Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Cálculo exterior para físicos

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 66.318
05315-970, São Paulo, SP, Brasil

Publicação IF - EBook
1666/2011

26/08/2011

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física
Cidade Universitária
Caixa Postal 66.318
05315-970 - São Paulo - Brasil

José Maria Filardo Bassalo
(www.bassalo.com.br)

Mauro Sérgio Dorsa Cattani
(mcattani@if.usp.br)

CÁLCULO EXTERIOR PARA FÍSICOS

2008

Prefácio

De um modo geral, a ferramenta matemática usada para tratar as leis físicas tem sido o *Cálculo Tensorial*, principalmente quando as mesmas envolvem simetrias. Contudo, existem situações físicas em que o uso de tensores tem-se mostrado inadequado, uma vez que esses entes matemáticos dependem de um sistema de coordenadas em relação ao qual se representam as coordenadas desses entes. Essa inadequação se evidencia na manipulação do labirinto de índices ligados a esses componentes e, em vista disso, aspectos importantes de certas situações físicas são, às vezes, perdidos. Por exemplo, se uma partícula é obrigada a se deslocar em uma esfera, um único sistema de coordenadas não pode descrever completamente a posição da mesma, e muito menos seu espaço de fase ou espaço de estados (espaço de configuração).

As dificuldades apontadas acima, e que, conforme afirmamos, são relacionadas com sistemas de coordenadas, surgem porque é na **representação intrínseca** de um tensor - e não em seu componente - que reside a abstração de um conceito físico. Assim, para contornar tais dificuldades, usa-se o *Cálculo Exterior*, cujos elementos básicos são as **formas exteriores diferenciais**. Estas são quantidades que ocorrem sob o sinal de integral e, portanto, são as ferramentas essenciais para representar as **leis físicas**.

O objetivo deste livro é o de estudar esse *Cálculo Exterior* e aplicá-lo em alguns tópicos da Física. Ele é composto de duas partes. Na Parte 1, desenvolvemos o formalismo teórico em 5 Capítulos. Os dois primeiros Capítulos tratam, respectivamente, dos Espaços Vetoriais e dos Tensores. Os três Capítulos restantes são destinados ao desenvolvimento do Cálculo Exterior propriamente dito, ou seja, da Álgebra, da Diferenciação e da Integração Exterior. Para ajudar o leitor no entendimento dos assuntos tratados em cada Capítulo, apresentamos a solução de alguns exercícios e, no final, propomos cinco problemas para que ele teste o que aprendeu.

A Parte 2 do livro, composta de três Capítulos, é dedicada a três aplicações físicas do que foi desenvolvido na Parte 1: Mecânica, Termodinâmica e Eletrodinâmica.

Os autores agradecem aos professores Ruben Aldrovandi, do Instituto de Física da Universidade do Estado de São Paulo ($IF/UNESP$) e José Miguel

Veloso Martins, da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará ($FM/UFPA$), pelo esclarecimento sobre a aplicação da Derivada de Lie usada no Capítulo 6; ao professor Marcelo Otávio Caminha Gomes, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IF/USP) e Sra. Virgínia de Paiva Franceschelli, Bibliotecária do IF/USP, pelo acesso a alguns artigos usados neste livro; e a professora Cristina Vaz, da $FM/UFPA$, pelo auxílio na impressão do texto em TEX.

Por fim, queremos também agradecer a José Roberto Marinho, Editor da **Livraria da Física**, pela oportunidade que oferece aos alunos e professores brasileiros de colocar à disposição deles textos didáticos de autores também brasileiros.

Belém / São Paulo, abril de 2008

José Maria Filardo Bassalo - Secretário Executivo da Fundação Minerva

Mauro Sérgio Dorsa Cattani - Professor Titular do IFUSP

Sumário

Capítulo 1

1.1 Espaços Vetoriais

1.1.1 Definições e Propriedades

Definição 1.1.1.1. Um **espaço vetorial E** é um conjunto de elementos, chamados **vetores**, com uma operação de *adição (+)*, a qual para cada par de vetores **x** e **y** faz corresponder um vetor **x + y**, e uma operação de **multiplicação escalar**, a qual para cada vetor **x** e um número **a** faz corresponder um vetor **ax**. Essas operações devem satisfazer as seguintes propriedades:

1. x + y = y + x (comutatividade);
2. x + (y + z) = (x + y) + z (associatividade na adição);
3. x + 0 = 0 + x = x (elemento neutro da adição);
4. x + (- x) = 0 (elemento inverso da adição);
5. a (x + y) = a x + a y (distributividade por vetores);
6. (a + b) x = a x + b x (distributividade por números);
7. a (b x) = (a b) x (associatividade na multiplicação);
8. 1x = x (elemento neutro da multiplicação),

para quaisquer vetores **x**, **y** e **z** e os números **a** e **b**. Esses números são chamados de **escalares** e pertencem a um **corpo K**, que pode ser real (R) ou complexo (C).

Exemplos

Relacionamos abaixo, e sem fazer a demonstração, alguns exemplos de espaços vetoriais.

E1. Conjunto de números complexos ($a + bi$), com as operações de adição complexa e do produto por um número real;

E2. Conjunto de polinômios em uma variável $[P(x)]$, com coeficientes constituídos de números com as operações de adição ordinária de polinômios e a multiplicação de um polinômio por um escalar;

E3. Conjunto de todas as **n-uplas** [$x = (x_i)$, $y = (y_i)$, $z = (z_i)$, ... (i = 1, 2, ..., n)] de números com a adição entre elas definida por:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ x_2 + y_2, \ ... \ x_n + y_n) \ ,$$

e a multiplicação por um escalar **a** definida por:

$$a \ x = (a \ x_1, \ a \ x_2, \ ... \ a \ x_n) \ .$$

Definição 1.1.1.2. Um conjunto de vetores $\{e_i\}$ é dito:

a. Linearmente Dependente $(L.D.)$ se há um conjunto de escalares a_i, pertencente a um corpo **K**, não todos nulos, tal que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \; e_i \; = \; 0 \; ;$$

b. Linearmente Independente $(L.I.)$ se:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \; e_i \; = \; 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{a_i} \; = \; 0, \qquad \forall \; i \; .$$

A partir daqui, a fim de facilitar a manipulação da notação indicial, usaremos a **Notação de Einstein**:

Se num monômio aparecer repetido um índice, ficará subentendida uma soma relativa a esse índice: $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \; e_i \; = \; a_i \; e_i$.

Definição 1.1.1.3. Um conjunto de vetores $\{e_i\}$ é chamado um **gerador** de um espaço vetorial **E**, se cada vetor **x** desse espaço pode ser escrito na forma:

$$x \; = \; x^i \; e_i \; . \qquad (1.1.1.1a)$$

Definição 1.1.1.4 - Base. Um conjunto de vetores $\{e_i\}$ é chamado uma **base** de um espaço vetorial **E**, se ele é um conjunto de vetores *linearmente independentes* e *gera* o espaço **E**. O número desses vetores é chamado de **dimensão** de **E**.

Assim, em vista das definições acima, se **x** é um vetor de um espaço vetorial **E**, ele é representado pela equação (1.1.1.1a), na qual os $\mathbf{x}^i$ representam os **componentes** daquele vetor na base $\{e_i\}$. Demonstra-se que um espaço vetorial **E** tem uma infinidade de bases.

Mudança de Base. Seja um espaço vetorial **E** e sejam $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$ duas bases do mesmo, onde i = j = 1, 2, ..., n. Usando-se a expressão (1.1.1.1a), os vetores de uma dessas bases podem ser escritos em termos dos vetores da outra, da seguinte maneira:

$$\bar{e}_{\bar{j}} \; = \; s^i_{\bar{j}} \; e_i \; , \qquad (1.1.1.2a)$$

onde os coeficientes $s^i_{\bar{j}}$ são escalares. Analogamente, para a transformação inversa, vale:

$$e_i \; = \; s^{\bar{j}}_i \; \bar{e}_{\bar{j}} \; , \qquad (1.1.1.2b)$$

Entre os coeficientes $s^i_{\bar{j}}$ e $s^{\bar{j}}_i$ existem relações bem determinadas. Antes de obtermos essas relações, vamos introduzir o **símbolo de Kronecker**, que é assim definido:

$$\delta^m_n \;=\; \delta^{mn} \;=\; \delta_{mn} \;=\; 1, \qquad se \quad m \;=\; n,$$

$$\delta^m_n \;=\; \delta^{mn} \;=\; \delta_{mn} \;=\; 0, \qquad se \quad m \neq n \; . \qquad (1.1.1.3a)$$

Observe-se que esse símbolo apresenta a propriedade de trocar índices toda vez que o mesmo atuar sobre quantidades indiciadas. Por exemplo:

$$\delta^m_n \; a^m_r \;=\; a^n_r \qquad ou \qquad \delta^m_n \; a^r_m \;=\; a^r_n \; . \qquad (1.1.1.3b)$$

Agora, calculemos as relações referidas acima. Aplicando-se a expressão (1.1.1.2b) na (1.1.1.2a) e usando-se (1.1.1.3a,b), teremos:

$$\bar{e}_{\bar{j}} \;=\; s^i_{\bar{j}} \; (s^{\bar{k}}_i \; \bar{e}_{\bar{k}}) \;=\; (s^i_{\bar{j}} \; s^{\bar{k}}_i) \; \bar{e}_{\bar{k}} \; ,$$

$$\delta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \; \bar{e}_{\bar{k}} \;=\; (s^i_{\bar{j}} \; s^{\bar{k}}_i) \; \bar{e}_k \qquad \rightarrow \qquad (\delta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \;-\; s^i_{\bar{j}} \; s^{\bar{k}}_i) \; \bar{e}_{\bar{k}} \;=\; 0 \; .$$

Como os vetores $\bar{e}_{\bar{k}}$ são $L.I.$, a Definição 1.1.1.2a nos permite escrever que:

$$\delta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \;-\; s^i_{\bar{j}} \; s^{\bar{k}}_i \;=\; 0 \qquad \rightarrow \qquad \delta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \;=\; s^i_{\bar{j}} \; s^{\bar{k}}_i \; . \qquad (1.1.1.4a)$$

Componentes de um Vetor. Se x^i e $\bar{x}^{\bar{j}}$ forem, respectivamente, os componentes de um vetor $\mathbf{x}$ nas bases $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$, então, de acordo com a expressão (1.1.1.1a), teremos:

$$x \;=\; x^i \; e_i \;=\; \bar{x}^{\bar{j}} \; \bar{e}_{\bar{j}} \; . \qquad (1.1.1.1b)$$

Agora, usando-se as expressões (1.1.1.2a,b), virá:

$$x^i \; e_i \;=\; \bar{x}^{\bar{j}} \; s^i_{\bar{j}} \; e_i \qquad \rightarrow \qquad (x^i \;-\; \bar{x}^{\bar{j}} \; s^i_{\bar{j}}) \; e_i \;=\; 0 \; ,$$

e:

$$x^i \; s^{\bar{j}}_i \; \bar{e}_{\bar{j}} \;=\; \bar{x}^{\bar{j}} \; \bar{e}_{\bar{j}} \qquad \rightarrow \qquad (\bar{x}^{\bar{j}} \;-\; x^i \; s^{\bar{j}}_i) \; \bar{e}_{\bar{j}} \;=\; 0 \; .$$

Como os vetores $\bar{e}_{\bar{j}}$ são $L.I.$, então, usando-se a Definição 1.1.1.2b, virá:

$$x^i \;=\; s^i_{\bar{j}} \; \bar{x}^{\bar{j}}, \qquad \bar{x}^{\bar{j}} \;=\; s^{\bar{j}}_i \; x^i \; . \qquad (1.1.1.5a,b)$$

Comparando-se as expressões (1.1.1.2a,b) e (1.1.1.5a,b) verifica-se que os componentes $(x^i, \; \bar{x}^{\bar{j}})$ se transformam **contravariantemente** aos vetores da base $(\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\})$. Em vista disso, esses componentes se denominam **componentes contravariantes**.

Exercícios (1.1.1)

EX.1.1.1.1 Encontre a relação entre os coeficientes $s_{\bar{j}}^{i}$ e $s_{i}^{\bar{j}}$, partindo da expressão (1.1.1.2b) e usando a expressão (1.1.1.2a).

Solução

Aplicando-se a expressão (1.1.1.2a) na (1.1.1.2b) e usando-se (1.1.1.3a,b), teremos:

$$e_i \ = \ s_i^{\bar{j}} \ s_{\bar{j}}^k \ e_k \quad \rightarrow \quad \delta_i^k \ e_k \ = \ s_i^{\bar{j}} \ s_{\bar{j}}^k \ e_k \quad \rightarrow \quad (\delta_i^k \ - \ s_i^{\bar{j}} \ s_{\bar{j}}^k) \ e_k \ = \ 0 \ .$$

Como os vetores e_k são $L.I.$, a Definição 1.1.1.2a nos permite escrever que:

$$\delta_i^k \ = \ s_i^{\bar{j}} \ s_{\bar{j}}^k \ . \qquad (1.1.1.4b)$$

1.1.2 Espaços Duais

Definição 1.1.2.1. Sejam (**x, y, z, ...**) e (**a, b, c, ...**), respectivamente, vetores de um espaço vetorial **E** (de base $\{e_i\}$), e elementos de um corpo **K**, sobre o qual **E** é definido. Consideremos as funções (**f, g, h, ...**), denominadas de **funções lineares**, de modo que tenhamos:

1. $f \ (x) \ = \ a, \qquad f \ (e_i) \ = \ a_i \ , \qquad (1.1.2.1a)$
2. $f \ (x \ + \ y) \ = \ f \ (x) \ + \ f \ (y) \ , \qquad (1.1.2.1b)$
3. $f \ (b \ x) \ = \ b \ [f \ (x)] \ , \qquad (1.1.2.1c)$
4. $(f \ + \ g) \ (x) \ = \ f \ (x) \ + \ g \ (x) \ , \qquad (1.1.2.1d)$
5. $(c \ f) \ (x) \ = \ c \ [f \ (x)] \ . \qquad (1.1.2.1e)$

Nestas condições, as funções lineares (**f, g, h, ...**) formam um espaço vetorial E^*, chamado o **dual** de **E** (que tem a mesma dimensão **n** de **E**), e os seus elementos são denominados de **formas lineares** ou **covetores**.

Definição 1.1.2.2 - Base Dual. Consideremos uma base $\{e_i\}$ do espaço vetorial **E**. Portanto, segundo a expressão (1.1.1.1a), se $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, então:

$$x \ = \ x^i \ e_i \ .$$

Seja, ainda, um conjunto de formas lineares $\{\varepsilon^i \ (x)\} \in \mathbf{E}^*$, tal que:

$$\varepsilon^i \ (x) \ (e_j) \ = \ \delta_j^i \ . \qquad (1.1.2.2)$$

Nessas condições, o conjunto $\{\varepsilon^i \ (x)\}$ é definido como a **base dual** de E^*.

Mudança de Base Dual. Consideremos no espaço **E** duas bases $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$ e, no espaço dual E^*, as duas bases duais correspondentes: $\{\varepsilon^i\ (x)\}$ e $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$. Conforme vimos anteriormente, a mudança de base dada pelas expressões (1.1.1.2a,b):

$$\bar{e}_{\bar{j}} \ = \ s^i_{\bar{j}}\ e_i\ , \qquad e_i \ = \ s^{\bar{j}}_i\ \bar{e}_{\bar{j}}\ ,$$

induz as seguintes transformações nos componentes $\mathbf{x}^i$ do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, dadas pelas expressões (1.1.1.5a,b):

$$x^i \ = \ s^i_{\bar{j}}\ \bar{x}^{\bar{j}}\ , \qquad \bar{x}^{\bar{j}} \ = \ s^{\bar{j}}_i\ x^i\ .$$

Agora, vejamos como se transformam as bases duais $\{\varepsilon^i\ (x)\}$ e $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, então, segundo a expressão (1.1.1.1b), teremos:

$$x \ = \ x^i\ e_i \ = \ \bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{e}_{\bar{j}}\ .$$

Multiplicando-se à esquerda as expressões por $\{\varepsilon^i\ (x)\}$ ($\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$) e usando-se a expressão (1.1.2.2), virá:

$$\varepsilon^j\ (x)\ x \ = \ \varepsilon^j\ (x)\ (x^i\ e_i) \ = \ x^i\ \varepsilon^j\ (x)\ (e_i) \ = \ x^i\ \delta^j_i \ = x^j\ , \qquad (1.1.2.3a)$$

$$\bar{\varepsilon}^{\bar{k}}\ (x)\ x \ = \ \bar{\varepsilon}^{\bar{k}}\ (x)\ (\bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{e}_{\bar{j}}) \ = \ \bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{\epsilon}^{\bar{k}}\ (x)\ (\bar{e}_{\bar{j}}) \ = \ \bar{x}^{\bar{j}}\ \delta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \ = \bar{x}^{\bar{k}}\ . \qquad (1.1.2.3b)$$

Substituindo-se esses dois resultados nas expressões (1.1.1.5a,b), teremos:

$$\varepsilon^i\ (x) = \ s^i_{\bar{j}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ , \qquad \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x) \ = \ s^{\bar{j}}_i\ \varepsilon^i\ (x)\ . \qquad (1.1.2.4a,b)$$

Comparando-se as expressões (1.1.1.2a,b) e (1.1.2.4a,b), verifica-se que as bases duais ($\{\varepsilon^i\ (x)\}$, $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$) se transformam **contravariantemente** em relação às bases ($\{e_i\}$, $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$).

Componentes de um Covetor. Se x^i e $\bar{x}^{\bar{j}}$ forem, respectivamente, os componentes de um vetor $\mathbf{x}$ nas bases $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$, então, de acordo com a expressão (1.1.1.1b), teremos:

$$x \ = \ x^i\ e_i \ = \ \bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{e}_{\bar{j}}\ .$$

Seja $\mathbf{f\ (x)}$ uma forma genérica de E^*. Assim, usando-se a Definição 1.1.2.1 e as expressões (1.1.2.1a,c) e (1.1.2.3a) nas expressões acima, resultará:

$$f\ (x) \ = \ f\ (x^i\ e_i) \ = \ x^i\ f\ (e_i) \ = \ f_i\ \varepsilon^i\ (x)\ , \qquad (1.1.2.5a)$$

$$f\ (x) \ = \ f\ (\bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{e}_{\bar{j}}) \ = \bar{x}^{\bar{j}}\ f\ (\bar{e}_{\bar{j}}) \ = \ \bar{f}_{\bar{j}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ , \qquad (1.1.2.5b),$$

$$f\ (x)\ =\ f_i\ \varepsilon^i\ (x)\ =\ \bar{f}_{\bar{j}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ , \qquad (1.1.2.5c),$$

onde f_i e $\bar{f}_{\bar{j}}$ representam, respectivamente, os componentes de **f** nas bases duais $\{\varepsilon^i\ (x)\}$ e $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$.

Agora, vejamos a relação entre esses componentes. Substituindo-se na expressão (1.1.2.5c) as expressões (1.1.2.4a,b), teremos:

$$f_i\ \varepsilon^i\ (x)\ =\ \bar{f}_{\bar{j}}\ s_i^{\bar{j}}\ \varepsilon^i\ (x) \qquad \rightarrow \qquad (f_i\ -\ \bar{f}_{\bar{j}}\ s_i^{\bar{j}})\ \varepsilon^i\ (x)\ =\ 0\ ,$$

$$f_i\ s_{\bar{j}}^i\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ =\ \bar{f}_{\bar{j}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x) \qquad \rightarrow \qquad (\bar{f}_{\bar{j}}\ -\ f_i\ s_{\bar{j}}^i)\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ =\ 0\ .$$

Como os vetores $\varepsilon^i\ (x)$ e $\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)$ são $L.I.$ (Exercício 1.1.2.1), as expressões acima resultam em:

$$f_i\ =\ s_i^{\bar{j}}\ \bar{f}_{\bar{j}}\ , \qquad \bar{f}_{\bar{j}}\ =\ s_{\bar{j}}^i\ f_i\ . \qquad (1.1.2.6a,b)$$

Comparando-se as equações (1.1.1.2a,b) e (1.1.2.6a,b), vê-se que os componentes do covetor **f** e os vetores da base de **E** seguem a mesma **lei de covariança**. E, em vista disso, esses componentes denominam-se de **componentes covariantes**.

Exercícios (1.1.2)

EX.1.1.2.1 Demonstre que os vetores $\varepsilon^i\ (x)$, que formam a base do espaço vetorial dual E^*, são $L.I.$

Solução

Consideremos a seguinte igualdade:

$$a_i\ \varepsilon^i\ (x)\ (x)\ =\ 0\ ,$$

onde $a_i \in \mathbf{K}$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Ora, a igualdade acima permanece válida também para os vetores e_j, que formam uma base qualquer de **E**. Ou seja:

$$a_i\ \varepsilon^i\ (x)\ (e_j)\ =\ 0\ .$$

Usando-se a expressão (1.1.2.2), virá:

$$a_i\ \delta_j^i\ =\ a_j\ =\ 0, \qquad \forall\ j\ .$$

Usando-se a Definição 1.1.1.2b, o resultado acima demonstra que os vetores $\varepsilon^i\ (x)$ são $L.I.$

1.1.3 Espaços Vetoriais Euclidianos

Definição 1.1.3.1 - Produto Escalar. Seja **E** um espaço vetorial n-dimensional sobre um corpo **K**. Entre os vetores (**x, y, z, ...**) de **E** definimos uma lei de composição interna, denominada **produto escalar** denotada por (,), com as seguintes propriedades:

1. $(x,\ y)\ =\ (y,\ x)^*$, [(*) indica complexo conjugado]
2. $(x,\ y\ +\ z)\ =\ (x,\ y)\ +\ (x,\ z)$,
3. $(x, ay)\ =\ a\ (x,\ y)$,

3'. $(ax,\ y)\ =\ a^*\ (x,\ y)$,

4. $\forall x, (x,\ y)\ =\ 0 \quad \rightarrow y\ =\ 0$,
5. $(x,\ x) \geq 0$, com a igualdade conservando-se somente para x = 0.

Todo espaço vetorial com produto escalar definido acima é dito **propriamente euclidiano**. Se (5) for estritamente positivo [$(x,\ x)\ >\ 0$], então esse espaço é chamado **estritamente euclidiano**.

Produto Escalar de Vetores da Base. Consideremos dois vetores **x** e **y** e uma base $\{e_i\}$ de um espaço vetorial real **E**. Usando-se a expressão (1.1.1.1a) e a Definição 1.1.3.1, teremos:

$$(x,\ y)\ =\ (x^i\ e_i, y^j\ e_j)\ = x^i\ y^j\ (e_i,\ e_j)\ .$$

Definindo-se:

$$g_{ij}\ =\ (e_i,\ e_j)\ , \qquad (1.1.3.1)$$

o produto escalar dos vetores **x** e **y** será dado por:

$$(x,\ y)\ =\ g_{ij}\ x^i\ y^j\ . \qquad (1.1.3.2)$$

A expressão (1.1.3.1) e a Definição 1.1.3.1 mostram que:

1. $g_{ij}\ =\ g_{ji}$,
2. $det\ |\ g_{ij}\ | \neq 0$.

Definição 1.1.3.2. Dois vetores não nulos (**x**, **y**) de um espaço vetorial **E** são ditos **ortogonais**, se:

$$(x,\ y)\ =\ 0, com x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\ .$$

Definição 1.1.3.3. Chama-se **norma** de um vetor **x** ao seguinte produto escalar:

$$(x,x)\ = (x)^2\ =\ N(x)\ =\ g_{ij}\ x^i\ x^j\ . \qquad (1.1.3.3)$$

Definição 1.1.3.4. Chama-se de **módulo** ou **comprimento** de um vetor **x** a expressão:

$$mod\ (x)\ =\ |\ x\ |\ =\ \sqrt{(x,\ x)}\ =\ \sqrt{g_{ij}\ x^i\ x^j}\ . \qquad (1.1.3.4)$$

Definição 1.1.3.5. Chama-se de **vetor unitário** o vetor cujo módulo ou comprimento é unitário:

$$|\ x\ |\ =\ 1\ . \qquad (1.1.3.5)$$

Base Ortonormada. Quando os vetores de uma base $\{e_i\}$ de um espaço vetorial real **E** são **unitários** e **ortogonais**, essa base é dita **ortonormada**, e é dada por:

$$(e_i, e_j)\ =\ \delta_{ij}\ . \qquad (1.1.3.6)$$

Desigualdade de Schwarz. Sejam dois vetores **x** e **y** pertencentes a um espaço vetorial propriamente euclidiano. Seja um terceiro vetor **z** $= \mathbf{x} + \lambda\ \mathbf{y}$ desse espaço, sendo λ um escalar não nulo. A norma desse vetor será:

$$(z, z)\ =\ (x\ +\ \lambda\ y, x\ +\ \lambda\ y) = (x)^2\ +\ 2\ \lambda\ (x,\ y)\ +\ \lambda^2\ y^2 \geq 0\ .$$

Como essa desigualdade se verifica para quaisquer que sejam os vetores, então, pela teoria das equações algébricas, o trinômio em λ terá o seguinte discriminante:

$$\Delta\ = 4\ (x,\ y)^2\ -\ 4.x^2\ y^2 \leq 0 \to (x,\ y)^2 \leq x^2\ .\ y^2\ .$$

Da relação acima, segue a famosa **Desigualdade de Schwarz**:

$$|\ (x,\ y)\ \ | \leq |\ \ x\ \ |\ .\ |\ \ y\ \ |\ . \qquad (1.1.3.7).$$

Ângulo entre dois vetores. Sejam **x** e **y** dois vetores de um espaço vetorial propriamente euclidiano. Usando-se a **Desigualdade de Schwarz**, teremos:

$$\frac{|\ (x,\ y)\ |}{|\ x\ |\ .\ |\ y\ |} \leq 1 \qquad \to |\ \frac{(x,\ y)}{|\ x\ |\ .\ |\ y\ |}\ \ | \leq 1\ .$$

Como o cosseno de um ângulo varia entre +1 e -1, então a desigualdade acima permite escrever que:

$$\frac{(x,\ y)}{|x\ |\ .\ |y\ |}\ =\ cos\ \theta\ , \qquad (1.1.3.8)$$

onde θ é, por definição, o ângulo entre os vetores **x** e **y**.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. Sabe-se que um espaço vetorial tem uma infinidade de bases. Assim, se tivermos uma base não ortonormada é possível, a partir dela, construir uma que seja ortonormada, da seguinte maneira. Se $\{e'_i\}$ for uma base não ortonormada, o **processo de Gram-Schmidt** constrói, inicialmente, uma base ortogonal, subtraindo de cada vetor e'_k seu componente na direção do vetor anteriormente ortogonalizado. Então, se fizermos:

$$e_1 \;=\; e'_1 \ ,$$

e:

$$e_2 \;=\; e'_2 \;+\; a_1\, e_1, \qquad (a_1 \;=\; -\; \tfrac{(e_1,\; e'_2)}{(e_1,\; e_1)}) \qquad \rightarrow (e_1,\; e_2) \;=\; 0\ .$$

Continuamos com esse mesmo processo até esgotar os vetores da base dada. Por fim, para normalizar esses novos vetores e torná-los ortonormados, basta dividir cada um deles por seu comprimento.

Componentes Contravariantes e Covariantes de um Vetor numa Base. Seja $\{e_i\}$ a base de um espaço vetorial $\mathbf{E}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, então, segundo a expressão (1.1.1.1a), teremos:

$$x \;=\; x^i\; e_i\ , \qquad (1.1.3.9a)$$

onde x^i representa o **componente contravariante** de $\mathbf{x}$ na base $\{e_i\}$, conforme já vimos. Nessa mesma base, o **componente covariante** x_i de $\mathbf{x}$ é *definido* da seguinte maneira:

$$x_j \;=\; (x,\; e_j)\ . \qquad (1.1.3.9b)$$

Para determinarmos a relação entre esses dois tipos de componentes, vamos usar as expressões (1.1.3.1), (1.1.3.9a,b) e a Definição 1.1.3.1. Assim, teremos:

$$x_j \;=\; (x^i e_i,\; e_j) \;=\; x^i\; (e_i,\; e_j)\ ,$$

$$x_j \;=\; g_{ij}\; x^i\ , \qquad (1.1.3.9c)$$

expressão que mostra ser g_{ij} um abaixador de índice.

Definição de g^{ij}. Considerando-se a equação (1.1.3.9c) como um sistema de equações lineares, a **Regra de Cramer** permite escrever que:

$$x^i \;=\; \tfrac{G^{ij}}{\mid\, g_{ij}\, \mid}\; x_j\ , \qquad (1.1.3.10a)$$

onde G^{ij} é o cofator de g_{ij}, que é obtido multiplicando-se o termo $(-1)^{i\,+\,j}$ pelo determinante (n-1) $\times$ (n-1), este formado pela eliminação, na matriz (G), da linha e coluna que se cruzam em g_{ij}.

Definindo-se:

$$g^{ij} \;=\; \frac{G^{ij}}{\mid g_{ij} \mid} \;,$$

a expressão (1.1.3.10a) ficará:

$$x^i \;= g^{ij} \; x_j \;, \qquad (1.1.3.10b)$$

expressão que mostra ser g^{ij} um levantador de índice.

Agora, determinemos a relação entre g^{ij} e g_{ij}. Usando-se as expressões (1.1.3.9c) e (1.1.3.10b), podemos escrever que:

$$x^i \;=\; g^{ij}(g_{jk} \; x^k) \to \delta^i_k \; x^k \;=\; g^{ij} \; g_{jk} \; x^k \to (\delta^i_k \;-\; g^{ij} \; g_{jk}) \; x^k \;=\; 0 \;.$$

Como a terceira expressão acima se verifica para qualquer que seja x^k, teremos:

$$g^{ij} \; g_{jk} \;=\; \delta^i_k \;, \qquad (1.1.3.11)$$

expressão essa que indica que os **g** são recíprocos.

