_1 + 2e_2 - e_3 - e_4 + 2e_5 - e_6) / \sqrt{12} \quad (\text{A6.I.13c})$$

$$Y_4 = (e_1 - e_3 - e_4 + e_6) / \sqrt{4}. \quad (\text{A6.I.13d})$$

Nestas condições o subespaço  $h([2,1])$  é descrito por vetores ortonormais  $\{Y_i\}_{i=1,2,\dots,4}$  e os autoestados  $Y([2,1])$  associados a este subespaço são escritos na forma:

$$Y([2,1]) = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{pmatrix} \quad (\text{A6.I.14})$$

onde as funções  $Y_+$  and  $Y_-$  são definidas por:

$$Y_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{A6.I.15a,b})$$

Como pode ser facilmente verificado, as funções  $\varphi_s$ ,  $\varphi_a$  e  $\{Y_i\}_{i=1,\dots,4}$  são ortonormais, isto é,  $\langle f_n | f_m \rangle = \delta_{nm}$ , onde  $n, m = s, a, 1, 2, 3$  e  $4$ . Destas propriedades ortonormais podemos verificar que:

$$|\langle Y | Y \rangle|^2 = (|Y_1|^2 + |Y_2|^2 + |Y_3|^2 + |Y_4|^2)/4$$

e que

$$\begin{aligned} |\langle Y_+ | Y_+ \rangle|^2 &= (|Y_1|^2 + |Y_2|^2)/2 = (|Y_3|^2 + \\ &+ |Y_4|^2)/2 = |\langle Y_- | Y_- \rangle|^2. \end{aligned}$$

Das Equações (A6.I.14; A6.I.15a,b) vemos que o subespaço 4-dim  $h([2,1])$ , que corresponde à *forma intermediária de Young*  $[2,1]$ , quebra-se em dois subespaços 2-dimensionais,  $h_+([2,1])$  e  $h_-([2,1])$ , que são gerados pelos vetores-base  $\{Y_1, Y_2\}$  e  $\{Y_3, Y_4\}$ , respectivamente. A esses subespaços são associados as autofunções  $Y_+([2,1])$  e  $Y_-([2,1])$  definidas

pelas Equações (A6.I.15a,b). Não existe nenhuma transformação linear conectando os vetores  $Y_+$  e  $Y_-$ .

Note que as funções  $\varphi_s$  e  $\varphi_a$  acima definidas pelas Equações (A6.I.10a,b) são as autofunções energia para o sistema com  $N = 2$  partículas. Similarmente, as funções  $\varphi_s$ ,  $\varphi_a$  e  $\{Y_i\}_{i=1,\dots,4}$  vistas nas Eqs. (A6.I.11a,b; A6.I.12a-d; A6.I.13a-d; A6.I.14; A6.I.15a,b) são as autofunções energia do sistema com  $N = 3$  partículas.

### (c) Cálculo das Representações Irredutíveis dos Grupos $S_2$ e $S_3$

Finalmente, para calcularmos as *representações irredutíveis dos grupos  $S_2$  e  $S_3$*  associadas com as correspondentes *formas* é necessário aplicar os operadores permutação  $P_i$  às funções de onda de energia dadas pelas Eqs. (A6.I.10a,b; A6.I.11a,b; A6.I.14; A6.I.15a,b):

**$N = 2$  e  $3$ :**

*Formas Horizontais* [2] e [3]:

$$P_i \varphi_s = (+1) \varphi_s, \quad \text{isto é,} \quad D[2] = D[3] = +1.$$

*Formas Verticais*  $[1^2]$  e  $[1^3]$ :

$$P_i \varphi_a = (\pm 1) \varphi_a, \quad \text{isto é,} \quad D[1^2] = D[1^3] = \pm 1,$$

mostrando que todas as representações irredutíveis são 1-dim. As formas [2] e [3] são associadas a matriz  $D^{(1)} = 1$ . As formas  $[1^2]$  e  $[1^3]$  são associadas a matriz  $D^{(1)} = \pm 1$ .

**$N=3$ , forma intermediária** [2,1].

Aplicando os operadores  $P_i$  a  $Y_+$  e  $Y_-$  definidos pelas Eqs.(I.14) e levando em conta que  $P_i e_j = e_m$ , onde  $i, j, m = 1,2,3,\dots,6$ , podemos mostrar que:

$$P(123) Y_{\pm} = P_1 Y_{\pm} = I Y_{\pm} \quad (\text{A6.I.16a})$$

$$P(132) Y_{\pm} = P_2 Y_{\pm} = D^{(2)}(P_2) Y_{\pm} \quad (\text{A6.I.16b})$$

$$P(213) Y_{\pm} = P_3 Y_{\pm} = D^{(2)}(P_3) Y_{\pm} \quad (\text{A6.I.16c})$$

$$P(321) Y_{\pm} = P_4 Y_{\pm} = D^{(2)}(P_4) Y_{\pm} \quad (\text{A6.I.16d})$$

$$P(231) Y_{\pm} = P_6 Y_{\pm} = D^{(2)}(P_6) Y_{\pm} \quad (\text{A6.I.16e})$$

$$P(312) Y_{\pm} = P_5 Y_{\pm} = D^{(2)}(P_5) Y_{\pm} \quad (\text{A6.I.16f})$$

onde  $D^{(2)}(P_i)$  ( $i=1,2,\dots,6$ ) são as mesmas matrizes  $2 \times 2$  da representação irredutível 2-dimensional de  $S_3$  dada pela Equações (A6.I.6a-f). Isto implica que as matrizes de representação associadas com a *forma*  $[2,1]$  são quebradas em matrizes irredutíveis  $2 \times 2$   $D^{(2)}(P_i)$ . Estas representações irredutíveis são equivalentes. Desta maneira as matrizes representação  $4 \times 4$  no subespaço 4-dim  $h([2,1])$  podem ser escritas como a soma direta de duas matrizes irredutíveis  $2 \times 2$ .

Conforme dissemos acima, adotando vetores base unitários particulares  $\{\Psi_i\}_{i=1,2,\dots,6}$  os quais são autovalores do Hamiltoniano  $H$  determinamos simultaneamente as representações irredutíveis de  $S_3$  no espaço de configuração  $\varepsilon^{(3)}$  e no espaço de Hilbert  $L_2(\varepsilon^{(3)})$  e construímos as autofunções  $\varphi_s, \varphi_a, Y_+$  e  $Y_-$  do operador energia  $H$ . O espaço de Hilbert  $L_2(\varepsilon^{(3)})$  6-dim que é gerado pelos vetores base  $\{\Psi_i\}_{i=1,2,\dots,6}$  é formado por três subespaços  $h([\alpha])$ . Dois deles,  $h([3])$  e  $h([1^3])$ , são 1-dim. O subespaço 4-dim  $h([2,1])$  que é gerado pelos vetores base unitários  $\{Y_i\}_{i=1,\dots,4}$  é composto por dois subespaços 2-dim,

$h_+([2,1])$  e  $h_-([2,1])$ , gerados pelos vetores unitários  $\{Y_1, Y_2\}$  e  $\{Y_3, Y_4\}$ , respectivamente.

## APÊNDICE A6.II

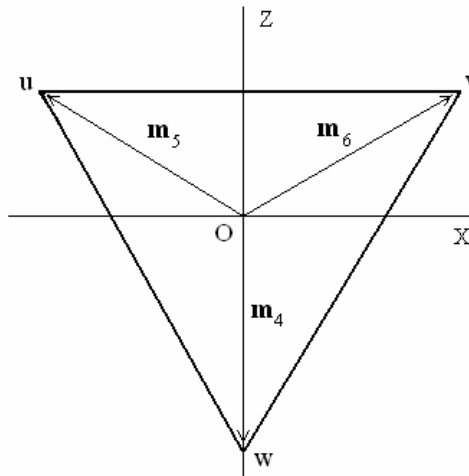
### Permutações no $\varepsilon^{(3)}$ e as Rotações de um Triângulo Equilátero em um Espaço Euclidiano $E_3$ .

Mostraremos neste Apêndice que os operadores permutação  $P_i$  aplicados em  $Y([2,1])$  podem ser interpretados como rotações de um triângulo equilátero no espaço Euclidiano  $E_3$ . Para mostrarmos isso assumiremos que em  $E_3$  os estados  $u, v$  e  $w$  podem ocupar os vértices de um triângulo equilátero tomado no plano  $(x,z)$ , como visto na Fig. A6.II Os vetores unitários ao longos dos eixos  $x, y$  e  $z$  são indicados por  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ . Na Fig.A6.II os vetores unitários  $\mathbf{m}_4, \mathbf{m}_5$  e  $\mathbf{m}_6$  são dados por  $\mathbf{m}_4 = -\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{m}_5 = -(\sqrt{3}/2)\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{k}$  e  $\mathbf{m}_6 = (\sqrt{3}/2)\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{k}$ , respectivamente.

Representamos por  $Y(123)$  o estado inicial cujas partículas 1, 2 e 3 ocupam os vértices  $u, v$  e  $w$ , respectivamente. Como é mostrado em detalhes nos artigos (Cattani e Fernandes, 1987a,b) as matrizes irredutíveis  $D^{(2)}(P_i)$  associadas com as permutações  $P_i Y = D^{(2)}(P_i) Y$  podem ser representadas por operadores unitários:

$$U = \exp[i \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\theta/2)] \quad \text{e} \quad V = i \exp[i \mathbf{m}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}(\varphi/2)],$$

onde  $\theta = \pm 2\pi/3$  são ângulos de rotação em torno do vetor unitário  $\mathbf{j}$ ,  $\varphi = \pm \pi$  são ângulos de rotação em torno dos vetores unitários  $\mathbf{m}_4, \mathbf{m}_5$  e  $\mathbf{m}_6$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  são as matrizes de Pauli.



**Figura A6.II.** O triângulo equilátero no espaço Euclidiano  $(x,y,z)$  com vértices ocupados pelos estados  $u, v$  e  $w$ .

Desses resultados vemos que: (a) os autovetores  $Y([2,1])$  são spinores e (b) os operadores de permutação  $P_i$  em  $\mathfrak{e}^{(3)}$  são representados por operadores unitários lineares,  $U$  e  $V$ , no espaço de Hilbert  $L_2(\mathfrak{e}^{(3)})$ .

De acordo com um artigo precedente (Cattani e Fernandes, 1984), chamamos  $AS_3$  a álgebra do grupo simétrico  $S_3$ . Esta álgebra é gerada por 6 vetores, as matrizes irredutíveis  $\{D^{(2)}(P_i)\}_{i=1,2,\dots,6}$  que antes (Cattani e Fernandes, 1984) foi indicada por  $\{\eta_i\}_{i=1,2,\dots,6}$ . Mostramos que associado a esta álgebra existe um invariante algébrico  $K_{\text{inv}} = \eta_4 + \eta_5 + \eta_6 = (\mathbf{m}_4 + \mathbf{m}_5 + \mathbf{m}_6) \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ . Desta igualdade resulta que  $K_{\text{inv}}$  pode ser representado geometricamente no plano  $(x,z)$  pelo vetor  $\mathbf{M}$  identicamente igual a zero, isto é:  $\mathbf{M} = \mathbf{m}_4 + \mathbf{m}_5 + \mathbf{m}_6 = 0$ . Usualmente, para grupos contínuos, definimos como *invariantes de Casimir* operadores que comutam com todos dos geradores



do grupo (em nosso caso os geradores são  $\eta_4$  e  $\eta_6$ ) e são, portanto, invariantes por todas as transformações do grupo de simetria. Estes invariantes simultaneamente diagonalizados são os operadores quânticos conservados associados ao grupo de simetria. Em nosso caso discreto usamos a mesma idéia. Assim, o operador  $K_{\text{inv}}$  que corresponde a representação gentiliônica genuína de  $AS_3$  é identificado com um operador quântico que fornece um novo número quântico conservado e relacionado ao grupo  $S_3$ . Assumindo que quarks são gentíleons (Cattani e Fernandes, 1984; 1985; 1987a,b; Cattani, 1989; 1995), e que os estados  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os três estados de cor de  $SU(3)$  interpretamos a constante de movimento  $K_{\text{inv}} = 0$  como uma *carga cor conservada* o que implicaria conseqüentemente no *confinamento do quark*. Neste caso nós denominamos o  $AS_3$  Casimir  $K_{\text{inv}} = 0$  como *Casimir de cor*.

## 6.6 Os Sistemas Gentiliônicos Mais Simples<sup>1</sup>

### 6.6.1 Introdução

Conforme vimos nas Seções 6.1-5, de acordo com os postulados da Mecânica Quântica e o Princípio da Indistinguibilidade, foi proposto que três espécies de partículas poderiam existir na natureza: *Bósons*, *Férmions* e *Gentíleons*. Ainda conforme aquelas Seções, a seguinte afirmação é tomada como um princípio (Princípio Estatístico): *Bósons*, *Férmions* e *Gentíleons* são representados, respectivamente, por *diagramas de Young horizontal*, *vertical* e *intermediários*. Sistemas bosônicos e fermiônicos são descritos, respectivamente, por funções de onda unidimensionais totalmente

---

<sup>1</sup> Este item é baseado no artigo de M. Cattani, publicado na *Acta Physica Polonica* **B20**, p. 983, em 1989.

simétrico ( $\Psi_S$ ) e anti-simétrico ( $\Psi_A$ ). Sistemas gentiliônicos são descritos por funções de onda ( $Y$ ) com simetrias mistas. Desde que eles são representados por diagramas de Young intermediários somente três ou mais gentileons idênticos podem formar um sistema de partículas indistinguíveis. Isto significa que dois gentileons idênticos são *proibidos* de formar um sistema de partículas indistinguíveis.

Indiquemos por  $YD(n, j)$  todos os possíveis diagramas de Young intermediários ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) que podem ser construídos para um sistema de  $n$ -partículas. Por exemplo, para  $n = 3$  há somente uma possibilidade  $YD(3, 1)$  e para  $n = 4$  há três possibilidades  $YD(4, j)$  onde  $j = 1, 2$  e  $3$ . Como é bem conhecido (Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Matsen, 1970) há uma correspondência um-a-um entre os diagramas de Young  $YD(n, j)$  e as representações irredutíveis  $Y(n, j)$  do grupo de permutação no espaço de Hilbert. As funções estado  $Y(3, j)$ ,  $Y(4, i)$  e  $Y(5, k)$  ... têm propriedades de simetria completamente diferentes que são definidas pelas permutações e pelos invariantes algébricos (Cattani e Fernandes, 1985, 1987; Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Matsen, 1970) associados com os grupos simétricos  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  ... . Em um sistema de  $n$ -partículas representado por  $Y(n, j)$  sub-sistemas de  $m$  partículas não têm uma simetria  $Y(m, i)$ . Das propriedades acima, vamos deduzir importantes conseqüências:

(1) *Há uma infinidade de Gentileons diferentes.* De fato, se houvesse somente uma espécie de *gentileon*, 3, 4, 5, ... deles poderiam formar sistemas representados por  $Y(3, j)$ ,  $Y(4, i)$  e  $Y(5, k)$ , ... , respectivamente. Então, consideremos um dado sistema composto de  $n$  gentileons e vamos dividi-lo em sub-sistemas com  $m$  partículas ( $m = n-1, n-2, \dots, 5, 4, 3$ ). Uma vez que essas  $m$  partículas são indistinguíveis esses sub-sistemas poderão ser, necessariamente,

representados por  $Y(m,i)$ , o que é impossível devido a irreduzibilidade das representações intermediárias. Conseqüentemente, deve haver um número infinito de diferentes *Gentíleons*  $g_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). *Gentíleons*  $g_1$  poderão ser associados com os diagramas de Young  $YD(3,1)$ ,  $g_2$  com os  $YD(4,1)$ ,  $g_3$  com os  $YD(4,2)$ ,  $g_4$  com os  $YD(4,3)$ , e assim por diante. Em outras palavras, *Gentíleons*  $g_1$  poderão formar somente sistemas de 3-partículas representados por  $Y(3,1)$ ,  $g_2$  poderia formar um sistemas de 4-partículas representados por  $Y(4,1)$  e assim sucessivamente.