Produto Escalar em Termos de Componentes Co- e Contravariantes. Seja $\{e_i\}$ a base de um espaço vetorial **E** e **x**, **y** $\in$ **E**. Usando-se a Definição 1.1.3.1 e os resultados anteriores, o produto escalar (x, y) será dado por:

$$(x,\; y) \;=\; (x^i e_i,\; y^j e_j) \;=\; x^i \; y^j \; (e_i,\; e_j) \;= g_{ij} x^i \; y^j \;, \qquad (1.1.3.12a)$$

$$(x,\; y) \;=\; x_i \; y^j \;=\; x^i \; y_j \;. \qquad (1.1.3.12b)$$

Produto Interno e Dualidade. O produto escalar de dois vetores **x** e **y**, pertencentes a um espaço vetorial **E**, apresentado na Definição 1.1.3.1, define uma **função bilinear (x, y)**. Assim, para um fixado vetor **x**, essa função bilinear define uma função linear de **y**, pertencente ao espaço dual E^*, função essa que denotaremos por $\tilde{\mathbf{x}}$. Portanto, a transformação $\mathbf{x} \to \tilde{\mathbf{x}}$ representa a aplicação **G**: $\mathbf{E} \to E^*$, isto é: $\tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{G(x)}$. Usando-se essa transformação, o produto escalar (x, y) também é expresso pelo **produto interno x . y** ("dot product"), definido por:

$$(\mathrm{x,\; y}) = \mathrm{x \;.\; y} = \tilde{\mathrm{x}}\; \mathrm{y} \;. \qquad (1.1.3.13)$$

Vejamos como esse produto interno é representado em termos de componentes. Sejam $\{e_i\}$ e $\{\varepsilon^i \; (x)\}$ as bases respectivas de **E** e $\mathbf{E}^*$. Sendo $\tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{G(x)}$ e considerando-se essas bases, podemos representar essa aplicação **G** por uma matriz g_{ij}:

$$\tilde{\mathrm{x}}_i \;=\; g_{ij} \; x^j \;. \qquad (1.1.3.14a)$$

Assumindo-se a expressão acima como um sistema de equações lineares, a **Regra de Cramer** permite escrever que:

$$x^j \;=\; \frac{G^{ij}}{\mid g_{ij} \mid}\, \tilde{\mathrm{x}}_i \;, \qquad (1.1.3.14b)$$

onde G^{ij} é o cofator de g_{ij}. (Veja-se a definição de cofator dada anteriormente.)

Definindo-se:

$$g^{ij} \;=\; \frac{G^{ij}}{\mid g_{ij} \mid} \;,$$

a expressão (1.1.3.14b) ficará:

$$x^i \;= g^{ij}\, \tilde{\mathrm{x}}_j \;. \qquad (1.1.3.14c)$$

Observe-se que essas matrizes g_{ij} (abaixadora de índice) e g^{ij} (levantadora de índice), conforme vimos, e que são recíprocas, podem ser reduzidas, por uma mudança de bases, a uma forma diagonal onde os elementos g_{ii} e g^{ii} (aqui, não vale a *convenção de Einstein*) são + 1 ou - 1. Neste caso, a base é denominada de **semi-ortonormada**, e, para a mesma, define-se o conceito de **assinatura - s** que é dado pela diferença entre o número (P) de termos positivos e o número (N) de termos negativos, ou seja:

$$s \;=\; P \;-\; N \;=\; (n \;-\; N) \;-\; N \;=\; n \;-\; 2N \qquad \to N \;=\; \frac{(n-s)}{2} \;,$$

onde **n** = P + N, é a dimensão do espaço vetorial. Ainda para esse tipo de base, e considerando-se que g g' = 1 ($\mid g' \mid \mid g \mid \;=\; 1$) , teremos:

$$\frac{\mid g \mid}{g} \;=\; \frac{\mid g' \mid}{g'} \;=\; (-1)^N \;=\; (-1)^{\frac{(n-s)}{2}} \;, \qquad (1.1.3.15)$$

onde **g** = $det\ (g_{ij})$ e **g'** = $det\ (g^{ij})$. É oportuno observar que **s** não depende da base na qual a redução é feita, conforme demonstrou o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897).

Agora, depois dessa digressão sobre g_{ij} (g^{ij}), voltemos ao produto interno. Usando-se as expressões (1.1.1.1a), (1.1.2.2), (1.1.2.3) e (1.1.3.14a), a expressão (1.1.3.13) ficará:

$$x \;.\; y \;= \tilde{\mathrm{x}}\; y \;= \tilde{\mathrm{x}}_i\; \varepsilon^i\; (x)\; y^j\; e_j = \tilde{\mathrm{x}}_i\; y^j\; \delta^j_i = \tilde{\mathrm{x}}_i\; y^i \;=\; g_{ij}\; x^j\; y^i \;. \qquad (1.1.3.16)$$

Comparando-se as expressões (1.1.3.12a,b) e (1.1.3.14a,c) verifica-se que x^i e $\tilde{\mathbf{x}}_i$ representam, respectivamente, os componentes contra- e covariante de **x**.

Exercícios (1.1.3)

EX.1.1.3.1 Demonstre a **Desigualdade Triangular**:

$$mod(x \;+\; y) \leq mod\ (x) \;+\; mod\ (y) \;.$$

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Usando-se a Definição 1.1.3.1 e considerando-se **K** = **R**, virá:

$$(x\ +\ y)^2\ =\ [(x\ +\ y),\ (x\ +\ y)]\ =\ (x,\ x)\ +\ 2\ (x,\ y)\ +\ (y,\ y)\ .$$

Majorando-se o segundo membro da expressão acima com (x, y) $\leq$ mod (x) . mod (y) e considerando-se a Definição 1.1.3.4, teremos:

$$(x\ +\ y)^2\ =\ [mod\ (x\ +\ y)]^2 \leq [mod\ (x)]^2\ +\ 2\ mod\ (x)\ .\ mod\ (y)\ +\ [mod\ (y)]^2\ ,$$

$$[mod\ (x\ +\ y)]^2 \leq [mod\ (x)\ +\ mod(y)]^2 \qquad \rightarrow \qquad mod\ (x\ +\ y) \leq mod\ (x)\ +\ mod\ (y)\ ,$$

o que demonstra a **Desigualdade Triangular**.

1.1.4 Transformações ou Operadores Lineares

Definição 1.1.4.1. Uma aplicação **T** de um espaço vetorial n-dimensional **E** em si próprio (T: E $\rightarrow$ E) é dita uma **transformação (operador) linear** se faz corresponder cada vetor **x** de **E** no vetor **Tx**, tal que:

1. $T(x+y)\ =\ Tx\ +\ Ty\ ,$ (1.1.4.1a)
2. $T(a\ x)\ =\ a\ Tx\ ,$ (1.1.4.1b)

para **x, y** $\in$ **E** e **a** $\in$ **K**.

Exemplos

E1. **Operador Identidade I** - $Ix\ =\ x, \forall\ x\ ;$

E2. **Operador Projeção** - $P_ix\ =\ (e_i,\ x)\ e_i\ = x_i\ e_i\ .$

Representação de um Operador. Seja **T** um operador linear que atua em um espaço vetorial **E**. Esse operador poderá ser **representado** nesse espaço através de seu efeito sobre a base $\{e_i\}$ do mesmo. Assim, segundo (1.1.1.1a), temos:

$$T\ e_i\ =\ e_j\ t_i^j\ , \qquad (i, j\ =\ 1, 2, 3, ..., n) \qquad (1.1.4.2)$$

onde $\mathbf{t}_i^j$ representam os elementos de uma matriz $n\ \times\ n$. A partir daqui, o índice superior representa o índice de linha, e o inferior o de coluna, para estar de acordo com a definição de produto de matrizes, que daremos mais adiante. Esses elementos matriciais são calculados da seguinte maneira (numa base ortonormada):

$$(e_j,\ T\ e_i)\ =\ (e_j,\ e_k\ t_i^k)\ =\ t_i^k\ (e_j,\ e_k)\ =\ t_i^k\ \delta_k^j\ ,$$

$$t_i^j \;=\; (e_j,\; T\; e_i)\;. \qquad (1.1.4.3)$$

Álgebra de Operadores

1. SOMA - Dados dois operadores **T** e **U**, a **soma** entre eles é definida por:

$$(T \;+\; U)(x) \;=\; T(x) \;+\; U(x)\;.$$

Em termos matriciais, usando-se (1.1.4.2) e (1.1.4.3), teremos:

$$(T \;+\; U)_i^j \;=\; (e_j,\; (T \;+\; U)\; e_i) \;=\; (e_j,\; T\; e_i \;+\; U\; e_i) \;=\; (e_j,\; T\; e_i) \;+\; (e_j,\; U\; e_i)\;,$$

$$(T \;+\; U)_i^j \;=\; t_i^j \;+\; u_i^j\;. \qquad (1.1.4.4)$$

2. PRODUTO - Dados dois operadores **T** e **U**, o **produto** entre eles é definido por:

$$(TU)(x) \;=\; T\;[U(x)], \qquad (UT)(x) \;=\; U\;[T(x)] \qquad \rightarrow \qquad U\,T \neq T\,U\;.$$

Em termos matriciais, usando-se (1.1.4.2) e (1.1.4.3), teremos:

$$(TU)_i^j \;=\; (e_j,\; (TU)\; e_i) \;=\; (e_j,\; T(U\; e_i)) \;=\; (e_j, T\;(e_k\; u_i^k)) \;=\; (e_j,\; T\; e_k)\; u_i^k\;,$$

$$(TU)_i^j \;=\; t_k^j\; u_i^k\;. \qquad (1.1.4.5)$$

3. TRAÇO - Dado um operador **T**, representado na forma matricial t_i^j, chama-se de **traço** a soma dos elementos da diagonal principal:

$$tr(T) \;=\; t_i^i\;. \qquad (1.1.4.6)$$

4. TRANSPOSTA - Dado um operador **T**, representado na forma matricial t_i^j, chama-se de **transposta** a matriz obtida trocando-se a linha por coluna:

$$(t_i^j)^t \;=\; t_j^i\;. \qquad (1.1.4.7)$$

4.1. SIMETRIA (ANTISSIMETRIA) - Um operador **T** é denominado **simétrico** (**antissimétrico**) se, respectivamente:

$$T^t \;=\; T, \qquad T^t \;=\; -\,T\;. \qquad (1.1.4.8a,b)$$

5. ADJUNTO - Dado um operador **A**, chama-se de **adjunto** $\mathbf{A}^\dagger$ o operador definido por:

$$(A\; x,\; y) \;=\; (x,\; A^\dagger\; y)\;. \qquad (1.1.4.9a)$$

Em termos matriciais, usando-se a Definição 1.1.3.1 (propriedade 1) e a expressão (1.1.4.3), teremos:

$$(A\ e_i,\ e_j)\ =\ (e_j,\ A\ e_i)^*\ =\ (e_i,\ A^\dagger\ e_j)\ ,$$

$$(a_i^j)^*\ =\ (a^\dagger)_j^i\ . \qquad (1.1.4.9b)$$

6. NORMAL - Um operador **N** é denominado de **normal** se ele comuta com seu adjunto:

$$N\ N^\dagger\ =\ N^\dagger\ N\ . \qquad (1.1.4.10)$$

7. HERMITIANO - Quando um operador **H** é igual ao seu adjunto, ele é denominado **hermitiano** ou **auto-adjunto**:

$$H^\dagger\ =\ H\ . \qquad (1.1.4.11)$$

8. UNITÁRIO - Quando um operador adjunto $U^\dagger$ é igual ao seu inverso, ele é denominado de **unitário**:

$$U^\dagger\ =\ U^{-\ 1}\ . \qquad (1.1.4.12)$$

9. ORTOGONAL - Um operador **O** num espaço vetorial real é denominado **ortogonal**, se:

$$o_j^i\ o_k^i\ =\ \delta_{jk} \qquad ou \qquad o_j^i\ o_j^k\ =\ \delta_{ik}\ . \qquad (1.1.4.13a,b)$$

10. DETERMINANTE - Dado um operador **T**, representado na forma matricial t_i^j, o seu **determinante** é dado por:

$$det\ (T)\ =\ |\ t_i^j\ |\ =\ t_i^j\ T_i^j\ , \qquad (1.1.4.14a)$$

onde T_i^j é o cofator de t_i^j. (Veja-se a definição de cofator dada anteriormente.) Conforme veremos no Capítulo 2, se (A) e (B) são duas matrizes, então:

$$det\ (A\ B)\ =\ det\ (A)\ .\ det\ (B)\ . \qquad (1.1.4.14b)$$

Transformação de Similaridade. Seja **T** um operador linear definido num espaço vetorial **E** e sejam $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_j\}$ duas bases do mesmo, relacionadas pela expressão (1.1.1.2a). Sendo t_i^j a representação de **T** na base **e**, determinemos sua representação na base $\bar{e}$. Aplicando-se o operador **T** na expressão (1.1.1.2a) e usando-se a expressão (1.1.4.2), teremos:

$$T\ \bar{e}_j\ =\ T\ e_i\ s_j^i\ =\ (T\ e_i)\ s_j^i\ ,$$

$$\bar{e}_k \; \bar{t}^k_j = \; e_m \; t^m_i \; s^i_j \quad \rightarrow \quad \bar{t}^k_j \; e_m \; s^m_k = \; e_m \; t^m_i \; s^i_j \quad \rightarrow \quad e_m \; (\bar{t}^k_j \; s^m_k \; - \; t^m_i \; s^i_j) \; = \; 0 \; .$$

Como e_m são vetores $L.I.$, a terceira expressão anterior permite escrever que:

$$s^m_k \; \bar{t}^k_j \;\; = \;\; t^m_i \; s^i_j \; .$$

Usando-se a expressão (1.1.4.5), teremos:

$$(S \; \bar{T})^m_j \;\; = \;\; (TS)^m_j \; .$$

Em notação compacta matricial, teremos:

$$(S) \; (\bar{T}) \;\; = \;\; (T) \; (S) \qquad \rightarrow \qquad (S)^{-\,1} \; (S) \; (\bar{T}) \;\; = \;\; (S)^{-\,1} \; (T) \; (S) \; ,$$

$$(\bar{T}) \;\; = \;\; (S)^{-\,1} \; (T) \; (S) \; . \qquad (1.1.4.15)$$

Diagonalização de Operadores: Autovetores e Autovalores. Seja **T** um operador linear. Se **x** é um vetor não nulo e **t** é um escalar, tal que:

$$T \; x \;\; = \;\; t \; x, \qquad (1.1.4.16a)$$

então dizemos que **x** é um **autovetor** ("eigenvector") e **t** um **autovalor** ("eigenvalue") do operador **T**.

Cálculo de Autovetores e Autovalores. Em termos de componentes, a expressão (1.1.4.16a) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$(T^i_j \;\; - \;\; t \; \delta^i_j) \; x^j \;\; = \;\; 0, \qquad (1.1.4.16b)$$

onde δ^i_j é a matriz identidade **I**. Essa equação (1.1.4.16b) só tem solução não nula para **x** se, e somente se:

$$det(T \;\; - \;\; t \; I) \;\; = \;\; 0 \; . \qquad (1.1.4.16c)$$

A equação (1.1.4.16c) é uma equação algébrica de grau **n** na incógnita **t** e é denominada de **equação característica** ou **equação secular**. As raízes dessa equação são os **autovalores t** de **T**. Se essas raízes (autovalores) forem todas distintas, então a expressão (1.1.4.16b) dará **n** autovetores linearmente independentes. Se existirem **j** ($j \; < \; n$) raízes iguais ($t_1 \;\; = \;\; t_2 \;\; = \;\; ... \;\; = \;\; t_j$), então existirão **j** autovetores distintos para esse mesmo autovalor. Nesse caso, diz-se que há **degenerescência**. Com relação às **n** raízes ($t_1, \; t_2, \; ... \; t_n$) (distintas ou não), podemos demonstrar que:

$$(\text{autovalores de } T^t) = (\text{autovalores de T}), \qquad (1.1.4.17a)$$

$$det\ (T)\ =\ t_1.\ t_2.\ ...\ t_n\ , \qquad (1.1.4.17b)$$

$$tr\ (T)\ =\ t_1\ +\ t_2\ +\ ...\ +\ t_n\ . \qquad (1.1.4.17c)$$

Exercícios 1.1.4

EX.1.1.4.1 Se **S** é um operador que transforma uma base ortonormada em uma outra também ortonormada de um espaço vetorial real (**E**), demonstre que:

a) A matriz (S) é ortogonal; b) $(S)^t\ =\ (S)^{-\ 1}$; c) Não existe diferença entre índices contra- e covariante.

Solução

a) Consideremos as bases ortonormadas de **E**, isto é:

$$(\bar{e}_{\bar{i}},\ \bar{e}_{\bar{j}})\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}, \qquad (e_k,\ e_r)\ =\ \delta_{kr}\ .$$

Usando-se a expressão (1.1.1.2a), na primeira equação acima, e usando-se a segunda, teremos:

$$(\bar{e}_{\bar{i}},\ \bar{e}_{\bar{j}})\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}\ =\ (s_{\bar{i}}^{k}\ e_k,\ s_{\bar{j}}^{r}\ e_r)\ =\ s_{\bar{i}}^{k}\ s_{\bar{j}}^{r}\ (e_k,\ e_r)\ = s_{\bar{i}}^{k}\ s_{\bar{j}}^{r}\ \delta_{kr}\ =\ s_{\bar{i}}^{k}\ s_{\bar{j}}^{k}\ ,$$

$$s_{\bar{i}}^{k}\ s_{\bar{j}}^{k}\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}\ ,$$

que mostra que (S) é ortogonal, conforme a expressão (1.1.4.13a).

b) Partindo-se da expressão anterior, virá:

$$s_{\bar{i}}^{k}\ s_{\bar{j}}^{k}\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}, \qquad \rightarrow \qquad s_{\bar{i}}^{k}\ s_{\bar{j}}^{k}\ =\ (s_{\bar{k}}^{i})^t\ s_{\bar{j}}^{k}\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}} \qquad \rightarrow \qquad (SS^t)_{j}^{i}\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}\ .$$

Em notação matricial compacta, teremos:

$$S\ S^t\ =\ I \qquad \rightarrow \qquad S^{-\ 1}\ S\ S^t\ = S^{-\ 1}\ I \qquad \rightarrow \qquad S^t\ =\ S^{-\ 1}\ .$$

c) Usando-se a expressão (1.1.1.1a) em (1.1.3.9b), resultará:

$$(x,\ e_j)\ =\ x_j\ =\ (x^i\ e_i,\ e_j)\ =\ x^i\ (e_i,\ e_j)\ =\ x^i\ \delta_{ij}\ =\ x^j\ .$$

EX.1.1.4.2 Seja **H** um operador hermitiano e **U** um operador unitário. Demonstre que:

a) Os autovalores de **H** são reais e seus autovetores correspondentes são ortogonais;

b) O operador **U** preserva o produto escalar, é ortogonal (se **K** = **R**) e é também normal.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

a1) Para **H**, a equação de autovetores (autovalores) é dada pela expressão (1.1.4.16a):

$$H\ x\ =\ h\ x\ , \qquad (\mathrm{x} = \text{autovetor}, \qquad \mathrm{h} = \text{autovalor}).$$

Sendo **H** um operador hermitiano, as expressões (1.1.4.9a) e (1.1.4.11) permitem escrever que:

$$(H\ x,\ x)\ =\ (x,\ H^\dagger\ x)\ =\ (x, H\ x)\ .$$

Usando-se as propriedades 3 e 3' da Definição 1.1.3.1 e a expressão (1.1.4.16a) nas equações acima, virá:

$$(h\ x,\ x)\ =\ (x,\ h\ x) \quad \rightarrow \quad h^*\ (x,\ x)\ =\ h\ (x,\ x) \quad \rightarrow \quad (h^*\ -\ h)\ (x,\ x)\ =\ 0\ .$$

Se $x \neq 0$, então $(x,\ x) \neq 0$, logo: $h^*\ =\ h$, resultado esse que mostra que os autovalores de **H** são reais.

a2) Se **x** e **y** são autovetores de **H** e h_1 e $\mathbf{h}_2$ os correspondentes autovalores distintos, isto é:

$$H\ x\ =\ h_1\ x \qquad e \qquad H\ y\ =\ h_1\ y\ ,$$

então, de acordo com o item anterior, temos:

$$(H\ x,\ y)\ =\ (h_1\ x,\ y)\ =\ h_1\ (x,\ y)\ ,$$

$$(x,\ H\ y)\ =\ (x,\ h_2\ y)\ =\ h_2\ (x,\ y)\ .$$

Sendo **H** hermitiano, as expressões anteriores nos mostram que:

$$(H\ x,\ y)\ =\ (x,\ H\ y) \quad \rightarrow \quad h_1\ (x,\ y)\ =\ h_2\ (x,\ y) \quad \rightarrow \quad (h_1\ -\ h_2)\ (x, y)\ =\ 0\ .$$

Como $\mathrm{h}_1 \neq h_2$, então $(x,\ y)\ =\ 0$, resultado esse que indica que os autovetores correspondentes a autovalores distintos de um operador hermitiano são ortogonais.

b1) Usando-se as expressões (1.1.4.9a) e (1.1.4.12), teremos:

$$(U\ x,\ U\ y)\ =\ (x,\ U^\dagger\ U\ y)\ =\ (x,\ U^{-\ 1}\ U\ y)\ =\ (x, y)\ .$$

b2) Consideremos as seguintes expressões:

$$U\ x\ =\ v, \qquad e \qquad U\ y\ =\ z\ .$$

Considerando-se, sem perda de generalidades, uma base ortonormada ($g_{ij}\ =\ \delta_{ij}$), as expressões acima são escritas da seguinte maneira:

$$v_i\ =\ x_j\ u_{ji}, \qquad z_i\ =\ y_k\ u_{ki}\ .$$

Usando-se as expressões (1.1.3.9c), (1.1.3.12b) e o fato de considerarmos ser a base ortonormada, efetuemos o seguinte produto escalar:

$$(U\ x,\ U\ y)\ =\ (v,\ z)\ =\ v_i\ z_i\ =\ x_j\ u_{ji}\ y_k\ u_{ki}\ = u_{ji}\ u_{ki}\ x_j\ y_k\ .$$

Usando-se o resultado do item anterior nas expressões acima, virá:

$$(U\ x,\ U\ y)\ =\ (x, y)\ \rightarrow\ u_{ji}\ u_{ki}\ x_j\ y_k\ =\ \delta_{jk}\ x_j\ y_k\ \rightarrow\ (u_{ji}\ u_{ki}\ -\ \delta_{jk})\ x_j\ y_k\ =\ 0\ .$$

Como $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores quaisquer, da expressão acima podemos escrever que:

$$(u_{ji}\ u_{ki}\ -\ \delta_{jk})\ =\ 0 \qquad \rightarrow \qquad u_{ji}\ u_{ki}\ =\ \delta_{jk}\ .$$

Usando-se a expressão (1.1.4.13b), o resultado acima indica que a matriz (U) é ortogonal.

b3) Consideremos a seguinte equação:

$$U\ U^{-\ 1}\ =\ U^{-\ 1}\ U\ =\ I\ .$$

Usando-se a definição de operador unitário (expressão (1.1.4.12)), na equação acima, virá:

$$U\ U^{\dagger}\ =\ U^{\dagger}\ U\ .$$

Esse resultado mostra, segundo a expressão (1.1.4.10), que $\mathbf{U}$ é um operador normal.

$\boxed{\text{EX.1.1.4.3}}$ Se A e B são dois operadores, demonstre que: $(AB)^t\ =\ B^t A^t$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$.

Usando-se as expressões (1.1.4.5) e (1.1.4.7), teremos:

$$(AB)^i_j\ =\ a^i_k\ b^k_j\ =\ (a^k_i)^t\ (b^j_k)^t\ =\ (b^j_k)^t\ (a^k_i)^t\ = (B^t A^t)^j_i\ ,$$

$$(AB)^i_j\ =\ [(AB)^j_i]^t \qquad \rightarrow \qquad [(AB)^j_i]^t\ =\ (B^t A^t)^j_i\ .$$

Portanto, usando-se a linguagem matricial compacta, teremos:

$$(AB)^t\ =\ B^t A^t\ .$$

Problemas (1.1)

1.1.1 Dadas as matrizes (A), (B) e (C), demonstre que:

a) $tr\ (A\ B\ C)\ =\ tr\ (B\ C\ A)\ =\ tr\ (C\ A\ B)$;

b) $(A\ B\ C)^\dagger\ =\ C^\dagger\ B^\dagger\ A^\dagger$.

1.1.2 Se (S) e (A) são, respectivamente, matrizes simétrica e antissimétrica, demonstre que:

a) Qualquer matriz (M) pode ser escrita na forma: $(M)\ =\ (S)\ +\ (A)$;

b) $tr\ (A)\ =\ 0$;

c) $(A)^2\ =\ (S)$.

1.1.3 Demonstre que o produto de duas matrizes unitárias é também unitário.

1.1.4 Encontre uma base ortonormada para o espaço R^4 gerado pelos vetores:

$$(1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 1), (-1, 0, 2, 1)\ .$$

1.1.5 Demonstre as expressões (1.2.4.17a,b,c).

Capítulo 2

2.1 Tensores

2.1.1 Produto Tensorial de Espaços Vetoriais

Definição 2.1.1.1 - Produto Tensorial de 2 Espaços Vetoriais. Sejam **E** e **F** dois espaços vetoriais, definidos sobre o mesmo corpo **K** e tendo, respectivamente, as dimensões **n** e **m**. Denomina-se **produto tensorial** entre esses dois espaços vetoriais o espaço vetorial de dimensão **n** $\times$ **m**, denotado por:

$$E \otimes F,$$

formado por elementos do tipo:

$$t \;=\; x \otimes y, \qquad (x \in E \quad e \quad y \in F)\ ,$$

e denominado de **tensor**.

Componentes de um Tensor. Sejam $\{e_i\}$ e $\{f_j\}$ as bases respectivas de **E** e **F**. Usando-se a expressão (1.1.1.1a), teremos:

$$t \;=\; x \otimes y \;=\; (x^i\ e_i) \otimes (y^j\ f_j) \;=\; x^i\ y^j\ e_i \otimes f_j\ , \qquad (2.1.1.1a)$$

ou:

$$t \;=\; t^{ij}\ e_i \otimes f_j\ . \qquad (2.1.1.1b)$$

Nessa expressão, os elementos:

$$\{e_i \otimes f_j\}\ , \qquad (2.1.1.1c)$$

formam a base do espaço vetorial $E \otimes F$, e

$$t^{ij} \;=\; x^i\ y^j\ , \qquad (2.1.1.1d)$$

são os componentes do tensor **t**, composto de $m \times n$ números.

O espaço vetorial $E \otimes F$ definido acima é o **dual** do produto cartesiano $E^* \times F^*$ e, algumas vezes, esse produto é considerado como a definição de $E \otimes F$. (Registre-se que se denomina **produto cartesiano** entre dois conjuntos A e B o conjunto de pares ordenados $(\alpha,\ \beta)$, com $\alpha \in A$ e $\beta \in B$.)

Definição 2.1.1.2 - Potência Tensorial de Espaços Vetoriais. Seja **E** um espaço vetorial de dimensão **n** e E^* o respectivo espaço dual, ambos definidos sobre o corpo **K**. Denomina-se **potência tensorial** entre p réplicas de **E** e q réplicas de E^* o seguinte produto tensorial:

$$E \otimes E \otimes E \otimes ... \otimes E \otimes E^* \otimes E^* \otimes ... \otimes E^* \;=\; \otimes^p E \otimes^q E^* \;.$$

Cada elemento desse espaço é um **tensor misto** do tipo (**p, q**), definido por:

$$t \;=\; x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes ... \otimes x_{(p)} \otimes u^{(1)} \otimes u^{(2)} ... \otimes u^{(q)} \;,$$

com:

$$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ ...,\ x_{(p)}) \in E \quad e \quad (u^{(1)},\ u^{(2)},\ ...,\ u^{(q)}) \in E^* \;.$$

Componentes de um Tensor Misto. Sejam $\{e_i\}$ e $\{\varepsilon^j\ (x)\}$ as bases respectivas de **E** e E^*. Usando-se as expressões (1.1.1.1a) e (1.1.2.5a), teremos:

$$t \;=\; x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes ... \otimes x_{(p)} \otimes u^{(1)} \otimes u^{(2)} ... \otimes u^{(q)} \;=$$

$$=\; x^{i_1}_{(1)}\ e_{i_1} \otimes x^{i_2}_{(2)}\ e_{i_2} \otimes ... \otimes x^{i_p}_{(p)}\ e_{i_p} \otimes u^{(1)}_{j_1}\ \varepsilon^{j_1}\ (x) \otimes u^{(2)}_{j_2}\ \varepsilon^{j_2}\ (x) \otimes ... \otimes u^{(q)}_{j_q}\ \varepsilon^{j_q}\ (x) \;,$$

ou:

$$t \;=\; x^{i_1}_{(1)}\ x^{i_2}_{(2)}\ ...\ x^{i_p}_{(p)}\ u^{(1)}_{j_1}\ u^{(2)}_{j_2}\ u^{(q)}_{j_q}\ e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1}\ (x) \otimes \varepsilon^{j_2}\ (x) \otimes ... \otimes \varepsilon^{j_q}\ (x) \;,$$

ou:

$$t \;=\; t^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q}\ e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1}\ (x) \otimes \varepsilon^{j_2}\ (x) \otimes ... \otimes \varepsilon^{j_q}\ (x) \;. \qquad (2.1.1.2a)$$

Nessa expressão (2.1.1.2a), os elementos:

$$\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1}\ (x) \otimes \varepsilon^{j_2}\ (x) \otimes ... \otimes \varepsilon^{j_q}\ (x)\} \;, \qquad (2.1.1.2b)$$

formam a base do espaço vetorial $E \otimes E \otimes E \otimes ... \otimes E \otimes E^* \otimes E^* \otimes ... \otimes E^*$, e:

$$t^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q} \;=\; x^{i_1}_{(1)}\ x^{i_2}_{(2)}\ ...\ x^{i_p}_{(p)}\ u^{(1)}_{j_1}\ u^{(2)}_{j_2}\ u^{(q)}_{j_q} \;, \qquad (2.1.1.2c)$$

são os componentes do tensor misto **t**, composto de $n^{p\ +\ q}$ números.

Propriedades do Produto Tensorial. Considerando-se as operações $(+)$ e $(\otimes)$ entre os tensores de todos os tipos, observa-se que eles formam uma **álgebra**: fechada com relação a essas duas operações e a segunda delas $(\otimes)$ é associativa e distributiva com relação à primeira $(+)$. Por exemplo, se (**x, y, ...**) $\in$ **E**, (**u, v, ...**) $\in E^*$ e $(\alpha,\ \beta$**, ...**) $\in$ **K**, então:

1. a) $x \otimes y \in E \otimes E$; *b)* $u \otimes v \in E^* \otimes E^*$; *c)* $x \otimes u \in E \otimes E^*$; *d)* $u \otimes x \in E^* \otimes E$;

2. a) $(x\ +\ y) \otimes u \;=\; x \otimes u \;+\; y \otimes u$; *b)* $(u\ +\ v) \otimes x \;=\; u \otimes x \;+\; v \otimes x$;

3. a) $x \otimes (u + v) = x \otimes u + x \otimes v; \quad u \otimes (x + y) = u \otimes x + u \otimes y$;

4. a) $(\alpha\, x) \otimes u = \alpha\, (x \otimes u) = x \otimes (\alpha\, u)$; $b)$ $(\beta\, u) \otimes x = \beta\, (u \otimes x) = u \otimes (\beta\, x)$.

Mudança de Base. Sejam $\{e_i\}$ e $\{\varepsilon^j\ (x)\}$ as bases respectivas de $\mathbf{E}$ e E^*. Sejam, ainda, $\{\bar{e}_{\bar{k}}\}$ e $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\}$ aquelas bases transformadas segundo as expressões (1.1.1.2a,b) e (1.1.2.4a,b), isto é:

$$\bar{e}_{\bar{p}} = s^i_{\bar{p}}\, e_i\ , \qquad e_i = s^{\bar{p}}_i\, \bar{e}_{\bar{p}}\ , \qquad (1.1.1.2\text{a,b})$$

$$\varepsilon^k\ (x) = s^k_{\bar{m}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\ , \qquad \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x) = s^{\bar{m}}_k\ \varepsilon^k\ (x)\ . \qquad (1.1.2.4\text{a,b})$$

Tomemos o seguinte tensor:

$$t = t^{ij}_k\ e_i \otimes e_j \otimes \varepsilon^k\ (x) = \bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}}\ e_{\bar{p}} \otimes e_{\bar{n}} \otimes \varepsilon^{\bar{m}}\ (x)\ . \qquad (2.1.1.3)$$

Usando-se as expressões (1.1.1.2b) e (1.1.2.4a) na expressão (2.1.1.3), virá:

$$t^{ij}_k\ s^{\bar{p}}_i\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes s^{\bar{n}}_j\ \bar{e}_{\bar{n}} \otimes s^k_{\bar{m}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x) = \bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}}\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\ ,$$

$$t^{ij}_k\ s^{\bar{p}}_i\ s^{\bar{n}}_j\ s^k_{\bar{m}}\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x) = \bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}}\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\ ,$$

$$(t^{ij}_k\ s^{\bar{p}}_i\ s^{\bar{n}}_j\ s^k_{\bar{m}} - \bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}})\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x) = 0\ .$$

Como os vetores do conjunto $\{\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\}$ são $L.I.$ (vide Exercício (2.1.1)), teremos:

$$\bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}} = s^{\bar{p}}_i\ s^{\bar{n}}_j\ s^k_{\bar{m}}\ t^{ij}_k\ . \qquad (2.1.1.4)$$

Tipos Especiais de Tensores

1. **Contravariante**: $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ [Tipo (p, 0)];
2. **Covariante**: $t_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ [Tipo (0, q)];
3. **Vetor**: t^i [Tipo (1, 0)];
4. **Forma Linear**: t_j [Tipo (0, 1)];
5. **Escalar**: t [Tipo (0, 0)].
6. **Euclidiano** - Não há distinção entre índice co- e contravariante: $t^{ij} = t_{ij} = t^i_j$.
7. **Relativos** ou **Pseudo-tensores** - Quando, numa mudança de base, eles se transformam segundo a relação:

$$\bar{t}^{\bar{a}_1\bar{a}_2...\bar{a}_p}_{\bar{b}_1\bar{b}_2...\bar{b}_q} = S^{\omega} \; s^{\bar{a}_1}_{c_1} \; s^{\bar{a}_2}_{c_2} \; ... \; s^{\bar{a}_p}_{c_p} \; s^{d_1}_{\bar{b}_1} \; s^{d_2}_{\bar{b}_2} \; ... \; s^{d_q}_{\bar{b}_q} \; t^{c_1c_2...c_p}_{d_1d_2...d_q} \; , \qquad (2.1.1.5)$$

onde **S** é o determinante da transformação definida pela expressão (1.1.1.2a), isto é:

$$S = | \; s^{\alpha}_{\bar{\beta}} \; | \; ,$$

e ω é um número inteiro relativo, denominado **grau** do pseudo-tensor.

7a. **Densidade Tensorial**: $\omega = 1$;

7b. **Capacidade Tensorial**: $\omega = -1$.

Exercícios (2.1.1)

EX.2.1.1.1 Demonstre que os vetores do conjunto $\{\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \; (x)\}$ são $L.I.$

Solução

Suponhamos que o tensor $t \in E \otimes E \otimes E^*$ seja nulo, quaisquer que sejam os vetores $\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \; (x)$, isto é:

$$s^{\bar{p}}_{i} \; s^{\bar{n}}_{j} \; s^{k}_{\bar{m}} \; t^{ij}_{k} \; \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \; (x) = 0 \; .$$

Como $\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \; (x)$ são quaisquer, essa igualdade só se verifica se:

$$s^{\bar{p}}_{i} \; s^{\bar{n}}_{j} \; s^{k}_{\bar{m}} \; t^{ij}_{k} = 0 \; .$$

Usando-se a Definição 1.1.1.2b, a expressão acima demonstra que os vetores do conjunto $\{\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \; (x)\}$ são $L.I.$

2.1.2 Álgebra Tensorial

Definição 2.1.2.1 - SOMA. Sejam **t** e **r** dois tensores de mesmo tipo (**p, q**) e os escalares **a** e **b**. Chama-se de **soma tensorial** entre **t** e **r** ao tensor **s**, também de mesmo tipo (**p, q**), definido por:

$$s^{i_1i_2...i_p}_{j_1j_2...j_q} = a \; t^{i_1i_2...i_p}_{j_1j_2...j_q} + b \; r^{i_1i_2...i_p}_{j_1j_2...j_q} \; . \qquad (2.1.2.1)$$

Definição 2.1.2.2 - PRODUTO EXTERNO (TENSORIAL). Sejam **t** e **r** dois tensores de tipo (**p, q**) e (**m, n**), respectivamente. Chama-se de **produto externo (tensorial)** entre **t** e **r** ao tensor **p**, de tipo (**p + m, q + n**), definido por:

$$p^{i_1i_2...i_pi_1i_2...i_m}_{j_1j_2...j_qj_1j_2...j_n} = t^{i_1i_2...i_p}_{j_1j_2...j_q} \; r^{i_1i_2...i_m}_{j_1j_2...j_n} \; . \qquad (2.1.2.2)$$

Definição 2.1.2.3 - CONTRAÇÃO. Seja **t** um tensor de tipo (**p, q**). Chama-se de **tensor contraído** de **t** ao tensor **c**, de tipo (**p - 1, q - 1**), obtido quando se iguala um determinado índice contravariante a um índice covariante, e soma-se sobre esse índice. Assim:

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} \;=\; t^{i_1 i_2 \dots i_r \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots i_r \dots j_q} \;=\; c^{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}_{j_1 j_2 \dots j_{q-1}} \,. \qquad (2.1.2.3)$$

Definição 2.1.2.4 - PRODUTO INTERNO (CONTRAÍDO). Sejam **t** e **r** dois tensores de tipo (**p, q**) e (**m, n**), respectivamente. Chama-se de **produto interno (contraído)** entre **t** e **r** ao tensor **i**, de tipo (**p + m - 1, q + n - 1**), obtido quando se iguala um determinado índice contravariante (covariante) de um deles a um certo índice covariante (contravariante) do outro, e soma-se sobre esse índice. Assim:

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}\, r^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} \;=\; t^{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}\, r^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots i_k \dots j_n} \;=\; i^{i_1 i_2 \dots i_{p-1+m}}_{j_1 j_2 \dots j_{q+n-1}} \,, \qquad (2.1.2.4a)$$

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}\, r^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} \;=\; t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_q}\, r^{i_1 i_2 \dots j_k \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} \;=\; i^{i_1 i_2 \dots i_{p+m-1}}_{j_1 j_2 \dots j_{q-1+n}} \,. \qquad (2.1.2.4b)$$

Definição 2.1.2.5 - CRITÉRIO DE TENSORIALIDADE. Seja **q** um tensor cujo tipo se quer determinar e **t** um tensor de tipo (**p, q**). Para se determinar o tipo do tensor **q** multiplica-se o mesmo por **t** e realiza-se **m** contrações. Se o resultado obtido for um tensor **s** do tipo (**k, n**), então **q** é um tensor do tipo (**k + m - p, n + m - q**).

Definição 2.1.2.6 - SIMETRIA. Seja um tensor **s** contravariante (covariante). Se dois índices contravariantes (covariantes) podem ser trocados sem alterar o valor do mesmo, ele é dito **simétrico** com relação a esses índices.

$$s^{\dots ij \dots} \;=\; s^{\dots ji \dots} \qquad ou \qquad s_{\dots ij \dots} \;=\; s_{\dots ji \dots} \,. \qquad (2.1.2.5a)$$

Quando *todos* os índices de **s** podem ser trocados aos pares sem alterar o seu valor, ele é dito **completamente simétrico**.

$$s^{\dots i \dots j \dots} \;=\; s^{\dots j \dots i \dots} \qquad ou \qquad s_{\dots i \dots j \dots} \;=\; s_{\dots j \dots i \dots} \,. \qquad (2.1.2.5b)$$

Definição 2.1.2.7 - ANTISSIMETRIA. Seja um tensor **a** contravariante (covariante). Se dois índices contravariantes (covariantes) podem ser trocados alterando o sinal do mesmo, ele é dito **antissimétrico** com relação a esses índices.

$$a^{\dots ij \dots} \;=\; -\, a^{\dots ji \dots} \qquad ou \qquad a_{\dots ij \dots} \;=\; -\, a_{\dots ji \dots} \,. \qquad (2.1.2.6a)$$

Quando *todos* os índices de **a** podem ser trocados aos pares alterando o seu sinal, ele é dito **completamente antissimétrico**.

$$a^{\dots i \dots j \dots} \;=\; -\, a^{\dots j \dots i \dots} \qquad ou \qquad a_{\dots i \dots j \dots} \;=\; -\, a_{\dots j \dots i \dots} \,. \qquad (2.1.2.6b)$$

Observe que para um tensor completamente antissimétrico, o sinal de seu componente dependerá do número de permutações. Assim, para um número *par* de permutações, o componente conservará o sinal; para um número *impar*, trocará de sinal. Isto é facilmente visto tomando-se uma permutação fundamental, por exemplo: 1, 2, 3, ..., p, fazendo-se as permutações e usando-se a definição de antissimetria completa. Observe-se, ainda, que, se o componente de um tensor antissimétrico tiver pelo menos dois índices repetidos, esse componente é nulo. Por exemplo:

$$t^{iij} \;=\; -\, t^{iij} \;=\; 0 \; .$$

Exercícios (2.1.2)

EX.2.1.2.1 Demonstre que a simetria (antissimetria) com relação a dois índices é invariante por uma mudança de bases.

Solução

Essa demonstração poderá ser feita com um tensor de segunda ordem, sem perdas de generalidades. Assim, usando-se a expressão (2.1.1.4) e considerando-se que os **s** são escalares, teremos:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; s_i^{\bar{m}}\, s_j^{\bar{n}}\, t^{ij} \;=\; s_j^{\bar{n}}\, s_i^{\bar{m}}\, t^{ij} \; .$$

Se o tensor considerado for simétrico ($t^{ij} \;=\; t^{ji}$) ou antissimétrico ($t^{ij} \;=\; -\, t^{ji}$), a expressão (2.1.1.4) nos garante que:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; s_j^{\bar{n}}\, s_i^{\bar{m}} \;\; t^{ij} \;=\; s_j^{\bar{n}}\, s_i^{\bar{m}} \;\; t^{ji} \;=\; \bar{t}^{\bar{n}\bar{m}} \; ,$$

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; s_j^{\bar{n}}\, s_i^{\bar{m}} \;\; t^{ij} \;=\; -\, s_j^{\bar{n}}\, s_i^{\bar{m}} \;\; t^{ji} \;=\; -\, \bar{t}^{\bar{n}\bar{m}} \; ,$$

A resolução desse exercício mostra que não podemos definir simetria (antissimetria) com relação a dois índices, um contravariante e o outro covariante, pois essa propriedade não será preservada depois de uma mudança de bases.

EX.2.1.2.2 Calcule o número de componentes independentes de um tensor completamente simétrico (antissimétrico). Estude o caso particular de um de segunda ordem.

Solução

De um modo geral um tensor **p** vezes contravariante (covariante) tem $\mathbf{n}^p$ componentes, onde **n** é dimensão do espaço vetorial. Contudo, se o tensor for completamente simétrico (antissimétrico), o número de componentes independentes será menor.

a) Se o tensor (**a**) for completamente antissimétrico seus componentes independentes deverão ter todos os índices distintos e na ordem natural e o seu número (N_{ind}^{ca}) será obtido agrupando-se **n** elementos **p** a **p** e que se distingam apenas pela natureza, tratando-se portanto de uma combinação:

$$N^{ca}_{ind} \;=\; C^p_n \;=\; \tfrac{n!}{(n-p)!\ p!}\ .$$

Esses componentes independentes serão denotados por:

$$a^{(a_1 a_2 \ldots a_p)} \qquad ou \qquad a_{(a_1 a_2 \ldots a_p)} \qquad (a_1 \;<\; a_2 \;<\; \ldots \;<\; a_p)\ .$$

a1) No caso de um tensor de segunda ordem, teremos:

$$N^{ca}_{ind} \;=\; C^2_n \;=\; \tfrac{n!}{(n-2)!\ 2!} \;=\; \tfrac{n\ (n-1)\ (n-2)!}{(n-2)!\ 2} \;=\; \tfrac{n\ (n-1)}{2}\ .$$

b) Se o tensor (**s**) for completamente simétrico, o número de componentes independentes será C^p_n acrescido do número de elementos diagonais, isto é, aqueles que têm o mesmo índice.

b1) No caso de um tensor de segunda ordem, teremos:

$$N^{cs}_{ind} \;=\; C^2_n \;+\; n = \tfrac{n\ (n-1)!}{2} \;+\; n \;=\; \tfrac{n\ (n+1)}{2}\ .$$

2.1.3 Símbolos de Kronecker e de Levi-Civita, Determinante

Definição 2.1.3.1 - Delta Generalizado de Kronecker. No item 1.1.1., definimos o **símbolo delta de Kronecker** da seguinte maneira:

$$\delta^m_n \;=\; \delta^{mn} \;=\; \delta_{mn} \;=\; 1, \qquad (m \;=\; n) \qquad e \qquad \delta^m_n \;=\; \delta^{mn} \;=\; \delta_{mn} \;=\; 0. \qquad (m \neq n)\ .$$

Agora, vamos definir o **Delta Generalizado de Kronecker** $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_m}_{j_1 j_2 \ldots j_m}$ da seguinte maneira: os índices superiores e os inferiores podem ter qualquer valor de 1 a **n**. Se pelo menos dois índices superiores ou dois inferiores têm o mesmo valor, ou se os índices superiores não são o mesmo conjunto dos índices inferiores, esse símbolo será *nulo*. Se todos os índices superiores e inferiores são separadamente distintos e os índices superiores são o mesmo conjunto dos números inferiores, esse símbolo terá o valor $\pm$ 1. Será + 1 se entre o conjunto dos índices superiores e o dos inferiores houver um número *par* de permutações; será - 1 se o número de permutações for *ímpar*.

Exemplos:

$$\delta^{123}_{123} \;=\; \delta^{123}_{312} \;=\; 1, \quad \delta^{123}_{213} \;=\; \delta^{123}_{321} \;=\; -\,1, \quad \delta^{113}_{123} \;=\; \delta^{123}_{456} \;=\; 0\ .$$

Definição 2.1.3.2 - Símbolo de Levi-Civita. O **símbolo de antissimetria completa de Levi-Civita** $\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}$ ou $\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p}$ é definido da seguinte maneira:

$$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p} = \delta^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{12 \ldots p} \qquad e \qquad \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p} = \delta^{12 \ldots p}_{a_1 a_2 \ldots a_p} .$$

Usando-se a Definição 2.1.3.1, o **símbolo de Levi-Civita** pode ser definido da seguinte maneira:

$$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}(\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p}) = 0 \text{ , se pelo menos dois índices forem iguais;} \qquad (2.1.3.1a)$$

$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}(\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p}) = +1$, se os índices formarem um número *par* de permutações a partir da permutação fundamental $1, 2, ..., p$; (2.1.3.1b)

$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}(\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p}) = -1$, se os índices formarem um número *ímpar* de permutações a partir da permutação fundamental $1, 2, ..., p$; (2.1.3.1c)

Exemplos

$$\varepsilon^{11}\ (\varepsilon_{11}) = \varepsilon^{22}\ (\varepsilon_{22}) = \ldots = \varepsilon^{nn}\ (\varepsilon_{nn}) = 0, \quad \varepsilon^{12}\ (\varepsilon_{12}) = -\ \varepsilon^{21}\ (\varepsilon_{21}) = +1 ;$$

$$\varepsilon^{122}\ (\varepsilon_{122}) = \varepsilon^{121}\ (\varepsilon_{121}) = 0, \quad \varepsilon^{123}\ (\varepsilon_{123}) = \varepsilon^{312}\ (\varepsilon_{312}) = -\ \varepsilon^{213}\ (\varepsilon_{213}) = +1 ;$$

$$\varepsilon^{1233}\ (\varepsilon_{1233}) = 0, \quad \varepsilon^{1234}\ (\varepsilon_{1234}) = \varepsilon^{2143}\ (\varepsilon_{2143}) = \varepsilon^{3412}\ (\varepsilon_{3412}) = -\ \varepsilon^{2134}\ (\varepsilon_{2134}) = +1 ;$$

Definição 2.1.3.3 - Determinante. Por definição chama-se **determinante** $|d^j_i|$, com i = j = 1, 2, ..., n, à seguinte equação:

$$|\ d^j_i\ | = d = \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n}\ d^1_{a_1}\ d^2_{a_2}\ \ldots\ d^n_{a_n} , \qquad (2.1.3.2a)$$

ou:

$$|\ d^j_i\ | = d = \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n}\ d^{a_1}_1\ d^{a_2}_2\ \ldots\ d^{a_n}_n . \qquad (2.1.3.2b)$$

As expressões (2.1.3.2a,b) tomarão um novo aspecto, considerando-se que a quantidade:

$$d\ \varepsilon^{b_1 b_2 \ldots b_n} ,$$

será igual ao determinante **d**, a menos de sinal, se a permutação $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ for ímpar, e igual a **d**, se a permutação for par. Por outro lado, segundo a Definição 2.1.3.2, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$d\ \varepsilon^{b_1 b_2 \ldots b_n} = \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n}\ d^{b_1}_{a_1}\ d^{b_2}_{a_2}\ \ldots\ d^{b_n}_{a_n} .$$

Multiplicando-se a expressão acima por $\varepsilon_{b_1 b_2 \ldots b_n}$, obteremos o seguinte resultado:

$$\varepsilon_{b_1 b_2 ... b_n} \; d \; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_n} \; = \; \varepsilon_{b_1 b_2 ... b_n} \; \varepsilon^{a_1 a_2 ... a_n} \; d^{b_1}_{a_1} \; d^{b_2}_{a_2} \; ... \; d^{b_n}_{a_n} \; .$$

Usando-se o Exercício 2.1.3.1d, que será resolvido mais adiante, isto é:

$$\varepsilon_{b_1 b_2 ... b_n} \; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_n} \; = \; n! \; ,$$

podemos escrever que:

$$d \; = \; \frac{1}{n!} \; \varepsilon_{b_1 b_2 ... b_n} \; \varepsilon^{a_1 a_2 ... a_n} \; d^{b_1}_{a_1} \; d^{b_2}_{a_2} \; ... \; d^{b_n}_{a_n} \; = \; \frac{1}{n!} \; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_n} \; \varepsilon_{a_1 a_2 ... a_n} \; d^{a_1}_{b_1} \; d^{a_2}_{b_2} \; ... \; d^{a_n}_{b_n} \; . \qquad (2.1.3.2c,d)$$

É oportuno destacar que o determinante **d** pode ainda ser representado pela seguinte notação:

$$| \; d^{ji} \; | \; = \; d \; = \; \frac{1}{n!} \; \varepsilon_{b_1 b_2 ... b_n} \; \varepsilon_{a_1 a_2 ... a_n} \; d^{b_1 a_1} \; d^{b_2 a_2} \; ... \; d^{b_n a_n} \; , \qquad (2.1.3.2e)$$

e:

$$| \; d_{ji} \; | \; = \; d \; = \; \frac{1}{n!} \; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_n} \; \varepsilon^{a_1 a_2 ... a_n} \; d_{b_1 a_1} \; d_{b_2 a_2} \; ... \; d_{b_n a_n} \; , \qquad (2.1.3.2f)$$

onde **j** é o índice de linha e **i** o índice de coluna.

Definição 2.1.3.4 - Cofator. Tomemos a definição de **determinante** dada pela expressão (2.1.3.2). Então:

$$|d^j_i| \; = \; d \; = \; \varepsilon^{a_1 a_2 ... a_n} \; d^1_{a_1} \; d^2_{a_2} \; ... \; d^n_{a_n} \; = \; d^1_{a_1} \; \varepsilon^{a_1 a_2 ... a_n} \; d^2_{a_2} \; ... \; d^n_{a_n} \; = \; d^1_{a_1} \; D^{a_1}_1 \; , \qquad (2.1.3.3a)$$

onde:

$$D^{a_1}_1 \; = \; \varepsilon^{a_1 a_2 ... a_n} \; d^2_{a_2} \; ... \; d^n_{a_n} \; , \qquad (2.1.3.3b)$$

é denominado o **cofator** do elemento $d^{a_1}_1$. É claro que se pode escrever expressões análogas para cada um dos elementos do determinante **d**. Portanto, de um modo genérico, podemos escrever que:

$$d \; = \; d^m_i \; D^i_m \; . \quad (\text{i = índice mudo, m = índice livre}) \quad (2.1.3.3c)$$

Multiplicando-se à direita a expressão acima por δ^m_n e usando-se a expressão 1.1.1.3b, virá:

$$d \; \delta^m_n \; = \; d^m_i \; D^i_m \; \delta^m_n \qquad \rightarrow \qquad d \; \delta^m_n \; = \; d^m_i \; D^i_n \; . \qquad (2.1.3.3d)$$

É oportuno observar que quando se faz na expressão (2.1.3.3d) **m = n**, e realiza-se a soma nesse índice, teremos:

$$d \; \delta^m_m \; = \; d^m_i \; D^i_m \qquad \rightarrow \qquad d^m_i \; D^i_m \; = \; d \; n \; . \qquad (2.1.3.3e)$$

2.1.4 Tensor de Levi-Civita

Definição 2.1.4.1 - Tensor de Levi-Civita. O **tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita** $\eta_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ $(\eta^{a_1 a_2 \ldots a_n})$ é definido da seguinte maneira:

$$\eta_{a_1 a_2 \ldots a_n} \;=\; \sqrt{\mid g \mid}\, \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\mid g' \mid}}\, \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n}\ , \qquad (2.1.4.1a)$$

e:

$$\eta^{a_1 a_2 \ldots a_n} \;=\; \sqrt{\mid g' \mid}\, \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\mid g \mid}}\, \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n}\ , \qquad (2.1.4.1b)$$

onde:

$$\mid g \mid = \text{módulo de det } (\mathrm{g}_{ij}) \qquad \text{e} \qquad \mid g' \mid = \text{módulo de det } (g^{ij})\ .$$

Observe-se que podemos usar o tensor métrico $\mathbf{g}_{ij}$ $(\mathbf{g}^{ij})$ para definir uma **forma mixta do tensor de Levi-Civita**, da seguinte maneira:

$$\eta^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_{p+1} \ldots b_n} \;=\; g^{a_1 c_1}\ g^{a_2 c_2}\ \ldots\ g^{a_p c_p}\ \eta_{c_1 c_2 \ldots c_p b_{p+1} \ldots b_n}\ , \qquad (2.1.4.1c)$$

e:

$$\eta_{a_1 a_2 \ldots a_p}^{b_{p+1} \ldots b_n} \;=\; g_{a_1 c_1}\ g_{a_2 c_2}\ \ldots\ g_{a_p c_p}\ \eta^{c_1 c_2 \ldots c_p b_{p+1} \ldots b_n}\ . \qquad (2.1.4.1d)$$

Exercícios (2.1.3)

EX.2.1.3.1 Mostre que, para i, j, k, r, s, t, = 1, 2, 3, teremos:

a) $\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{rst} \;=\; \delta^i_r\ \delta^j_s\ \delta^k_t \;+\; \delta^i_t\ \delta^j_r\ \delta^k_s \;+\; \delta^i_s\ \delta^j_t\ \delta^k_r \;-\; \delta^i_s\ \delta^j_r\ \delta^k_t \;-\; \delta^i_r\ \delta^j_t\ \delta^k_s \;-\; \delta^i_t\ \delta^j_s\ \delta^k_r$;

b) $\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{ist} \;=\; \delta^j_s\ \delta^k_t \;-\; \delta^j_t\ \delta^k_s$;

c) $\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{ijt} \;=\; 2\ \delta^k_t$;

d) $\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{ijk} \;=\; 6$.

Solução

1a) Usando-se a Definição 2.1.3.2, teremos:

$$\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon_{rst} \;=\; \delta^{ijk}_{123}\ \delta^{123}_{rst} \;=\; \delta^{ijk}_{rst}\ .$$

Agora, usando-se a Definição 2.1.3.1, resultará:

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{rst} \;=\; \delta^{ijk}_{123}\,\delta^{123}_{rst} \;=\; \delta^{ijk}_{rst} \;=\; \delta^i_r\,\delta^j_s\,\delta^k_t + \delta^i_t\,\delta^j_r\,\delta^k_s + \delta^i_s\,\delta^j_t\,\delta^k_r - \delta^i_s\,\delta^j_r\,\delta^k_t - \delta^i_r\,\delta^j_t\,\delta^k_s - \delta^i_t\,\delta^j_s\,\delta^k_r \; .$$

1b) Partindo-se do resultado anterior e fazendo-se $\mathbf{r} = \mathbf{i}$, resultará: (Lembrar que: $\delta^m_m \;=\; 3 \; e \; \delta^m_n\,\delta^m_p \;=\; \delta^p_n$.)