(2) *Sistemas gentiliônicos não podem coalescer*. Dois sistemas de  $n$  gentíleons idênticos com cada um deles representado por  $Y(n, j)$  não podem formar um sistema com  $2n$  entidades indistinguíveis que poderiam ser descritas por  $Y(2n,i)$ . Contudo, se a coalescência fosse possível era então possível obter de  $Y(2n,i)$  sub-sistemas com  $n$  partículas descritas por  $Y(n, j)$ , o que é proibido. Então, sistemas  $A$  e  $B$ ,  $[gg..g]_A$  e  $[gg...g]_B$  não podem coalescer em um sistema de partículas indistinguíveis  $[gggg...g]$ . Somente estados ligados  $[gg...g]_A - [gg...g]_B$  podem ser formados. Então, *Gentíleons* de diferentes sistemas devem ser distinguíveis o que significa que funções de onda de *Gentíleons* de diferentes sistemas não devem sobrepor-se.

(3) *Gentíleons são entidades confinadas*. Para confirmar essa afirmação devemos notar que o sistema composto de  $n$  *Gentíleons*  $[gggg...g]$  não pode ser criado passo a passo a partir do vácuo porque os sistemas  $[g]$ ,  $[gg]$ ,  $[ggg]$ , ...,  $[ggg...g]$ , com 1, 2, 3, ...,  $n-1$  partículas, respectivamente, não são permitidas. Pelo mesmo argumento observamos que este sistema não pode ser aniquilado por etapas. Isto significa que os sistemas gentiliônicos devem ser criados ou aniquilados de uma vez. Conseqüentemente, nenhum gentíleon pode escapar de ou entrar em um dado sistema.

Levando em conta a não-coalescência e as propriedades de confinamento vemos que nenhum *Gentíleon* pode ser subtraído ou acrescentado a um sistema gentiliônico e que ele deve possuir fronteiras externas estreitas nas quais as funções de onda gentiliônicas se anulam.

No artigo (Cattani e Fernandes, 1984) citado anteriormente somente sistemas de gentiliônicos idênticos foram considerados. Agora vamos tomar sistemas compostos de duas espécies diferentes de *Gentíleons*,  $g$  e  $G$ . Levando em conta o Princípio Estatístico devemos esperar que sistemas do tipo  $[gG]$  sejam permitidos. Por outro lado, sistemas do tipo  $[ggG]$ ,  $[gGG]$  e  $[ggGG]$  são proibidos porque os sistemas do tipo  $[gg]$  e  $[GG]$  não são permitidos. Certamente, não-coalescência e propriedades de confinamento são também válidas para sistemas mistos, como facilmente pode ser verificado.

Confinamento e não-coalescência são propriedades intrínsecas de *Gentíleons*, deduzidas do Princípio Estatístico e de propriedades de simetria dos estados intermediários  $Y(n, j)$ , não dependendo de suas interpretações físicas. Então, eles podem corresponder a partículas reais ou a entidades dinâmicas como as excitações quânticas coletivas. Contudo, se *Gentíleons* forem partículas reais deve haver alguma espécie de mecanismo para explicar aquelas propriedades: um potencial de interação muito peculiar, um saco impermeável ou alguma coisa parecida. Mas, qualquer mecanismo aceitável deve ser concebido sob a imposição de concordar exatamente com a simetria intermediária. É difícil entender os *Gentíleons* como partículas reais; eles parecem ser alguma espécie de excitação coletiva quântica.

Na Seção 6.6.2 apresentaremos um estudo detalhado das propriedades do estado vetor  $Y(3,1)$  representando os sistemas  $[g_1g_1g_1]$ . É mostrado que  $Y(3,1)$  tem um caráter spinorial.

Como sabemos, partículas de spin semi-inteiro e de spin inteiro são descritas, do ponto de vista do grupo de Lorentz, por representações irredutíveis spinorial e tensoriais, respectivamente. De acordo com o célebre teorema de Pauli (Pauli, 1940; Burgoyne, 1958; Lüders e Zumino, 1958) se operadores de criação e destruição de partículas obedecem a relações bi-lineares comutativa (anti-comutativa) essas partículas têm spin inteiro (semi-inteiro ímpar). Usando relações bi-lineares comutativa ou anti-comutativa, localmente consistentes, teorias quântica de campo invariante de Lorentz podem ser desenvolvidas. Na Seção 6.6.3, relações de comutação para *Gentileons*  $g_1$  são analisadas com o objetivo de estabelecer uma conexão entre spin e estatística. Verificamos, no contexto de Pauli, que os *Gentileons*  $g_1$  são partículas de spin semi-inteiro.

Na Seção 6.6.4, mostramos que as propriedades de simetria fundamental do estado vetor  $Y(3,1)$  são descritas pelos grupos  $S_3$  e  $SU(3)$ . Na Seção 6.6.5, resumimos as características básicas previstas para os sistemas  $[g_1, g_1, g_1]$ . Na Seção 6.6.6, assumindo que os *Gentileons*  $g_1$  são *quarks*, nossas considerações teóricas são usadas para investigar alguns aspectos da física hadrônica. Finalmente, na Seção 6.6.7, é proposta uma Cromodinâmica Quântica onde, em vez de *Férmions*, são os *Gentileons*  $g_1$  que interagem com os glúons.

### 6.6.2 Propriedades de Simetria do Estado Quântico Gentiliônico $Y(3,1)$

Apresentamos nesta Seção um estudo detalhado das propriedades de simetria da função de onda  $Y(3,1)$  de um sistema composto das três primeiras espécies de *Gentileons*  $g_1$ . Então, de

acordo com nossos resultados gerais (Cattani e Fernandes, 1984) as propriedades de simetria de  $Y(3,1)$ , também indicado por  $Y(123)$ , são completamente descritas em termos de três estados quânticos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Em termos de  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  o sistema  $g_1$  será representado por  $Y_+(3,1)$  ou  $Y_-(3,1)$ , duas representações irredutíveis equivalentes do grupo de simetria  $S_3$  (Cattani e Fernandes, 1987a; Weyl, 1932; Rutherford, 1948; Hamermesh, 1962; Hartle e Taylor, 1969),

$$Y_+(3,1) = Y_+(\alpha\beta\gamma) = Y_+(123) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_1(123) \\ Y_2(123) \end{pmatrix}, \quad (11a)$$

$$Y_-(3,1) = Y_-(\alpha\beta\gamma) = Y_-(123) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_3(123) \\ Y_4(123) \end{pmatrix}, \quad (11b)$$

onde:

$$Y_1(123) = \left( |\alpha\beta\gamma\rangle + |\beta\alpha\gamma\rangle - |\gamma\alpha\beta\rangle - |\gamma\beta\alpha\rangle \right) / \sqrt{4},$$

$$Y_2(123) = \left( |\alpha\beta\gamma\rangle + 2|\alpha\gamma\beta\rangle - |\beta\alpha\gamma\rangle + |\gamma\alpha\beta\rangle - 2|\beta\gamma\alpha\rangle - |\gamma\beta\alpha\rangle \right) / \sqrt{12},$$

$$Y_3(123) = \left( -|\alpha\beta\gamma\rangle + 2|\alpha\gamma\beta\rangle - |\beta\alpha\gamma\rangle - |\gamma\alpha\beta\rangle + 2|\beta\gamma\alpha\rangle - |\gamma\beta\alpha\rangle \right) / \sqrt{12},$$

e

$$Y_4(123) = \left( |\alpha\beta\gamma\rangle - |\beta\alpha\gamma\rangle - |\gamma\alpha\beta\rangle + |\gamma\beta\alpha\rangle \right) / \sqrt{4}.$$

Nos artigos precedentes (Cattani e Fernandes, 1987a; Hartle e Taylor, 1969) a função estado  $Y(3,1)$  foi tomada como um

“bi-spinor” no sentido de Dirac  $Y(3,1) = \begin{pmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{pmatrix}$ . Embora seja possível

uma interpretação para a função estado  $Y(3,1)$ , ele não tem rigoroso suporte dentro da estrutura da teoria de grupo. Então, no que segue, o sistema  $g_1$  será representado por  $Y_+(123)$  ou  $Y_-(123)$ , indicado simplesmente por  $Y(123)$ . É importante notar que, neste contexto, nossa teoria difere drasticamente da paraestatística (Cattani e Fernandes, 1987a).

Nossa intenção nesta Seção é mostrar explicitamente o caráter spinorial de  $Y(123)$  e estabelecer propriedades fundamentais do sistema  $g_1$  que podem ser deduzidas desse caráter. Desta maneira lembremos que, devido aos seis operadores de permutação  $P_j$  do grupo  $S_3$ , os estados  $Y_{\pm}(123)$  são transformados em (Cattani e Fernandes, 1987a):

$$Y' = Y'_{\pm} = P_j Y_{\pm} = \eta_j Y_{\pm} \quad (12)$$

onde  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, 6$ ) são matrizes  $2 \times 2$  dadas por,

$$\eta_1 = \eta \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad \eta_2 = \eta \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

$$\eta_3 = \eta \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}; \quad \eta_4 = \eta \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\eta_5 = \eta \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} e$$

$$\eta_6 = \eta \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (13a,b,c,d,e,f)$$

O caráter spinorial de  $Y(123)$ , como visto nas Eqs. (13a-f), é óbvio pois as matrizes  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\eta_3$  têm  $\det = +1$  e  $\eta_4$ ,  $\eta_5$  e  $\eta_6$ ,  $\det = -1$ . Mostraremos que isto é correto interpretando a transformação de  $Y$  em termos de rotações de um triângulo equilátero em um espaço Euclidiano  $E_3$ . Isto é, nós assumimos  $E_3$  como um espaço onde os estados quânticos que podem ser ocupados por  $g_1$  são definidos por três coordenadas ortogonais  $(X, Y, Z)$ . É também assumido que, em  $E_3$ , os estados  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  ocupam os vértices de um triângulo equilátero no plano  $(X, Z)$ , como é visto na Fig. 1 (representada no Apêndice A6.II como Fig. A6.II). Os vetores unitários ao longo dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são indicados, como usualmente, por  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ . Na Fig. 1, os vetores unitários  $\vec{m}_4$ ,  $\vec{m}_5$  e  $\vec{m}_6$  são dados por,  $\vec{m}_4 = -\vec{k}$ ,  $\vec{m}_5 = -(\sqrt{3}/2)\vec{i} + (1/2)\vec{k}$  e  $\vec{m}_6 = (\sqrt{3}/2)\vec{i} + (1/2)\vec{k}$ , respectivamente.

Representamos por  $Y(123)$  os estados cujas partículas 1, 2 e 3 ocupam os vértices  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , respectivamente. Então, vemos que as permutações verdadeiras, (312) e (231), são obtidas de (123) sob rotações dos ângulos  $\theta = \pm 2\pi/3$  em torno do vetor unitário  $\vec{j}$ . Como pode ser facilmente visto, as matrizes  $\eta_2$  e  $\eta_3$ , que correspondem a essas permutações são representadas por:



$$\eta_2 = -I/2 + i(\sqrt{3}/2)\sigma_y = \exp[i\vec{j} \cdot \vec{\sigma}(\theta/2)] \quad (14a)$$

e

$$\eta_3 = -I/2 - i(\sqrt{3}/2)\sigma_y = \exp[i\vec{j} \cdot \vec{\sigma}(\theta/2)], \quad (14b)$$

onde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são as matrizes de Pauli.

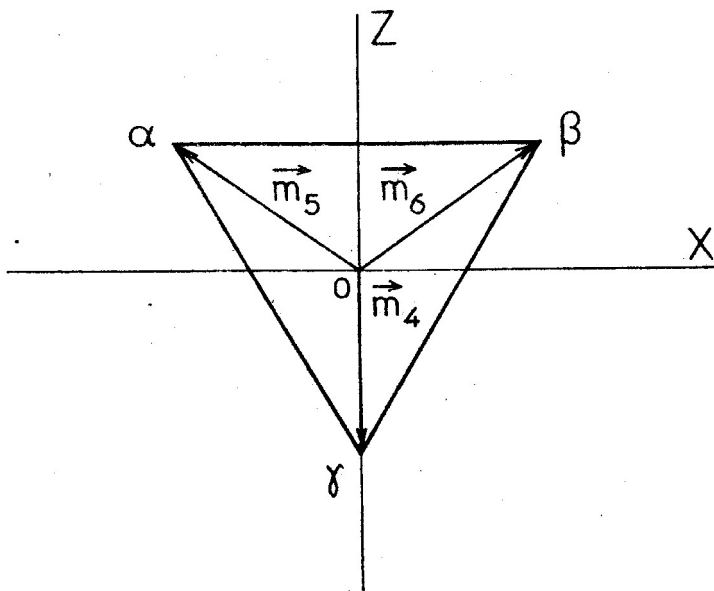


Fig. 1. O triângulo equilátero no espaço Euclidiano (X, Y, Z) com os vértices ocupados pelos estados  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$

Similarmente, as transposições (213), (132) e (321) são obtidas sob rotações por ângulos  $\Phi = \pm\pi$  em torno dos eixos  $\vec{m}_4$ ,  $\vec{m}_5$  e  $\vec{m}_6$ , respectivamente. As correspondentes matrizes são dadas por:

$$\eta_4 = \sigma_z = i \exp[i \vec{m}_4 \cdot \vec{\sigma}(\Phi/2)], \quad (15a)$$

$$\eta_5 = (\sqrt{3}/2) \sigma_x - (1/2) \sigma_z = i \exp[i \vec{m}_5 \cdot \vec{\sigma}(\Phi/2)] \quad (15b)$$

e

$$\eta_6 = -(\sqrt{3}/2) \sigma_x - (1/2) \sigma_z = i \exp[i \vec{m}_6 \cdot \vec{\sigma}(\Phi/2)]. \quad (15c)$$

De acordo com nossos trabalhos precedentes (Cattani e Fernandes, 1985; 1987a) há um invariante algébrico,  $K_{(2,1)}^{[2,1]}$ , com um autovalor nulo, associado com os estados gentiliônicos  $S_3$ . Em analogia com os grupos contínuos, este invariante será denominado  $AS_3$  Casimir. Para permutações representadas por matrizes com  $\det = +1$ , o invariante é dado por  $K_{rot} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$ . Para transposições nas quais as matrizes com  $\det = -1$ , o invariante é dado por  $K_{inv} = \eta_4 + \eta_5 + \eta_6$ . Levando em conta  $\vec{m}_4$ ,  $\vec{m}_5$  e  $\vec{m}_6$  e a Eqs. (15a-c) nos vemos que:

$$K_{inv} = \eta_4 + \eta_5 + \eta_6 = (\vec{m}_4 + \vec{m}_5 + \vec{m}_6) \cdot \vec{\sigma} = 0.$$

Isto significa que o invariante  $K_{inv}$  pode ser representado geometricamente, no plano (X, Z), por  $\vec{M} = \vec{m}_4 + \vec{m}_5 + \vec{m}_6 = 0$ , e que a simetria equilateral da representação  $S_3$  é uma propriedade intrínseca de  $K_{inv} = 0$ .

As Eqs. (14a-b) e (15a-c) permite-nos interpretar  $Y_+$  e  $Y_-$  como spinores. Aqui, usando outros argumentos (Cattani e Fernandes, 1987a; 1977), nós mostramos que esta interpretação é correta. É bem conhecido que o spinor não-relativístico pode ser introduzido de diversas maneiras (Frescura e Hiley, 1981). A inter-relação de várias

aproximações não é óbvia e pode levar a noções falsas. Com o objetivo de contornar a necessidade de enumerar as diversas aproximações, vamos persistir com uma imagem geométrica, retomando o resultado muito fundamental do grupo de isomorfismo (Dieudonné, 1955):  $S_3 \approx PSL_2(F_2)$ , onde  $PSL_2(F_2)$  é o grupo projetivo associado com o grupo especial  $SL_2$  definido sobre um corpo  $F_2$  com somente dois elementos. Obviamente,  $PSL_2(F_2) \approx SL_2(F_2)/SL_2(F_2) \cap Z_2$ , onde o grupo no denominador é o centro de  $SL_2$  e corresponde a homotetias centrais, desde que  $Z_2$  seja a intersecção do grupo de colineação com  $SL_2$ .

Se considerarmos as matrizes dadas pelas Eqs. (3a-f) como representando as transformações em um espaço complexo bi-dimensional caracterizado pelas coordenadas homogêneas  $Y_1$  e  $Y_2$ ,

$$\begin{pmatrix} Y'_1 \\ Y'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

onde  $\rho$  é uma constante complexa arbitrária e as letras latinas substituem os coeficientes tomados das matrizes dadas pelas Eqs. (13a-f), é claro que elas constituem um grupo homográfico (ou projetivo).