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{ist} \;=\; \delta^i_i\,\delta^j_s\,\delta^k_t \;+\; \delta^i_t\,\delta^j_i\,\delta^k_s \;+\; \delta^i_s\,\delta^j_t\,\delta^k_i \;-\; \delta^i_s\,\delta^j_i\,\delta^k_t \;-\; \delta^i_i\,\delta^j_t\,\delta^k_s \;-\; \delta^i_t\,\delta^j_s\,\delta^k_i \;=$$

$$=\; 3\,\delta^j_s\,\delta^k_t \;+\; \delta^j_t\,\delta^k_s \;+\; \delta^k_s\,\delta^j_t \;-\; \delta^j_s\,\delta^k_t \;-\; 3\,\delta^j_t\,\delta^k_s \;-\; \delta^k_t\,\delta^j_s \;=\; \delta^j_s\,\delta^k_t \;-\; \delta^j_t\,\delta^k_s \; .$$

1c) Partindo-se do resultado anterior e fazendo-se $\mathbf{s} = \mathbf{j}$, virá:

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{ijt} \;=\; \delta^j_j\,\delta^k_t \;-\; \delta^j_t\,\delta^k_j \;=\; 3\,\delta^k_t \;-\; \delta^k_t \;=\; 2\,\delta^k_t \; .$$

1d) Partindo-se do resultado anterior e fazendo-se $\mathbf{t} = \mathbf{k}$, virá:

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{ijk} \;=\; 2\,\delta^k_k \;=\; 6 \;=\; 3! \; .$$

É oportuno registrar que para um espaço vetorial de dimensão **n**, pode-se demonstrar que:

$$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n}\,\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n} \;=\; n! \; .$$

$\boxed{\text{EX.2.1.3.2}}$ Use a Definição 2.1.3.3 para calcular um determinante de segunda ordem.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Segundo a expressão (2.1.3.2), para um determinante de segunda ordem, isto é, com i, j = 1, 2, tem-se:

$$d \;=\; |d^j_i| \;=\; \varepsilon^{ij}\,d^1_i\,d^2_j \;=\; \varepsilon^{1j}\,d^1_1\,d^2_j \;+\; \varepsilon^{2j}\,d^1_2\,d^2_j \;=$$

$$=\; \varepsilon^{11}\,d^1_1\,d^2_1 \;+\; \varepsilon^{12}\,d^1_1\,d^2_2 \;+\; \varepsilon^{21}\,d^1_2\,d^2_1 \;+\; \varepsilon^{22}\,d^1_2\,d^2_2 \; .$$

Sendo $\varepsilon^{11} \;=\; \varepsilon^{22} \;=\; 0 \; e \; \varepsilon^{12} \;=\; -\,\varepsilon^{21} \;=\; 1$, teremos:

$$d \;=\; |d^j_i| \;=\; d^1_1\,d^2_2 \;-\; d^1_2\,d^2_1 \; ,$$

o que coincide com o cálculo tradicional, isto é:

$$d \;=\; |d^j_i| \;=\; \begin{bmatrix} d^1_1 & d^1_2 \\ d^2_1 & d^2_2 \end{bmatrix} \;=\; d^1_1\,d^2_2 \;-\; d^1_2\,d^2_1 \; .$$

$\boxed{\text{EX.2.1.3.3}}$ Demonstre que:

$$det\ (AB)\ =\ det\ (A)\ .\ det\ (B)\ .$$

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Inicialmente, façamos $A\ .\ B\ =\ C$. Assim, usando-se a expressão (1.1.4.5), virá:

$$c_i^j\ =\ a_k^j\ b_i^k\ .$$

Usando-se a expressão acima e a expressão (2.1.3.2), teremos:

$$|c_i^j|\ =\ \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}\ c_{\alpha_1}^1\ c_{\alpha_2}^2\ ...\ c_{\alpha_n}^n\ =\ \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}\ a_{\beta_1}^1\ b_{\alpha_1}^{\beta_1}\ a_{\beta_2}^2\ b_{\alpha_2}^{\beta_2}\ ...\ a_{\beta_n}^n\ b_{\alpha_n}^{\beta_n} \qquad \to$$

$$|c_i^j|\ =\ \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}\ a_{\beta_1}^1\ a_{\beta_2}^2\ ...\ a_{\beta_n}^n\ b_{\alpha_1}^{\beta_1}\ b_{\alpha_2}^{\beta_2}\ ...\ b_{\alpha_n}^{\beta_n}\ =\ \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}\ a_{\beta_1}^1\ a_{\beta_2}^2 ... a_{\beta_n}^n\ \varepsilon_{\beta_1 \beta_2 ... \beta_n} b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} ... b_n^{\beta_n}\ .$$

Por fim, usando-se novamente a expressão (2.1.3.2), teremos:

$$det(C)\ =\ det\ (AB)\ =\ det\ (A)\ .\ det\ (B)\ .$$

$\boxed{\text{EX.2.1.3.4}}$ Demonstre a **Regra de Cramer**.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Dado o sistema de equações lineares, não-homogêneas:

$$y^i\ =\ d_j^i\ x^j, \qquad (d_j^i\ =\ matriz\ (n \times n))\ ,$$

determinemos x^j. Multiplicando-se à esquerda a equação acima por D_i^m e usando-se as expressões (2.1.3.3d) e 1.1.1.3b, teremos:

$$D_i^m\ y^i\ =\ D_i^m\ d_j^i\ x^j\ =\ d\ \delta_j^m\ x^j\ =\ d\ x^m\ .$$

Se $d \neq 0$, a expressão acima resultará em:

$$x^m\ =\ \frac{D_i^m}{d}\ y^i\ ,$$

expressão essa que traduz a **Regra de Cramer**.

$\boxed{\text{EX.2.1.3.5}}$ Demonstre que:

a) O **símbolo de Levi-Civita** ($\varepsilon^{a_1 a_2 ... a_p}$) é uma densidade tensorial;

b) O **símbolo de Levi-Civita** ($\varepsilon_{a_1 a_2 ... a_p}$) é uma capacidade tensorial.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

a) Tomemos o seguinte determinante ($p \times p$):

$$\bar{S} \;=\; \mid s^{a}_{\bar{b}} \mid .$$

Usando-se a Definição 2.1.3.2, teremos:

$$\bar{S}\ \varepsilon^{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_p} \;=\; \varepsilon^{b_1 b_2 \ldots b_p}\ s^{\bar{a}_1}_{b_1}\ s^{\bar{a}_2}_{b_2}\ \ldots\ s^{\bar{a}_p}_{b_p}\ ,$$

$$\varepsilon^{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_p} \;=\; (\bar{S})^{-\,1}\ \ s^{\bar{a}_1}_{b_1}\ s^{\bar{a}_2}_{b_2}\ \ldots\ s^{\bar{a}_p}_{b_p}\ \varepsilon^{b_1 b_2 \ldots b_p}\ .$$

Usando-se o fato de que S $\bar{S}\; = \;1$ e a expressão (2.1.1.4), verifica-se que $\varepsilon^{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_p}$ é uma **densidade tensorial**.

b) Tomemos o seguinte determinante ($p \times p$):

$$S \;=\; \mid s^{\bar{b}}_{a} \mid .$$

Usando-se a Definição 2.1.3.3, teremos:

$$S\ \varepsilon_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_p} \;=\; \varepsilon_{b_1 b_2 \ldots b_p}\ s^{b_1}_{\bar{a}_1}\ s^{b_2}_{\bar{a}_2}\ \ldots\ s^{b_p}_{\bar{a}_p}\ ,$$

$$\varepsilon_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_p} \;=\; (S)^{-\,1}\ \ s^{b_1}_{\bar{a}_1}\ s^{b_2}_{\bar{a}_2}\ \ldots\ s^{b_p}_{\bar{a}_p}\ \varepsilon_{b_1 b_2 \ldots b_p}\ .$$

Usando-se a expressão (2.1.1.4), verifica-se que $\varepsilon_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_p}$ é uma **capacidade tensorial**.

$\boxed{\text{EX.2.1.3.6}}$ Tomando-se a expressão (1.1.3.1), isto é:

$$g_{ij} \;=\; (e_i,\ e_j)\ ,$$

demonstre que, nos espaços euclidianos ($det \mid g_{ij} \mid \neq 0$) , tem-se:

a) g_{ij} é um tensor covariante de segunda ordem, conhecido como **tensor métrico**;

b) $det \mid g_{ij} \mid \;=\; g$ é um pseudo-escalar de peso 2;

c) $\sqrt{-\,g}$ é uma densidade escalar;

d) $\left(\ \sqrt{-\,g}\ \right)^{-\,1}$ é uma capacidade escalar.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

a) Consideremos a mudança de base definida pela expressão (1.1.1.2a):

$$\bar{e}_{\bar{j}} \;=\; s^{i}_{\bar{j}}\ e_i\ .$$

Usando-se a expressão (1.1.3.1) para essa nova base, e considerando-se a expressão (1.1.1.2a), teremos:

$$\bar{g}_{\bar{i}\bar{j}} \;=\; (\bar{e}_{\bar{i}},\; \bar{e}_{\bar{j}}) \;=\; (s^m_{\bar{i}}\; e_m,\; s^n_{\bar{j}}\; e_n) \;=\; s^m_{\bar{i}}\; s^n_{\bar{j}}\; (e_m,\; e_n)\; .$$

Usando-se novamente a expressão (1.1.3.1), resultará:

$$\bar{g}_{\bar{i}\bar{j}} \;=\; s^m_{\bar{i}}\; s^n_{\bar{j}}\; g_{mn}\; ,$$

o que demonstra que o tensor métrico é um tensor covariante de segunda ordem.

b) Expressando-se o resultado obtido no item anterior sob a forma de determinante, virá:

$$det \mid \bar{g}_{\bar{i}\bar{j}} \mid \;=\; det \mid s^m_{\bar{i}}\; s^n_{\bar{j}}\; g_{mn} \mid\; .$$

Considerando-se o resultado dos Exercícios (1.1.4.1) e (2.1.3.3), teremos:

$$\bar{g} \;=\; S^2\; g\; ,$$

o que demonstra que **g** é um pseudo-escalar de peso 2.

c) Multiplicando-se o resultado anterior por (-) e extraindo-se a raiz quadrada, teremos:

$$\sqrt{-\,\bar{g}} \;=\; S\; \sqrt{-\,g}\; ,$$

o que demonstra que $\sqrt{-\,g}$ é uma densidade escalar. Observe-se que, quando o espaço for estritamente ou propriamente euclidiano ($g\; >\; 0$), teremos:

$$\sqrt{\bar{g}} \;=\; S\; \sqrt{g}\; ,$$

d) Tomando-se o inverso do resultado anterior, teremos:

$$\left(\; \sqrt{-\,\bar{g}}\; \right)^{-\,1} \;=\; S^{-\,1} \left(\; \sqrt{-\,g}\; \right)^{-\,1} ,$$

o que demonstra que $\left(\; \sqrt{-\,g}\; \right)^{-\,1}$ é uma capacidade escalar. Observe-se que, quando o espaço for estritamente ou propriamente euclidiano ($g\; >\; 0$), teremos:

$$\left(\; \sqrt{\bar{g}}\; \right)^{-\,1} \;=\; S^{-\,1} \left(\; \sqrt{g}\; \right)^{-\,1} .$$

EX.2.1.3.7 Demonstre que, partindo-se da expressão (2.1.4.1a), obtém-se a expressão (2.1.4.1b).

Solução

Tomemos a expressão (2.1.4.1a):

$$\eta_{a_1 a_2 ... a_n} \;=\; \sqrt{\mid g \mid}\; \varepsilon_{a_1 a_2 ... a_n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\mid g' \mid}}\; \varepsilon_{a_1 a_2 ... a_n} \;, \qquad \text{(I)}$$

Segundo a expressão (1.1.3.10b), podemos escrever que:

$$\eta^{b_1 b_2 ... b_n} \;=\; g^{b_1 a_1}\; g^{b_2 a_2} ... g^{b_n a_n}\; \eta_{a_1 a_2 ... a_n} \;. \qquad \text{(II)}$$

Por outro lado, segundo a expressão (2.1.3.2e), temos:

$$det\; (g^{ji}) \;=\; g' \;=\; \tfrac{1}{n!}\; \varepsilon_{b_1 b_2 ... b_n}\; \varepsilon_{a_1 a_2 ... a_n}\; g^{b_1 a_1}\; g^{b_2 a_2}\; ...\; g^{b_n a_n} \;.$$

Multiplicando-se a expressão acima por $\varepsilon^{b_1 b_2 ... b_n}$ e usando-se o Exercício 2.1.3.1d, virá:

$$g'\; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_n} \;=\; \varepsilon_{a_1 a_2 ... a_n}\; g^{b_1 a_1}\; g^{b_2 a_2}\; ...\; g^{b_n a_n} \;. \qquad \text{(III)}$$

Usando-se as expressões (I) e (II) em (III), resultará:

$$\eta^{b_1 b_2 ... b_n} \;=\; g'\; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_n}\; \sqrt{\mid g \mid} \;. \qquad \text{(IV)}$$

Agora, considerando-se a expressão (1.1.3.11), ou seja:

$$g^{ji}\; g_{jk} \;=\; \delta^i_k \qquad \rightarrow \qquad g'\; g \;=\; 1 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{\mid g' \mid}\; \sqrt{\mid g \mid} \;=\; 1 \;,$$

a expressão (IV) ficará:

$$\eta^{b_1 b_2 ... b_n} \;=\; \sqrt{\mid g' \mid}\; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\mid g \mid}}\; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_n} \;,$$

que representa a expressão (2.1.4.1b).

Problemas (2.1)

2.1.1 Dê um exemplo de aplicação do critério de tensorialidade.

2.1.2 Se A_{ij} é um tensor antissimétrico, demonstre que:

$$(\delta^i_j\; \delta^k_r \;+\; \delta^i_r\; \delta^k_j)\; A_{ik} \;=\; 0 \;.$$

2.1.3 Seja um tensor A_{ijk}. Mostre que o número **N** de componentes independentes desse tensor vale:

$$N \;=\; \tfrac{n\; (n\; +\; 1)\; (n\; +\; 2)}{3!}, \quad \text{se } A_{ijk} \text{ é completamente simétrico;}$$

$$N \ = \ \frac{n \ (n \ - \ 1) \ (n \ - \ 2)}{3!}, \quad seA_{ijk} \text{ é completamente antissimétrico;}$$

2.1.4 Demonstre que:

$$\text{I. } \delta^{jk}_{ik} \ = \ (n \ - \ 1) \ \delta^j_i; \qquad \text{(i, j, k = 1, 2, ..., n)}$$

$$\text{II. } \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p b_{p+1} \ldots b_n} \ \varepsilon_{b_1 b_2 \ldots b_p b_{p+1} \ldots b_n} \ = \ (n-p)! \ \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_p} \ ;$$

$$\text{III. } \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \ = \ n! \ \delta^1_{i_1} \ \delta^2_{i_2} \ \ldots \ \delta^n_{i_n} \ ,$$

2.1.5 Se os elementos de um determinante $|d^j_i| \ = \ d$ são funções das variáveis $(x^1, \ x^2, \ ..., \ n^n)$, demonstre que:

$$\frac{\partial \ d}{\partial \ x^\rho} \ = \ D^\alpha_\beta \ \frac{\partial \ d^\beta_\alpha}{\partial \ x^\rho}. \qquad (d^\alpha_i \ D^j_\alpha \ = \ d \ \delta^j_i) \ .$$

Capítulo 3

3.1 Álgebra Exterior

3.1.1 Álgebra Exterior de ordem dois

Definição 3.1.1.1 - Produto Exterior de dois vetores. Sejam **x** e **y** dois vetores do espaço vetorial **E** de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**. Denomina-se **produto exterior** desses dois vetores o tensor denotado por $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$, denominado **bivetor** ou **2-vetor**, e definido por:

$$x \wedge y \;=\; x \otimes y \;-\; y \otimes x \;, \qquad (3.1.1.1a)$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $x \wedge (y \,+\, z) \;=\; x \wedge y \,+ x \wedge z \;; \qquad (x \,+\, y) \wedge z \;=\; x \wedge z \,+ y \wedge z \;; \qquad (3.1.1.1b)$
2. $a\,(x \wedge y) \;=\; (a\,x) \wedge y \;=\; x \wedge (a\,y) \;; \qquad (3.1.1.1c)$
3. $x \wedge x \;=\; 0 \;; \qquad (3.1.1.1d)$
4. $x \wedge y \;=\; -\,y \wedge x \;, \qquad (3.1.1.1e)$

onde (**x, y, z, ...**) $\in$ **E** e **a** $\in$ **R**.

Componentes Estritos de um 2-vetor. Seja $\{e_i\}$ a base de **E** e $(x^i,\; y^j)$ os componentes de (**x, y**) $\in$ **E** nessa base. Então, segundo a expressão (1.1.1.1a), o produto exterior dado pela expressão (3.1.1.1a) será escrito na forma:

$$x \wedge y \;=\; (x^i\, e_i) \otimes (y^j\, e_j) - \;(y^j\, e_j) \otimes (x^i\, e_i) \;=\; x^i\, y^j\, e_i \otimes e_j \;-\; x^i\, y^j\, e_j \otimes e_i \;.$$

Trocando-se, no segundo termo da expressão acima, **i** por **j**, e usando-se a expressão (3.1.1.1a), virá:

$$x \wedge y \;=\; x^i\, y^j\, e_i \otimes e_j \;-\; x^j\, y^i\, e_i \otimes e_j \;=\; (x^i\, y^j \;-\; x^j\, y^i)\, e_i \otimes e_j \;, \qquad (3.1.1.2a)$$

expressão essa que mostra que $x \wedge y$ é um tensor contravariante antissimétrico de segunda ordem.

Para obtermos os **componentes estritos** desse tensor dado pela expressão (3.1.1.2a), vamos decompor a mesma da seguinte maneira:

$$x \wedge y \;=\; (x^i\, y^j \;-\; x^j\, y^i)\, e_i \otimes e_j \;,$$

$$x \wedge y \;=\; \sum_{i\,<\,j} (x^i\, y^j \;-\; x^j\, y^i)\, e_i \otimes e_j \;+\; \sum_{i\,>\,j} (x^i\, y^j \;-\; x^j\, y^i)\, e_i \otimes e_j \;.$$

Trocando-se o **i** por **j** no segundo somatório, teremos:

$$x \wedge y \;=\; \sum_{i\,<\,j} (x^i\, y^j \;-\; x^j\, y^i)\; e_i \otimes e_j \;+\; \sum_{j\,>\,i} (x^j\, y^i \;-\; x^i\, y^j)\; e_j \otimes e_i \;=$$

$$=\; \sum_{i\,<\,j} (x^i\, y^j \;-\; x^j\, y^i)\; (e_i \otimes e_j \;-\; e_j \otimes e_i)\; .$$

Usando-se a expressão (3.1.1.1a) e lembrando-se a definição de determinante, resultará:

$$x \wedge y \;=\; \sum_{i\,<\,j} \begin{bmatrix} x^i & y^i \\ x^j & y^j \end{bmatrix} (e_i \wedge e_j)\; . \qquad (3.1.1.2b)$$

Nessa expressão, o conjunto $\{e_i \wedge e_j\}$ é linearmente independente (LI). Observe-se que se não for considerada a restrição $i \;<\; j$, a expressão (3.1.1.2b) apresentará a seguinte forma:

$$x \wedge y \;=\; \tfrac{1}{2!} \sum_{i,\; j} \begin{bmatrix} x^i & y^i \\ x^j & y^j \end{bmatrix} (e_i \wedge e_j)\; . \qquad (3.1.1.2c)$$

Definição 3.1.1.2 - Espaço de 2-vetores. Seja **E** um espaço vetorial de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**, e de base $\{e_i\}$. O subespaço de $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ ($= \otimes^2$ **E**) dos tensores contravariantes antissimétricos de segunda ordem, gerados pela base $\{e_i \wedge e_j\}$, é chamado de **espaço de 2-vetores** - $\bigwedge^2$ **E**. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$(a\; x) \wedge (b\; y)\; ,$$

onde (**a, b**) $\in$ **R** e (**x, y**) $\in$ **E**, e tem a seguinte dimensão:

$$dim \bigwedge^2 E \;=\; C_n^2 \;=\; \tfrac{n\;(n-1)}{2}\; .$$

Observe-se que a Álgebra dos elementos de $\bigwedge^2$ **E** é conhecida como **Álgebra de Grassmann**, em virtude de haver sido iniciada pelo matemático alemão Hermann Günther Grassmann (1809-1877), em 1844.

Mudança de Base no Espaço $\bigwedge^2$ E. Neste item, vamos ver como se transformam os componentes estritos de um $2 - vetor$ numa mudança de base. Segundo a expressão (3.1.1.2a), todo $2 - vetor$ é um tensor contravariante antissimétrico de segunda ordem e, portanto, segundo a expressão (2.1.1.4), teremos:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; -\; \bar{t}^{\bar{n}\bar{m}} \;=\; s_i^{\bar{m}}\; s_j^{\bar{n}}\; t^{ij}\; .$$

Agora, vamos decompor essa expressão da seguinte maneira:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; \sum_{i\,<\,j} s_i^{\bar{m}}\; s_j^{\bar{n}}\; t^{ij} \;+\; \sum_{i\,>\,j} s_i^{\bar{m}}\; s_j^{\bar{n}}\; t^{ij}\; .$$

Trocando-se o **i** por **j** no segundo somatório e observando-se que o tensor **t** é antissimétrico ($t^{ij} \; = \; - \, t^{ji}$), teremos:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \; = \; \sum_{i \, < \, j} s_i^{\bar{m}} \; s_j^{\bar{n}} \; t^{ij} \; + \; \sum_{j \, > \, i} s_j^{\bar{m}} \; s_i^{\bar{n}} \; t^{ji} \; = \; \sum_{i \, < \, j} (s_i^{\bar{m}} \; s_j^{\bar{n}} \; - \; s_i^{\bar{n}} \; s_j^{\bar{m}}) \; t^{ij} \; .$$

Usando-se a definição de determinante, resultará:

$$[\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}}]_{\bar{m} \, < \, \bar{n}} \; = \; \sum_{i \, < \, j} \begin{bmatrix} s_i^{\bar{m}} & s_i^{\bar{n}} \\ s_j^{\bar{m}} & s_j^{\bar{n}} \end{bmatrix} \; t^{ij} \; . \qquad (3.1.1.3)$$

Definição 3.1.1.3 - Produto Exterior de duas formas. Sejam **f** e **g** $2-formas$ do espaço vetorial $\mathbf{E}^*$, dual de **E**. Denomina-se **produto exterior** dessas duas formas o tensor denotado por $\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}$, denominado $2 - forma$, e definido por:

$$f \wedge g \; = \; f \otimes g \; - \; g \otimes f \; , \qquad (3.1.1.4)$$

e que satisfaz as mesmas propriedades da Definição (3.1.1.1).

Componentes Estritos de uma 2-forma. Seja $\{\varepsilon^i \; (x)\}$ a base de $\mathbf{E}^*$ e ($f_i, \; g_j$) os componentes de $(\mathbf{f, \; g}) \in E^*$ nessa base. Então, segundo a expressão (1.1.2.5a), o produto exterior dado pela expressão (3.1.1.4) será escrito na forma:

$$f \wedge g \; = \; (f_i \; \varepsilon^i \; (x)) \otimes (g_j \; \varepsilon^j \; (x)) - \; (g_j \; \varepsilon^j \; (x)) \otimes (f_i \; \varepsilon^i \; (x)) \; =$$

$$= \; f_i \; g_j \; \varepsilon^i \; (x) \otimes \varepsilon^j \; (x) \; - \; f_i \; g_j \; \varepsilon^j \; (x) \otimes \varepsilon^i \; (x) \; .$$

Trocando-se, no segundo termo da expressão acima, **i** por **j**, e usando-se a expressão (3.1.1.4), virá:

$$f \wedge g \; = \; f_i \; g_j \; \varepsilon^i \; (x) \otimes \varepsilon^j \; (x) \; - \; f_j \; g_i \; \varepsilon^i \; (x) \otimes \varepsilon^j \; (x) \; =$$

$$= \; (f_i \; g_j \; - \; f_j \; g_i) \; \varepsilon^i \; (x) \otimes \varepsilon^j \; (x) \; , \qquad (3.1.1.5a)$$

expressão essa que mostra que $f \wedge g$ é um tensor covariante antissimétrico de segunda ordem.

Para obtermos os **componentes estritos** desse tensor, vamos decompor essa expressão da seguinte maneira:

$$f \wedge g \; = \; (f_i \; g_j \; - \; f_j \; g_i) \; \varepsilon^i \; (x) \otimes \varepsilon^j \; (x) \; ,$$

$$f \wedge g \; = \; \sum_{i \, < \, j} (f_i \; g_j \; - \; f_j \; g_i) \; \varepsilon^i \; (x) \otimes \varepsilon^j \; (x) \; + \; \sum_{i \, > \, j} (f_i \; g_j \; - \; f_j \; g_i) \; \varepsilon^i \; (x) \otimes \varepsilon^j \; (x) \; .$$

Trocando-se o **i** por **j** no segundo somatório, teremos:

$$f \wedge g \; = \; \sum_{i\,<\,j} (f_i\, g_j \; - \; f_j\, g_i)\; \varepsilon^i\,(x) \otimes \varepsilon^j\,(x) \; + \; \sum_{j\,>\,i} (f_j\, g_i \; - \; f_i\, g_j)\; \varepsilon^j\,(x) \otimes \varepsilon^i\,(x) \; =$$

$$= \; \sum_{i\,<\,j} (f_i\, g_j \; - \; f_j\, g_i)\; (\varepsilon^i\,(x) \otimes \varepsilon^j\,(x) \; - \; \varepsilon^j\,(x) \otimes \varepsilon^i\,(x))\; .$$

Usando-se a expressão (3.1.1.1a) e lembrando-se a definição de determinante, resultará:

$$f \wedge g \; = \; \sum_{i\,<\,j} \begin{bmatrix} f_i & g_i \\ f_j & g_j \end{bmatrix} [\varepsilon^i\,(x) \wedge \varepsilon^j\,(x)]\; . \qquad (3.1.1.5b)$$

Nessa expressão, o conjunto $\{\varepsilon^i\,(x) \wedge \varepsilon^j\,(x)\}$ é linearmente independente (LI). Observe-se que, se não for considerada a restrição $i \; < \; j$, a expressão (3.1.1.5b) apresentará a seguinte forma:

$$f \wedge g \; = \; \frac{1}{2!} \sum_{i,\,j} \begin{bmatrix} f_i & g_i \\ f_j & g_j \end{bmatrix} [\varepsilon^i\,(x) \wedge \varepsilon^j\,(x)]\; . \qquad (3.1.1.5c)$$

Definição 3.1.1.4 - Espaço de 2-formas. Seja E^* um espaço vetorial dual de **E**, e de base $\{\varepsilon^i\,(x)\}$. O subespaço de $E^* \otimes E^*$ ($= \otimes^2 E^*$) dos tensores covariantes antissimétricos de segunda ordem gerados pela base $\{\varepsilon^i\,(x) \wedge \varepsilon^j\,(x)\}$, é chamado de **espaço de 2-formas** - $\bigwedge^2 E^*$. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$(a\; f) \wedge (b\; g)\; ,$$

onde $(\mathbf{a},\; \mathbf{b}) \in \mathbf{R}$ e $(\mathbf{f},\; \mathbf{g}) \in E^*$, e tem a seguinte dimensão:

$$dim \bigwedge^2 E^* \; = \; C_n^2 \; = \; \frac{n\;(n-1)}{2}\; .$$

Observe-se que no espaço definido acima é possível construir uma Álgebra Exterior de ordem dois, que é o dual daquela do $\bigwedge^2 E$.

Mudança de Base no Espaço $\bigwedge^2 E^*$. Neste item, vamos ver como se transformam os componentes estritos de uma $2 - forma$ numa mudança de base. Segundo a expressão (3.1.1.5b), toda $2 - forma$ é um tensor covariante antissimétrico de segunda ordem e, portanto, segundo a expressão (2.1.1.4), teremos:

$$\bar{f}_{\bar{m}\bar{n}} \; = \; - \; \bar{f}_{\bar{n}\bar{m}} \; = \; s^i_{\bar{m}}\; s^j_{\bar{n}}\; f_{ij}\; .$$

Agora, vamos decompor essa expressão da seguinte maneira:

$$\bar{f}_{\bar{m}\bar{n}} \; = \; \sum_{i\,<\,j} s^i_{\bar{m}}\; s^j_{\bar{n}}\; f_{ij} \; + \; \sum_{i\,>\,j} s^i_{\bar{m}}\; s^j_{\bar{n}}\; f_{ij}\; .$$

Trocando-se o **i** por **j** no segundo somatório e observando-se que o tensor **f** é antissimétrico ($f_{ij} \; = \; - \; f_{ji}$), teremos:

$$\bar{f}_{\bar{m}\bar{n}} = \sum_{i\,<\,j} s^i_{\bar{m}}\, s^j_{\bar{n}}\, f_{ij} + \sum_{j\,>\,i} s^j_{\bar{m}}\, s^i_{\bar{n}}\, f_{ji} = \sum_{i\,<\,j} (s^i_{\bar{m}}\, s^j_{\bar{n}} - s^i_{\bar{n}}\, s^j_{\bar{m}})\, f_{ij}\ .$$

Usando-se a Definição (2.1.3.3), resultará:

$$[\bar{f}_{\bar{m}\bar{n}}]_{\bar{m}\,<\,\bar{n}} = \sum_{i\,<\,j} \begin{bmatrix} s^i_{\bar{m}} & s^i_{\bar{n}} \\ s^j_{\bar{m}} & s^j_{\bar{n}} \end{bmatrix} f_{ij}\ . \qquad (3.1.1.6)$$

Exercícios (3.1.1)

EX.3.1.1.1 Encontre a **identidade de Jacobi** envolvendo $2 - vetores$.

Solução

Consideremos o seguinte determinante:

$$\Delta = \begin{bmatrix} t^{ij} & t^{ik} & t^{im} \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix},$$

onde a segunda e terceira linhas são formadas pelos componentes de vetores arbitrários (x, y) e na primeira linha estão os componentes de um $2 - vetor\ t^{ij} = x^i\, y^j - x^j\, y^i$. Desse modo, o determinante acima é escrito na forma:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x^iy^j - x^jy^i & x^iy^k - x^ky^i & x^iy^m - x^my^i \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix},$$

ou:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x^iy^j & x^iy^k & x^iy^m \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^jy^i & x^ky^i & x^my^i \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix}.$$

Como as duas primeiras linhas desses determinantes são múltiplas, eles são nulos. Portanto:

$$\Delta = \begin{bmatrix} t^{ij} & t^{ik} & t^{im} \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix} = 0\ .$$

Desenvolvendo-se esse determinante pela **regra de Laplace**, teremos:

$$\Delta = t^{ij} \begin{bmatrix} x^k & x^m \\ y^k & y^m \end{bmatrix} + t^{ik} \begin{bmatrix} x^m & x^j \\ y^m & y^j \end{bmatrix} + t^{im} \begin{bmatrix} x^j & x^k \\ y^j & y^k \end{bmatrix} = 0\ .$$

Usando-se a expressão (3.1.1.2b), teremos:

$$\Delta \; = \; t^{ik} \, t^{km} \; + \; t^{ik} \, t^{mj} \; + \; t^{im} \, t^{jk} \; = \; 0 \; ,$$

expressão essa que representa a **identidade de Jacobi**. Esse exercício nos mostra que a condição necessária para que um tensor antissimétrico de segunda ordem seja um $2-vetor$ é que seus componentes satisfaçam a **identidade de Jacobi**.