Fazendo uso da Eq. (16), vemos das Eqs. (3a-f) que, separadamente da identidade  $\eta_1$ , as duas matrizes  $\eta_2$  e  $\eta_3$ , que têm  $\det = +1$ , são homografias elípticas com pontos fixos  $\pm i$ . Se transladarmos esses valores para as variáveis de  $E_3$ , vemos que  $\eta_2$  e  $\eta_3$  correspondem a rotações finitas em torno do eixo  $\vec{j}$  por um ângulo  $\theta = \pm 2\pi/3$ , de acordo com Eqs. (14a-b). As matrizes remanescentes  $\eta_4$ ,  $\eta_5$  e  $\eta_6$  são involuções elípticas, com  $\det = -1$ . Elas correspondem a inversões espaciais no  $E_3$ , consideradas como

rotações de  $\pm\pi$  em torno dos três eixos  $\vec{m}_4$ ,  $\vec{m}_5$  e  $\vec{m}_6$ , respectivamente. Estas matrizes definem completamente os eixos de inversão e o ângulo  $\pm\pi$ , como é visto nas Eqs. (15a-c). É uma tarefa elementar estabelecer a correspondência, via projeção estereográfica, entre as transformações nos dois espaços  $Y_+$  ( $Y_-$ ) e  $E_3$ .

Uma imagem topológica pode auxiliar-nos a ver as invariâncias  $4\pi$  de  $Y_+$  e  $Y_-$ . Se considerarmos o ângulo de rotação  $\theta(\Phi)$  como a variável descrevendo um disco Euclidiano, o espaço cobertura associado com este disco é uma fita de Moebius (Borisovich, Bliznyakov, Izrailevich e Fomenko, 1985). Ajustando corretamente a posição dos triângulos tem um retrato vivo das propriedades de rotação de cada eixo. Esta construção permite-nos visualizar a cobertura dupla da transformação em  $E_3$  e é uma demonstração convincente da ligação spinorial entre  $E_3$  e  $Y_{\pm}$ .

Observamos que as mesmas propriedades de transformação de  $Y_+$  e  $Y_-$  pode ser obtida se, em vez do triângulo equilátero mostrado na Fig. 1, considerarmos o triângulo desenhado na Fig. 2.

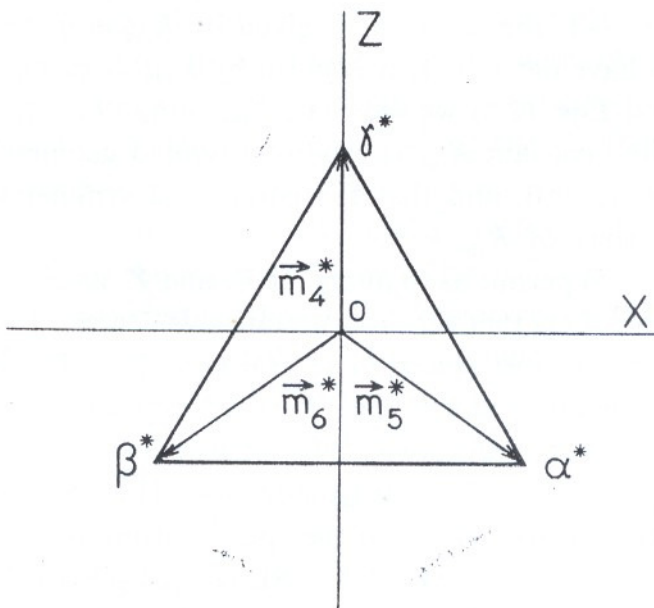


Fig. 2. O triângulo eqüilateral no espaço Euclidiano (X, Y, Z) com os vértices ocupados pelos estados  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  e  $\gamma^*$

Nos vértices do triângulo eqüilateral da Fig. 2 temos os estados  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  e  $\gamma^*$ . Os vetores unitários  $\vec{m}_4^*$ ,  $\vec{m}_5^*$  e  $\vec{m}_6^*$  são dados por  $\vec{m}_4^* = -\vec{m}_4$ ,  $\vec{m}_5^* = -\vec{m}_5$  e  $\vec{m}_6^* = -\vec{m}_6$ . Isto significa que, neste caso,  $K_{inv}$  é representado geometricamente por  $\vec{M}^* = \vec{m}_4^* + \vec{m}_5^* + \vec{m}_6^* = 0$ . Esta possibilidade dupla para representar os correspondentes triângulos, como será visto na Seção 6.4, relacionados às representações 3 e  $3^*$ , respectivamente, do grupo  $SU(3)$ .

Quando duas partículas ocupam o mesmo estado como  $\alpha = \beta$ , por exemplo, nos verificamos (Cattani e Fernandes, 1984;

Matsen, 1970) que há somente um sub-espço irreduzível bi-dimensional associado com *Gentileons* que agora são representados por  $y(123)$ ,

$$y(123) = y(\alpha\alpha\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_1(123) \\ y_2(123) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

onde,

$$y_1(123) = (|\alpha\alpha\gamma\rangle - |\gamma\alpha\alpha\rangle) / \sqrt{2} \quad (18a)$$

e

$$y_2(123) = (2|\alpha\gamma\alpha\rangle - |\alpha\alpha\gamma\rangle - |\gamma\alpha\alpha\rangle) / \sqrt{6}. \quad (18b)$$

Desde que as transformações  $y(123)$  devidas ao operador permutação  $P_j$  são dadas pelas mesmas matrizes  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) definidas pelas Eqs. (13a-f) podemos concluir que: (a)  $y(123)$  é um spinor e (b)  $Y(123)$  e  $y(123)$  são associados com o mesmo  $AS_3$  Casimir.

No caso degenerado ( $\alpha = \beta$ ) não é possível representar permutações como rotações no  $E_3$ . Conseqüentemente, não é possível obter uma interpretação geométrica para  $AS_3$  Casimir como foi visto para gentileons ocupando os três diferentes estados  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Em um trabalho precedente (Fernandes e Cattani, 1987a) mostramos que estados gentiliônico, bosônico e fermiônico têm propriedades topológicas completamente diferentes. Em particular foi mostrado que as propriedades topológicas de simetrias  $Y(3,1) = Y(123)$  são claramente exibidas por um toro  $T^2$  gerado por duas variáveis angulares  $\phi$  e  $\theta$  que aparecem em rotações discretas,

$$R(\phi) \cdot R(\theta) = i \exp[i\vec{m} \cdot \vec{\sigma}\phi/2] \exp[i\vec{j} \cdot \vec{\sigma}\theta/2],$$

dadas pelas Eqs. (14a-b) e (15a-c). Do trabalho (Fernandes e Cattani, 1987a) podemos ver que diferentes estados vetoriais  $Y(n, j)$  apresentam diferentes propriedades topológicas.

### 6.6.3 Spin e Estatística

Nesta Seção as relações de comutação para os operadores criação ( $a_\alpha^*$ ) e aniquilação ( $a_\alpha$ ) para os *Gentileons*  $g_1$  são analisadas com o objetivo de estabelecer uma conexão entre spin e estatística no contexto de Pauli (Pauli, 1940; Lüders e Zumino, 1958). É muito importante observar que, de acordo com o Princípio Estatístico, o número de partículas no sistema  $[g_1 g_1 g_1]$  é constante. Então, as relações de comutação para  $a_\alpha^*$  e  $a_\alpha$  e os elementos de matriz envolvendo estados gentiliônicos são calculados (Cattani e Fernandes, 1984) levando em conta essa propriedade fundamental. Mostramos que quando *Gentileons* ocupam três estados quânticos diferentes,  $a_\alpha^*$  e  $a_\alpha$  obedecem relações bi-lineares anti-comutativas e também tri-lineares. Ou seja, quando dois *Gentileons* não ocupam o mesmo estado quântico, isto é, quando  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ , vemos que as relações de comutação gentiliônicas são dadas por (Cattani e Fernandes, 1984):

$$[a_i^*, a_j]_+ = \delta_{ij}, \quad [a_i^*, a_i^*]_+ = [a_i, a_i]_+ = 0, \quad (18a,b,c)$$

$$a_i a_j a_k = a_\alpha a_\beta a_\gamma \eta \begin{pmatrix} kji \\ \gamma\beta\alpha \end{pmatrix} \quad (18d)$$

$$a_i^* a_j^* a_k^* = \eta \begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ijk \end{pmatrix} a_\alpha^* a_\beta^* a_\lambda^*, \quad (18e)$$

onde os índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  podem assumir os valores  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  e  $\eta(\dots)$  são matrizes  $2 \times 2$  mostradas nas Eqs. (13a-f). Das relações tri-lineares indicadas acima podemos deduzir as relações bi-lineares indicadas abaixo e aplicadas sobre estados gentiliônicos  $Y$ ,

$$a_\beta a_\alpha Y(\alpha\beta\gamma) = Y(00\gamma), \quad a_\alpha a_\beta Y(\alpha\beta\gamma) = \eta \begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \beta\alpha\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma), \quad (19a-b)$$

$$a_\beta a_\alpha Y(\alpha\beta\gamma) = \eta \begin{pmatrix} \alpha\gamma\beta \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma), \quad (19c)$$

$$a_\alpha a_\beta Y(\alpha\beta\gamma) = \eta \begin{pmatrix} \alpha\gamma\beta \\ \beta\alpha\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma), \quad (19d)$$

$$a_\beta a_\alpha Y(\alpha\beta\gamma) = \eta \begin{pmatrix} \beta\alpha\gamma \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma), \quad a_\alpha a_\beta Y(\beta\alpha\gamma) = Y(00\gamma), \quad (19e-f)$$

$$a_\beta a_\alpha Y(\alpha\beta\gamma) = \eta \begin{pmatrix} \beta\alpha\gamma \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma) \quad (19g)$$

$$a_\alpha a_\beta Y(\gamma\alpha\beta) = \eta \begin{pmatrix} \gamma\alpha\beta \\ \beta\alpha\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma), \quad (19h)$$

$$a_\beta a_\alpha Y(\beta\gamma\alpha) = \eta \begin{pmatrix} \beta\gamma\alpha \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma), \quad (19i)$$



$$a_{\alpha} a_{\beta} Y(\beta\gamma\alpha) = \eta \begin{pmatrix} \beta\gamma\alpha \\ \beta\alpha\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma), \quad (19j)$$

$$a_{\beta} a_{\alpha} Y(\gamma\beta\alpha) = \eta \begin{pmatrix} \gamma\beta\alpha \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma), \quad (19k)$$

$$a_{\alpha} a_{\beta} Y(\gamma\beta\alpha) = \eta \begin{pmatrix} \gamma\beta\alpha \\ \beta\alpha\gamma \end{pmatrix} Y(00\gamma), \quad (19l)$$

$$a_{\beta}^* a_{\alpha}^* Y(00\gamma) = \eta \begin{pmatrix} \beta\alpha\gamma \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(\alpha\beta\gamma), \quad (19m)$$

$$a_{\alpha}^* a_{\beta}^* Y(00\gamma) = Y(\alpha\beta\gamma), \quad (19n)$$

$$a_{\beta}^* a_{\alpha}^* Y(0\gamma 0) = \eta \begin{pmatrix} \alpha\gamma\beta \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(\alpha\beta\gamma), \quad (19o)$$

$$a_{\alpha}^* a_{\beta}^* Y(0\gamma 0) = \eta \begin{pmatrix} \beta\gamma\alpha \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(\alpha\beta\gamma), \quad (19p)$$

$$a_{\beta}^* a_{\alpha}^* Y(\gamma 0 0) = \eta \begin{pmatrix} \gamma\alpha\beta \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(\alpha\beta\gamma) \quad (19q)$$

e

$$a_{\alpha}^* a_{\beta}^* Y(\gamma 0 0) = \eta \begin{pmatrix} \gamma\beta\alpha \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} Y(\alpha\beta\gamma), \quad (19r)$$

lembrando que há seis estados intermediários  $Y(\alpha\beta\gamma)$ ,  $Y(\beta\alpha\gamma)$ ,  $Y(\gamma\alpha\beta)$ ,  $Y(\beta\gamma\alpha)$ ,  $Y(\alpha\gamma\beta)$  e  $Y(\lambda\beta\alpha)$  que podem ser assumidos pelo sistema  $g_1$ . As relações bi-lineares acima foram escritas objetivando calcular os elementos de matriz não-nulos dos operadores

$$A^* = [a_\alpha^*, a_\beta^*]_+ \text{ e } A = [a_\alpha, a_\beta]_+.$$

Desde que os seis diferentes estados vetoriais  $Y$  são equivalentes para representar o sistema, todos eles devem ser levados em conta para calcular os elementos de matriz de  $A^*$  e  $A$ . Então, usando as Eqs. (19a-r) as  $\eta(\dots)$  matrizes e lembrando que  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  e  $Y_4$  são funções ortogonais (Cattani e Fernandes, 1984), verificamos que os valores esperados  $\langle A^* \rangle$  e  $\langle A \rangle$  são nulos. Isto é, para  $\alpha \neq \beta$ ,  $\langle [a_\alpha^*, a_\beta^*]_+ \rangle = \langle [a_\alpha, a_\beta]_+ \rangle = 0$ . Como somente os valores esperados  $\langle A^* \rangle$  e  $\langle A \rangle$  tem significado físico vemos, de acordo com os resultados acima e com os termos bi-lineares das Eqs. (18a-e), que as seguintes relações de comutação bi-lineares podem ser consideradas válidas para os gentíleons  $g_1$  no esquema de uma teoria quântica de campo,

$$[a_i^*, a_j]_+ = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad [a_i^*, a_j^*]_+ = [a_i, a_j]_+ = 0, \quad (20a,b,c)$$

onde os índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  podem assumir os valores  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\lambda$ .

Como os *Gentíleons*  $g_1$  obedecem a relações bi-lineares anti-comutativas definidas pelas Eqs. (20a-c) é possível construir para esses gentíleons uma teoria quântica local consistente de campo e invariante de Lorentz. Contudo, concluímos das Eqs. (20a-c) e do uso do teorema de Pauli (Pauli, 1940; Burgoyne, 1958; Lüders e Zumino, 1958) que os *Gentíleons*  $g_1$  devem ser partículas de spin semi-inteiro.

É importante notar que os resultados acima têm sido obtido assumindo que os *Gentileons* ocupam três estados quânticos diferentes  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ . Quando dois *gentileons* ocupam o mesmo estado quântico, podemos facilmente verificar (Cattani e Fernandes, 1984) que os operadores  $a_\alpha^*$  e  $a_\alpha$  não obedecem a relações bi-lineares comutativa ou anti-comutativa. Então, *Gentileons* de spin inteiro ou semi-inteiro impar não podem ser representados por vetores estado  $Y(nnm)$ , onde  $n, m = \alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Conseqüentemente estes estados são proibidos no contexto de Pauli.

#### 6.6.4 A Simetria $S_3$ e os Auto-Estados $SU(3)$

Na Seção 6.6.2 mostramos que foi possível interpretar  $Y(123) = Y(\alpha\beta\gamma)$  em termos de rotações, no espaço Euclidiano  $E_3$ , de somente dois triângulos equiláteros com vértices ocupados por três estados privilegiados  $\alpha(\alpha^*)$ ,  $\beta(\beta^*)$  e  $\gamma(\gamma^*)$ . Assim,  $Y$  são “kets” de simetria  $S_3$ . Em outras palavras, suas disposições no plano do triângulo devem concordar com imposições feitas por  $AS_3$  Casimir. De acordo com a Fig. 1, esses estados são definidos por,  $\alpha = \vec{m}_5 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ ,  $\beta = \vec{m}_6 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$  e  $\gamma = \vec{m}_4 = (0, -1)$ , e de acordo com a Fig. 2,  $\alpha^* = \vec{m}_5^* = -\vec{m}_5$ ,  $\beta^* = \vec{m}_6^* = -\vec{m}_6$  e  $\gamma^* = \vec{m}_4^* = -\vec{m}_4$ . A simetria triangular equilateral para  $S_3$  representa um papel fundamental em  $E_3$ , permitindo obter uma interpretação geométrica muito simples para o invariante  $K_{inv} = 0$ . Contudo, desde que a simetria  $S_3$ , de acordo com a Seção 6.6.2, implica que  $\vec{M} = \vec{m}_4 + \vec{m}_5 + \vec{m}_6 = 0$  ( $\vec{M}^* = \vec{m}_4^* + \vec{m}_5^* + \vec{m}_6^* = 0$ ), concluímos

que  $\vec{M} = 0$  ( $\vec{M}^* = 0$ ), representado em  $E_3$ , é uma constante de movimento nula.

Neste ponto comparamos nossos estados  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  com os auto-estados de  $SU(3)$  (Close, 1979; Lifshitz e Pitayevski, 1973; Lichtenberg, 1970)  $|n\rangle$ ,  $|p\rangle$  e  $|\lambda\rangle$ . Estes estados são auto-estados da hipercarga  $Y$  e do isospin  $I_3$  ambos geradores diagonais da álgebra de  $SU(3)$ . Os auto-estados  $|n\rangle$ ,  $|p\rangle$  e  $|\lambda\rangle$  são escritos como  $|n\rangle = |-1/2, 1/3\rangle$ ,  $|p\rangle = |1/2, 1/3\rangle$  e  $|\lambda\rangle = |0, -2/3\rangle$ .

Lembrando que as simetrias fundamentais  $SU(3)$  e intermediária  $S_3$  são definidas por triângulos equiláterais, é bastante aparente que os estados  $|\alpha\rangle$ ,  $|\beta\rangle$  e  $|\gamma\rangle$  podem ser representados por auto-estados de  $I_3$  e  $Y$ . Contudo, assumindo que os eixos X e Z (ver Fig. 1) correspondem aos eixos  $I_3$  e  $Y$ , respectivamente, e adotando os vetores unitários ao longo desses eixos como o lado e a altura do triângulo (Lifshitz e Pitayevski, 1973) verificamos que  $|\alpha\rangle$ ,  $|\beta\rangle$  e  $|\gamma\rangle$  podem ser dados por,  $|\alpha\rangle = |n\rangle = |-1/2, 1/3\rangle$ ,  $|\beta\rangle = |p\rangle = |1/2, 1/3\rangle$  e  $|\gamma\rangle = |\lambda\rangle = |0, -2/3\rangle$ . Se considerarmos os estados  $|\alpha^*\rangle$ ,  $|\beta^*\rangle$  e  $|\gamma^*\rangle$ , vistos na Fig. 2, poderemos verificar que estes estados poderão corresponder aos estados  $|n^*\rangle$ ,  $|p^*\rangle$  e  $|\lambda^*\rangle$  da representação  $3^*$ .

Então, se assumirmos que os estados  $|\alpha\rangle$ ,  $|\beta\rangle$  e  $|\gamma\rangle$  correspondem aos estados  $|n\rangle$ ,  $|p\rangle$  e  $|\lambda\rangle$ , respectivamente, cada vetor unitário  $\vec{m}_j$  ( $j = 4, 5$  e  $6$ ) é representado, no plano  $(I_3, Y)$  pelo operador  $q = I_3 + Y/2$ . Isto significa que o vetor  $\vec{M}$  será representado pelo operador  $M = q_1 + q_2 + q_3$ , onde os índices 1, 2 e 3 referem-se aos três *Gentileons* do sistema. Então, adotando os auto-valores de  $SU(3)$  vemos que os valores esperados  $\langle M \rangle = 0$ , para as representações  $3$  e  $3^*$ , devem ser constantes de movimento.

Concluimos que as propriedades fundamentais de simetria da função estado  $Y(\alpha\beta\gamma)$  são descritas pelos grupos intermediários  $S_3$  e  $SU(3)$ .

Tentaremos analisar em trabalho futuro sistemas compostos de quatro *Gentileons* idênticos. Nossa intenção é determinar que espécies de grupos, além do grupo intermediário  $S_4$ , são necessários para descrever as propriedades fundamentais de simetria desses sistemas. Será mostrado, por exemplo, que as simetrias do estado vetor  $[g_2g_2g_2g_2]$  são descritas pelos grupos intermediários  $S_4$  e  $SU(4)$ .

### 6.6.5 Propriedades Fundamentais dos Sistemas $g_1$

Vamos sumarizar as propriedades fundamentais previstas para os sistemas  $g_1$ :

(1) *Gentileons*  $g_1$  são proibidos de formar sistemas com mais de três entidades. Somente sistemas  $[g_1g_1g_1]$  podem ser formados.

(2) Dois sistemas  $[g_1g_1g_1]$  e  $[g_1g_1g_1]$  não podem coalescer, isto é, não podem formar um sistema composto de seis partículas indistinguíveis  $[g_1g_1g_1g_1g_1g_1]$ .

(3) A função estado  $Y(3,1) = Y(123)$  tem uma caráter spinorial.

(4) *Gentileons*  $g_1$  devem ser entidades com spin semi-inteiro representados pelo estado vetor  $Y(123) = Y(\alpha\beta\gamma)$ , onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são três estados quânticos diferentes.

(5) As propriedades fundamentais de simetria de  $Y(\alpha\beta\gamma)$  são descritas pelos grupos intermediários  $S_3$  e  $SU(3)$ .

(6) Deve existir alguma quantidade física conservada associada ao  $AS_3$  Casimir  $\langle M \rangle = 0$ .

Como dissemos antes, confinamento e não-coalescência são propriedades intrínsecas de *Gentileons*: eles poderão corresponder a

partículas reais ou a entidades dinâmicas como excitações quânticas coletivas. Se *Gentileons*  $g_1$  forem partículas reais deve haver alguma espécie de mecanismo para explicar essas propriedades: uma interação potencial muito peculiar, um saco impermeável ou algo equivalente. Parece razoável esperar que este mecanismo está intimamente relacionado a, ou é uma consequência da simetria local  $SU(3)$ . Se essas surpreendentes previsões tivessem sido feitas há 30 anos atrás, provavelmente os estados gentiliônicos poderiam ser tomados como representações não-físicas de grupo de permutação em Mecânica Quântica e seriam prontamente descartadas. Hoje, contudo, esta situação é de algum modo modificada pois, como será mostrada na próxima Seção, propriedades hadrônicas básicas serão explicadas assumindo que os *quarks* são *Gentileons*.

### 6.6.6 Os Hádrons Gentiliônicos

Como os *Gentileons*  $g_1$  são entidades confinadas de spin  $\frac{1}{2}$ , que não podem formar sistemas com mais de três partículas indistinguíveis e seus sistemas, com propriedades de simetria descritas pelo grupo  $SU(3)$ , são não-coalescentes, parece natural pensar que quarks  $q$  sejam *Gentileons*  $g_1$ . Com esta hipótese, podemos mostrar que bárions  $[qqq]$ , que são compostos de três gentileons indistinguíveis no espaço cor, são representados por funções de onda (Cattani e Fernandes, 1985; 1987a)  $\psi = \varphi \cdot Y(brg)$ . O estado  $\varphi = (SU(6) \times O_3)_{\text{simétrico}}$  corresponde, de acordo com o modelo de quarks simétricos de bárions, a um estado totalmente simétrico. A função estado  $Y(brg)$  corresponde ao estado intermediário  $Y(123)$  escrito em termos dos auto-estados  $SU(3)_{\text{cor}}$  azul (“blue”) (b), vermelho (“red”) (r) e verde (“green”) (g). Essas funções  $Y$ , que podem ser representadas por  $Y_+(brg)$  ou  $Y_-(brg)$ , mostrados na

Seção 2, serão denominadas “colorspinors” (Cattani e Fernandes, 1987a).

Dos resultados acima e observando a Seção 6.6.4 vemos que no formalismo gentiliônico uma possibilidade é definir a carga individual do *quark* como,

$$q = q_f + \tilde{q}_c = (I_3 + Y/2) + \lambda(\tilde{I}_3 + \tilde{Y}/2), \quad (21)$$

onde  $q_f = I_3 + Y/2$  refere-se ao sabor (“flavor”),  $\tilde{q}_c = \lambda(\tilde{I}_3 + \tilde{Y}/2)$  refere-se a carga de cor e  $\lambda$  é um parâmetro constante. Com esta definição, a carga bárion de cor total  $\tilde{Q}$  é dada por  $\tilde{Q} = \lambda \langle \tilde{M} \rangle$ , onde  $\tilde{M} = \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3$ , de acordo com a Seção 6.6.4. Lembrando que o valor esperado  $\langle \tilde{M} \rangle$  é uma constante de movimento igual a zero, isto é,  $\langle \tilde{M} \rangle = \text{constante} = 0$ , como mostrado na Seção 6.6.4 para o estado  $Y(\text{brg})$ , vemos que a relação Gell-Mann-Nishijima generalizada é automaticamente satisfeita (Cattani e Fernandes, 1985; 1987a) independente do valor de  $\lambda$ . Contudo, devemos notar que para preservar o caráter gentiliônico dos *quarks* é necessário colocar  $\lambda = 0$ . Então, em nossa aproximação *quarks* têm cargas fracionárias, de acordo com os resultados de Gell-Mann. Vemos que a carga bárion de cor  $\tilde{Q}$  é uma quantidade física conservada associada com o  $AS_3$  Casimir  $\langle \tilde{M} \rangle = 0$  que denominaremos *Casimir de cor* (Cattani e Fernandes, 1985; 1987a).

Em nossa aproximação (Cattani e Fernandes, 1984; 1985; 1987a) mésons são compostos de um para quark-antiquark  $[q\bar{q}]$ . De acordo com o Princípio Estatístico (ver Introdução), sistemas semelhantes  $q$ ,  $[qq]$ ,  $[qq\bar{q}]$  e  $[qq\bar{q}\bar{q}]$ , por exemplo, são proibidos. Certamente bárions com mais de três quarks  $q$  são também proibidos.

Então, somente sistemas  $[q\bar{q}]$  e  $[qqq]$  são permitidos na teoria gentiliônica.

Desde que  $q$  e  $\bar{q}$  são partículas diferentes no espaço de cor podemos concluir, de acordo com nossos resultados gerais (Cattani e Fernandes, 1984), que mésons  $[q\bar{q}]$  são representados por funções estado uni-dimensionais. Isto implica, lembrando que  $q$  e  $\bar{q}$  são partículas de spin  $1/2$ , que o sistema  $[q\bar{q}]$  é representado em teorias fermiônicas e gentiliônicas pelo mesmo vetor estado.

De acordo com a teoria gentiliônica o próton deve ser estável (Cattani e Fernandes, 1984; 1985; 1987a). Esta estabilidade, predita como uma regra de seleção, é uma consequência do caráter spinorial dos estados bariônicos: o decaimento do próton é proibido por causa do caráter spinorial da corrente inicial (próton) não poderia estar presente na corrente final.

Das análises acima vemos que as propriedades fundamentais dos hádrons podem ser explicadas assumindo que os quarks são os gentíleons  $g_1$ . Apesar de nossos resultados gerais estimulantes, ainda permanece o problema crucial de determinar a natureza intrínseca dos quarks e suas propriedades dinâmicas. Na próxima Seção considerando *quarks* como *Gentíleons*  $g_1$ , uma Cromodinâmica Quântica é proposta onde, em vez de *Férmions*, *Gentíleons* interagem com *glúons*.

### 6.6.7 Uma Cromodinâmica Quântica para Hádrons Gentiliônicos

Para construir uma teoria quântica de campo para hádrons assumindo *quarks* como *Gentíleons*  $g_1$  devemos levar em conta as simetrias  $SU(3)_{cor}$  e  $S_3$  e lembrar que, de acordo com a Seção 6.6.3, os valores esperados não nulos dos operadores criação e destruição



para *Gentileons*  $g_1$  obedecem relações bi-lineares anti-comutativas. A aproximação de campo gentiliônico deve ser formulado de modo a prever, como leis de conservação ou regras de seleção, que as propriedades hadrônicas deduzidas na Seção 6.6.6: (a) somente hádrons  $[q\bar{q}]$  e  $[qqq]$  podem existir na natureza, (b) confinamento de quark, (c) não-coalescência de hádrons, (d) estabilidade do próton e (e) a carga cor do hádron é uma constante de movimento igual a zero. Isto é uma grande ambição e um trabalho extremamente difícil. Desde que não somos capazes, até agora, de desenvolver tal formalismo alternativo será proposto aqui. Desta maneira, vamos sugerir como primeira aproximação a seguinte densidade Lagrangeana para quarks gentiliônicos interagindo com *glúons*,

$$L = \sum_f \left[ i\bar{q}_a^+ \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} q_a + g\bar{q}_a^+ \gamma^\mu \left( \frac{\lambda_i}{2} \right)_{ab} A_\mu^i q_b - m_f \bar{q}_a^+ q_a \right] - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial A_\nu^i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu^i}{\partial x^\nu} + gf_{ijk} A_\mu^i A_\nu^k \right)^2, \quad (22)$$

onde o somatório é sobre os “sabores”  $f = u, d, s, c, \dots$ . O somatório sobre os índices repetidos  $a, b, \dots$ , é entendido como referente à cor. O  $A_\mu^i$  é um campo-gauge,  $\lambda_i / 2$  são representações matriciais  $3 \times 3$  dos geradores da álgebra  $SU(3)_{cor}$ , satisfazendo as relações de comutação  $[\lambda_i, \lambda_j] = if_{ijk} \lambda_k / 2$ , onde  $f_{ijk}$  são as constantes de estrutura do grupo  $SU(3)$ . A simetria “sabor” somente é quebrada pela falta de degenerescência nas massas dos *quarks*. Finalmente, os campos livres de *quarks*  $q(x)$  são expandidos em termos de soluções

de frequência positiva e negativa,  $\varphi_{k+}(x)$  e  $\varphi_{k-}(x)$  da equação de Dirac,

$$q(x) = \sum_k \{a_{k+} \varphi_{k+}(x) + a_{k-}^* \varphi_{k-}(x)\}, \quad (23)$$

onde  $a_i$  e  $a_i^*$  obedecem relações de comutação fermiônicas.

Com as hipóteses acima, ambas teorias, a usual QCD e a QCD gentiliônica, indicada por QCDG, terão os mesmos *glúons* e a mesma densidade Lagrangeana. Em ambas aproximações as propriedades previamente mencionadas (a), (b), ... e (e) aparecem como condições adicionais. Nestas circunstâncias, ambas teorias darão predições idênticas para propriedades hadrônicas. A despeito disso notamos que elas não são equivalentes. Contudo, na QCDG, as cinco condições citadas acima aparecem naturalmente, deduzidas dos primeiros princípios, enquanto na QCD elas são impostas “ad hoc”.

Se assumirmos na QCDG os *quarks* como sendo partículas reais devem existir, de acordo com a Seção 6.6.5, alguma espécie de mecanismo intimamente relacionado com a simetria  $SU(3)_{cor}$  que poderia ser responsável pelas propriedades de confinamento e não-coalescência. Esperanças para uma explicação teórica do confinamento de *quark* são ligadas sobre a natureza não-Abeliana do grupo  $SU(3)_{cor}$  o qual é um grupo invariante gauge da Cromodinâmica Quântica. A despeito de consideráveis esforços somente indicações para o confinamento têm sido encontradas. Desde que nenhuma prova rigorosa do confinamento foi ainda obtida, este problema tem sido considerado, por uma analogia matemática, como o “teorema de Fermat” da teoria contemporânea das partículas (Logunov, 1983).

Finalmente vamos considerar matéria hadrônica de altíssima densidade que deve existir no centro das estrelas de nêutrons e no começo do Universo. Se nessas condições extremas simetrias de permutação são preservadas devemos esperar, devido à propriedade de não-coalescência dos sistemas gentiliônicos, que a estrutura hadrônica é mantida. Isto é, hádrons não serão destruídos mas somente altamente comprimidos. Então, nestas condições *quarks* serão tão proximamente empacotados que as interações entre eles deverão ser fracas devido à liberdade assintótica. Isto significa que, de acordo com a teoria gentiliônica, a matéria hadrônica densa poderia ser constituída de *quarks* livres. Estes *quarks* contudo são confinados no interior de hádrons comprimidos e não formam um gás ideal (*plasma de quark*) como previsto pela aproximação fermiônica.

**Agradecimentos.** Um dos autores (MSDC) agradece a A. di Giacomo, A. B. Govorkov, B. J. Hiley, D. Bohm e J. P. Vigiier pelas proveitosas discussões sobre teoria gentiliônica e pelos amáveis convites para visitar suas instituições em Pisa, Dubna, Londres e Paris. O autor também agradece a D. B. Lichtenberg e E. Predazzi pela leitura crítica dos trabalhos sobre estatística gentiliônica. Finalmente, ele agradece a FAPESP e CNPq pelo auxílio financeiro.