3.1.2 Álgebra Exterior de ordem p

Definição 3.1.2.1 - Produto Exterior de p vetores. Sejam **p** vetores $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, ..., $x_{(p)}$ pertencentes ao espaço vetorial **E** de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**. Denomina-se **produto exterior** desses **p** vetores o tensor (**P**) contravariante de ordem **p** completamente antissimétrico denotado por $x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)}$ denominado $p-vetor$, e definido por:

$$P \; = \; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \; \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p} \; x_{(a_1)} \otimes x_{(a_2)} \otimes ... \otimes x_{(a_p)} \; =$$

$$= \; \varepsilon^{a_1 a_2 ... a_p} \; x_{(a_1)} \otimes x_{(a_2)} \otimes ... \otimes x_{(a_p)} \; , \qquad (3.1.2.1a)$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$1. \; (a x_{(1)} + b x_{(2)}) \wedge x_{(3)} \wedge ... \wedge x_{(p)} \; =$$

$$= \; a(x_{(1)} \wedge x_{(3)} \wedge ... \wedge x_{(p)}) \; + \; b(x_{(2)} \wedge x_{(3)} \wedge ... \wedge x_{(p)}) \; ; \qquad (3.1.2.1b)$$

2. $x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = 0$, se para qualquer par i $\neq j$, $x_{(i)} \; = \; x_{(j)}$; (3.1.2.1c)

3. $x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)}$, troca de sinal se qualquer $x_{(i)}$ trocar de sinal, (3.1.2.1d)

onde $(x_{(1)}, x_{(2)}, ... \, x_{(p)}) \in$ **E** e (**a**, **b**) $\in$ **R**.

Exemplo. Consideremos o caso do $3-vetor$. Então, segundo a expressão (3.1.2.1a), teremos:

$$x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge x_{(3)} = \; \varepsilon^{ijk} \; x_{(i)} \otimes x_{(j)} \otimes x_{(k)} \; , \qquad \text{com i, j, k} = 1, 2, 3.$$

Efetuando-se o somatório indicado pelos índices repetidos e usando-se as expressões (2.1.3.1a,b,c), obteremos:

$$x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge x_{(3)} = \; \varepsilon^{1jk} \; x_{(1)} \otimes x_{(j)} \otimes x_{(k)} + \; \varepsilon^{2jk} \; x_{(2)} \otimes x_{(j)} \otimes x_{(k)} \; + \varepsilon^{3jk} \; x_{(3)} \otimes x_{(j)} \otimes x_{(k)} \; =$$

$$= \varepsilon^{12k}\, x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(k)} \;+\; \varepsilon^{13k}\, x_{(1)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(k)} \;+$$

$$+\, \varepsilon^{21k}\, x_{(2)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(k)} \;+\; \varepsilon^{23k}\, x_{(2)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(k)} \;+$$

$$+\, \varepsilon^{32k}\, x_{(3)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(k)} \;+\; \varepsilon^{31k}\, x_{(3)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(k)} \;=$$

$$= \varepsilon^{123}\, x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)} \;+\; \varepsilon^{132}\, x_{(1)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(2)} \;+\; \varepsilon^{213}\, x_{(2)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(3)} \;+$$

$$+\, \varepsilon^{231}\, x_{(2)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(1)} \;+\; \varepsilon^{321}\, x_{(3)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(1)} \;+\; \varepsilon^{312}\, x_{(3)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)} \;=$$

$$= x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)} \;-\; x_{(1)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(2)} \;-\; x_{(2)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(3)} \;+$$

$$+\, x_{(2)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(1)} \;-\; x_{(3)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(1)} \;+\; x_{(3)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)} \;,$$

ou:

$$x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge x_{(3)} \;=\; x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)} \;+\; x_{(3)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)} \;+\; x_{(2)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(1)} \;-$$

$$-\, x_{(2)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(3)} \;-\; x_{(1)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(2)} \;-\; x_{(3)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(1)} \;.$$

Componentes Gerais e Estritos de um p-vetor. Seja $\{e_{b_i}\}$ a base de **E** e $(x^{b_j}_{(a_j)})$ os componentes de $(x_{(a_k)})$ nessa base, com **i**, **j**, **k** = 1, 2, ... , p. Então, segundo a expressão (1.1.1.1a), o produto exterior dado pela expressão (3.1.2.1a) será escrito na forma:

$$P \;=\; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge \ldots \wedge x_{(p)} = \;\delta^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{12 \ldots p}\; (x^{b_1}_{(a_1)}\, e_{b_1}) \otimes (x^{b_2}_{(a_2)}\, e_{b_2}) \otimes \ldots \otimes (x^{b_p}_{(a_p)}\, e_{b_p}) \;=$$

$$= \;\delta^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{12 \ldots p}\; x^{b_1}_{(a_1)}\, x^{b_2}_{(a_2)} \ldots x^{b_p}_{(a_p)}\; e_{b_1} \otimes e_{b_2} \otimes \ldots \otimes e_{b_p} \;,$$

$$P \;=\; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge \ldots \wedge x_{(p)} \;=\; P^{b_1 b_2 \ldots b_p}\; e_{b_1} \otimes e_{b_2} \otimes \ldots \otimes e_{b_p} \;, \qquad (3.1.2.2a)$$

onde:

$$P^{b_1 b_2 \ldots b_p} \;=\; \delta^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{12 \ldots p}\; x^{b_1}_{(a_1)}\, x^{b_2}_{(a_2)} \ldots x^{b_p}_{(a_p)} \;, \qquad (3.1.2.2b)$$

são os **componentes gerais** de **P**. Porém, de acordo com a Definição (2.1.3.1) de $\delta^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{12 \ldots p}$, podemos escrever que:

$$x^{b_1}_{(a_1)}\, x^{b_2}_{(a_2)} \ldots x^{b_p}_{(a_p)} \;=\; \delta^{b_1 b_2 \ldots b_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\; x^{i_1}_{(a_1)}\, x^{i_2}_{(a_2)} \ldots x^{i_p}_{(a_p)}. \qquad (i_1 \;<\; i_2 \;<\; \ldots \;<\; i_p) \;.$$

Desse modo, a expressão (3.1.2.2b) tomará a seguinte forma:

$$P^{b_1 b_2 ... b_p} \; = \; \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p} \; \delta^{b_1 b_2 ... b_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \; x^{i_1}_{(a_1)} \; x^{i_2}_{(a_2)} \; ... \; x^{i_p}_{(a_p)} \; = \; \delta^{b_1 b_2 ... b_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \; (\delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p} \; x^{i_1}_{(a_1)} \; x^{i_2}_{(a_2)} \; ... \; x^{i_p}_{(a_p)}) \; ,$$

$$P^{b_1 b_2 ... b_p} \; = \; \delta^{b_1 b_2 ... b_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \; P^{i_1 i_2 ... i_p} \; , \qquad (3.1.2.2c)$$

onde:

$$P^{i_1 i_2 ... i_p} \; = \; \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p} \; x^{i_1}_{(a_1)} \; x^{i_2}_{(a_2)} \; ... \; x^{i_p}_{(a_p)}, \quad (\mathrm{i}_1 \; < \; i_2 \; < \; ... \; < \; i_p) \; , \quad (3.1.2.2d)$$

são os **componentes estritos** de **P**.

Levando-se a expressão (3.1.2.2c) na expressão (3.1.2.2a), teremos:

$$P \; = \; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \; P^{i_1 i_2 ... i_p} \; \delta^{b_1 b_2 ... b_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \; e_{b_1} \otimes e_{b_2} \otimes ... \otimes e_{b_p} \; .$$

Aplicando-se a expressão (3.1.2.1a) aos vetores da base, a expressão acima tomará o seguinte aspecto:

$$P \; = \; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \; P^{i_1 i_2 ... i_p} \; e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p} \; . \qquad (3.1.2.2e)$$

Escrevendo-se os componentes estritos de **P**, dados pela expressão (3.1.4.2d), em termos de determinante (expressão (2.1.3.2)), a expressão acima resultará em:

$$P \; = \; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \begin{bmatrix} x^{i_1}_{(1)} & x^{i_2}_{(1)} & ... & x^{i_p}_{(1)} \\ x^{i_1}_{(2)} & x^{i_2}_{(2)} & ... & x^{i_p}_{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^{i_1}_{(p)} & x^{i_p}_{(p)} & ... & x^{i_p}_{(p)} \end{bmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p} \; , \qquad (3.1.2.2f)$$

com $i_1 \; < \; i_2 \; < \; ... \; < \; i_p$. Observe-se que se não for considerada esta restrição entre os índices **i**, a expressão (3.1.2.2f) apresentará a seguinte forma:

$$P \; = \; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \; \tfrac{1}{p!} \begin{bmatrix} x^{i_1}_{(1)} & x^{i_2}_{(1)} & ... & x^{i_p}_{(1)} \\ x^{i_1}_{(2)} & x^{i_2}_{(2)} & ... & x^{i_p}_{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^{i_1}_{(p)} & x^{i_p}_{(p)} & ... & x^{i_p}_{(p)} \end{bmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p} \; . \qquad (3.1.2.2g)$$

Definição 3.1.2.2 - Espaço de p-vetores. Seja **E** um espaço vetorial de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**, e de base $\{e_i\}$. O subespaço de **p** ($p \leq n$) réplicas de **E** ($\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \otimes ... \otimes \mathbf{E} = \otimes^p \mathbf{E}$) dos tensores (**P**) contravariantes completamente antissimétricos de ordem **p** gerados pela base ($\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}\}$, $i_1 \; < \; i_2 \; < \; ... \; < \; i_p$) é chamado de **espaço de p-vetores** - $\bigwedge^p \mathbf{E}$. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$a_{(1)} \; x_{(1)} \wedge a_{(2)} \; x_{(2)} \wedge ... \wedge a_{(p)} \; x_{(p)} \; ,$$

onde $(\mathbf{a}_{(1)}, \mathbf{a}_{(2)}, ..., \mathbf{a}_{(p)}) \in \mathbf{R}$ e $(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, ..., \mathbf{x}_{(p)}) \in \mathbf{E}$, e tem a seguinte dimensão:

$$dim \bigwedge^p E \ = \ C_n^p \ = \ \tfrac{n!}{p! \ (n-p)!} \ .$$

Definição 3.1.2.3 - Espaço de n-vetores. Seja **E** um espaço vetorial de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**, e de base $\{e_i\}$. Por sua vez, o subespaço de **n** réplicas de **E** ($\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \otimes ... \otimes \mathbf{E} = \otimes^n \mathbf{E}$) dos tensores (**P**) contravariantes completamente antissimétricos de ordem **n** gerados pela base $(\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_n}\}, \ i_1 \ < \ i_2 \ < \ ... \ < \ i_n)$ é chamado de **espaço de n-vetores** - $\bigwedge^n$ **E**. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$P \ = \ x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(n)} = \ P^{i_1 i_2 ... i_n} \ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_n} \ . \qquad (3.1.2.3a)$$

Para esse tipo particular de espaço, tem-se:

$$dim \bigwedge^n E \ = \ C_n^n \ = \ 1 \ .$$

Em vista disso, esse tipo de tensor tem apenas um componente, obtido pela expressão (3.1.2.2f), fazendo-se $p \ = \ n$:

$$P \ = \ x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(n)} = \begin{bmatrix} x_{(1)}^{i_1} & x_{(1)}^{i_2} & ... & x_{(1)}^{i_n} \\ x_{(2)}^{i_1} & x_{(2)}^{i_2} & ... & x_{(2)}^{i_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{(p)}^{i_1} & x_{(1)}^{i_p} & ... & x_{(p)}^{i_n} \end{bmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_n} \ , \qquad (3.1.2.3b)$$

com $i_1 \ < \ i_2 \ < \ ... \ < \ i_n$. Observe-se que, se esta restrição não for considerada, a expressão (3.1.2.3b) tomará o seguinte aspecto:

$$P \ = \ x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(n)} = \ \tfrac{1}{n!} \begin{bmatrix} x_{(1)}^{i_1} & x_{(1)}^{i_2} & ... & x_{(1)}^{i_n} \\ x_{(2)}^{i_1} & x_{(2)}^{i_2} & ... & x_{(2)}^{i_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{(p)}^{i_1} & x_{(1)}^{i_p} & ... & x_{(p)}^{i_n} \end{bmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_n} \ , \qquad (3.1.2.3c)$$

Exemplo. No caso em que $n \ = \ 3$, tem-se:

$$x \wedge y \wedge z \ = \ \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{bmatrix} i \wedge j \wedge k \ . \qquad (3.1.2.3d)$$

Mudança de Base no Espaço $\bigwedge^p$ **E**. Neste item, vamos ver como se transformam os componentes estritos de um p-vetor numa mudança de base. Segundo a expressão (3.1.2.2a), todo p-vetor é um tensor contravariante completamente antissimétrico de ordem **p** e, portanto, segundo a expresão (2.1.1.4), teremos:

$$\bar{P}^{\bar{b}_1 \bar{b}_2 ... \bar{b}_p} = s^{\bar{b}_1}_{a_1} \, s^{\bar{b}_2}_{a_2} \, ... \, s^{\bar{b}_p}_{a_p} \, P^{a_1 a_2 ... a_p} \, .$$

Usando-se os componentes estritos do tensor **P** dados pela expressão (3.1.2.2d), teremos:

$$\bar{P}^{\bar{j}_1 \bar{j}_2 ... \bar{j}_p} = s^{\bar{j}_1}_{a_1} \, s^{\bar{j}_2}_{a_2} \, ... \, s^{\bar{j}_p}_{a_p} \, \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \, P^{a_1 a_2 ... a_p} \, , \qquad (3.1.2.4a)$$

com $\bar{j}_1 < \bar{j}_2 < ... < \bar{j}_p \;\; e \;\; i_1 < i_2 < ... < i_p$.

Em termos de determinante (expressão (2.1.3.2)), a expressão acima será escrita na forma:

$$\bar{P}^{\bar{j}_1 \bar{j}_2 ... \bar{j}_p} = \begin{bmatrix} s^{\bar{j}_1}_{i_1} & s^{\bar{j}_2}_{i_1} & ... & s^{\bar{j}_p}_{i_1} \\ s^{\bar{j}_1}_{i_2} & s^{\bar{j}_2}_{i_2} & ... & s^{\bar{j}_p}_{i_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ s^{\bar{j}_1}_{i_p} & s^{\bar{j}_2}_{i_p} & ... & s^{\bar{j}_p}_{i_p} \end{bmatrix} P^{i_1 i_2 ... i_p} \, , \qquad (3.1.2.4b)$$

com $\bar{j}_1 < \bar{j}_2 < ... < \bar{j}_p \;\; e \;\; i_1 < i_2 < ... < i_p$.

Definição 3.1.2.4 - Produto Exterior de q formas. Sejam **q** formas $\mathbf{f}^{(1)}$, $\mathbf{f}^{(2)}$, ..., $\mathbf{f}^{(q)}$ pertencentes ao espaço vetorial $\mathbf{E}^*$, dual de **E**. Denomina-se **produto exterior** dessas **q** formas o tensor (**Q**) covariante completamente antissimétrico de ordem **q** denotado por $\mathbf{f}^{(1)} \wedge \mathbf{f}^{(2)} \wedge ... \wedge \mathbf{f}^{(q)}$ denominado **q-forma**, e definido por:

$$Q = f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \, f^{(a_1)} \otimes f^{(a_2)} \otimes ... \otimes f^{(a_q)} =$$

$$= \varepsilon_{a_1 a_2 ... a_q} \, f^{(a_1)} \otimes f^{(a_2)} \otimes ... \otimes f^{(a_q)} \, , \qquad (3.1.2.5)$$

e que satisfaz as mesmas propriedades da Definição 3.1.2.1.

Componentes Gerais e Estritos de uma q-forma. Seja $\{\varepsilon^{b_i} \, (x)\}$ a base de E^* e $(f^{(a_j)}_{b_j})$ os componentes de $(f^{(a_k)})$ nessa base. Então, segundo a expressão (2.1.2.5a), o produto exterior dado pela expressão (3.1.2.5) será escrito na forma:

$$Q = f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} =$$

$$= \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \, (f^{(a_1)}_{b_1} \, \varepsilon^{b_1} \, (x)) \otimes (f^{(a_2)}_{b_2} \, \varepsilon^{b_2}) \, (x)) \otimes ... \otimes (f^{(a_q)}_{b_q} \, \varepsilon^{b_q} \, (x)) =$$

$$= \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \, f^{(a_1)}_{b_1} \, f^{(a_2)}_{b_2} \, ... \, f^{(a_p)}_{b_q} \, \varepsilon^{b_1} \otimes \varepsilon^{b_2} \otimes ... \otimes \varepsilon^{b_q} \, ,$$

$$Q = f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = Q_{b_1 b_2 ... b_q} \, \varepsilon^{b_1} \otimes \varepsilon^{b_2} \otimes ... \otimes \varepsilon^{b_q} \, , \qquad (3.1.2.6a)$$

onde:

$$Q_{b_1 b_2 ... b_q} \ = \ \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \ f^{(a_1)}_{b_1} \ f^{(a_2)}_{b_2} \ ... \ f^{(a_q)}_{b_q} \ , \qquad (3.1.2.6b)$$

são os **componentes gerais** de **Q**. Porém, de acordo com a Definição (2.1.3.1) de $\delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q}$, podemos escrever que:

$$f^{(a_1)}_{b_1} \ f^{(a_2)}_{b_2} \ ... \ f^{(a_q)}_{b_q} \ = \ \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \ f^{(a_1)}_{i_1} \ f^{(a_2)}_{i_2} \ ... \ f^{(a_q)}_{i_q}. \qquad (i_1 \ < \ i_2 \ < \ ... \ < \ i_q) \ .$$

Desse modo, a expressão (3.1.2.6b) tomará a seguinte forma:

$$Q_{b_1 b_2 ... b_q} \ = \ \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \ \ \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \ f^{(a_1)}_{i_1} \ f^{(a_2)}_{i_2} \ ... \ f^{(a_q)}_{i_q} \ = \ \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \ (\delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \ f^{(a_1)}_{i_1} \ f^{(a_2)}_{i_2} \ ... \ f^{(a_q)}_{i_q}) \ ,$$

$$Q_{b_1 b_2 ... b_q} \ = \ \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \ Q_{i_1 i_2 ... i_q} \ , \qquad (3.1.2.6c)$$

onde:

$$Q_{i_1 i_2 ... i_q} \ = \ \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \ f^{(a_1)}_{i_1} \ f^{(a_2)}_{i_2} \ ... \ f^{(a_q)}_{i_q}, \quad (\mathrm{i}_1 \ < \ i_2 \ < \ ... \ < \ i_q) \ , \quad (3.1.2.6d)$$

são os **componentes estritos** de **Q**.

Levando-se a expressão (3.1.2.6c) na expressão (3.1.2.6a), teremos:

$$Q \ = \ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \ Q_{i_1 i_2 ... i_q} \ \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \ \varepsilon^{b_1} \otimes \varepsilon^{b_2} \otimes ... \otimes \varepsilon^{b_q} \ .$$

Aplicando-se a expressão (3.1.2.5) aos vetores da base, a expressão acima tomará o seguinte aspecto:

$$Q \ = \ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \ Q_{i_1 i_2 ... i_q} \ \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_q} \ . \qquad (3.1.2.6e)$$

Escrevendo-se os componentes estritos de **Q**, dados pela expressão (3.1.4.6d), em termos de determinante (expressão (2.1.3.2)), a expressão acima resultará em:

$$Q \ = \ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \begin{bmatrix} f^{(1)}_{i_1} & f^{(1)}_{i_2} & ... & f^{(1)}_{i_q} \\ f^{(2)}_{i_1} & f^{(2)}_{i_2} & ... & f^{(2)}_{i_q} \\ ... & ... & ... & ... \\ f^{(q)}_{i_1} & f^{(q)}_{i_2} & ... & f^{(q)}_{i_q} \end{bmatrix} \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_q} \ , \qquad (3.1.2.6f)$$

com $i_1 \ < \ i_2 \ < \ ... \ < \ i_q$. Observe-se que, se essa restrição não for considerada, a expressão (3.1.2.6f) terá o seguinte aspecto:

$$Q \ = \ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \ \frac{1}{q!} \begin{bmatrix} f^{(1)}_{i_1} & f^{(1)}_{i_2} & ... & f^{(1)}_{i_q} \\ f^{(2)}_{i_1} & f^{(2)}_{i_2} & ... & f^{(2)}_{i_q} \\ ... & ... & ... & ... \\ f^{(q)}_{i_1} & f^{(q)}_{i_2} & ... & f^{(q)}_{i_q} \end{bmatrix} \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_q} \ . \qquad (3.1.2.6g)$$

Definição 3.1.2.5 - Espaço de q-formas. Seja $\mathbf{E}^*$ o espaço vetorial dual de $\mathbf{E}$, e de base $\{\varepsilon^i\ (x)\}$. O subespaço de $\mathbf{q}$ ($q \leq n$) réplicas de E^* ($\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^* \otimes ... \otimes \mathbf{E}^* = \otimes^q\ \mathbf{E}^*$) dos tensores ($\mathbf{Q}$) covariantes completamente antissimétricos de ordem $\mathbf{q}$ gerados pela base ($\{\varepsilon^{i_1}\ (x) \wedge \varepsilon^{i_2}\ (x) \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_q}\}$, $i_1\ <\ i_2\ <\ ...\ <\ i_q$) é chamado de **espaço de q-formas** - $\bigwedge^q\ E^*$. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$a^{(1)}\ f^{(1)} \wedge a^{(2)}\ f^{(2)} \wedge ... \wedge a^{(q)}\ f^{(q)}\ ,$$

onde ($\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$, ..., $\mathbf{a}^{(q)}$) $\in \mathbf{R}$ e ($\mathbf{f}^{(1)}$, $\mathbf{f}^{(2)}$, ..., $\mathbf{f}^{(q)}$) $\in \mathbf{E}^*$, e tem a seguinte dimensão:

$$dim \bigwedge^q\ E^*\ =\ C_n^q\ =\ \frac{n!}{q!\ (n-q)!}\ .$$

Definição 3.1.2.6 - Espaço de n-formas. Seja $\mathbf{E}^*$ um espaço vetorial dual de $\mathbf{E}$, e de base $\{\varepsilon^i\ (x)\}$. O subespaço de $\mathbf{n}$ de réplicas de E^* ($\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^* \otimes ... \otimes \mathbf{E}^* = \otimes^n\ \mathbf{E}^*$) dos tensores ($\mathbf{Q}$) covariantes completamente antissimétricos de ordem $\mathbf{n}$ gerados pela seguinte base, isto é: ($\{\varepsilon^{i_1}\ (x) \wedge \varepsilon^{i_2}\ (x) \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_n}\}$, $i_1\ <\ i_2\ <\ ...\ <\ i_n$), é chamado de **espaço de n-formas** - $\bigwedge^n\ E^*$. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$Q\ =\ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(n)} =\ Q_{i_1 i_2 ... i_n}\ \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_n}\ . \qquad (3.1.2.7a)$$

Para esse tipo particular de espaço, tem-se:

$$dim \bigwedge^n\ E^*\ =\ C_n^n\ =\ 1\ .$$

Em vista disso, esse tipo de tensor tem apenas um componente, obtido pela expressão (3.1.2.6f), fazendo-se $q\ =\ n$:

$$Q\ =\ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(n)} = \begin{bmatrix} f_{i_1}^{(1)} & f_{i_2}^{(1)} & ... & f_{i_n}^{(1)} \\ f_{i_1}^{(2)} & f_{i_2}^{(2)} & ... & f_{i_n}^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{i_1}^{(n)} & f_{i_2}^{(n)} & ... & f_{i_n}^{(n)} \end{bmatrix} \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_n}\ , \qquad (3.1.2.7b)$$

com $i_1\ <\ i_2\ <\ ...\ <\ i_n$. Registre-se que com a não consideração desta restrição entre os $\mathbf{i}$, a expressão (3.1.2.7b) tomará a seguinte forma:

$$Q\ =\ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(n)} = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} f_{i_1}^{(1)} & f_{i_2}^{(1)} & ... & f_{i_n}^{(1)} \\ f_{i_1}^{(2)} & f_{i_2}^{(2)} & ... & f_{i_n}^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{i_1}^{(n)} & f_{i_2}^{(n)} & ... & f_{i_n}^{(n)} \end{bmatrix} \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_n}\ . \qquad (3.1.2.7c)$$

Mudança de Base no Espaço $\bigwedge^q\ E^*$. Neste item, vamos ver como se transformam os componentes estritos de uma q-forma numa mudança de base. Segundo a expressão (3.1.2.5), toda q-forma é um tensor covariante completamente antissimétrico de ordem $\mathbf{q}$ e, portanto, segundo a expressão (2.1.1.4), teremos:

$$\bar{Q}_{\bar{b}_1 \bar{b}_2 ... \bar{b}_q} = s^{a_1}_{\bar{b}_1} \, s^{a_2}_{\bar{b}_2} \, ... \, s^{a_p}_{\bar{b}_p} \, Q_{a_1 a_2 ... a_p} \; .$$

Usando-se os componentes estritos do tensor **Q** dados pela expressão (3.1.4.6d), teremos:

$$\bar{Q}_{\bar{j}_1 \bar{j}_2 ... \bar{j}_q} = s^{a_1}_{\bar{j}_1} \, s^{a_2}_{\bar{j}_2} \, ... \, s^{a_p}_{\bar{j}_p} \, \delta^{i_1 i_2 ... i_p}_{a_1 a_2 ... a_q} \, Q_{a_1 a_2 ... a_q} \; , \qquad (3.1.2.7c)$$

com $\bar{j}_1 \; < \; \bar{j}_2 \; < \; ... \; < \; \bar{j}_q \; \; e \; \; i_1 \; < \; i_2 \; < \; ... \; < \; i_q$.

Em termos de determinante (expressão (2.1.3.2)), a expressão acima será escrita na forma:

$$\bar{Q}_{\bar{j}_1 \bar{j}_2 ... \bar{j}_q} = \begin{bmatrix} s^{i_1}_{\bar{j}_1} & s^{i_1}_{\bar{j}_2} & ... & s^{i_1}_{\bar{j}_q} \\ s^{i_2}_{\bar{j}_1} & s^{i_2}_{\bar{j}_2} & ... & s^{i_2}_{\bar{j}_q} \\ ... & ... & ... & ... \\ s^{i_q}_{\bar{j}_1} & s^{i_q}_{\bar{j}_2} & ... & s^{i_q}_{\bar{j}_q} \end{bmatrix} Q_{i_1 i_2 ... i_q} \; , \qquad (3.1.2.7d)$$

com $\bar{j}_1 \; < \; \bar{j}_2 \; < \; ... \; < \; \bar{j}_q \; \; e \; \; i_1 \; < \; i_2 \; < \; ... \; < \; i_q$.

3.1.3 Produto Exterior entre p-vetores (formas)

Definição 3.1.3.1 - Produto Exterior de dois p-vetores (formas). Sejam $p_1 - vetor \; (forma) \; \alpha$ e $p_2 - vetor \; (forma) \; \beta$ dois $p - vetores \; (formas)$. Por definição, chama-se de **produto exterior** entre eles ao $(p_1 \; + \; p_2) - vetor$ (forma) $\alpha \wedge \beta$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\alpha \wedge \beta \; = \; 0, \qquad se : p_1 \; + \; p_2 \; > \; n \; ; \qquad (3.1.3.1a)$
2. $\alpha \wedge (\beta \; + \; \gamma) \; = \; \alpha \wedge \beta \; + \alpha \wedge \gamma; \qquad (\alpha \; + \; \beta) \wedge \gamma \; = \; \alpha \wedge \gamma \; + \beta \wedge \gamma \; ; \qquad (3.1.3.1b)$
3. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \; = \; (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \; ; \qquad (3.1.3.1c)$
4. $\alpha \wedge \beta \; = \; (- \, 1)^{p_1 p_2} \; \beta \wedge \alpha \; . \qquad (3.1.3.1d)$

Ilustremos essa propriedade 4, usando-se as expressões (3.1.1.1e) e (3.1.3.1c). Com efeito:

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge \beta \; = \; - \; (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta \wedge \alpha_3) \; =$$

$$= \; (- \, 1)^2 \; (\alpha_1 \wedge \beta \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \; = \; (- \, 1)^3 \; \beta \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \; .$$

Usando-se o resultado anterior, teremos:

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge (\beta_1 \wedge \beta_2) \; = \; (- \, 1)^3 \; \beta_1 \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge \beta_2 \; =$$

$$= \; (- \, 1)^3 \; (- \, 1)^3 (\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \; = \; (- \, 1)^{3.2} \; (\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \; .$$

Definição 3.1.3.2 - Determinante. Seja **A** uma transformação linear de um espaço vetorial **E** de dimensão **n** sobre si mesmo ($A: \ E \to E$). Seja ainda o espaço vetorial $\bigwedge^n$ **E**. Define-se **Determinante de A** - $det \ A \ = \ \mid A \mid$ - a seguinte expressão:

$$A\alpha_1 \wedge ... \wedge A \ \alpha_n \ = \ \mid A \mid (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \ , \qquad (3.1.3.2)$$

onde $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \in \bigwedge^n$ **E**. Observe-se que essa definição é completamente independente da representação matricial de **A**.

Exercícios (3.1.3)

EX.3.1.3.1 Use a expressão (3.1.3.2) para demonstrar que: $\mid AB \mid \ = \ \mid A \mid . \mid B \mid$.

Solução

Partindo-se da expressão (3.1.3.2) e usando-se a definição de produto de operadores, teremos:

$$\mid AB \mid (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \ = \ ((AB)\alpha_1) \wedge ... \wedge ((AB) \ \alpha_n) \ = \ A(B\alpha_1) \wedge ... \wedge A(B\alpha_n) \ =$$

$$= \ \mid A \mid (B \ \alpha_1 \wedge ... \wedge B \ \alpha_n) \ = \ \mid A \mid . \mid B \mid (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \ ,$$

portanto:

$$\mid AB \mid \ = \ \mid A \mid . \mid B \mid .$$

EX.3.1.3.2 Relacione a expressão (3.1.3.2) com o determinante de uma matriz (a_{ij}) $n \times n$.