## CAPÍTULO 7

### O Grupo de Simetria Intermediário $S_3$ e o Confinamento de Quark<sup>1</sup>

#### 7.1 Introdução

Nos últimos anos desenvolvemos (Cattani e Fernandes, 1982, 1984, 1985, 1987a; Cattani, 1989), de acordo com os postulados da Mecânica Quântica e o Princípio da Indistinguibilidade, um conceito estatístico, que denominamos de Estatística Geral, proposto originalmente por G. Gentile Junior há cerca de 50 anos. Conforme vimos no Capítulo 6, três espécies de partículas poderiam existir na natureza: *Bósons*, *Férmions* e *Gentíleons*. *Bósons* e *Férmions* seriam representados por diagramas de Young horizontal e vertical, respectivamente, e *Gentíleons* seriam representados por diagramas de Young intermediários. Sistemas bosônicos e fermiônicos são descritos, respectivamente, por funções de onda unidimensionais, totalmente simétricas ( $\psi_s$ ) e totalmente anti-simétricas ( $\psi_a$ ). Sistemas gentiliônicos seriam descritos por funções de onda ( $Y$ ) com simetrias mistas. Devido às propriedades muito peculiares dos gentíleons, como confinamento e não-coalescência de sistemas, parece natural pensar que os quarks sejam gentíleons de spin  $\frac{1}{2}$ . Com esta hipótese, mostramos que as funções de onda bariônicas são dadas por (Cattani e Fernandes, 1985, 1987a; Cattani, 1989)  $\psi = \varphi Y(\text{cor})$ . A função de onda unidimensional  $\varphi = [\text{SU}(6) \times \text{O}_3]_{\text{simétrico}}$

---

<sup>1</sup> Esta parte foi baseada no artigo de M. Cattani, publicado nos *Anais da Academia Brasileira de Ciências* **67**, p. 1-4, em 1995.

corresponde, de acordo com o modelo simétrico quarkônico de bárions, a um estado totalmente simétrico, e o estado bi-dimensional  $Y(\text{cor})$  corresponde a representações intermediárias do grupo de simetria  $S_3$ . Com o objetivo de preservar a simetria intermediária  $S_3$ ,  $Y(\text{cor}) = Y(123)$  deve depender de três novos estados quânticos, denominados estados de cor, azul (“blue”) ( $|b\rangle$ ), vermelho (“red”) ( $|r\rangle$ ) e verde (“green”) ( $|g\rangle$ ). Estes estados são tomados como auto-estados do  $SU(3)_{\text{cor}}$ . Vimos (Cattani, 1989) que o estado de cor  $Y(123) = Y(\text{brg})$  pode ser representado por  $Y_+(123)$  ou  $Y_-(123)$ , que são duas representações irredutíveis equivalentes de  $S_3$ . Então, no que segue, o estado de cor será representado por  $Y_+(\text{brg})$  ou  $Y_-(\text{brg})$ , indicado simplesmente por  $Y(\text{brg})$ .

## 7.2 Rotações no Espaço de Cor, Gauge de Cor e Confinamento

De acordo com o grupo de simetria  $S_3$  há seis operadores de permutação (Cattani e Fernandes, 1987a; Cattani, 1989) que deixam invariante  $|Y(123)|^2 = |Y(\text{brg})|^2$ . Mostramos que essas transformações podem ser interpretadas como rotações discretas de ângulos  $\pi$  e  $2\pi/3$ , em um espaço tri-dimensional  $(X, Y, Z)$ , do triângulo equilátero formado pelo tripleto básico do  $SU(3)_{\text{cor}}$ . Neste espaço de cor  $E_3$ , os eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  correspondem aos eixos  $\tilde{I}_3$  (isospin de cor) e a  $\tilde{Y}$  (hipercarga de cor), respectivamente. Estas rotações, escritas em termos das matrizes de Pauli, são representadas por matrizes  $2 \times 2$ ,  $\{\eta_i\}$ ,  $i = 1, 3, \dots, 6$ , dadas explicitamente em nossos trabalhos precedentes (Cattani e Fernandes, 1987a; Cattani, 1989). É claro desses trabalhos o caráter spinorial do estado de cor  $Y(\text{brg})$ .

Em nosso último trabalho (Cattani, 1989), propomos uma cromodinâmica quântica para hádrons gentiliônicos assumindo um  $SU(3)$  com gauge de cor. Com esta hipótese, a QCD usual e a QCD gentiliônica têm os mesmos glúons e a mesma densidade Lagrangeana. Nestas circunstâncias, ambas teorias darão previsões idênticas para as propriedades hadrônicas.

Chamamos  $AS_3$  a álgebra (Cattani e Fernandes, 1985) do grupo simétrico  $S_3$  gerado por seis vetores  $\{\eta_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Desde que o grupo  $S_3$  admite dois geradores  $a = \eta_4$  e  $b = \eta_6$ , podemos considerar  $AS_3$  uma álgebra polinomial associativa gerada por  $a$  e  $b$ ,  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_6\} = \{I, ba, ab, a, aba, b\}$ . Estes geradores,  $a$  e  $b$ , obedecem à relação de comutação,  $ab + ba = -I$ . Mostramos também (Cattani e Fernandes, 1987a; Cattani, 1989) que esta álgebra tem um invariante,

$$K_{(2,1)}^{[2,1]} = \eta_4 + \eta_5 + \eta_6 = 0,$$

com um autovalor nulo. Este invariante, que foi chamado de **Casimir de cor**, tem uma bela e simples interpretação no espaço de cor: “a carga de cor bariônica é igual a uma constante de movimento igual a zero”. Este resultado, que automaticamente satisfaz à relação de Gell-Mann-Nishijima, pode também ser interpretada como uma regra de seleção para o confinamento de quark. Uma vez que, em nosso esquema, as regras de cor e confinamento de quark aparecem como uma consequência de propriedades simétrica e geométrica definidas no espaço de cor  $E_3$ , parece natural esperar que o confinamento dinâmico de quarks possa ser deduzido de uma simetria de gauge baseada nas características gentiliônicas de  $E_3$ . Assim, com isso em mente, podemos escrever os estados  $|b\rangle$ ,  $|r\rangle$  e  $|g\rangle$ , no plano  $(\tilde{I}_3, \tilde{Y})$ , como

$$|b\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle - \frac{1}{2}|-\rangle, \quad |r\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|-\rangle \quad \text{e} \quad |g\rangle = -|-\rangle,$$

respectivamente, onde  $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , e interpretar as rotações neste plano como transformações que são produzidas pela troca de glúons entre quarks. Levando em conta que as propriedades dos hádrons sejam invariantes por essas transformações em  $E_3$ , propomos o seguinte campo de gauge  $A_\mu$  (Mills, 1989)

$$A_\mu = \sum_{k=1}^2 B_\mu^k T_k \quad (1)$$

onde  $B_\mu^k = \partial\theta^k(x)/\partial x_\mu$ , sendo  $\theta(x)$  os ângulos de rotação no espaço de cor e  $T_1$  e  $T_2$  são os geradores do grupo de simetria dados por  $T_1 = a$  e  $T_2 = b$ . Na Cromodinâmica Quântica (Mills, 1989) os operadores  $T_k$  são os 8 geradores do grupo de simetria  $SU(3)_{\text{cor}}$ . Em nosso campo de gauge  $A_\mu$ , definido pela Eq. (1), temos os dois geradores  $a$  e  $b$  do grupo de simetria  $S_3$ .

No modelo gentiliônico teríamos somente dois campos de glúon, associados com os dois geradores de rotação,  $a$  e  $b$ . Não é nossa intenção desenvolver aqui uma teoria quântica de campo baseada nesses novos campos glúons ou apresentar uma rigorosa prova do confinamento de quark. Queremos somente propor um modelo dinâmico muito simples onde o confinamento de quarks depende de propriedades de simetria (Cattani e Fernandes, 1987a; Cattani, 1989) definidas no plano  $(\tilde{I}_3, \tilde{Y})$ . Este modelo será elaborado dentro da estrutura da equação de Dirac assumindo que o quark é

submetido a um campo externo  $A_\mu$  dado pela Eq. (1). Assim, considerando, em primeira aproximação, que  $B_\mu^1 = B_\mu^2 = B_\mu$  e fazendo uma média de  $A_\mu$  sobre todos os estados de cor, a função de estado  $\psi(x)$  de um quark dentro de um hádron poderá ser descrita pela equação de Dirac

$$[i\gamma^\mu(p_\mu - igB_\mu) - mc]\psi(x) = 0, \quad (2)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento para a interação forte de cor.

Agora, faremos a hipótese que o quark se move livremente na região  $r < r_0$ , onde  $r_0$  é o raio do hádron, e que ocorre uma interação com o campo  $B_\mu$ : somente quando ele atinge a fronteira  $r = r_0$ . Nesta interação a cor do quark é mudada. Assumiremos também que  $B_\mu$  é um campo vetorial, isto é,  $B_\mu = (0, \vec{B})$ , onde  $\vec{B} = \nabla\theta(x)$ , o qual corresponde a um gauge de Coulomb. Analisando esta interação em termos de rotações no plano  $(\vec{I}_3, \vec{Y})$ , vemos que o estado de cor é efetivamente transformado em um outro somente quando acompanhada de uma rotação pelos ângulos  $\pi$  ou  $2\pi/3$ . Então, podemos imaginar  $\theta(x)$  como uma função degrau que, no ponto  $r = r_0$  varia de zero até  $\pi$  ou  $2\pi/3$  devido a uma mudança de cor na interação. Isto poderia implicar que

$$\vec{B} = \nabla\theta(x) = \delta(r - r_0)\vec{n},$$

onde  $\vec{n}$  é um vetor unitário na direção radial. Nessas condições a Eq. (2) torna-se:

$$\left[ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - ig\vec{\gamma} \cdot \vec{n} \delta(r - r_0) - mc \right] \psi(x) = 0. \quad (3)$$



Para resolver a Eq. (3) usamos coordenadas esféricas e escrevemos (Berestetskii, Lifshitz e Pitaevskii, 1971)

$$\psi(x) = \exp(-iEt) \begin{pmatrix} f(r)\Omega_{j\ell m} \\ (-1)^{(1+\ell-\ell')/2} g(r)\Omega_{j\ell m} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

onde  $\Omega_{j\ell m}$  são os harmônicos esféricos spinoriais,  $\ell = j \pm 1/2$  e  $\ell' = 2j - \ell$ .

Considerando a Eq. (4) e usando a propriedade (Berestetskii, Lifshitz e Pitaevskii, 1971)

$$\Omega_{j\ell m} = i^{|\ell|} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \Omega_{j\ell m}$$

obtemos da Eq. (3):

$$\frac{d}{dr} f(r) + (1+K)f(r)/r + g\delta(r-r_0)f(r) - (E+m)g(r) = 0,$$

$$\frac{d}{dr} f(r) + (1-K)f(r)/r + g\delta(r-r_0)f(r) - (E-m)g(r) = 0, \quad (5a,b)$$

onde  $K = -(\ell + 1)$  quando  $j = \ell + 1/2$  e  $K = \ell$  quando  $j = \ell - 1/2$ .

Nossas Eqs. (5a,b) são similares às Eq. (3.13) obtidas por Villani (Villani, 1982) ao analisar a liberdade e o confinamento de quarks no contexto da teoria clássica de campo. Vemos que existem soluções não-triviais das Eqs. (5a,b) assumindo que a função  $F(r)$ , escrita como  $F(r) = a f(r) + b g(r)$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias, seja contínua em  $r = r_0$ . Com essas hipóteses vemos, usando as Eqs.(5), que  $F(r_0^+) - F(r_0^-) = iF(r_0)/2$ , o que implica em

$af(r_0) + bg(r_0) = 0$ . Esta última equação é equivalente a termos (Villani, 1982):

$$a \vec{\gamma} \cdot \vec{r} \Psi(r) = i [ a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \gamma^0 ] \Psi(r)/2b, \quad (6)$$

onde  $\Psi(r)$  é um spinor e  $a$  e  $b$  são, por hipótese, diferentes de zero. Conseqüentemente resulta da Eq.(6) que para  $r = r_0$  temos:

$$J_r = \bar{\psi}(r) \vec{\gamma} \cdot \vec{r} \Psi(r) = 0, \quad (7a)$$

$$(a^2 + b^2) \bar{\psi}(r) \Psi(r) + (a^2 - b^2) \Psi^*(r) \Psi(r) = 0, \quad (7b)$$

onde  $\bar{\psi}(r) = \Psi^*(r) \gamma^0$  (onde \* indica complexo conjugado). A primeira equação mostra que o fluxo de “cargas”  $J_r(r_0)$  através da superfície da esfera com raio  $r_0$  é *nulo*. Isto implica que não há fluxo de quarks através da superfície do hádron. Este resultado pode ser interpretado como uma manifestação, no espaço de Lorentz, da regra de confinamento prevista pelo **Casimir de cor**. Um caso particularmente interessante (Villani, 1982) é a escolha  $a = b = 1$ . Isto corresponde a condição de fronteira no modelo do quark estático, onde o quark “livre” no interior de uma esfera de raio  $r_0$  tem massa  $m$ , enquanto fora da esfera a massa do quark é infinita, obtendo desta maneira o confinamento do quark (Chodos, Jaffe, Johnson, Thorn e Weisskopf, 1974; Hasenfratz e Kuti, 1978). Então, em nosso modelo dinâmico gentiliônico, os quarks se comportam como partículas livres a pequenas distâncias ( $r < r_0$ ), mas ao mesmo tempo são confinados dentro de uma esfera de raio  $r_0$ , de acordo com o bem-sucedido “bag model” (Hasenfratz e Kuti, 1978).

## CAPÍTULO 8

### Teoria de Gauge

As idéias básicas que levaram à formulação de uma teoria generalizada de gauge são devidas a Noether, Weyl e F. London. Nós não pretendemos dar aqui uma visão histórica ou detalhada da referida teoria. Buscamos, simplesmente, dar umas poucas pinceladas sobre o que é a Teoria de Gauge, pois é um dos casos onde a Teoria de Grupos é usada, além de ser de fundamental importância. Para um retrospecto histórico e minucioso sobre a referida teoria sugerimos, por exemplo, que o leitor consulte o livro e o artigo de K. Moriyasu (Moriyasu, 1983; 1978) e o artigo de R. L. Mills (Mills, 1989). Gostaríamos, entretanto, de lembrar que o nome “gauge” apareceu primeiramente no eletromagnetismo, onde as equações de Maxwell são invariantes por uma transformação denominada de “transformação de gauge”. A denominação “transformação” e “invariância de gauge” se estendeu posteriormente, de modo inapropriado, para todas as outras interações.

Foi Amalie Emmy Noether quem primeiro mostrou que as simetrias das leis físicas eram de fundamental importância para a compreensão do Universo. Antes dela as simetrias eram vistas como coisas acidentais e se as teorias físicas apresentavam certas estruturas com simetrias (Bassalo, 1990), elas eram encaradas como sendo bonitas, simplesmente, sem que isso tivesse alguma importância fundamental. Noether (Noether, 1918) demonstrou, usando um formalismo variacional, o seu famoso Teorema: *Para cada simetria na natureza há uma correspondente lei de conservação e para cada lei de conservação há uma simetria.* A partir dessa época as simetrias começaram a ser entendidas como propriedades básicas das leis da natureza. O Teorema de Noether, que relaciona simetrias às leis de

conservação, passou a ser considerado como um princípio fundamental da natureza, o “princípio de gauge” (Mills, 1989).

Como aprendemos no Curso Básico de Física, segundo Noether, se uma Lagrangeana é invariante, ou simétrica, por uma determinada transformação de coordenadas, quando passamos de um sistema  $S$  para um outro  $S'$ , há uma grandeza física, associada a essa simetria, que se conserva. Obtinhamos assim, por exemplo, a conservação de energia, de momento linear e momento angular que estavam associadas a simetrias devidas a translações temporais, translações espaciais e rotações espaciais, respectivamente. Essas transformações são denominadas de “transformações globais” ou ainda, de “transformações de gauge globais” (Moriyasu, 1983; 1978; Mills, 1989). A transformação de Lorentz, na Relatividade Restrita, é uma transformação de “gauge global”. As transformações são denominadas de “globais” para exprimir o fato de que elas não dependem das posições de  $S$  e  $S'$  no espaço-tempo. Uma situação completamente diferente ocorre em Relatividade Geral onde um sistema de referência só pode ser definido “localmente” (Moriyasu, 1983; 1978; Mills, 1989) ou num único ponto do campo gravitacional. Assim, como as medidas feitas num referencial  $S$  podem ser comparadas com as feitas num outro  $S'$ ? Einstein mostrou que as transformações das grandezas físicas são feitas usando o que chamamos de “conexões afim” ou “símbolos de Christoffel” (Moriyasu, 1983; 1978; Mills, 1989; Bassalo, Cattani e Nassar, 2000) que dependem das propriedades “locais” do campo gravitacional onde  $S$  e  $S'$  estão localizados. Essas transformações fazem parte da teoria de “gauge local” do campo gravitacional que não analisaremos aqui . Isso poder ser visto, por exemplo, no livro do Moriyasu (Moriyasu, 1983).

Como entendemos hoje em dia, uma transformação de “gauge local” visa determinar como as propriedades físicas de um sistema localizado numa pequena região do espaço-tempo são transformadas

quando ele se move submetido a um campo externo (Moriyasu, 1983; 1978; Mills, 1989).

Analisaremos, brevemente, aqui somente os sistemas como sendo “partículas elementares” submetidas a forças eletromagnética, eletro-fraca e forte. Assumiremos também que as partículas carregam consigo seus próprios “espaços internos” ao se moverem ao longo do espaço-tempo. Assim, veremos como os graus de liberdade dos espaços internos das partículas mudam quando elas se movem submetidas a um campo externo.

De acordo com a “teoria de gauge” (Moriyasu, 1983; 1978; Mills, 1989), as transformações de gauge local são feitas visando obter simetrias internas das partículas de tal modo que suas propriedades físicas permaneçam invariantes com as referidas transformações. Assim, se  $\psi(x)$  é a função de onda da partícula, a transformação de gauge local é realizada por um operador unitário  $U(x)$ , de tal modo que a mudança de estado é dada por  $\psi'(x) = U(x)\psi(x)$ .

Assumindo que os espaços internos das partículas tenham dimensão  $N$ , a obtenção do operador  $U(x)$  é feita usando grupos de simetria ( $G$ ) de dimensão  $N$ . Esses grupos  $G$  são denominados de “grupos de gauge”. Verifica-se que para cada campo de força (“gauge field”) na natureza está associado um determinado grupo de gauge. No caso do eletromagnetismo temos o grupo  $U(1)$ , na interação eletro-fraca, o  $SU(2) \otimes U(1)$  e na interação forte, o  $SU(3)$ . O formalismo a ser apresentado abaixo, usando grupos não-Abelianos, foi proposto por Yang-Mills (Yang e Mills, 1954).

Assim, o operador  $U(x)$  é escrito como:

$$U(x) = \exp[-ig(\sum_k \theta^k(x) F_k)], \quad (1)$$

onde  $g = q/(\hbar c)$ , sendo  $q$  a carga da partícula,  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ , onde  $N$  é a dimensão do “grupo de gauge” associado a um determinado

campo externo, denominado de “campo de gauge”. Os operadores  $F_k$  satisfazem as usuais relações de comutação  $[F_i, F_j] = i c_{ijk} F_k$ , onde as constantes  $c_{ijk}$  dependem do particular grupo  $G$ . Os parâmetros  $\theta^k(x)$ , que são funções do espaço-tempo  $x$ , denominados de “ângulos de rotação”, representam os graus de liberdade internos da partícula. A dependência de  $\theta^k(x)$  com  $x$  é que permite a conexão entre os graus internos com o campo externo em diferentes pontos do espaço-tempo. Na figura 1 ilustramos, numa operação “gedanken” simples a mudança do ângulo  $\theta^k(x)$  quando a partícula teste se movimenta de  $x$  para  $x + dx$ . O campo externo irá provocar, através do operador  $U(x)$ , uma rotação infinitesimal da direção interna dada por  $d\theta^k = \theta^k(x + dx) - \theta^k(x)$ .

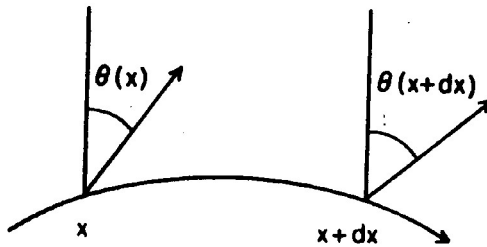


Fig. 1. Mudança do ângulo interno  $\theta(x)$  para  $\theta(x+dx)$  quando a carga teste se move de  $X$  para  $X+dX$  no espaço-tempo.

Para calcular o efeito do campo externo sobre  $\psi(x)$ , levando em conta o operador  $U(x)$ , vamos escrever

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(x) u_{\alpha}, \quad (2)$$

onde  $\{u_\alpha\}$  são os vetores base do espaço interno e a parte externa  $\psi_\alpha(x)$  é a “componente” de  $\psi(x)$  na base  $u_\alpha$ . É importante observar que os graus de liberdade internos, para todos os casos conhecidos de invariância de gauge, são grandezas não-observáveis.

Assim, no deslocamento de  $x$  para  $x+dx$ , o estado  $\psi(x)$  muda de uma grandeza  $d\psi$  dada por  $d\psi = (x + dx) - \psi(x)$ . Como na variação  $d\psi$  temos de levar em conta mudanças nas partes externas  $\psi_\alpha(x)$ , dependente de  $x$ , e nas bases internas  $u_\alpha$ , teremos:

$$d\psi = \sum_{\alpha} [(\partial_{\mu} \psi_{\alpha}) dx^{\mu} u_{\alpha} + \psi_{\alpha} du_{\alpha}], \quad (3)$$

O segundo termo da Eq.(3) contém as variações  $du_\alpha$  no espaço de base interno. Elas resultam das rotações angulares infinitesimais  $d\theta^k$  geradas pelo campo externo e que estão associadas com o deslocamento externo  $dx$ . A rotação  $du_\alpha$  das bases internas é dada por  $U(dx)u_\alpha = u_\alpha + du_\alpha$ , onde  $U(dx)$  é calculada usando a Eq.(1):

$$U(dx) = \exp[-ig \sum_k d\theta^k F_k], \quad (4)$$

$$d\theta^k = (\partial_{\mu} \theta^k) dx^{\mu}. \quad (5)$$

Assim, teremos

$$U(dx)u_{\alpha} = \exp[-ig \sum_{\alpha} (\partial_{\mu} \theta^k) dx^{\mu} (F_k)_{\alpha\beta}] u_{\beta}, \quad (6)$$

$$(F_k)_{\alpha\beta} = \langle \alpha | F_k | \beta \rangle.$$

Expandindo  $U(dx)$  em primeira ordem em  $dx$ , obtemos:

$$u_\alpha + du_\alpha = [\delta_{\alpha\beta} - ig \sum_k (\partial_\mu \theta^k) dx^\mu (F_k)_{\alpha\beta}] u_\beta, \quad (7)$$

que mostra, então que  $du_\alpha$  é dada por,

$$du_\alpha = -ig \sum_k (\partial_\mu \theta^k) dx^\mu (F_k)_{\alpha\beta} u_\beta. \quad (8)$$

Por hipótese, os ângulos  $\theta^k(x)$  são funções de  $x$  e dependem do campo externo aplicado ao sistema. Assim, define-se um operador  $A_\mu(x)$  que liga os estados internos ao espaço-tempo  $x$ , denominado de “operador conexão” de tal modo que,

$$(A_\mu)_{\alpha\beta} = \sum_k (\partial_\mu \theta^k) (F_k)_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

É importante observar que  $A_\mu(x)$  é, ao mesmo tempo, um campo externo e um operador que age no espaço interno da partícula. O operador de conexão  $A_\mu(x)$  é não-observável pois é definido a partir de grandezas não-observáveis, os ângulos  $\theta^k(x)$  e os geradores  $F_k$  do grupo de simetria, conforme Eq.(9).

Usando as expressões vistas acima a variação total  $d\psi$ , dada pela Eq.(1) pode ficar escrita como:

$$d\psi = \sum_{\alpha\beta} [(\partial_\mu \psi_\alpha) \delta_{\alpha\beta} - ig (A_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\alpha] dx^\mu u_\beta, \quad (10)$$

Ou ainda, em termos de uma expansão na base interna:

$$d\psi = \sum_\beta (d\psi_\beta) u_\beta = \sum_\beta (D_\mu \psi_\beta) dx^\mu u_\beta, \quad (11)$$



onde o operador  $D_\mu$  que é denominado de “derivada covariante de gauge” é uma generalização da derivada covariante usada na teoria de gravitação de Einstein (Moriyasu, 1978; Mills, 1989; Bassalo, Cattani e Nassar, 2000). Ele descreve as variações das partes internas e externas de  $\psi(x)$ . Na Eq.(11),  $D_\mu \psi_\beta$  é dado por:

$$D_\mu \psi_\beta = \sum_\alpha [\delta_{\beta\alpha} \partial_\mu - ig(A_\mu)_{\beta\alpha}] \psi_\alpha, \quad (12)$$

No caso particular do eletromagnetismo, o espaço interno é unidimensional e grupo de gauge é o  $U(1)$ . Nesse caso a Eq.(1) fica escrita, simplesmente, como  $U(x) = \exp[-i q \theta(x)]$ , onde o ângulo  $\theta(x)$  é historicamente representado pela função  $\Lambda(x)$ .

Conseqüentemente, a Eq.(12) fica escrita como:

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - igA_\mu) \psi, \quad (13)$$

Como vemos pela Eq.(13), o operador  $D_\nu = \partial_\nu - i g A_\nu$  é o “momento canônico” familiar no eletromagnetismo, lembrando que  $g = e/(\hbar c)$ . Assim, o operador generalizado de “conexão de gauge”, definido pela Eq.(13), é, no caso do eletromagnetismo, o “vetor potencial”  $A_\mu(x)$ . Como é bem sabido, é uma grandeza não-observável.

Como  $D_\mu \psi$  é a derivada “total” de  $\psi$  (interna e externa) devemos esperar que  $D_\mu \psi$  se transforme do mesmo modo que  $\psi$ , ou seja,  $\psi' = U(x) \psi$  e  $D'_\mu \psi' = U(D_\mu \psi)$ . Desse modo, lembrando que  $U(x) = \exp[-i g \Lambda(x)]$  podemos mostrar (Moriyasu, 1983; 1978; Mills, 1989) que o operador de conexão deve se transformar de acordo com a equação  $A'_\mu = A_\nu - \partial_\mu \Lambda$ . Esta equação nada mais é do que a

notória transformação de gauge do eletromagnetismo. Para que  $\partial_\mu A^\mu$  seja um invariante por uma transformação de Lorentz, ou seja,  $\partial_\mu A^\mu = \partial'_\mu A'^\mu$  verificamos que a condição  $\partial_\mu \partial^\mu \Lambda$  deve ser obedecida, que é conhecida como “gauge de Lorentz”.

Partindo do princípio de que uma Lagrangeana ( $L$ ) que leva em conta a interação entre um elétron, representado por  $\psi$ , e o potencial eletromagnético  $A_\mu$  deva ser invariante por uma transformação de gauge local, pode-se mostrar que (Yang e Mills, 1954):

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - (1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m\bar{\psi}\psi . \quad (14)$$

O primeiro termo dá a energia cinética do elétron, o segundo a densidade de energia contida no campo eletromagnético e o último leva em conta a massa  $m$  do elétron. Cada um dos termos é separadamente gauge invariante. Através das equações de Euler-Lagrange obtemos da Eq.(14):

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi = m\psi , \quad (15a)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu , \quad (15b)$$

$$j_\nu = g\bar{\psi}\gamma_\nu \psi , \quad (15c)$$

onde a primeira é a equação de Dirac, a segunda as equações de Maxwell, lembrando que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e que  $j_\nu$  são as densidades de corrente .

Como sabemos, desde que Noether provou seu famoso Teorema em 1918, *para cada simetria na natureza há uma correspondente lei de conservação e para cada lei de conservação há*

*uma simetria*. Assim, pode-se mostrar (Mills, 1989; Roman, 1960) que a conservação da carga elétrica está associada à invariância, ou simetria, de gauge. Este resultado, segundo Mills (Mills, 1989), impressionou muito o jovem estudante Yang, em particular pelo fato de que toda estrutura do eletromagnetismo poderia ser determinada usando unicamente a hipótese de invariância de gauge. Esses resultados foram o ponto de partida para a formulação de uma teoria geral de gauge local não-Abeliana (Moriyasu, 1978; Mills, 1989). Essa teoria geral, de Yang-Mills (Yang e Mills, 1954), foi aplicada com sucesso para as interações eletro-fraca e forte. Esses resultados levaram à formulação do Princípio da invariância de gauge que diz que todas as interações são invariantes por uma transformação de gauge local, ou ainda, segundo Mills (Mills, 1989): *Cada simetria contínua da natureza é uma simetria local*.

Para o leitor que quiser ter uma visão mais ampla sobre as aplicações das teorias de gauge não-Abelianas sugerimos que consulte K. Moriyasu (Moriyasu, 1978). Lá são analisadas, por exemplo, as quebras de simetria de gauge, a supercondutividade, as interações eletro-fracas e as fortes. O referido autor analisa também a nova geometria (geometria de espaços fibrados) que foi introduzida na Física pela Teoria de Gauge. Essa geometrização veio ao encontro do antigo sonho de Einstein de uma descrição geométrica unificada das forças fundamentais da natureza. O princípio de invariância de gauge que generalizou, de modo inesperado, o caráter geométrico da teoria de gravitação de Einstein, conseguiu dar uma descrição satisfatória de todas as forças da natureza.

### **A Invariância de Gauge do Eletromagnetismo e o Efeito Aharonov-Bohm**

Vamos mostrar como evolui o estado de uma partícula quando ela se move no espaço-tempo num circuito fechado, com a

forma de um paralelogramo, formado por dois caminhos 1 e 2, segundo Fig. (2). Primeiro ela vai de  $A$  até  $B$  seguindo o caminho 1 e depois vai pelo caminho 2.

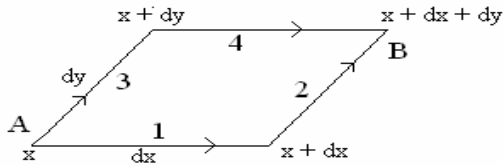


Fig. 2. Paralelogramo infinitesimal ao longo do qual a carga teste se move do ponto  $A \rightarrow B$  pelos caminhos 1 e 2.

Assim, pelo caminho 1 temos  $U_1(dx) \psi(A) = \psi(A) \exp(-i g dj_1)$  e pelo 2 temos  $U_2(dy) \psi(A) = \psi(A) \exp(-i g j_2)$ . Vejamos com calcular a mudanças infinitesimais de fase  $d\varphi$  ao longo dos caminhos, lembrando que:

$$U(dx) = \exp[-iqA_\mu(x)dx^\mu] = \exp(-igd\varphi).$$

No caminho 1 no trecho  $x \rightarrow x + dx$  o operador de evolução  $U(dx)$  é dado por:

$$U_1(dx) = 1 - igA_\mu(x)dx^\mu. \quad (16)$$

Como  $A_\mu(x) = \sum_k \partial_\mu \theta^k F_k$ , no trecho  $x+dx \rightarrow x+dx+dy$  temos,

$$U_1(dy) = 1 - igA_\nu(x+dx)dy^\nu = 1 - igA_\nu(x)dy^\nu dy^\nu - ig\partial_\mu A_\nu(x)dx^\mu dy^\nu. \quad (17)$$

Assim, pelo caminho 1 a evolução  $A \rightarrow B$  é dada pelo operador

$$U_1(dy)U_1(dx) = 1 - gd\phi_1 = 1 - igA_\mu(x)dx^\mu - igA_\nu(x)dy^\nu - g^2A_\nu(x)A_\mu(x)dy^\nu dx^\mu - ig\partial_\mu A_\nu(x)dx^\mu dy^\nu. \quad (18)$$

De modo análogo, pelo caminho 2, a evolução  $A \rightarrow B$  é dada por:

$$U_2(dy)U_2(dx) = 1 - gd\phi_2 = 1 - igA_\mu(x)dx^\mu - igA_\nu(x)dy^\nu - g^2A_\nu(x)A_\mu(x)dy^\nu dx^\mu - ig\partial_\mu A_\nu(x)dx^\mu dy^\nu. \quad (19)$$

Nesse ponto devemos lembrar que as componentes do campo  $A_\mu(x)$  e  $A_\nu(x)$  não comutam pois elas são combinações dos geradores  $F_k$  dos grupos que não comutam. Assim, a evolução do estado interno ao longo do caminho 1 é diferente da obtida no caminho 2. A diferença infinitesimal de fase  $d\phi = d\phi_1 - d\phi_2$  resultante entre os caminhos 1 e 2 é dada por:

$$igd\phi = U_2(dx) - U_1(dx) = [(1 - igd\phi_2) - (1 - igd\phi_1)] = igF_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

ou seja,

$$d\phi = d\phi_1 - d\phi_2 = F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (20)$$

onde o operador  $F_{\mu\nu}$  é dado por  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i g [A_\mu, A_\nu]$ . Ele é conhecido como “tensor de Maxwell generalizado”, pois, como veremos a seguir, ele se reduz ao tensor de Maxwell no caso eletromagnético.