Solução

Seja $\{e_i\}$ a base de **E**. Então, segundo a expressão (2.1.4.2), teremos:

$$A \ e_i \ = \ e_j \ a_i^j \ .$$

Por outro lado, usando-se a expressão (3.1.2.2f), virá:

$$Ae_1 \wedge ... \wedge Ae_n \ = \ \mid a_i^j \mid (e_1 \wedge ... \wedge e_n), \qquad (\mid a_i^j \mid \ = \ \mid A \mid) \ ,$$

resultado que coincide com a expressão (3.1.3.2).

3.1.4 Dualidade

Definição 3.1.4.1 - Operação Dual ($\star$) (Hodge). Sejam os espaços vetoriais $\bigwedge^p$ **E** e $\bigwedge^{n-p}$ **E**, de bases $\{ \ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p} \ \}$ e $\{ \ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n} \ \}$, respectivamente. Define-se a operação "$\star$", denominada **operação dual (Hodge)**, entre esses espaços a transformação linear:

$$\star : \bigwedge^p E \quad \rightarrow \quad \bigwedge^{n-p} E \ , \qquad (\mathrm{p = 0, 1, 2, ..., n})$$

$$\star \ [e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}] \ = \ \frac{\sqrt{\mid g' \mid}}{(n \ - \ p)!} \ \varepsilon^{i_{p+1} i_{p+2} ... i_n}_{i_1 i_2 ... i_p} \ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n} \ , \qquad (3.1.4.1)$$

onde $\mid g' \mid$ é o módulo de g' = det(g^{ij}). Observe-se que, como $\mathrm{C}^p_n \ = \ C^{n-p}_n$, os espaços $\bigwedge^p$ **E** e $\bigwedge^{n-p}$ **E** têm então a mesma dimensão, o que mostra que os mesmos são isomorfos. Observe-se, ainda, que, embora tenhamos escolhido uma base para definir a operação ($\star$), ela é realmente independente de qualquer escolha de base.

Componentes do Dual de um p-vetor. Seja α um $p-vetor$ dado pela expressão (3.1.2.2e,g):

$$\alpha \ = \ \tfrac{1}{p!} \ \alpha^{i_1 i_2 ... i_p} \ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ ... \wedge e_{i_p} \ .$$

Usando-se a Definição 3.1.4.1, virá:

$$\star \ \alpha \ = \ \star \ [\tfrac{1}{p!} \ \alpha^{i_1 i_2 ... i_p} \ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ ... \wedge e_{i_p}] \ = \ \tfrac{1}{p!} \ [\frac{\sqrt{\mid g' \mid}}{(n \ - \ p)!} \ \varepsilon^{i_{p+1} i_{p+2} ... i_n}_{i_1 i_2 ... i_p} \ \alpha^{i_1 i_2 ... i_p} \ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n}].$$

Usando-se as expressões (2.1.3.14c) e (2.1.4.1b), teremos:

$$\star \ \alpha \ = \ \frac{\sqrt{\mid g' \mid}}{(n \ - \ p)! \ p!} \ \varepsilon^{i_1 i_2 ... i_p i_{p+1} i_{p+2} ... i_n} \ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p} \ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n} \ ,$$

$$\star \ \alpha \ = \ \frac{1}{(n \ - \ p)!} \ [\tfrac{1}{p!} \ \eta^{i_1 i_2 ... i_p i_{p+1} i_{p+2} ... i_n} \ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p}] \ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n} \ . \qquad (3.1.4.2a)$$

Considerando-se que $\star \ \alpha \in \bigwedge^{n-p}$ **E**, as expressões (3.1.2.2e) e (3.1.2.2g) permitem escrever que:

$$\star \ \alpha \ = \ \frac{1}{(n \ - \ p)!} \ (\star \ \alpha)^{i_{p+1} i_{p+2} ... i_n} \ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n} \ . \qquad (3.1.4.2b).$$

Portanto, comparando-se as expressões (3.1.4.2a,b) e usando-se a expressão (3.1.4.1b), verifica-se que os componentes de $\star \ \alpha$ são dados por:

$$(\star \ \alpha)^{i_{p+1} i_{p+2} ... i_n} \ = \ \frac{\sqrt{\mid g' \mid}}{p!} \ \varepsilon^{i_1 i_2 ... i_p i_{p+1} ... i_n} \ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p} \ = \ \tfrac{1}{p!} \ \eta^{i_1 i_2 ... i_p i_{p+1} ... i_n} \ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p} \ . \qquad (3.1.4.2c)$$

Observações

1. Podemos fazer um desenvolvimento equivalente ao anterior para tratar a dualidade e a operação ($\star$) para as $q-formas$. Desse modo, se ϕ for uma $q-forma$, os componentes de seu dual serão dados por:

$$(\star \ \phi)_{i_{q+1} i_{q+2} ... i_n} \ = \ \frac{\sqrt{\mid g \mid}}{q!} \ \epsilon_{i_1 i_2 ... i_q i_{q+1} ... i_n} \ \phi^{i_1 i_2 ... i_q} \ = \ \tfrac{1}{q!} \ \eta_{i_1 i_2 ... i_q i_{q+1} ... i_n} \ \phi^{i_1 i_2 ... i_q} \ . \qquad (3.1.4.3)$$

2. Se α e β são $p-vetores$ $(q-formas)$ e **a** e **b** são escalares, então:

$$\star\,(a\;\alpha\;+\;b\;\beta)\;=\;a\,(\star\,\alpha)\;+\;b\,(\star\,\beta)\;. \qquad (3.1.4.4)$$

Exercícios (3.1.4)

EX.3.1.4.1 Seja $e_p\;=\;e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\,...\,\wedge e_{i_p}$. Demonstre que:

$$\star\star\;e_p\;=\;(-1)^{p(n-p)\;+\;\frac{(n-s)}{2}}\;e_p\;,$$

onde **s** é a assinatura da métrica.

Solução

Usando-se a expressão (3.1.4.1), teremos:

$$\star\star\;e_p\;=\;\frac{\sqrt{\mid g'\mid}}{(n\;-\;p)!}\;\varepsilon^{i_{p+1}i_{p+2}...i_n}_{i_1i_2...i_p}\;\star\,[e_{i_{p+1}}\wedge e_{i_{p+2}}\wedge\,...\,\wedge e_{i_n}]\;. \qquad (I)$$

Por outro lado, considerando-se que:

$$[e_{i_{p+1}}\wedge e_{i_{p+2}}\wedge\,...\,\wedge e_{i_n}]\in\bigwedge^{n-p}E\;,$$

e usando-se novamente a expressão (3.1.4.1), verifica-se que [lembrar que: $n-(n-p)\;=\;p$]:

$$\star\,[e_{i_{p+1}}\wedge e_{i_{p+2}}\wedge\,...\,\wedge e_{i_n}]\;=\;\frac{\sqrt{\mid g'\mid}}{p!}\;\varepsilon^{j_1j_2...j_p}_{i_{p+1}i_{p+2}...i_n}\;[e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\,...\,\wedge e_{j_p}]\;.$$

Em vista disso, a expressão (I) anterior ficará:

$$\star\star\;e_p\;=\;\frac{\mid g'\mid}{(n\;-\;p)!p!}\;\varepsilon^{i_{p+1}i_{p+2}...i_n}_{i_1i_2...i_p}\;\varepsilon^{j_1j_2...j_p}_{i_{p+1}i_{p+2}...i_n}\;[e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\,...\,\wedge e_{j_p}]\;=$$

$$=\;\frac{\mid g'\mid}{(n\;-\;p)!p!}\;g_{k_1i_1}\;g_{k_2i_2}\;\cdots\;g_{k_pi_p}\;g_{i_{p+1}j_{p+1}}\;g_{i_{p+2}j_{p+2}}\;\cdots\;g_{i_nj_n}\;\times$$

$$\times\;\varepsilon^{i_{p+1}...i_nk_1k_2...k_p}\;\varepsilon^{j_1j_2...j_pj_{p+1}...j_n}\;[e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\,...\,\wedge e_{j_p}]\;. \qquad (II)$$

Considerando-se que:

$$g_{k_1i_1}\;g_{k_2i_2}\;\cdots\;g_{k_pi_p}\;g_{i_{p+1}j_{p+1}}\;g_{i_{p+2}j_{p+2}}\;\cdots\;g_{i_nj_n}\;\varepsilon^{i_{p+1}...i_nk_1k_2...k_p}\;=\;\frac{1}{g'}\varepsilon_{j_{p+1}j_{p+2}...j_ni_1i_2...i_p}\;,$$

a expressão (II) ficará:

$$\star\star\, e_p \;=\; \frac{|\, g' \,|}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; \varepsilon^{j_1 j_2 ... j_p j_{p+1} j_{p+2} ... j_n}\; \varepsilon_{j_{p+1} j_{p+2} ... j_n i_1 i_2 ... i_p}\; [e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_p}] \;.$$

Permutando-se os índices do segundo ε, a expressão acima ficará:

$$\star\star\, e_p \;=\; \frac{|\, g' \,|}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; (-1)^{(n-p)}\; (-1)^{p}\; \varepsilon^{j_1 j_2 ... j_p j_{p+1} ... j_n}\; \varepsilon_{i_1 i_2 ... i_p j_{p+1} ... j_n}\; [e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_p}] \;.$$

Usando-se o resultado do Problema (2.1.4), a expressão anterior tomará a forma:

$$\star\star\, e_p \;=\; \frac{|\, g' \,|}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; (-1)^{p(n-p)}\; (n-p)!\; \varepsilon^{j_1 j_2 ... j_p}\; \varepsilon_{i_1 i_2 ... i_p}\; [e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_p}] \;.$$

Por fim, trocando-se $(j_1 j_2 ... j_p)$ por $(i_1 i_2 ... i_p)$ e usando-se ainda o resultado do Problema (2.1.4), teremos:

$$\star\star\, e_p \;=\; \frac{|\, g' \,|}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; (-1)^{p(n-p)}\; (n-p)!\; \varepsilon^{i_1 i_2 ... i_p}\; \varepsilon_{i_1 i_2 ... i_p}\; [e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}] \;=$$

$$=\; \frac{|\, g' \,|}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; (-1)^{p(n-p)}\; (n-p)!\; p!\; [e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}] \;.$$

Usando-se a expressão (1.1.3.15), teremos:

$$\star\star\, e_p \;=\; (-1)^{p(n-p)\;+\;\frac{(n-s)}{2}}\; e_p \;.$$

A partir dessa expressão, podemos, simbolicamente, escrever que:

$$(\star)^2 \;=\; (-1)^{p(n-p)\;+\;\frac{(n-s)}{2}} \qquad \rightarrow \qquad (\star)^{-1} \;=\; (-1)^{p(n-p)\;+\;\frac{(n-s)}{2}}\; \star \;.$$

É importante destacar que no caso do $\mathbf{R}^3$, em que $p \;=\; s \;=\; n$, temos:

$$(\star)^2 \;=\; 1 \qquad \rightarrow \qquad (\star)^{-1} \;=\; \star \;.$$

EX.3.1.4.2 Sejam (u, v, w) $1-$*vetores* pertencentes ao espaço vetorial $\mathbf{E}^3$. Demonstre que:

a. $\star\, (u \wedge v) \;=\; u \times v$;

b. $\star\, (u \wedge v \wedge w) \;=\; (u \times v)\; .\; w$,

onde $u \times v$ e $(u \times v)\; .\; w$ representam, respectivamente, o **Produto Vetorial** e o **Produto Misto** da Álgebra Vetorial.

Solução

a. Seja (e_i) uma base de E^3. Então, nessa base, podemos escrever:

$$u = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3 , \qquad v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 .$$

Usando-se as expressões (3.1.2.1b,c,d), teremos:

$$\star (u \wedge v) = \star [(u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3) \wedge (v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3)] =$$

$$= \star [(u^1 v^2 - u^2 v^1) e_1 \wedge e_2 + (u^1 v^3 - u^3 v^1) e_1 \wedge e_3 + (u^2 v^3 - u^3 v^2) e_2 \wedge e_3] =$$

$$= (u^1 v^2 - u^2 v^1) \star [e_1 \wedge e_2] + (u^1 v^3 - u^3 v^1) \star [e_1 \wedge e_3] + (u^2 v^3 - u^3 v^2) \star [e_2 \wedge e_3] .$$

Considerando-se que a base de E^3 seja ortonormada, isto é: $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \delta^{ij}$ e usando-se as expressões (3.1.4.1) e (2.1.3.1b,c), virá:

$$\star [e_1 \wedge e_2] = \tfrac{1}{(3-2)!} \varepsilon^3_{12} e_3 = \delta^{33} \varepsilon_{312} e_3 = \varepsilon_{312} e_3 = e_3 ,$$

$$\star [e_1 \wedge e_3] = \tfrac{1}{(3-2)!} \varepsilon^2_{13} e_2 = \delta^{22} \varepsilon_{213} e_2 = \varepsilon_{213} e_2 = - e_2 ,$$

$$\star [e_2 \wedge e_3] = \tfrac{1}{(3-2)!} \varepsilon^1_{23} e_1 = \delta^{11} \varepsilon_{123} e_1 = \varepsilon_{123} e_1 = e_1 .$$

De posse desses resultados, podemos escrever que:

$$\star (u \wedge v) = (u^2 v^3 - u^3 v^2) e_1 + (u^3 v^1 - u^1 v^3) e_2 + (u^1 v^2 - u^2 v^1) e_3 .$$

Usando-se a definição de produto vetorial entre dois vetores da Álgebra Vetorial, verifica-se que:

$$\star (u \wedge v) = u \times v .$$

b. Usando-se a expressão (3.1.2.3d), teremos:

$$\star [u \wedge v \wedge w] = \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{bmatrix} \star [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] .$$

Considerando-se que a base de E^3 seja ortonormada, isto é: $(\mathrm{e}_i, e_j) = \delta_{ij} = \delta^{ij}$ e usando-se as expressões (3.1.4.1) e (2.1.3.1b,c), virá:

$$\star [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] = \tfrac{1}{(3-3)!} \varepsilon_{123} = 1 .$$

Portanto:

$$\star \, [u \wedge v \wedge w] \;=\; \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{bmatrix} .$$

Usando-se a definição de produto misto entre três vetores da Álgebra Vetorial, verifica-se que:

$$\star \, (u \wedge v \wedge w) \;=\; (u \times v) \,.\, w \;= (uvw) \,.$$

$\boxed{\text{EX.3.1.4.3}}$ Seja o escalar 1 $(0 - vetor)$. Calcule $\star \, 1$.

Solução

Usando-se a expressão (3.1.4.1), virá:

$$\star \, 1 \;=\; \frac{\sqrt{\mid g' \mid}}{n!} \, \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \; e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \,.$$

Usando-se o resultado do Problema (2.1.4.III), isto é:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \;=\; n! \; \delta^1_{i_1} \; \delta^2_{i_2} \, \ldots \, \delta^n_{i_n} \,,$$

teremos:

$$\star \, 1 \;=\; \sqrt{\mid g' \mid} \, e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \,.$$

Observe-se que se considerarmos o escalar 1 como uma $0 - forma$, então:

$$\star \, 1 \;=\; \sqrt{\mid g \mid} \, \varepsilon^1 \, (x) \wedge \varepsilon^2 \, (x) \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n \, (x) \,.$$

3.1.5 Produto Interno entre p-vetores (formas)

Definição 3.1.5.1 - Produto Interno de dois p-vetores (formas). Sejam α e β dois $p - vetores$ $(formas)$ de mesma ordem. O **produto interno** $(\alpha, \; \beta)$ entre eles é definido de modo que tenhamos:

1. $\alpha \wedge (\star \, \beta) \;=\; (\alpha, \; \beta) \, (\star \, 1) \,,$ (3.1.5.1)
2. $\alpha \wedge (\star \, \beta) \;=\; \beta \wedge (\star \, \alpha) \,.$ (3.1.5.2)

Exercícios (3.1.5)

$\boxed{\text{EX.3.1.5.1}}$ Sejam **u** e **v** $1 - vetores$ pertencentes ao espaço vetorial $\mathbf{E}^3$. Demonstre que:

$$u \wedge (\star\, v) \;=\; (u \,.\, v)\,(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)\;,$$

onde $(u \,.\, v)$ representa o **Produto Escalar** da Álgebra Vetorial.

Solução

Seja (e_i) uma base de E^3. Então, nessa base, podemos escrever:

$$u \;=\; u^1\, e_1 \;+\; u^2\, e_2 \;+\; u^3\, e_3\;, \qquad v \;=\; v^1\, e_1 \;+\; v^2\, e_2 \;+\; v^3\, e_3\;.$$

Usando-se a expressão (3.1.4.4), teremos:

$$u \wedge (\star\, v) \;=\; (u^1\, e_1 \;+\; u^2\, e_2 \;+\; u^3\, e_3) \wedge \star\,(v^1\, e_1 \;+\; v^2\, e_2 \;+\; v^3\, e_3) \;=$$

$$=\; (u^1\, e_1 \;+\; u^2\, e_2 \;+\; u^3\, e_3) \wedge (v^1 \star e_1 \;+\; v^2 \star e_2 \;+\; v^3 \star e_3)\;. \qquad \text{(I)}$$

Considerando-se que a base de E^3 seja ortonormada, isto é: $(e_i,\, e_j) \;=\; \delta_{ij} \;=\; \delta^{ij}$ e usando-se as expressões (3.1.4.1) e (2.1.3.1b,c), virá:

$$\star\, e_1 \;=\; \tfrac{1}{(3-1)!}\,(\varepsilon_1^{23}\, e_2 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_1^{32}\, e_3 \wedge e_2) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{231}\, e_2 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_{321}\, e_3 \wedge e_2) \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{123}\, e_2 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_{123}\, e_2 \wedge e_3) \;=\; e_2 \wedge e_3\;,$$

$$\star\, e_2 \;=\; \tfrac{1}{(3-1)!}\,(\varepsilon_2^{13}\, e_1 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_2^{31}\, e_3 \wedge e_1) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{132}\, e_1 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_{312}\, e_3 \wedge e_1) \;=$$

$$=\; -\,\tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{123}\, e_1 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_{123}\, e_1 \wedge e_3) \;=\; -\, e_1 \wedge e_3\;,$$

$$\star\, e_3 \;=\; \tfrac{1}{(3-1)!}\,(\varepsilon_3^{12}\, e_1 \wedge e_2 \;+\; \varepsilon_3^{21}\, e_2 \wedge e_1) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{123}\, e_1 \wedge e_2 \;+\; \varepsilon_{213}\, e_2 \wedge e_1) \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{123}\, e_1 \wedge e_2 \;+\; \varepsilon_{123}\, e_1 \wedge e_2) \;=\; e_1 \wedge e_2\;.$$

Tomando-se os resultados acima e considerando-se as expressões (3.1.1.1b,c,d,e), a expressão (I) tomará a forma:

$$u \wedge (\star\, v) \;=\; (u^1\, e_1 \;+\; u^2\, e_2 \;+\; u^3\, e_3) \wedge (v^1\, e_2 \wedge e_3 \;-\; v^2\, e_1 \wedge e_3 \;+\; v^3\, e_1 \wedge e_2) \;=$$

$$=\; u^1\, v^1\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \;-\; u^2\, v^2\, e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \;+\; u^3\, v^3\, e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 \;=$$

$$=\; (u^1\, v^1 \;+\; u^2\, v^2 \;+\; u^3\, v^3)\,(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)\;.$$

Usando-se a definição de produto escalar entre dois vetores da Álgebra Vetorial, verifica-se que:

$$u \wedge (\star\, v) \;=\; (u \,.\, v)\,(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)\;.$$

Considerando-se que:

$$\star\,[e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] \;=\; 1\;,$$

podemos escrever que:

$$\star\,[u \wedge (\star\, v)] \;=\; (u \,.\, v)\;.$$

Problemas (3.1)

3.1.1 Demonstre a expressão (3.1.4.4).

3.1.2 Expresse em termos de Álgebra Exterior as seguintes expressões da Álgebra Vetorial:

a. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \;=\; (\vec{A}\,.\,\vec{C})\,\vec{B} \;-\; (\vec{A}\,.\,\vec{B})\,\vec{C}\;;$

b. $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) \;=\; (\vec{A} \times \vec{B}\,.\,\vec{D})\,\vec{C} \;-\; (\vec{A} \times \vec{B}\,.\,\vec{C})\,\vec{D}\;.$

3.1.3 Demonstre a expressão (3.1.5.2).

3.1.4 Seja um espaço quadridimensional de base ortonormada: $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$. Calcule os seguintes produtos $(\star)$:

a. $\star\, e_i$ (i = 1, 2, 2, 4); b. $\star\,(e_i \wedge e_j)$, $i \neq j$ (i, j = 1, 2 , 3, 4);

c. $\star\,(e_i \wedge e_j \wedge e_k)$, $i \neq j \neq k$ (i, j, k = 1, 2, 3, 4);

d. $\star\,(e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_m)$, $i \neq j \neq k \neq m$ (i, j, k, m = 1, 2, 3, 4).

3.1.5 Sejam: **u** um $q - vetor$, α uma $p - forma$ e β uma $(p - q) - forma$. Se:

$$\beta\; x \;=\; \alpha\;(u \wedge x), \qquad \forall\; x\; um (p - q) - vetor,$$

demonstre que:

$$(\alpha \wedge \beta)\; u \;=\; (\alpha\; u) \wedge \beta \;+\; (-)^p\; \alpha \wedge (\beta\; u)\;.$$

$\boxed{\text{Capítulo 4}}$

4.1 Diferenciação Exterior

4.1.1 Formas Diferenciais

Definição 4.1.1.1. Define-se **forma diferencial** ω **de grau p (p-forma)** a expressão:

$$\omega \ = \sum_{1 \ \leq \ i_1 \ < \ i_2 \ < \ ... \ i_p \ \leq \ n} a_{i_1 i_2 ... i_p} \ (x^1, \ x^2, \ ..., \ x^n) \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge ... \wedge dx^{i_p} \ , \qquad (4.1.1.1)$$

onde os coeficientes $\mathbf{a}_{i_1 i_2 ... i_p}$ são funções de classe C^∞ (infinitamente diferenciáveis) das variáveis $(x^1, \ x^2, \ ..., \ x^n)$ e completamente antissimétrica nos índices.

Observação

De modo geral, uma forma diferencial é definida em **variedades diferenciáveis** (*differentiable manifolds*), conforme veremos mais adiante.

Exemplos. Para o $\mathbf{R}^3$, temos:

1. **0-forma (escalar)**: $f \ = \ f(^1, \ x^2, \ x^3)$;
2. **1-forma (Pfaffiana)**: $\omega_1 \ = \ a_1 \ dx^1 + \ a_2 \ dx^2 \ + \ a_3 \ dx^3$;
3. **2-forma**: $\omega_2 \ = \ a_{12} \ dx^1 \wedge dx^2 \ + \ a_{13} \ dx^1 \wedge dx^3 \ + \ a_{23} \ dx^2 \wedge dx^3$;
4. **3-forma (volume)**: $\omega_3 \ = \ a_{123} \ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

$\boxed{\text{Exercícios (4.1.1)}}$

$\boxed{\text{EX.4.1.1.1}}$ Sejam as seguintes formas:

$$\alpha \ = \ a_1 \ dx \ + \ a_2 \ dy \ + \ a_3 \ dz \quad e \quad \beta \ = \ b_1 \ dx \wedge dy \ + \ b_2 \ dx \wedge dz \ + \ b_3 \ dy \wedge dz \ ,$$

calcule: $\alpha \wedge \beta$.

$\boxed{\text{Solução}}$

Usando-se a Definição (3.1.3.1), teremos:

$$\alpha \wedge \beta \ = \ (a_1 \ dx \ + \ a_2 \ dy \ + \ a_3 \ dz) \wedge (b_1 \ dx \wedge dy \ + \ b_2 \ dx \wedge dz \ + \ b_3 \ dy \wedge dz) \ =$$

$$= \ a_1 \ b_3 \ dx \wedge dy \wedge dz \ + \ a_2 \ b_2 \ dy \wedge dx \wedge dz \ + \ a_3 \ b_1 \ dz \wedge dx \wedge dy \ ,$$

$$\alpha \wedge \beta \ = \ (a_1 \ b_3 \ - \ a_2 \ b_2 \ + a_3 \ b_1) \ dx \wedge dy \wedge dz \ .$$

4.1.2 Diferenciação de Formas

Definição 4.1.2.1. Sejam α $(p - forma)$, β $(q - forma)$ e $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{K}$ (corpo). Define-se **diferenciação exterior d** como uma operação que transforma uma $r - forma$ numa $(r + 1) - forma$, com as seguintes propriedades:

1. $d(a\, \alpha \, + \, b\, \beta) \; = \; a\, d\alpha \, + \, b\, d\beta \;;$ (4.1.2.1a)

2. $d(\alpha \wedge \beta) \; = \; (d\alpha) \wedge \beta \, + \, (-1)^p\, \alpha \wedge d\beta \;;$ (4.1.2.1b)

3. **Lema de Poincaré**: $dd\alpha \; = \; d^2\alpha \equiv 0, \quad \forall\, \alpha \,.$ (4.1.2.1c)

Observações

1. A operação **d** é completamente independente de qualquer sistema de coordenadas;

2. A operação **d** é única.

3. No caso particular em que **f** e **g** são $0 - formas$ e α e β são $1 - formas$, teremos:

a) $d(fg) \; = \; df\; g \, + \, f\; dg \;,$ (4.1.2.1d)

b) $d(f\; \alpha) \; = \; df \wedge \alpha \, + \, f\; d\alpha \;,$ (4.1.2.1e)

c) $d(\alpha \wedge \beta) \; = \; d\alpha \wedge \beta \, - \, \alpha \wedge d\beta \;.$ (4.1.2.1f)

Exemplos. Para o $\mathbf{R}^3$, temos:

1. Seja a $0 - forma$ **f**: f = f(x, y, z). Então, do Cálculo Elementar podemos escrever **df** $(1 - forma)$ da seguinte maneira:

$$df \; = \; \frac{\partial\, f}{\partial\, x}\, dx \, + \, \frac{\partial\, f}{\partial\, y}\, dy \, + \, \frac{\partial\, f}{\partial\, z}\, dz \; = \; f_x\, dx \, + \, f_y\, dy \, + \, f_z\, dz \;.$$

2. Seja a $1 - forma\; \omega :\; \omega \; = \; f_1\, dx \, + \, f_2\, dy \, + \, f_3\, dz$, com f_i funções diferenciáveis de (x, y, z), então $d\omega$ é uma $2 - forma$ dada por:

$$d\omega \; = \; df_1 \wedge dx \, + \, df_2 \wedge dy \, + \, df_3 \wedge dz \;.$$

3. Seja a $2 - forma\; \alpha :\; \alpha \; = \; f_1\; d\, y \wedge d\, z \, + \, f_2\; d\, z \wedge d\, x \, + \, f_3\; d\, x \wedge d\, y$, com f_i funções diferenciáveis de (x, y, z), então $d\; \alpha$ é uma $3 - forma$ dada por:

$$d\; \alpha \; = \; d\; f_1 \wedge d\; y \wedge dz \, + \, d\; f_2 \wedge d\; z \wedge dx \, + \, d\; f_3 \wedge d\; x \wedge dy \;.$$

Propriedades de d. Vamos demonstrar as propriedades da Definição (4.1.2.1) em alguns casos particulares. Inicialmente, demonstremos a propriedade representada pela expressão (4.1.2.1.1b):

$$\boxed{d(\alpha \wedge \beta) \; = \; (d\alpha) \wedge \beta \, + \, (-1)^p\, \alpha \wedge d\beta}$$

Sejam α e β as seguintes formas:

$$\alpha \;=\; f\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}, \qquad \beta \;=\; g\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p}\ .$$

Usando-se as expressões (3.1.3.1a,b,c,d) e a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$\alpha \wedge \beta \;=\; fg\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge g\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p}\ ,$$

$$d\alpha \;=\; df \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_22} \wedge ... \wedge dx_{i_p}, \qquad d\beta \;=\; dg \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_q}\ ,$$

$$d(\alpha \wedge \beta) \;=\; d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_22} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge g\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p} \;=$$

$$=\; (f\ dg \;+\; g\ df) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p} \;=$$

$$=\; (df \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \wedge (g\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p}) \;+$$

$$+\; (-\,1)^p\ (f\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \wedge (dg \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p})\ ,$$

$$d(\alpha \wedge \beta) \;=\; d\alpha \wedge \beta \;+\; (-\,1)^p\ \alpha \wedge d\beta\ .$$

Observe-se que a demonstração acima foi feita considerando que as formas eram monomiais. No caso geral, isto é, para formas polinomiais, a demonstração é feita usando-se a linearidade dada pela expressão (4.1.2.1a).