De acordo com a Eq.(20) vemos que a mudança dos estados internos depende do caminho seguido pela partícula no espaço-tempo: a transformação infinitesimal de gauge ao longo dos caminhos 1 é diferente da obtida ao longo de 2. Este fenômeno é muito bem conhecido no caso de um campo eletromagnético. Como os campos eletromagnéticos,  $A_\mu(x)$  e  $A_\nu(x)$  comutam, vemos que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor de Maxwell. Desse modo, da Eq.(20) obtemos  $d\varphi = \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$ , onde  $d\vec{S}$  é o elemento de área do paralelograma. Por outro lado,  $d\varphi_1$  e  $d\varphi_2$  são dadas por integrais ao longo dos caminhos 1 e 2, respectivamente:  $d\varphi_1 = \int_1 \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_1$  e  $d\varphi_2 = \int_2 \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_2$ . Tendo em vista essas expressões a Eq.(20) fica escrita como:

$$d\varphi_1 - d\varphi_2 = \int_1 \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_1 - \int_2 \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_2 = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad (21)$$

onde  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$  é integral de circuitação ao longo do perímetro do paralelograma.

O resultado visto na Eq.(21) é o que conhecemos como o Teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \Phi, \quad (22)$$

onde  $\Phi$  é o fluxo do campo magnético através da área circundada pela curva  $\gamma$ .

A diferença de fase nas funções de ondas de um elétron é observada quando ele percorre dois caminhos diferentes envolvendo um solenóide. Esse fenômeno é conhecido como **Efeito Aharonov-Bohm** (Moriyasu, 1983; Aharonov e Bohm, 1959).

Conforme vemos da Eq.(20), deduzida segundo a teoria geral de gauge não-Abeliana de Yang-Mills, o efeito Aharonov-Bohm deve estar presente em qualquer campo de gauge (Yang e Wu, 1975) e não somente para o campo eletromagnético.

**REFERÊNCIAS**

**Abdalla, M. C. B.** 2006. **O Discreto Charme das Partículas Elementares.** EDUNESP.

**Aharonov, Y. and Bohm, D.** 1959. **Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory,** *Physical Review* **115**, p. 485.

**Arfken, G.** 1970. **Mathematical Methods for Physicists.** Academic Press.

**Armony, M.** 1970. **Simetrias Unitárias: Algumas Aplicações à Física das Partículas Elementares,** *Tese de Mestrado.* Departamento de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

**Bak, T. A. and Lichtenberg, J.** 1967. **Vectors, Tensors and Groups.** W. A. Benjamin, Incorporation

**Bassalo, J. M. F.** 1973. **Introdução à Mecânica dos Meios Contínuos.** EDUFPA.

**Bassalo, J. M. F.** 1989. **Métodos da Física Teórica II.** Departamento de Física da Universidade Federal do Pará.

**Bassalo, J. M. F.** 1987. **Crônicas da Física, Tomo 1.** EDUFPA.

**Bassalo, J. M. F.** 1990. **Crônicas da Física, Tomo 2.** EDUFPA.

**Bassalo, J. M. F.** 1994. **Crônicas da Física, Tomo 4.** EDUFPA.



**Bassalo, J. M. F., Cattani, M. e Nassar, A. B.** 2000. **Aspectos Contemporâneos da Física.** EDUFPA.

**Berestetskii, V. B., Lifshitz, E. M. and Pitaevskii, L. P.** 1971. **Relativistic Quantum Theory.** Pergamon Press.

**Boerner, H.** 1963. **Representation of Group.** North-Holland Publishing Company.

**Borisovich, Yu., Bliznyakov, N., Izrailevich, Ya. and Fomenko, T.** 1985. **Introduction to Topology.** Publishers Mir.

**Burgoyne, N.** 1958. **On the Connection of Spin with Statistics,** *Nuovo Cimento* **8**, p. 607.

**Cattani, M.** 1989. **The Simplest Gentilionic Systems,** *Acta Physica Polonica* **B20**, p. 983.

**Cattani, M.** 1995. **The Intermediate  $S_3$  Group Symmetry and Quark Confinement,** *Anais da Academia Brasileira de Ciências* **67**, p. 153.

**Cattani, M. and Fernandes, N. C.** 1982. **Para-Bosons and Para-Fermions in Quantum Mechanics,** *Revista Brasileira de Física* **12**, p. 585.

**Cattani, M. and Fernandes, N. C.** 1983. **Do Quarks Obey General Statistics?,** *Revista Brasileira de Física* **13**, p. 464.

**Cattani, M. and Fernandes, N. C.** 1984. **General Statistics, Second Quantization and Quarks,** *Nuovo Cimento* **A79**, p. 107.

**Cattani, M. and Fernandes, N. C. 1985. A Gentilionic Approach to Quarks Color, *Nuovo Cimento* **B87**, p. 70.**

**Cattani, M. and Fernandes, N. C. 1987a. General Statistics and the Spinorial Character of Gentilionic Baryon States, *Anais da Academia Brasileira de Ciências* **59**, p. 283.**

**Cattani, M. and Fernandes, N. C. 1987b. Baryon States as Colorspinors in Gentilionics Statistics, *Physics Letters* **A124**, p. 229.**

**Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B. and Weisskopf, V. F. 1974. New Extended Model of Hadrons, *Physical Review* **D9**, p. 3471.**

**Close, F. E. 1979. An Introduction to Quarks and Partons. Academic Press.**

**Condon, E. U. and Shortley, G. H. 1935. The Theory of Atomic Spectra. Cambridge University Press.**

**Cushing, J. T. 1975. Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences. John Wiley & Sons, Incorporation.**

**Dieudonné, J. 1955. La Geometrie des Groupes Classiques. Springer-Verlag.**

**Fernandes, N. C. and Cattani, M. 1984. Homotopy and Statistics in Quantum Theory, *Revista Brasileira de Física (Volume Especial – Os 70 Anos de Mário Schenberg – Julho de 1984)*, p. 87.**

**Ferreira, E. M.** 1982. **Partículas Elementares**. Departamento de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

**Frescura, F. A. M. and Hiley, B. J.** 1981. **Geometric Interpretation of the Pauli Spinor**, *American Journal of Physics* **49**, p. 152.

**Gasiorowicz, S.** 1979. **Física Quântica**. Guanabara Dois.

**Gentile Jr., G.** 1940. **Osservazioni Sopra le Statistiche Intermedie**, *Nuovo Cimento* **1**, p. 493.

**Gentile Jr., G.** 1941. **Sopra il Fenômeno della Condensazione del Gás di Bose-Einstein**, *La Ricerca Scientifica* **12**, p. 341.

**Gentile Jr., G.** 1942. **Le Statistiche Intermedie e le Proprietà dell'Elio Liquido**, *Nuovo Cimento* **19**, p. 109.

**Hamermesh, M.** 1962. **Group Theory and Its Application to Physical Problems**. Addison-Wesley Publishing Company, Incorporation.

**Hartle, J. B. and Taylor, J. R.** 1969. **Quantum Mechanics of Paraparticles**, *Physical Review* **178**, p. 2043.

**Hasenfratz, P. and Kuti, J.** 1978. **The Quark Bag Model**, *Physics Reports* **C40**, p. 77.

**Jackson, J. B.** 1992. **Classical Electrodynamics**. John Wiley & Sons, Incorporation.

**Jansen, L. and Boon, M.** 1967. **Theory of Finite Groups. Applications in Physics.** North-Holland Publishing Company.

**Landau, L. D. and Lifschitz, E. M.** 1958. **Quantum Mechanics.** Pergamon Press.

**Lee, T. D.** 1981. **Particle Physics and Introduction to Field Theory.** Harwood Academic Publishers.

**Leon, M.** 1973. **Particle Physics: An Introduction.** Academic Press.

**Lichtenberg, D. B.** 1970. **Unitary Symmetry and Elementary Particles.** Academic Press.

**Lifshitz, E. M. and Pitayevskii, L. P.** 1973. **Theorie Quantique Relativiste.** Éditions Mir.

**Logunov, A. A.** 1983. **Gravitation and Elementary Particles.** Mir Publishers.

**Lüders, G. and Zumino, B.** 1958. **Connection between Spin and Statistics,** *Physical Review* **110**, p. 1450.

**Mariot, L.** 1962. **Group Theory and Solid State Physics.** Prentice Hall Incorporation.

**Mathews, J. and Walker, R. L.** 1965. **Mathematical Methods of Physics.** W. A. Benjamin, Incorporation.

**Matsen, F. A.** 1970. **Vector Spaces and Algebras.** Holt, Rinehart and Winston.

**Meijer, P. H. E. and Bauer, E.** 1962. **Group Theory: The Application to Quantum Mechanics.** North-Holland Publishing Company.

**Merzbacher, E.** 1961. **Quantum Mechanics.** John Wiley & Sons, Incorporation.

**Mills, R.** 1989. **Gauge Fields,** *American Journal of Physics* **57**, p. 493.

**Moriyasu, K.** 1978. **Gauge Invariance Rediscovered,** *American Journal of Physics* **46**, p. 274.

**Moriyasu, K.** 1983. **An Elementary Primer for Gauge Theory.** World Scientific.

**Noether, A. E.** 1918. **Invarianten beliebiger Differentialausdrücke,** *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, p. 37.

**Pauli, W.** 1940. **The Connection Between Spin and Statistics,** *Physical Review* **58**, p. 716.

**Ram, B.** 1967. **Physics of the SU(3) Symmetry Model,** *American Journal of Physics* **35**, p. 16.

**Roman, P.** 1960. **Theory of Elementary Particles.** North-Holland Publishing Company.

**Rose, M. E.** 1967. **Elementary Theory of Angular Momentum.** John Wiley & Sons, Incorporation.

**Rowlatt, P. A.** 1966. **Group Theory and Elementary Particles.** Longmans, Green and Company, Limited.

**Rutherford, D. E.** 1948. **Substitutional Analysis.** The Edinburgh University Press.

**Schiff, L. I.** 1955. **Quantum Mechanics.** McGraw-Hill Book Company.

**Segrè, E.** 1977. **Nuclei and Particles: An Introduction to Nuclear and Subnuclear Physics.** W. A. Benjamin, Incorporation.

**Smirnov, V.** 1970. **Cours de Mathématiques Supérieures, Tome III (Première Partie).** Éditions Mir.

**Swart, J. J. de** 1963. **The Octet Model and Its Clebsch-Gordan Coefficients,** *Reviews of Modern Physics* **35**, p. 916.

**Veltman, M. J. G.** 2003. **Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics.** World Scientific.

**Vieira, M. C. de Souza e Tsallis, C.** 1987. **D-Dimensional Ideal Gás in Parastatistics: Thermodynamic Properties,** *Journal of Statistical Physics* **48**, p. 97.

**Villani, M.** 1982. **Freedom and Confinement: A Classical Field-Theoretic Picture,** *Nuovo Cimento* **A72**, p. 164.

**Weyl, H.** 1952. **The Theory of Groups and Quantum Mechanics.** E. P. Dunton and Company Incorporation.

**Wigner, E. P.** 1959. **Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra**, Academic Press.

**Williams, W. S. C.** 1971. **An Introduction to Elementary Particles**. Academic Press.

**Wu, T. T. and Yang, C. N.** 1975. **Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formalism of Gauge Fields**, *Physical Review* **D12**, p. 3845.

**Yang, C. N. and Mills, R. L.** 1954. **Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge**, *Physical Review* **96**, p. 191.

## Índice Onomástico

### A

Abdalla, M. C. B. 221, 395  
 Aharonov, Y. 389, 393, 395  
 Alvarez, L. W. 232, 236, 237, 239  
 Anderson, C. D. 221  
 Anderson, H. L. 232  
 Arfken, G. 182, 395  
 Alston, M. 237  
 Armony, M. 261, 271, 287, 298, 303, 395

### B

Bak, T. A. 2, 395  
 Barnes, V. E. 234, 299  
 Bassalo, J. M. F. 1, 35, 99, 159, 182, 183, 204, 211, 221, 381, 382, 387, 395, 396  
 Bauer, E. 22, 34, 400  
 Berestetskii, V. B. 378, 396  
 Bjorklund, R. F. 221  
 Bliznyakov, N. I. 357, 396  
 Boerner, H. 320, 322, 327, 331, 333, 334, 336, 337, 396  
 Bohm, D. 371, 389, 393, 395  
 Boon, M. 14, 320, 322, 327, 331, 333, 334, 336, 337, 399  
 Borisovich, Yu. 357, 396  
 Bose, S. N. 325, 398  
 Buda 228  
 Burgoyne, N. 350, 363, 396  
 Butler, C. C. 221

### C

Carmony, D. D. 233  
 Casimir, H. B. G. 126-128, 345, 346, 355, 358, 359, 363, 366, 367, 375, 379



Cattani, M. S. D. 317, 325, 326, 330, 344-347, 349, 351, 352, 355, 358-360, 362, 363, 366-368, 373-376, 382, 387, 396, 397  
Chadwick, J. Sir 214, 221  
Chamberlain, O. 224  
Chodos, A. 379, 397  
Christoffel, E. B. 382  
Clebsch, R. F. A. 94, 95, 194, 196, 205, 208, 209, 219, 220, 275, 276, 280, 282, 283, 287, 293, 298, 300, 303  
Close, F. E. 364, 397  
Coleman, S. R. 230, 231, 235, 238, 239, 295  
Condon, E. U. 209, 397  
Connoly, P. L. 237, 296  
Cork, B. 224  
Coulomb, C. A. 92, 377  
Cowan Junior, C. L. 221  
Crandall, W. E. 221  
Cushing, J. T. 175, 397

## D

Dalitz, R. H. 236  
Dashen, R. F. 238, 296  
Di Giacomo, A. 371  
Diddens, A. N. 232  
Dieudonné, J. 356, 397  
Dirac, P. A. M. 189, 231, 352, 370, 376, 377, 388

## E

Eberhard, P. 237  
Eckart, C. 203, 205, 208, 283, 284, 291  
Einstein, A. 111, 221, 382, 387, 389, 398  
Erwin, A. R. 235  
Euler, L. 142, 166, 173, 388

## F

Fairbank Junior, W. M. 242  
Fermat, P. de 370

Fermi, E. 226, 232, 285, 325  
Fernandes, N. C. 317, 325, 326, 330, 344-347, 349, 351, 352, 355, 358-360,  
362, 363, 366-368, 373-376, 396, 397  
Ferreira, E. M. 261, 398  
Feynman, R. P. 231, 295  
Fomenko, T. 357, 396  
Fowler, W. B. 223  
Frescura, F. A. M. 355, 398  
Fröbenius, F. G. 333, 334

## G

Gasiorowicz, S. 303, 398  
Gell-Mann, M. 223-225, 227-231, 233-240, 244, 289-291, 294, 297, 299-  
301, 367, 375  
Gentile Junior, G. 325, 373, 398  
Glaser, D. A. 222  
Glashow, S. L. 230, 238, 296  
Goldberg, M. 239  
Good, M. L. 237  
Gordan, P. A. 94, 95, 194, 196, 205, 208, 209, 219, 220, 275, 276, 280, 282,  
283, 287, 293, 298, 300, 303  
Gordon, W. 231, 295  
Goudsmith, S. A. 185  
Govorkov, A. B. 371  
Graziano, W. 237

## H

Hamermesh, M. 317, 320, 322, 327, 328, 331, 333, 334, 336, 337, 347, 351,  
398  
Hartle, J. B. 351, 352, 398  
Hasenfratz, P. 379, 398  
Hebard, A. G. 242  
Heisenberg, W. K. 214  
Hellemans, A. 242  
Hilbert, D. 317, 319-323, 326, 331, 337-340, 343, 345, 347  
Hiley, B. J. 355, 371, 398

## I

Ikeda, M. 227, 289  
 Iwanenko, D. D. 214  
 Izrailevich, Ya. 357, 396

## J

Jackson, J. D. 174, 398  
 Jacobi, C. G. J. 116  
 Jaffe, R. L. 379, 397  
 Jansen, L. 14, 320, 322, 327, 331, 333, 334, 336, 337, 399  
 Johnson, K. 379, 397

## K

Kalbfleisch, G. 239  
 Kemmer, N. 221  
 Klein, O. B. 231, 295  
 Kuti, J. 379, 398

## L

Lagrange, J. L. Conde 22, 23, 388  
 Lambertson, G. R. 224  
 Larue, G. S. 242  
 Landau, L. D. 318, 319, 322, 325, 329, 399  
 Lattes, C. M. G. 221  
 Lee, T. D. 288, 399  
 Leon, M. 261, 399  
 Leprince-Ringuet, L. 221, 222  
 Levi-Civita, T. 124, 131  
 Lewis, G. N. 221  
 L'Héritier, M. 221  
 Lichtenberg, D. B. 364, 371, 399  
 Lichtenberg, J. 2, 395  
 Lie, M. S. 99-101, 110, 115, 125-130, 145, 146, 148, 149, 153, 226, 285  
 Lifschitz, E. M. 318, 319, 322, 325, 329, 364, 378, 396, 399  
 Logunov, A. A. 370, 399  
 London, F. 381  
 Long, E. A. 232  
 Lorentz, H. A. 5, 6, 8, 105, 350, 363, 379, 382, 388  
 Lüders, G. 350, 359, 363, 399

**M**

Maglic, B. C. 236, 296  
Majorana, E. 214  
March, R. 235  
Mariot, L. 85, 399  
Martin, R. 232  
Mathews, J. 182, 399  
Matsen, F. A. 320, 322, 327, 328, 331, 333, 334, 336, 337, 339, 347, 358, 399  
Maxwell, J. C. 209, 381, 388, 392  
Meijer, P. H. E. 22, 34, 400  
Mendeleiev, D. I. 226  
Merzbacher, E. 318-322, 325, 329, 400  
Millikan, R. A. 242  
Mills, R. L. 376, 381-383, 387-389, 393, 400, 402  
Moebius, A. F. 357  
Moriyasu, K. 381-383, 387, 389, 393, 400  
Moyer, B. J. 221  
Muirhead, H. 221

**N**

Nassar, A. B. 382, 387, 396  
Nagle, D. E. 232  
Nakano, T. 223  
Neddermeyer, S. H. 221  
Ne'eman, Y. 227, 228, 231, 235, 289, 294  
Nishijima, K. 223-225, 301, 367, 375  
Noether, A. E. 381, 382, 388, 400

**O**

Occhialini, G. P. S. 221  
Ogawa, S. 227, 289  
Ohnuki, Y. 227, 229, 289, 294  
Okubo, S. 229-231, 235, 238, 239, 290, 299, 300  
Okun, L. B. 222

**P**

Pais, A. 222-224, 230  
 Pauli Junior, W. 136, 216, 221, 244, 344, 350, 354, 359, 363, 400  
 Pevsner, A. 229, 294, 295  
 Piccioni, O. 224  
 Pitaevskii, L. P. 364, 378, 396, 399  
 Pjerrou, G. M. 233  
 Poincaré, H. 9  
 Powell, C. F. Sir 221, 225  
 Predazzi, E. 371

## R

Racah, E. 197, 198, 203  
 Ram, B. 212, 400  
 Reines, F. 221  
 Rochester, G. D. 221  
 Roman, P. 320-322, 325, 329, 389, 400  
 Rose, M. E. 172, 194, 196, 197, 204, 400  
 Rosenfeld, A. H. 236  
 Rowlatt, P. A. 148, 401  
 Rutherford, D. E. 317, 320, 327, 328, 331, 333, 334, 336, 337, 347, 351, 401  
 Rutherford, E. Sir 214, 221

## S

Sakata, S. 226, 227, 240, 285, 286, 289, 300, 302  
 Sakurai, J. J. 236, 238, 296  
 Schenberg, M. 397  
 Schiff, L. I. 318, 319, 322, 325, 329, 401  
 Schlein, P. E. 233, 237, 296  
 Schnitzer, H. J. 230, 231, 235, 238, 239, 295  
 Schouten, J. A. 148, 149, 152  
 Schrödinger, E. 92, 176, 211, 322  
 Schur, F. 58, 62, 170  
 Schwinger, J. S. 225  
 Segrè, E. G. 224, 226, 401  
 Shortley, G. H. 209, 397  
 Shutt, R. P. 223  
 Slater, W. E. 233  
 Smirnov, V. 5, 9, 401  
 Speiser, D. R. 277

Stevenson, M. L. 236  
Stokes, G. G. Sir 392  
Stork, D. H. 233  
Swart, J. J. de 230, 261, 277, 284, 293, 295, 401

**T**

Taylor, B. 100  
Taylor, J. R. 351, 352, 398  
Thomson, J. J. Sir 221  
Thorn, C. B. 379, 397  
Thorndike, A. M. 223  
Ticho, H. K. 233, 237  
Tiomno, J. 225, 237  
Tsallis, C. 325, 401

**U**

Uhlenbeck, G. E. 185

**V**

Veltman, M. J. G. 221, 401  
Videira, A. L. L. 237  
Vieira, M. C. de S. 325, 401  
Vigier, J. P. 371  
Villani, M. 378, 379, 401

**W**

Walker, R. L. 182, 399  
Walker, W. D. 235  
Weisskopf, V. F. 379, 397  
Wenzel, W. A. 224  
Wess, J. 227, 289  
West, E. 235  
Weyl, H. 317, 320, 327, 328, 331, 333-337, 339, 347, 351, 381, 401  
Whitemore, W. L. 223  
Wiegand, C. E. 224  
Wigner, E. P. 50, 52, 160, 203, 205, 208, 283, 284, 291, 402  
Williams, W. S. C. 261, 402

Wilson, C. T. R. 221  
Wojcicki, S. G. 237  
Wu, T. T. 393, 402

**Y**

Yamaguchi, T. 227, 289  
Yang, C. N. 226, 285, 383, 388, 389, 393, 402  
York, C. M. 221  
Young, A. 322, 323, 325-327, 329, 333-335, 337, 339, 341, 346-348, 373  
Ypsilantis, T. J. 224

**Z**

Zagury, N. 237  
Zeeman, P. 213 290  
Zumino, B. 350, 359, 363, 399  
Zweig, G. 239, 240, 300

## Índice Onomástico

### A

Abdalla, M. C. B. 221, 395  
Aharonov, Y. 389, 393, 395  
Alvarez, L. W. 232, 236, 237, 239  
Anderson, C. D. 221  
Anderson, H. L. 232  
Arfken, G. 182, 395  
Alston, M. 237  
Armony, M. 261, 271, 287, 298, 303, 395

### B

Bak, T. A. 2, 395  
Barnes, V. E. 234, 299  
Bassalo, J. M. F. 1, 35, 99, 159, 182, 183, 204, 211, 221, 381, 382, 387, 395, 396  
Bauer, E. 22, 34, 400  
Berestetskii, V. B. 378, 396  
Bjorklund, R. F. 221  
Bliznyakov, N. I. 357, 396  
Boerner, H. 320, 322, 327, 331, 333, 334, 336, 337, 396  
Bohm, D. 371, 389, 393, 395  
Boon, M. 14, 320, 322, 327, 331, 333, 334, 336, 337, 399  
Borisovich, Yu. 357, 396  
Bose, S. N. 325, 398  
Buda 228  
Burgoyne, N. 350, 363, 396  
Butler, C. C. 221

### C

Carmony, D. D. 233  
Casimir, H. B. G. 126-128, 345, 346, 355, 358, 359, 363, 366, 367, 375, 379  
Cattani, M. S. D. 317, 325, 326, 330, 344-347, 349, 351, 352, 355, 358-360, 362, 363, 366-368, 373-376, 382, 387, 396, 397  
Chadwick, J. Sir 214, 221  
Chamberlain, O. 224  
Chodos, A. 379, 397  
Christoffel, E. B. 382  
Clebsch, R. F. A. 94, 95, 194, 196, 205, 208, 209, 219, 220, 275, 276, 280, 282, 283, 287, 293, 298, 300, 303  
Close, F. E. 364, 397  
Coleman, S. R. 230, 231, 235, 238, 239, 295  
Condon, E. U. 209, 397  
Connoly, P. L. 237, 296  
Cork, B. 224  
Coulomb, C. A. 92, 377  
Cowan Junior, C. L. 221  
Crandall, W. E. 221  
Cushing, J. T. 175, 397



## D

Dalitz, R. H. 236  
Dashen, R. F. 238, 296  
Di Giacomo, A. 371  
Diddens, A. N. 232  
Dieudonné, J. 356, 397  
Dirac, P. A. M. 189, 231, 352, 370, 376, 377, 388

## E

Eberhard, P. 237  
Eckart, C. 203, 205, 208, 283, 284, 291  
Einstein, A. 111, 221, 382, 387, 389, 398  
Erwin, A. R. 235  
Euler, L. 142, 166, 173, 388

## F

Fairbank Junior, W. M. 242  
Fermat, P. de 370  
Fermi, E. 226, 232, 285, 325  
Fernandes, N. C. 317, 325, 326, 330, 344-347, 349, 351, 352, 355, 358-360, 362, 363, 366-368, 373-376, 396, 397  
Ferreira, E. M. 261, 398  
Feynman, R. P. 231, 295  
Fomenko, T. 357, 396  
Fowler, W. B. 223  
Frescura, F. A. M. 355, 398  
Fröbenius, F. G. 333, 334

## G

Gasiorowicz, S. 303, 398  
Gell-Mann, M. 223-225, 227-231, 233-240, 244, 289-291, 294, 297, 299-301, 367, 375  
Gentile Junior, G. 325, 373, 398  
Glaser, D. A. 222  
Glashow, S. L. 230, 238, 296  
Goldberg, M. 239  
Good, M. L. 237  
Gordan, P. A. 94, 95, 194, 196, 205, 208, 209, 219, 220, 275, 276, 280, 282, 283, 287, 293, 298, 300, 303  
Gordon, W. 231, 295  
Goudsmith, S. A. 185  
Govorkov, A. B. 371  
Graziano, W. 237

## H

Hamermesh, M. 317, 320, 322, 327, 328, 331, 333, 334, 336, 337, 347, 351, 398  
Hartle, J. B. 351, 352, 398  
Hasenfratz, P. 379, 398  
Hebard, A. G. 242  
Heisenberg, W. K. 214

Hellemans, A. 242  
Hilbert, D. 317, 319-323, 326, 331, 337-340, 343, 345, 347  
Hiley, B. J. 355, 371, 398

## I

Ikeda, M. 227, 289  
Iwanenko, D. D. 214  
Izrailevich, Ya. 357, 396

## J

Jackson, J. D. 174, 398  
Jacobi, C. G. J. 116  
Jaffe, R. L. 379, 397  
Jansen, L. 14, 320, 322, 327, 331, 333, 334, 336, 337, 399  
Johnson, K. 379, 397

## K

Kalbfleisch, G. 239  
Kemmer, N. 221  
Klein, O. B. 231, 295  
Kuti, J. 379, 398

## L

Lagrange, J. L. Conde 22, 23, 388  
Lambertson, G. R. 224  
Larue, G. S. 242  
Landau, L. D. 318, 319, 322, 325, 329, 399  
Lattes, C. M. G. 221  
Lee, T. D. 288, 399  
Leon, M. 261, 399  
Leprince-Ringuet, L. 221, 222  
Levi-Civita, T. 124, 131  
Lewis, G. N. 221  
L'Héritier, M. 221  
Lichtenberg, D. B. 364, 371, 399  
Lichtenberg, J. 2, 395  
Lie, M. S. 99-101, 110, 115, 125-130, 145, 146, 148, 149, 153, 226, 285  
Lifschitz, E. M. 318, 319, 322, 325, 329, 364, 378, 396, 399  
Logunov, A. A. 370, 399  
London, F. 381  
Long, E. A. 232  
Lorentz, H. A. 5, 6, 8, 105, 350, 363, 379, 382, 388  
Lüders, G. 350, 359, 363, 399

## M

Maglic, B. C. 236, 296  
Majorana, E. 214  
March, R. 235  
Mariot, L. 85, 399  
Martin, R. 232  
Mathews, J. 182, 399  
Matsen, F. A. 320, 322, 327, 328, 331, 333, 334, 336, 337, 339, 347, 358, 399

Maxwell, J. C. 209, 381, 388, 392  
Meijer, P. H. E. 22, 34, 400  
Mendeleiev, D. I. 226  
Merzbacher, E. 318-322, 325, 329, 400  
Millikan, R. A. 242  
Mills, R. L. 376, 381-383, 387-389, 393, 400, 402  
Moebius, A. F. 357  
Moriyasu, K. 381-383, 387, 389, 393, 400  
Moyer, B. J. 221  
Muirhead, H. 221

## N

Nassar, A. B. 382, 387, 396  
Nagle, D. E. 232  
Nakano, T. 223  
Neddermeyer, S. H. 221  
Ne'eman, Y. 227, 228, 231, 235, 289, 294  
Nishijima, K. 223-225, 301, 367, 375  
Noether, A. E. 381, 382, 388, 400

## O

Occhialini, G. P. S. 221  
Ogawa, S. 227, 289  
Ohnuki, Y. 227, 229, 289, 294  
Okubo, S. 229-231, 235, 238, 239, 290, 299, 300  
Okun, L. B. 222

## P

Pais, A. 222-224, 230  
Pauli Junior, W. 136, 216, 221, 244, 344, 350, 354, 359, 363, 400  
Pevsner, A. 229, 294, 295  
Piccioni, O. 224  
Pitaevskii, L. P. 364, 378, 396, 399  
Pjerrou, G. M. 233  
Poincaré, H. 9  
Powell, C. F. Sir 221, 225  
Predazzi, E. 371

## R

Racah, E. 197, 198, 203  
Ram, B. 212, 400  
Reines, F. 221  
Rochester, G. D. 221  
Roman, P. 320-322, 325, 329, 389, 400  
Rose, M. E. 172, 194, 196, 197, 204, 400  
Rosenfeld, A. H. 236  
Rowlatt, P. A. 148, 401  
Rutherford, D. E. 317, 320, 327, 328, 331, 333, 334, 336, 337, 347, 351, 401  
Rutherford, E. Sir 214, 221

## S

Sakata, S. 226, 227, 240, 285, 286, 289, 300, 302  
Sakurai, J. J. 236, 238, 296  
Schenberg, M. 397  
Schiff, L. I. 318, 319, 322, 325, 329, 401  
Schlein, P. E. 233, 237, 296  
Schnitzer, H. J. 230, 231, 235, 238, 239, 295  
Schouten, J. A. 148, 149, 152  
Schrödinger, E. 92, 176, 211, 322  
Schur, F. 58, 62, 170  
Schwinger, J. S. 225  
Segrè, E. G. 224, 226, 401  
Shortley, G. H. 209, 397  
Shutt, R. P. 223  
Slater, W. E. 233  
Smirnov, V. 5, 9, 401  
Speiser, D. R. 277  
Stevenson, M. L. 236  
Stokes, G. G. Sir 392  
Stork, D. H. 233  
Swart, J. J. de 230, 261, 277, 284, 293, 295, 401

## T

Taylor, B. 100  
Taylor, J. R. 351, 352, 398  
Thomson, J. J. Sir 221  
Thorn, C. B. 379, 397  
Thorndike, A. M. 223  
Ticho, H. K. 233, 237  
Tiomno, J. 225, 237  
Tsallis, C. 325, 401

## U

Uhlenbeck, G. E. 185

## V

Veltman, M. J. G. 221, 401  
Videira, A. L. L. 237  
Vieira, M. C. de S. 325, 401  
Vigier, J. P. 371  
Villani, M. 378, 379, 401

## W

Walker, R. L. 182, 399  
Walker, W. D. 235  
Weisskopf, V. F. 379, 397  
Wenzel, W. A. 224  
Wess, J. 227, 289  
West, E. 235  
Weyl, H. 317, 320, 327, 328, 331, 333-337, 339, 347, 351, 381, 401  
Whitmore, W. L. 223  
Wiegand, C. E. 224  
Wigner, E. P. 50, 52, 160, 203, 205, 208, 283, 284, 291, 402

Williams, W. S. C. 261, 402  
Wilson, C. T. R. 221  
Wojcicki, S. G. 237  
Wu, T. T. 393, 402

## **Y**

Yamaguchi, T. 227, 289  
Yang, C. N. 226, 285, 383, 388, 389, 393, 402  
York, C. M. 221  
Young, A. 322, 323, 325-327, 329, 333-335, 337, 339, 341, 346-348, 373  
Ypsilantis, T. J. 224

## **Z**

Zagury, N. 237  
Zeeman, P. 213 290  
Zumino, B. 350, 359, 363, 399  
Zweig, G. 239, 240, 300