Agora, demonstremos a propriedade representada pela expressão (4.1.2.1c):

Lema de Poincaré

1. Inicialmente, façamos a demonstração para uma $0 - forma\ \omega \;=\; f(x, y, z)$, onde **y** é derivável até segunda ordem, ou seja, ela possui as seguintes derivadas:

$$f_x,\;\; f_y,\;\; f_z,\;\; f_{xx},\;\; f_{xy} \;=\; f_{yx},\;\; f_{xz} \;=\; f_{zx},\;\; f_{yy},\;\; f_{yz} \;=\; f_{zy},\;\; f_{zz}\ .$$

Para essa forma e conforme vimos anteriormente, teremos:

$$d\omega \;=\; df \;=\; f_x\ dx \;+\; f_y\ dy \;+\; f_z\ dz\ .$$

Usando-se a Definição (4.1.2.1) e o Cálculo Elementar, virá:

$$d(d\omega) \;=\; d(df) \;=\; df_x \wedge dx \;+\; df_y \wedge dy \;+\; df_z \wedge dz \;=$$

$$=\; (f_{xx}\ dx \;+\; f_{yx}\ dy \;+\; f_{zx}\ dz) \wedge dx \;+\; (f_{xy}\ dx \;+\; f_{yy}\ dy \;+\; f_{zy}\ dz) \wedge dy \;+$$

$$+\; (f_{xz}\ dx \;+\; f_{yz}\ dy \;+\; f_{zz}\ dz) \wedge dz\ ,$$

$$d(d\omega) \ = \ (f_{xy} \ - \ f_{yx}) \ dx \wedge dy \ + \ (f_{zx} \ - \ f_{xz}) \ dz \wedge dx \ + \ (f_{yz} \ - \ f_{zy}) \ dy \wedge dz \ .$$

Como as derivadas cruzadas são iguais, teremos:

$$d(d\omega) \ = \ d(df) \ = \ 0 \ .$$

2. Agora, façamos a demonstração para uma p-forma monomial, ou seja:

$$\omega \ = f \ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \ .$$

Usando-se a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$d(d\omega) \ = \ d(df \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \ =$$

$$= \ d(df) \ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \ - \ df \wedge d(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \ .$$

Ora, como $d(df) \ = \ 0$, conforme demonstramos anteriormente, basta agora demonstrar que:

$$d(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \ = \ 0 \ .$$

Vamos fazer essa demonstração por indução. Se $\omega \ = \ f \ = \ x_i$, então $d(dx_i) \ = \ 0$, $\forall \ i$. Se $\omega \ = \ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}$, então, usando-se esse resultado, virá: $d(d\omega) \ = \ d(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) \ = \ d(dx_1) \wedge dx_2 \ - \ dx_1 \wedge d(dx_2) \ = \ 0$. Continuando esse raciocínio, pode-se assumir que:

$$d(dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_{p-1}}) \ = \ 0 \ .$$

Portanto, usando-se a Definição (4.1.2.1) e os resultados obtidos acima, teremos:

$$d(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \ = \ d(dx_{i_1}) \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \ - \ dx_{i_1} \wedge d(dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) = 0.$$

Isso completa a demonstração do **Lema de Poincaré** para o caso em que ω é uma $p-forma$ monomial. No caso geral, isto é, para formas polinomiais, a demonstração é feita usando a linearidade dada pela expressão (4.1.2.1a).

Observações sobre o Lema de Poincaré

1. Uma forma α, para a qual $\mathbf{d}\alpha = 0$, é dita **fechada**.

2. Uma forma β, que pode ser escrita como $\beta \ = \ d\alpha$ para algum α, é dita **exata**.

3. O **Lema de Poincaré** - $dd\alpha \ = \ 0$ - significa que uma forma exata é fechada e, portanto, pode ser enunciado da seguinte maneira:

Se ω é uma $p - forma$ para a qual existe uma $(p \ - \ 1) - forma \ \alpha$ tal que $d\alpha \ = \ \omega$, então $d\omega \ = \ 0$.

4. **Inversa do Lema de Poincaré**, também conhecida como *condição de integrabilidade*:

Se ω **é uma** $p-forma$ **(**$p \geq 1$**) tal que** $d\omega \; = \; 0$**, então existe uma** $(p-1)-forma$ α **(ou** $\alpha \; + \; d\phi$**), tal que** $\omega \; = \; d\alpha$ **.**

4.1. A demonstração desse Lema para $p \; > \; 1$, conforme se pode ver na Bibliografia citada no fim da Parte 1, é muito complicada, porque há muitas soluções. Assim, o resultado apresentado acima é válido somente para domínios não muito complicados topologicamente. Em vista disso, afirma-se que:

Uma forma fechada é apenas localmente exata.

4.2. A **Inversa do Lema de Poincaré** é usada em Física para mostrar a existência de potenciais.

Exercícios (4.1.2)

EX.4.1.2.1 Usando o R^3 e as coordenadas cartesianas $(x, \; y, \; z)$, escreva os operadores diferenciais (gradiente, rotacional, divergência e laplaciano) em termos de formas diferenciais.

Solução

Na solução desse problema, usaremos o Cálculo Diferencial, as Definições (3.1.3.1) e (4.1.2.1), as expressões (3.1.1.1b,c,d,e) e alguns resultados do Exercício (3.1.4.2), tais como:

$$\star \, dx \; = \; dy \wedge dz; \quad \star \, dy \; = \; dz \wedge dx; \quad \star \, dz \; = \; dx \wedge dy \; ;$$

$$\star \, (dx \wedge dy) \; = \; dz; \qquad \star \, (dz \wedge dx) \; = \; dy; \qquad \star \, (dy \wedge dz) = dx; \qquad \star \, dx \wedge dy \wedge dz \; = \; 1.$$

Gradiente(∇). Seja a $0-forma$ $f(x, \; y, \; z)$ que corresponde a uma função escalar. Calculando-se o seu diferencial, teremos:

$$df \; = \; \frac{\partial \, f}{\partial \, x} \, dx \; + \; \frac{\partial \, f}{\partial \, y} \, dy \; + \; \frac{\partial \, f}{\partial \, z} \, dz \; .$$

Comparando-se o resultado acima com a **operação gradiente** (∇) definida na Análise Vetorial, conclui-se que:

$$\boxed{\nabla \; = \; d}$$

Rotacional $(\nabla \; \times)$. Seja a $1-forma$ ω dada por:

$$\omega \; = \; f_1(x,y,z) \; dx \; + \; f_2(x,y,z) \; dy \; + \; f_3(x,y,z) \; dz \; ,$$

que corresponde a uma função vetorial $\vec{f}$, cujos componentes no espaço vetorial de base (dx, dy, dz) são f_1**,** f_2 **e** f_3. Calculando-se o seu diferencial, teremos:

$$d\omega \;=\; df_1 \wedge dx \;+\; df_2 \wedge dy \;+\; df_3 \wedge dz \;=$$

$$d\omega \;=\; (\tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, x}\; dx \;+\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, y}\; dy \;+\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, z}\; dz) \wedge dx \;+\; (\tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, x}\; dx \;+\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, y}\; dy \;+\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, z}\; dz) \wedge dy \;+$$

$$+\;(\tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, x}\; dx \;+\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, y}\; dy \;+\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, z}\; dz) \wedge dz\;,$$

$$d\omega \;=\; (\tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, x} \;-\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, y})\; dx \wedge dy \;+\; (\tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, z} \;-\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, x})\; dz \wedge dx \;+\; (\tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, y} \;-\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, z})\; dy \wedge dz\;.$$

Agora, calculemos o operador ($\star$) da expressão acima:

$$\star\,\omega \;=\; (\tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, x} \;-\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, y}) \star (dx \wedge dy) \;+\; (\tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, z} \;-\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, x}) \star (dz \wedge dx) \;+$$

$$+\;(\tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, y} \;-\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, z}) \star (dy \wedge dz)\;,$$

$$\star\,\omega \;=\; (\tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, y} \;-\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, z})\; dx \;+\; (\tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, z} \;-\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, x})\; dy + \;(\tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, x} \;-\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, y})\; dz\;.$$

Comparando-se o resultado acima com a **operação rotacional** ($\nabla\,\times$) definida na Análise Vetorial, conclui-se que:

$$\boxed{\nabla\,\times \;=\; \star\, d}$$

Divergência (∇ .) Consideremos a $1 - forma\ \omega$ dada no item anterior:

$$\omega \;=\; f_1(x,y,z)\; dx \;+\; f_2(x,y,z)\; dy \;+\; f_3(x,y,z)\; dz\;,$$

e calculemos $\star\,\omega$:

$$\star\,\omega \;=\; f_1 \star dx \;+\; f_2 \star dy \;+\; f_3 \star dz\;,$$

$$\star\,\omega \;=\; f_1\; dy \wedge dz \;+\; f_2\; dz \wedge dx \;+\; f_3\; dx \wedge dy\;.$$

Calculando-se o diferencial da expressão acima, resultará:

$$d \star \omega \;=\; d\;(f_1\; dy \wedge dz \;+\; f_2\; dz \wedge dx \;+\; f_3\; dx \wedge dy) \;=$$

$$d\; f_1 \wedge dy \wedge dz \;+\; d\; f_2 \wedge dz \wedge dx \;+\; d\; f_3 \wedge dx \wedge dy \;=$$

$$= (\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz) \wedge dy \wedge dz +$$

$$+ (\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz) \wedge dz \wedge dx +$$

$$+ (\frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} dz) \wedge dx \wedge dy ,$$

$$d \star \omega = (\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz .$$

Aplicando-se a operação $\star$ ao resultado anterior, virá:

$$\star d \star \omega = (\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}) \star (dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} .$$

Comparando-se o resultado acima com a **operação divergência** (∇ .) definida na Análise Vetorial, conclui-se que:

$$\boxed{\nabla . = \star d \star}$$

Observações sobre a Divergência

1. Para o caso de espaços cujas métricas têm $\mathbf{s} \neq \mathbf{n}$, define-se uma generalização da divergência - a **coderivada** δ - da seguinte maneira:

$$\delta = (-)^p \star^{-1} d \star . \qquad (4.1.2.1.2)$$

Essa operação transforma uma $p - forma$ em uma $(p - 1) - forma$.

2. Uma forma α, para a qual $\delta\alpha = 0$, é dita **cofechada**.

3. Uma forma β, que pode ser escrita como $\beta = \delta\alpha$ para algum α, é dita **coexata**.

Laplaciano (Δ). Seja a $0-forma$ $f(x, y, z)$ que corresponde a uma função escalar. Calculando-se o seu diferencial, teremos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz .$$

Calculando-se o operador ($\star$) da expressão acima, virá:

$$\star df = \frac{\partial f}{\partial x} \star dx + \frac{\partial f}{\partial y} \star dy + \frac{\partial f}{\partial z} \star dz =$$

$$\star df = \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} \star dx \wedge dy .$$

Agora, calculemos o diferencial da expressão acima:

$$d \star df \;=\; d(\frac{\partial\, f}{\partial\, x}) \wedge dy \wedge dz \,+$$

$$+\, d(\frac{\partial\, f}{\partial\, y}) \wedge dz \wedge dx \;+\; d(\frac{\partial\, f}{\partial\, z}) \wedge dx \wedge dy \;,$$

$$d \star df \;=\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, x^2}\, dx \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, x\, \partial\, y}\, dy \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, x\, \partial\, z}\, dz) \wedge dy \wedge dz \,+$$

$$+\, (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, y\, \partial\, x}\, dx \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y^2}\, dy \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y\, \partial\, z}\, dz) \wedge dz \wedge dx \,+$$

$$+\, (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, z\, \partial\, x}\, dx \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z\, \partial\, y}\, dy \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z^2}\, dz) \wedge dx \wedge dy \;,$$

$$d \star df \;=\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, x^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z^2})\, dx \wedge dy \wedge dz \;.$$

Aplicando-se a operação $\star$ ao resultado anterior, virá:

$$\star\, (d \star df) \;=\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, x^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z^2}) \star (dx \wedge dy \wedge dz) \;=\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, x^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z^2}) \;.$$

Comparando-se o resultado acima com a **operação laplaciano** (Δ) definida na Análise Vetorial, conclui-se que:

$$\boxed{\Delta = \;\star\, d \star d}$$

Observações sobre o Laplaciano

1. Para o caso de espaços cujas métricas têm $\mathbf{s} \neq \mathbf{n}$, Georges de Rham (1955) definiu o operador **Laplaciano** (Δ_R) da seguinte maneira:

$$\Delta_R \;=\; (d \;+\; \delta)^2 \;=\; d\, \delta \;+\; \delta\, d \;. \qquad (4.1.2.3)$$

Essa operação, que leva uma $p - forma$ numa $p - forma$, tem as seguintes propriedades:

$$d\, \Delta_R \;=\; \Delta_R\, d; \qquad \star\, \Delta_R \;=\; \Delta_R\, \star; \qquad \delta\, \Delta_R \;=\; \Delta_R\, \delta \;.$$

2. Para $0 - formas$, Δ_R reduz-se ao operador usual de Laplace-Beltrami: Δ.

3. No R^3, onde a métrica usual permite identificar 1-formas com vetores e $\star^{-\,1} \;=\; \star$, esse operador de Rham aplicado a vetores é o operador Δ de Laplace-Beltrami, com o sinal trocado. Assim:

$$\Delta\, \vec{A} \;=\; -\, \Delta_R \;=\; -\, (d\, \delta \;+\; \delta\, d)\, \vec{A} \;= -\, [d\, (-)\, (\star\, d\, \star)\, \vec{A} \;+\; (\star\, d)\, (\star\, d)\, \vec{A}] \;,$$

$$\Delta\, \vec{A} \;=\; \nabla\, \nabla\, .\, \vec{A} \;-\; \nabla \times \nabla \times \vec{A} \;. \qquad (4.1.2.4)$$

$\boxed{\text{EX.4.1.2.2}}$ Use o **Lema de Poincaré** e demonstre que:

1. $\nabla \times (\nabla f) \ = \ 0$; 2. $\nabla \ . \ (\nabla \times \vec{f}) \ = \ 0$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

1. Usando-se o resultado do Exercício anterior e o **Lema de Poincaré**, teremos:

$$\nabla \times (\nabla f) \ = \ (\star \ d) \ df \ = \ \star \ ddf \ = \ 0 \ .$$

2. Usando-se o resultado do Exercício anterior e o **Lema de Poincaré**, teremos:

$$\nabla \ . \ (\nabla \times \vec{f}) \ = \ (d \ \star) \star d\vec{f} \ = \ d \star^2 d\vec{f} \ .$$

Considerando o resultado do Exercício (3.1.4.1), ou seja:

$$(\star^2) \ = \ 1 \ ,$$

teremos:

$$\nabla \ . \ (\nabla \times \vec{f}) \ = \ dd\vec{f} \ = \ 0 \ .$$

$\boxed{\text{EX.4.1.2.3}}$ Use a Definição (4.1.2.1) e demonstre que:

1. $\nabla \ (fg) \ = \ g \ \nabla f \ + \ f \ \nabla g$;
2. $\nabla \times (f\vec{A}) \ = \ \nabla f \times \vec{A} \ + \ f \ \nabla \times \vec{A}$;
3. $\nabla \ . \ (f\vec{A}) \ = \ \nabla f \ . \ \vec{A} \ + \ f \ \nabla \ . \ \vec{A}$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Para resolvermos esse Exercício, vamos usar os resultados obtidos no Capítulo 3 e no Exercício anterior, quais sejam:

$$\vec{A} \ . \ \vec{B} \ \leftrightarrow \ \star \ (\alpha \wedge \star \ \beta); \qquad \vec{A} \times \vec{B} \ \leftrightarrow \ \star(\alpha \wedge \beta) \ .$$

$$\nabla \ \leftrightarrow \ d; \qquad \nabla \ . \ \vec{A} \ \leftrightarrow \ \star \ [d \ (\star \ \alpha)]; \qquad \nabla \times \vec{A} \ \leftrightarrow \ \star(d\alpha) \ .$$

1. Como **f** e **g** são $0 - formas$, a expressão (4.1.2.1d) nos dará:

$$\nabla \ (fg) \ \leftrightarrow \ d \ (fg) \ = \ df \ g \ + \ f \ dg \ ,$$

$$\nabla \ (fg) \ = \ g \ \nabla f \ + \ f \ \nabla g \ ;$$

2. Usando-se a expressão (4.1.2.1e), teremos:

$$\nabla \,.\, (f\vec{A}) \;\leftrightarrow\; \star \Big(d[\star\,(f\alpha)] \Big) \;=\; \star \Big(df \wedge \star\, \alpha \,+\, f\, d(\star\, \alpha) \Big) \;=\; \star\,(df \wedge \star\, \alpha) \,+\, f\, \star[d(\star\alpha)],$$

$$\nabla \,.\, (f\vec{A}) \;=\; \nabla\, f \,.\, \vec{A} \,+\, f\, \nabla \,.\, \vec{A}\,.$$

3. Usando-se a expressão (4.1.2.1e), teremos:

$$\nabla \times (f\vec{A}) \;\leftrightarrow\; \star\, d(f\alpha) \;=\; \star\,(df \wedge \alpha \,+\, f\, d\alpha) \;=\; \star\,(df \wedge \alpha) \,+\, f\,[\star\,(d\alpha)]\,,$$

$$\nabla \times (f\vec{A}) \;=\; \nabla\, f \times \vec{A} \,+\, f\, \nabla \times \vec{A}\,.$$

4.1.3 Aplicações e Mudança de Variáveis

Definição 4.1.3.1. Define-se uma **aplicação** (*mapping*) ψ como uma regra que assinala a cada ponto $\mathbf{x} = (x^1,\ x^2,\ ...\ x^m) \in E^m$, um ponto $\mathbf{y} = (y^1,\ y^2,\ ...\ y^n) \in E^n$, isto é:

$$\psi : \quad E^m \quad \rightarrow \quad E^n : \quad \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y}\,.$$

Desse modo, podemos escrever que:

$$y^i \;=\; y^i(x^1,\ ...\ x^m)\,, \qquad \text{i} = 1,\, 2,\, 3,\, ...,\, \text{n}. \qquad (4.1.3.1)$$

Observações

1. Uma aplicação ψ é dita **diferenciável** se as funções coordenadas definidas por (4.1.3.1) são continuamente diferenciáveis (C^∞);

2. Uma aplicação é dita **um-a-um** se um e somente um ponto em E^m corresponde a um e somente um ponto em E^n;

3. A **aplicação inversa** $\psi^{-\,1}$ de ψ existe se ψ é um-a-um, e é denotada por:

$$\psi^{-\,1} : \quad E^n \quad \rightarrow \quad E^m\,.$$

4. De um modo geral, a aplicação ψ é definida entre variedades diferenciáveis, quando se estuda espaços vetoriais que não sejam euclidianos (E^n).

Definição 4.1.3.2. Dada a aplicação $\psi\ :\ E^m \ \rightarrow\ E^n$, define-se ψ^* como uma aplicação (*pullback*) que transforma cada $p - forma$ $\alpha \in \mathrm{F}^p(E^n)$ em uma $p - forma$ $\alpha^* \in F^p(E^m)$, isto é:

$$\psi^* : \quad F^p(E^n) \quad \rightarrow \quad F^p(E^m). \qquad [\mathbf{y} \;=\; \mathbf{y}(\mathbf{x})] \qquad (4.1.3.2)$$

Observação

A idéia básica da aplicação ψ^* é fazer a substituição:

$$dy^i \;=\; \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\, dx^j \ ,$$

e usar as regras da Álgebra Exterior.

Exemplos. Consideremos as seguintes formas:

1. $0 - forma:\ f$. Então:

$$\psi^* f \;=\; f \circ \psi \ ,$$

onde $(\circ)$ é a composição de funções (regra da cadeia) do Cálculo Elementar.

2. $1 - forma:\ \alpha \;=\; a_i(\mathbf{y})\ dy^i$. Então:

$$\psi^* \alpha \;=\; a_i[\mathbf{y}(\mathbf{x})]\ \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\ dx^j \ ,$$

3. $2 - forma:\ \beta \;=\; dy^1 \wedge dy^2$. Considerando-se que: $y^i \;=\; y^i(x^1,\ x^2)$ (i = 1, 2), teremos:

$$\psi^* \beta \;=\; \psi^*(dy^1 \wedge dy^2) \;=\; (\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\ dx^1 \;+\; \frac{\partial y^1}{\partial x^2}\ dx^2) \wedge (\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\ dx^1 \;+\; \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\ dx^2) \;=$$

$$=\; (\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\ \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \;-\; \frac{\partial y^1}{\partial x^2}\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1})\ dx^1 \wedge dx^2 \;=\; \frac{\partial(y^1,\ y^2)}{\partial(x^1,\ x^2)}\ dx^1 \wedge dx^2 \ ,$$

$$\psi^* \beta \;=\; \psi^*(dy^1 \wedge dy^2) \;=\; J\ dx^1 \wedge dx^2 \ ,$$

onde **J** é o **jacobiano** do Cálculo Elementar, dado por:

$$J \;=\; \frac{\partial(y^1,\ y^2)}{\partial(x^1,\ x^2)} \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} y^1_{x^1} & y^1_{x^2} \\ y^2_{x^1} & y^2_{x^2} \end{bmatrix} .$$

Propriedades de ψ^*. A aplicação ψ^*, definida pela expressão (4.1.3.2), tem as seguintes propriedades:

1. $\psi^*(\alpha \;+\; \beta) \;=\; \psi^* \alpha \;+\; \psi^* \beta$, (4.1.3.2a)

2. $\psi^*(\alpha \wedge \beta) \;=\; (\psi^* \alpha) \wedge (\psi^*)\beta$, (4.1.3.2b)

3. $\psi^*(d\alpha) \;=\; d(\psi^* \alpha)$, (4.1.3.2c)

4. Se $\phi:\ E^m \;\rightarrow\; E^n$, $\psi:\ E^n \;\rightarrow\; E^r$ e $\psi \circ \phi:\ E^m \;\rightarrow\; E^r$, então:

$$(\psi \circ \phi)^* \alpha \;=\; (\phi^* \circ \psi^*)\alpha \quad \text{ou} \quad (\psi \circ \phi)^* \;=\; \phi^* \circ \psi^* \ . \qquad (4.1.3.2d,e)$$

Observações

1. Na expressão (4.1.3.2a), as formas α e β devem ter o mesmo grau, enquanto na (4.1.3.2b) elas podem ter graus diferentes.

2. A expressão (4.1.3.2c) mostra que a diferenciação exterior **d** é invariante por uma transformação de coordenadas.

3. As expressões (4.1.3.2d,e) representam a **regra da cadeia** para as derivadas parciais do Cálculo Elementar.

Vamos verificar as três primeiras propriedades de ψ^* no seguinte caso particular. Seja a aplicação ψ definida por:

$$\psi : E^m \to E^n, \quad x = u + v, \quad y = u - v\ ,$$

e as seguintes formas:

$$\alpha = xy\ dx \quad \text{e} \quad \beta = y\ dy.$$

1. Propriedade representada pela expressão (4.1.3.2a):

$$\boxed{\psi^*(\alpha + \beta) = \psi^*\alpha + \psi^*\beta}$$

Para os valores dados acima, teremos:

$$\psi^*\alpha = \psi^*(xy\ dx) = (u + v)(u - v)\ d(u + v) = (u^2 - v^2)\ (du + dv)\ ,$$

$$\psi^*\beta = \psi^*(y\ dy) = (u - v)\ d(u - v) = (u - v)\ (du - dv)\ ,$$

$$\psi^*(\alpha + \beta) = \psi^*(xy\ dx + y\ dy) = (u + v)(u - v)\ d(u + v) + (u - v)\ (du - dv) =$$

$$= (u^2 - v^2)\ (du + dv) + (u - v)\ (du - dv)\ .$$

Comparando-se os resultados acima, verifica-se que:

$$\psi^*(\alpha + \beta) = \psi^*\alpha + \psi^*\beta\ .$$

2. Propriedade representada pela expressão (4.1.3.2b):

$$\boxed{\psi^*(\alpha \wedge \beta) = (\psi^*\alpha) \wedge (\psi^*)\beta}$$

Considerando-se os mesmos dados e resultados do item anterior, virá:

$$\psi^*(\alpha \wedge \beta) = \psi^*(xy\ dx \wedge y\ dy) = (u + v)(u - v)\ d(u + v) \wedge (u - v)\ d(u - v) =$$

$$= (u^2 - v^2)\ (du + dv) \wedge (u - v)\ (du - dv) = \psi^*\alpha \wedge \psi^*\beta\ .$$

3. Propriedade representada pela expressão (4.1.3.2c):

$$\boxed{\psi^*(d\alpha) \;=\; d(\psi^*\alpha)}$$

Para os valores de α e $\psi^*\alpha$ dados acima e considerando-se as propriedades do produto exterior entre formas (Definição (3.1.1.3)), teremos:

$$d\alpha \;=\; d(xy\;dx) \;=\; d(xy) \wedge dx \;=\; (x\;dy \;+\; y\;dx) \wedge dx \;=\; -\;x\;dx \wedge dy\;,$$

$$d(\psi^*\alpha) \;=\; d[(u^2 \;-\; v^2)\;(du \;+\; dv)] \;=\; d(u^2 \;-\; v^2) \wedge du \;+\; d(u^2 \;-\; v^2) \wedge dv \;=$$

$$=\;(2u\;du \;-\; 2v\;dv) \wedge du \;+\; (2u\;du \;-\; 2v\;dv) \wedge dv \;=\; 2(u+\;v)\;du \wedge dv\;,$$

$$\psi^*(d\alpha) \;=\; \psi^*(-\;x\;dx \wedge dy) \;=\; -\;(u \;+\; v)\;d(u \;+\; v) \wedge d(u \;-\; v) \;=$$

$$=\;-\;(u \;+\; v)\;(du \;+\; dv) \wedge (du \;-\; dv) \;=\; 2(u \;+\; v)\;du \wedge dv \;=\; d(\psi^*\alpha)\;.$$

4. Propriedade representada pela expressão (4.1.3.2d):

$$\boxed{(\psi \circ \phi)^*\alpha \;=\; (\phi^* \circ \psi^*)\alpha}$$

Para verificar essa propriedade, consideremos uma $0 - forma$ **f** e as regras de composição do Cálculo Elementar. Então:

$$(\psi \circ \phi)^* f \;=\; f \circ (\psi \circ \phi) \;=\; \phi^*(f \circ \psi) \;=\; (\phi^* \circ \psi^*) f\;.$$

Exercícios (4.1.3)

EX.4.1.3.1 Se $\alpha \;=\; x\;dy$, calcule $\psi^*\alpha$, para a seguinte aplicação:

$$\psi: \quad E^1 \quad \rightarrow \quad E^2: \quad t \quad \rightarrow \quad (x \;=\; t^2, y \;=\; t^3)\;.$$

Solução

Usando-se a Definição (4.1.3.2), teremos:

$$\psi^*\alpha \;=\; (t^2)\;\tfrac{\partial y}{\partial t}\;dt \;=\; (t^2)\;\tfrac{\partial}{\partial t}\;(t^3)\;dt \;=\; 3\;t^4\;dt\;.$$

EX.4.1.3.2 Dada a aplicação:

$$\psi : \quad R^2 \quad \to \quad R^2 : \quad (\rho, \theta) \quad \to \quad (x \ = \ \rho \ cos\theta, \ y \ = \ \rho \ sen\theta) \ ,$$

calcule:

1. $\psi^* E \ = \ \psi^*[X \ (x, \ y) \ dx \ + \ Y \ (x, \ y) \ dy]$;
2. $\psi^*(dx \wedge dy)$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

1. Usando-se as Definições (4.1.3.2) e (3.1.1.3), virá:

$$\psi^* E \ = \ X'(\rho, \theta) \ (\tfrac{\partial x}{\partial \rho} \ d\rho \ + \ \tfrac{\partial \ x}{\partial \theta} \ d\theta) \ + \ Y'(\rho, \theta) \ (\tfrac{\partial y}{\partial \rho} \ d\rho \ + \ \tfrac{\partial \ y}{\partial \theta} \ d\theta) \ =$$

$$= \ X'(\rho, \theta) \ (cos\theta \ d\rho \ - \ sen\theta \ d\theta) \ + \ Y'(\rho, \theta) \ (sen\theta \ d\rho \ + \ cos\theta \ d\theta) \ =$$

$$= \ [X'(\rho, \theta) \ cos\theta \ + \ Y'(\rho, \theta) \ sen\theta] \ d\rho \ + \ [\ - \ X'(\rho, \theta) \ sen\theta \ + \ Y'(\rho, \theta) \ cos\theta] \ d\theta \ ,$$

$$\psi^* E \ = \ R(\rho, \theta) \ d\rho \ + \ \Theta(\rho, \theta) \ d\theta \ ,$$

onde:

$$R(\rho, \theta) \ = \ X'(\rho, \theta) \ cos\theta \ + \ Y'(\rho, \theta) \ sen\theta \ ,$$

$$\Theta \ (\rho \ \theta) \ = \ - \ X'(\rho, \theta) \ sen\theta \ + \ Y'(\rho, \theta) \ cos\theta \ ,$$

$$X' \ = \ \psi^* X \ = \ X \circ \psi \qquad Y' \ = \ \phi^* Y \ = \ Y \circ \psi \ .$$

2. Usando-se os resultados do item anterior, podemos escrever:

$$\psi^*(dx \wedge dy) \ = \ (\tfrac{\partial x}{\partial \rho} \ d\rho \ + \ \tfrac{\partial \ x}{\partial \theta} \ d\theta) \wedge (\tfrac{\partial y}{\partial \rho} \ d\rho \ + \ \tfrac{\partial \ y}{\partial \theta} \ d\theta) \ =$$

$$= \ (\tfrac{\partial x}{\partial \rho} \ \tfrac{\partial \ y}{\partial \theta} \ - \ \tfrac{\partial \ x}{\partial \theta} \ \tfrac{\partial y}{\partial \rho} \ ) \ d\rho \wedge d\theta \ = \ (cos\theta \ \rho \ cos\theta \ + \ sen\theta \ \rho \ sen\theta) \ d\rho \wedge d\theta \ ,$$

$$\psi^*(dx \wedge dy) \ = \ \rho \ d\rho \wedge d\theta \ .$$

Observe-se que ρ representa justamente o jacobiano da aplicação dada.

4.1.4 Variedades e Sistemas de Coordenadas

Até aqui, consideramos a Diferenciação Exterior **d** sobre os espaços vetoriais euclidianos E^n e, também, usamos as coordenadas cartesianas (x^i, i = 1, 2, ... , n). Isso significa dizer que trabalhamos num **subconjunto aberto** de E^n ou, equivalentemente, que esse espaço foi **embebido** num plano. Contudo, existem espaços geométricos que não podem ser considerados como subconjuntos abertos de E^n. Por exemplo, a superfície $\mathbf{S}^2$ de uma esfera do $\mathbf{R}^3$ não pode ser embebida em um plano. Assim, considerando-se que a operação **d** independe de sistemas de coordenadas, segundo a expressão (4.1.3.2c), vamos estudar essa operação **d** naqueles espaços geométricos que são, genericamente, conhecidos como **variedades** (**manifolds**). Para isso, vamos antes apresentar algumas definições.

Definição 4.1.4.1. Um **espaço topológico ET** é um par $(E,\ T)$, onde **E** é um conjunto não vazio de pontos e **T** é uma família de subconjuntos abertos $\mathbf{U}_i$ $(i \in I)$ de **E** satisfazendo as seguintes condições:

1. $E,\ \emptyset \in T \qquad (\emptyset =$ conjunto vazio);
2. $\bigcap_{i\, \in\, J} U_i \ \in \ T \qquad (J \subset I, \quad J =$ finito);
3. $\bigcup_{i\, \in\, J} U_i \ \in \ T \qquad (J \subset I)$.

Os elementos de **E** são chamados de **abertos** e **T** de **topologia** do ET.

Exemplo. Seja um espaço topológico simples constituído por quatro elementos:

$$E \ = \ \{a, b, c, d\} \ .$$

Enquanto a seguinte família de subconjuntos abertos:

$$T \ = \ \Big\{\{a\},\ \{a, b\},\ \{a,\ b,\ d\},\ E,\ \emptyset\ \Big\} \ ,$$

forma uma topologia, pois satisfaz às condições da Definição (4.1.4.1), o mesmo não acontece com a família de subconjuntos abertos:

$$T' \ = \ \Big\{\{a\},\ \{a, b\},\ \{b,\ c,\ d\},\ E,\ \emptyset\ \Big\} \ ,$$

pois:

$$\{\ a,\ b\} \quad \cap \quad \{b,\ c,\ d\} \ = \ \{\ b\} \quad \notin \quad T' \ .$$

Observações

1. Os mais conhecidos espaços topológicos são: a reta (R), o plano (R^2), o espaço (R^3) e a superfície esférica (S^2).

2. Um espaço topológico (E, T) é dito um **espaço topológico de Hausdorff - ETH** quando:

$$\forall\ x,\ y \in E, \quad \exists \quad (U, V) \in T \quad \rightarrow \quad U \cap V \ = \ \emptyset \quad (x \in U, \quad y \in V, \quad x \neq y) \ .$$

3. Dois espaços topológicos $(E_i,\ T_i)$ (i = 1, 2) são chamados **homeomórficos** ou topologicamente equivalentes se:

$$\exists\, f:\ E_1 \to E_2 \qquad \text{tal que} \qquad (f,\ f^{-1}) \text{ são contínuas.}$$

Nesse caso, a aplicação bijetiva **f** é chamada um **homeomorfismo**.

4. Um espaço topológico $(E,\ T)$ é dito **compacto**, se ele é um ETH e se cada **cobertura** tem uma **subcobertura** finita. Registre-se que uma família de abertos dada por $U\ =\ (A_i \mid i \in I) \in$ E é chamada **cobertura** de E, se:

$$A_i\ \neq\ \emptyset, \qquad E\ =\ \bigcup_{i\ \in\ I} A_i\ ,$$

e de **subcobertura**, se:

$$E\ =\ \bigcup_{j\ \in\ J\ \subset\ I} A_j\ .$$

Definição 4.1.4.2. Uma **base** para uma topologia **T** é uma coleção **B** de seus abertos $(B \subset T)$ tal que qualquer membro **U** de **T** pode ser obtido como uma união dos elementos de **B**.

Observação

No caso da reta (R), uma base possível é aquela formada por todos os intervalos abertos:

$$(a,\ b)\ =\ \{\ x \mid a\ <\ x\ <\ b\ \}\ .$$

Exemplo. Seja o espaço topológico constituído por três elementos:

$$E\ =\ \{a,\ b,\ c\}\ .$$

Sejam, também, as seguintes famílias de subconjuntos abertos:

$$T\ =\ \Big\{\ \emptyset,\ \{b\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}\ =\ E\ \Big\}\ ,$$

$$B\ =\ \Big\{\ \emptyset,\ \{b\},\ \{a,\ c\}\ \Big\}\ .$$

Verifica-se que **T** define uma topologia em **E**, tendo **B** como uma possível base.

Com efeito, para verificar que **T** define uma topologia, temos de ver se ela satisfaz as condições da Definição (4.1.4.1). Assim:

a) $E\ , \emptyset \in T$;

b) $\{b\} \cap \{a,\ c\}\ =\ \emptyset \in T$;

c) $\{b\} \cap \{a,\ b,\ c\}\ =\ \{a,\ c\} \in T$;

d) $\{a,\ c\} \cap \{a,\ b,\ c\}\ =\ \{b\} \in T$;

e) $\{b\} \cup \{a,\ c\} \ = \ \{a,\ b,\ c\} \in T$;
f) $\{a,\ c\} \cup \{a,\ b,\ c\} \ = \ \{a,\ b,\ c\} \in T$.

Por outro lado, para mostrar que **B** define uma base de **T**, vamos usar a Definição (4.1.4.2). Assim:
a) $\Big\{ \emptyset,\ \{b\},\ \{a,\ c\} \Big\}(=\ B) \subset \Big\{ \emptyset,\ E,\ \{b\},\ \{a,\ c\} \Big\}(=\ T)$;
b) $\{b\ \} \ = \ \{b\ \} \cup \emptyset$;
c) $\{a,\ c\ \} \ = \ \{a,\ c\ \} \cup \emptyset$;
d) $\{a,\ b,\ c\} \ = \ \{b\ \} \cup \{a,\ c\}$.

Definição 4.1.4.3. Um conjunto **M** de pontos é denominado uma **variedade** (**manifold**) se cada ponto $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$ tem um conjunto aberto (vizinhança) **U** que é homeomórfico a um conjunto aberto em algum E^n, ou seja, se se pode definir uma aplicação ψ um-a-um em E^n:

$$\phi : \quad U \quad \rightarrow \quad U' \quad \subset \quad E^n \ ,$$

com **U'** um aberto em E^n.

Observações

1. A variedade **M** é um espaço topológico de Hausdorff **localmente "quase" euclidiano**;

2. A variedade **M** tem a mesma dimensão **n** em todos os seus pontos;

3. A variedade **M** tem uma base que é **enumerável**. É oportuno registrar que um conjunto **X** é dito enumerável quando existe uma aplicação:

$$f : \quad N \quad \rightarrow \quad X \ ,$$

onde **f** é bijetiva e **N** é o conjunto dos números naturais.

Definição 4.1.4.4. Define-se uma **carta** (ou **sistema de coordenadas locais**) **c** em uma variedade **M** como um terno $c \ = \ (U,\ \psi,\ n)$, tal que:

1. $U \subset M$ é aberto;

2. $\psi : \ U \quad \rightarrow \quad U' \ = \ \psi(U) \subset E^n$ é aberto e ψ é um homeomorfismo;

3. $n\ (\geq 0) \in Z$ é a dimensão de **c**.

Observações

1. Daqui para a frente, desde que não haja perigo de confusão, uma carta será denotada por $(U,\ \psi)$.

2. O homeomorfismo ψ pode ser definido no sentido inverso ($\psi^{-\ 1}$), isto é, de um conjunto aberto de $\mathbf{E}^n$ para alguma vizinhança de um ponto $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$. Neste caso ele é chamado uma **parametrização**.

Definição 4.1.4.5. Duas cartas $(U_1,\ \psi_1)$ e $(U_2,\ \psi_2)$ são ditas **C^k-compatíveis** quando:

1. ou $U_1 \cap U_2 \ = \ \emptyset \qquad ou \qquad U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$;
2. as aplicações:

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-\,1}: \quad \psi_2(U_1 \cap U_2) \quad \to \quad \psi_1(U_1 \cap U_2)\ ,$$

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-\,1}: \quad \psi_1(U_1 \cap U_2) \quad \to \quad \psi_2(U_1 \cap U_2)\ ,$$

são de classe C^k, ou seja, existem as **k** primeiras derivadas.

Observações

1. Seja ψ_1 uma aplicação que leva qualquer ponto $\mathbf{P} \in (U_1 \cap U_2)$ em um aberto de E^n $(\psi_1(U_1))$, digamos o ponto $(x^1,\ x^2,\ ...,\ x^n)$, e ψ_2 uma aplicação que leva o mesmo ponto **P** em um outro aberto de E^n $(\psi_2(U_2))$, digamos o ponto $(y^1,\ y^2,\ ...,\ y^n)$. As relações funcionais definidas abaixo:

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-\,1}: \quad E^n \quad \to \quad E^n, \quad [y^i \ = \ y^i(x^i)\ , \quad \mathrm{i} = 1,\, 2,\, ...,\, \mathrm{n}] \qquad (4.1.4.1a)$$

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-\,1}: \quad E^n \quad \to \quad E^n, \quad [x^j \ = \ x^j(y^j)\ , \quad \mathrm{j} = 1,\, 2,\, ...,\, \mathrm{n}] \qquad (4.1.4.1b)$$

são chamadas de **transformações de coordenadas**. É importante destacar que se o determinante da matriz jacobiana que caracteriza cada uma dessas transformações for maior que zero, isto é:

$$det(\psi_2 \circ \psi_1^{-\,1}) \ > \ 0 \qquad \text{ou} \qquad det(\psi_1 \circ \psi_2^{-\,1}) \ > \ 0\ ,$$

a variedade **M** é dita **orientável**. Se o determinante for negativo, **M** é dita **não-orientável**, como acontece, por exemplo, com a **fita de Möbius** e a **garrafa de Klein**.

2. Os sistemas de coordenadas usualmente considerados (cartesiano, polar, elíptico, etc.) formam um sistema de funções coordenadas. Esta é uma distinção relevante, uma vez que tal sistema necessita de um número diferente de cartas para "plotar" a variedade **M**. Contudo, enquanto o sistema cartesiano (x, y) é bastante para "plotar" o R^2, o mesmo não acontece com o sistema polar (r, ϕ), pois a coordenada ϕ não se relaciona com um homeomorfismo, já que os pontos $\phi \ = \ 0$ e $\phi \ = \ 2\pi$ são coincidentes. É oportuno observar que a mais popular singularidade na Física - a **singularidade de Schwarzschild** - não é real, ela decorre da escolha de um sistema de coordenadas.

Definição 4.1.4.6. Define-se **atlas** sobre uma variedade **M** a reunião de cartas $(U_i,\ \phi_i)$ C^k-compatíveis que cobre **M**, isto é:

$$\bigcup_{i\,\in\,I} U_i \ = \ M\ .$$

Observações

1. Se todas as cartas são relacionadas por aplicações lineares em suas intersecções, teremos um **atlas linear**.

2. Toda variedade compacta pode ser coberta por atlas finitos, isto é, um atlas com um número finito de cartas.

3. O espaço euclidiano E^n é uma variedade cujo atlas é composto de uma única carta. Neste caso, esse espaço é automaticamente orientável.

Exemplo. Seja a circunferência S^1 definida por:

$$S^1 = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} .$$

Consideremos uma aplicação ψ_1^{-1} definida pela coordenada polar:

$$\psi_1^{-1}: \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi) \quad \to \quad S^1, \quad \phi \quad \to \quad (x = cos\phi, \ y = sen\phi) .$$

Verifica-se que ϕ_1^{-1} não é homeomórfica, pois o ponto $(1,\ 0)$ sobre S^1 é o mesmo para dois valores de ϕ $(0,\ 2\pi)$. Porém, se considerarmos a aplicação:

$$\psi_1^{-1}: \quad (0 < \phi < 2\pi) \quad \to \quad S^1, \quad \phi \quad \to \quad (x = cos\phi, \ y = sen\phi) .$$

verifica-se que:

$$\psi_1^{-1} \, (0 < \phi < 2\pi) = U = S^1 - \{ \, (1, 0) \, \}, \qquad U \subset S^1 .$$

Desse modo, o par $(U\ , \psi)$ representa uma carta em $\mathbf{S}^1$. Porém, como **U** não cobre toda a variedade S^1, precisamos encontrar uma outra carta. Assim, consideremos a aplicação ψ_2^{-1} definida por:

$$\psi_2^{-1}: \quad (-\pi < \phi < \pi) \quad \to \quad S^1, \quad \phi \quad \to \quad (x = cos\phi, \ y = sen\phi) .$$

Então:

$$\psi_2^{-1} \, (-\pi < \phi < \pi) = V = S^1 - \{ \, (-1, 0) \, \}, \qquad V \subset S^1 ,$$

define uma nova carta dada por (V, ψ_2). Ora, como:

$$U \ \cup \ V = S^1 ,$$

então essas duas cartas constituem um atlas para a variedade S^1, de acordo com a Definição (4.1.4.6).

Definição 4.1.4.7. Um atlas definido em uma variedade **M** é dito **diferenciável** se todas as transformações de coordenadas são aplicações diferenciáveis (C^∞).

Observação

Tomemos as transformações de coordenadas definidas pelas expressões (4.1.4.1a,b). Diferenciando-se as mesmas e usando-se a regra da cadeia, virá:

$$\delta^i_k \;=\; \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\;.$$

Essa expressão indica que ambos os jacobianos das transformações de coordenadas - $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ e $\frac{\partial x^j}{\partial y^k}$ - são diferentes de zero.

Definição 4.1.4.8. Um atlas diferenciável em uma variedade **M** é dito um **atlas maximal** ou **completo**, quando não pode estar contido propriamente em nenhum outro atlas diferenciável em **M**.

Definição 4.1.4.9. Define-se uma **variedade diferenciável** como sendo uma variedade topológica **M** com um atlas diferencial completo ou maximal.

Exemplo. O R^n é uma variedade diferenciável e o seu atlas é constituído de uma única carta:

$$U \;=\; (R^n, I), \qquad I(identidade): \;\; R^n \quad \rightarrow \quad R^n\;,$$

onde as funções coordenadas dessa carta são as coordenadas canônicas $(x^1,\ x^2,\ ...,\ x^n)$. Observe-se que quando R^n é considerada como uma variedade diferenciável ela é então conhecida como um **espaço afim**.

Definição 4.1.4.10. Sejam **M** e **N** duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação contínua $f \;:\; M \;\rightarrow\; N$ é dita **diferenciável em um ponto p** ($p \in M$) se dadas as cartas $(U\ ,\ g)$ de **M** e $(V\ ,\ h)$ de **N**, a aplicação definida por:

$$h \circ f \circ g^{-1}: \;\; g(U) \quad \rightarrow \quad h(V)\;,$$

é diferenciável ($\in C^k$) no ponto $g(p)$.

Observações

1. A aplicação $h \circ f \circ g^{-1}$ está definida em $g[f^{-1}(V) \cup U]$.

2. A aplicação **f** é dita **diferenciável** se ela é diferenciável em todos os pontos de **M**.

3. Se **f** é uma bijeção e sua inversa f^{-1} é também diferenciável, então **f** é denominada **difeomorfismo**. É interessante destacar que uma variedade diferenciável é difeomórfica ao espaço E^n, o que significa dizer que ela se comporta localmente como E^n.

Definição 4.1.4.11. Seja **M** uma variedade diferenciável e **N** um subconjunto de **M** ($N \subset M$). Então **N** é chamada de **subvariedade diferenciável** de **M** se, para todo ponto **p** $\in$ **N**, existe uma carta $(U\ ,\ f)$ do atlas de **M**, tal que:

$$p \in U \quad \rightarrow \quad f(p) \;=\; 0 \in E^n\;;$$

$$f(U \cap N) \ = \ f(U) \cap E^m \ .$$

Definição 4.1.4.12. Sejam **M** e **N** duas variedades diferenciáveis. A aplicação diferenciável $f \ : \ M \ \rightarrow \ N$ é dita uma **imersão** se as cartas $(U \ , \ g)$ $(g \ : \ U \ \rightarrow \ U' \subset E^m)$ e $(V \ , \ h)$ $(h \ : \ V \ \rightarrow \ V' \subset E^n \ (m \ < \ n))$ podem ser escolhidas de tal modo que:

$$h \circ f \circ g^{-1} \ : \ g(U) \quad \rightarrow \quad h(V) \ ,$$

é uma inclusão, isto é, quando consideramos que E^m como $E^m \times \{ \ 0 \ \} \subset E^n$.

Observações

1. A representação de **f** em coordenadas locais é dada por:

$$(x^1, \ x^2, \ ... \ x^m) \quad \rightarrow \quad (x^1, \ x^2, \ ... \ x^m, \ 0, \ ..., \ 0) \ .$$

2. Se:

a) $f(M) \subset N$ é uma subvariedade de N ;

b) $f \ : \ M \ \rightarrow \ f(M)$ é um difeomorfismo,
então **f** é denominada um **mergulho** ("imbed") e, conseqüentemente, se diz que **M** está mergulhada em **N**.

Exemplos

1. A aplicação **f** definida por:

$$f \ : \ E^1 \ \rightarrow \ E^2; \qquad f(x) \ = \ (cos \ 2\pi x, \ sen \ 2\pi x) \ ,$$

é uma **imersão** com $f(E^1) \ = \ S^1 \subset E^2$. Assim, se diz que o círculo (S^1) está imerso (embebido) e não mergulhado no plano.

2. A aplicação definida por:

$$f \ : \ E^1 \ \rightarrow \ E^3; \qquad f(x) \ = \ (cos \ 2\pi x, \ sen \ 2\pi x, \ x) \ ,$$

é um **mergulho**. Assim, se diz que a hélice $f(E^1)$ está mergulhada ou embebida no espaço. É oportuno destacar que as superfícies não-orientáveis (sem fronteiras), tais como a fita de Möbius e a garrafa de Klein, são imersas ou embebidas no E^4.

4.1.5 Campos Vetoriais e Tensoriais sobre Variedades

Definição 4.1.5.1. Seja **p** um ponto de uma variedade **M** e **R(M)** o conjunto de todas as funções com valores reais, definidas e diferenciáveis em alguma vizinhança de **p**. Define-se um **vetor tangente** $\mathbf{V}_p$ no ponto **p** como a aplicação (operador):

$$V_p \ : \ R(M) \ \rightarrow \ E^1 \ ,$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. $V_p(af \ + \ bg) \ = \ a \, V_p(f) \ + \ b \, V_p(g), \quad \forall \, a, \ b \in K; \quad \forall \, f, g \in R(M)$, (4.1.5.1a)

2. $V_p(f.g) \ = \ f(p) \, V_p(g) \ + \ g(p) \, V_p(f)$. (Regra de Leibniz) (4.1.5.1b)

Observações

1. Sendo a expressão (4.1.5.1b) uma conseqüência da expressão (4.1.2.1b) (lembrar que **f** é uma $0 - forma$), resulta então que a aplicação V_p é uma **derivada**.

2. Para uma constante **c**, tem-se: $V_p(c) \ = \ 0$. Vejamos como demonstrar essa afirmação. Fazendo-se $f \ = \ g \ = 0$ em (4.1.5.1a), teremos $V_p(0) \ = \ 0$. Considerando-se $f \ = \ g \ = \ 1$ em (4.1.5.1b), virá $V_p(1) \ = \ 2 \, V_p(1) \ \rightarrow \ V_p(1) \ = \ 0$. Por fim, colocando-se $f \ = \ 1, g \ = \ 0$ e a $\neq 0$, a expressão (4.1.5.1a) resultará: $V_p(a) \ = \ 0$.

Exemplo. Seja $x(p) \ = \ (x^1, \ x^2, \ ..., \ x^n)$ um sistema de coordenadas local válido em alguma vizinhança de $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$. Usando-se o Cálculo Elementar, é fácil ver que a aplicação definida por:

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p \ : \ R(M) \ \rightarrow \ E^1 \ ,$$

satisfaz as expressões (4.1.5.1a,b).

Definição 4.1.5.2. O conjunto $T_p(\mathbf{M})$ de todos os vetores tangentes a **M** no ponto **p** é denominado **espaço tangente**.

Observações

1. O espaço $T_p(M)$ é um espaço vetorial gerado pelos vetores tangentes a todas as curvas que passam por $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$. Ele tem a mesma dimensão de **M**, não importa quão curvado seja **M**, e é isomorfo a E^n. Registre-se que os vetores tangentes são comumente chamados **vetores** ou ainda **vetores contravariantes**.

2. Para um sistema de coordenadas local (x^i) válido em alguma vizinhança de $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$, as aplicações (operadores) $\{ \ \frac{\partial}{\partial x^i} \ = \ \partial_i \ \}$ formam uma **base natural** ou **base coordenada** do espaço vetorial $T_p(M)$. Saliente-se que quando $\mathbf{M} = E^3$, ∂_i é o conhecido operador ∇:

$$\partial_i \equiv \nabla \ .$$

2.1. Qualquer vetor $V_p \in T_p(M)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$V_p \ = \ V_p^i \, \partial_i \ = \ V_p(x^i) \, \partial_i \ . \qquad (4.1.5.2a)$$

É oportuno notar que a expressão (4.1.5.2a) tem sua gênese no desenvolvimento em série de Taylor de uma dada função **f(x)**. Com efeito, considerando-se um ponto $(x \ = \ p \ + \ v)$ muito próximo de **p**, o desenvolvimento de Taylor de **f(x)** será dado por:

$$f(x \ = \ p \ + \ v) \ = \ f(p) \ + \ v \ \frac{d(f(x)}{dx}|_{x \ = \ p} + \ ... \ , \qquad (4.1.5.2b)$$

onde $\frac{d(f(x)}{dx}|_{x\ =\ p}$ representa a inclinação de $\mathbf{f(x)}$ no ponto $\mathbf{p}$. Assim, se tivermos uma variedade n-dimensional com coordenadas x^i, poderemos ter **n** direções diferentes, de modo que o segundo termo da equação (4.1.5.2b) torna-se:

$$v^i\ \frac{\partial(f(x)}{\partial x^i}|_{x\ =\ p}\ .$$

Em vista do exposto acima, o termo:

$$v^i\ \frac{\partial}{\partial x^i}|_{x\ =\ p}\ , \qquad (4.1.5.2c)$$

idêntico à expressão (4.1.5.2a), é denominado **derivada direcional**.

2.2. Quando uma variedade **M** é embebida em um espaço vetorial, um vetor tangente $V_p \in T_p(M)$ pode ser considerado como um **vetor velocidade** no tempo $t\ =\ 0$, para um ponto que descreve uma curva $\gamma(\mathrm{t})$ passando através de **p** no tempo nulo [$\gamma(0)\ =\ p$]. Essa curva é associada a uma **derivada direcional** que indica a taxa de variação no tempo 0 de uma função **f** definida sobre **M**:

$$(\frac{d[\gamma(t)]}{dt})_{t=0}\ =\ \partial_{t\ =\ 0}\ f[\gamma(t)]\ . \qquad (4.1.5.2d)$$

2.3. Para uma transformação de coordenadas $(\bar{x}\ \rightarrow\ \bar{x}\ (\mathbf{x}))$, a regra da cadeia do Cálculo Elementar nos mostra que:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\ =\ \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\ \frac{\partial}{\partial x^j}\ . \qquad (4.1.5.2e)$$

3. Segundo vimos no tópico (1.1) do Capítulo 1, um espaço vetorial admite sempre um espaço vetorial dual. Ora, sendo $T_p(M)$ um espaço vetorial, o seu dual - $T_p^*(M)$ - será constituído pelas aplicações lineares:

$$\omega_p\ :\ T_p(M)\ \ \rightarrow\ \ E^1\ .$$

Esse espaço é denominado **espaço cotangente** de **M** em **p**, e seus elementos são chamados **covetores**, ou **vetores covariantes**, ou ainda $1 - formas$. Esse espaço tem a mesma dimensão de $T_p(M)$. É oportuno salientar que, conforme vimos ainda no item (1.1), dada uma base arbitrária $\{\ e_i\ \}$ de $T_p(M)$, existe uma única base $\{\ \varepsilon^j\ \}$ de $T_p^*(M)$, chamada sua **base dual**, com a propriedade dada pela expressão (1.1.2.2a), ou seja:

$$\varepsilon^j\ (e_i)\ =\ \delta_i^j\ . \qquad (4.1.5.3)$$

3.1. Na Mecânica Clássica, o espaço tangente corresponde ao **espaço de velocidades** $\dot{q}^i$ e o espaço cotangente ao **espaço dos momentos** p_i, ambos relativos ao **espaço das configurações** q^i.

4. A reunião dos espaços $T_p^*(M)$ para todo **p** é denominada **espaço fibrado ("bundle") tangente** $T^*(M)$ sobre **M**:

$$T^*(M) \ = \ \bigcup_p \ T_p^*(M) \ .$$

Definição 4.1.5.3. Seja **f** $\in C^\infty(U, E^1)$ e $\mathbf{p} \in U \subset M$. Define-se a **diferencial** de **f** em **p** o número $(df)_p$ dado por:

$$(df)_p \ : \ T_p(M) \quad \to \quad E^1 \ ,$$

$$v \ \to \ (df)_p(v) \ = \ v(f), \qquad \forall \ v \in T_p(M) \ . \qquad (4.1.5.4)$$

Observações

1. Consideremos um sistema de coordenadas locais ($\mathbf{x}^i$) em uma vizinhança de **p**. Segundo vimos acima, $\{ \ (\frac{\partial}{\partial x^i})_p \ \}$ formam uma base para $T_p(M)$.

1.1. Segundo a expressão (4.1.5.2a), para $v \in T_p(M)$ podemos escrever:

$$v \ = \ a^i \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p, \qquad (a^i \in K) \ .$$

Aplicando-se a expressão (4.1.5.4) ao resultado acima, virá:

$$(df)_p(v) \ = \ (df)_p[a^i \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p] \ = \ a^i \ (\tfrac{\partial f}{\partial x^i})_p \quad \to \quad (df)_p \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p \ = \ (\tfrac{\partial f}{\partial x^i})_p \ . \qquad (4.1.5.5a)$$

Em particular, se fizermos $\mathbf{f} = x^j$ ($x^j \ : \ M \quad \to \quad E^i$), a expressão (4.1.5.5a) nos dá:

$$(dx^j)_p \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p \ = \ (\tfrac{\partial x^j}{\partial x^i})_p \ = \ \delta_i^j \ . \qquad (4.1.5.5b)$$

Comparando-se as expressões (4.1.5.3) e (4.1.5.5b), verifica-se que $\{(dx^1)_p, \ ..., \ (dx^n)_p \ \}$ é a base do espaço dual $T_p^*(M)$. É oportuno destacar que esse resultado nos mostra que as **formas diferenciais** dx^i não são os **incrementos** da variável x^i, como indicam alguns textos clássicos do Cálculo Elementar, e sim, elas representam uma aplicação (operador) linear.

1.2. Para uma transformação de coordenadas: $\bar{x} \to \bar{x}$ ($\mathbf{x}$), a regra da cadeia do Cálculo Elementar nos mostra que:

$$d\bar{x}^i \ = \ \tfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \ dx^j \ . \qquad (4.1.5.5c)$$

2. Considerando-se que $(df)_p \in T_p^*(M)$ e usando-se o resultado acima, podemos escrever:

$$(df)_p \ = \ a_j \ (dx^j)_p, \quad (a_j \in K) \ . \qquad (4.1.5.6a)$$

Usando-se a expressão acima no lado esquerdo da expressão (4.1.5.5a) e usando-se, também, a expressão (4.1.5.5b), virá:

$$(df)_p \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p \ = \ a_j \ (dx^j) \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p \ = \ a_j \ \delta_i^j \ = \ a_i \ .$$

Em vista disso, a expressão (4.1.5.5a) tomará a seguinte forma:

$$(df)_p \ = \ (\tfrac{\partial f}{\partial x^i})_p \ (dx^i)_p \ , \qquad (4.1.5.6b)$$

que representa a expressão usual para a diferencial de uma função real do Cálculo Elementar. Esse resultado explica por que os membros do espaço cotangente são também chamados de **1-formas**.

Definição 4.1.5.4. Define-se um **campo de vetores X** em uma variedade diferenciável **M** como uma aplicação **X** que associa a cada ponto **p** $\in$ **M** um vetor tangente $X_p \in T_p(M)$:

$$X \ : \ p \in M \quad \rightarrow \quad X_p \in T_p(M) \ .$$

Observações

1. Seja $(x^1, \ x^2, \ ... \ x^n)$ um sistema de coordenadas locais em um conjunto aberto **U** $\subset$ **M**; então $\forall$ **p** $\in$ **U**, teremos:

$$X_p \ = \ X_p^i \ \tfrac{\partial}{\partial x^i}|_p \ , \qquad (4.1.5.7a)$$

onde X_p^i são os componentes de **X** relativamente ao sistema (x^i).

2. Seja **f** o conjunto das funções diferenciáveis em **M** $[f \in R(M)]$. Então, usando-se a expressão (4.1.5.7a), teremos:

$$(Xf)_p \ = \ X_p^i \ \tfrac{\partial f}{\partial x^i}|_p \ , \qquad (4.1.5.7b)$$

3. No item (2.1) do Capítulo 2, estudamos os tensores definidos em espaços vetoriais euclidianos e seus respectivos espaços duais. Agora, podemos generalizar o que foi estudado nesse item, definindo **tensores em variedades diferenciáveis**. Assim, considerando-se as bases desses espaços ($\{e_i\}$ e $\{\varepsilon^j(x)\}$) e, também, a expressão (4.1.5.5b), podemos fazer a seguinte correspondência:

$$e_i \quad \rightarrow \quad \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \varepsilon^j(x) \quad \rightarrow \quad dx^j \ .$$

Portanto, a expressão (2.1.1.2a) será escrita da seguinte maneira:

$$t \ = \ t^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q} \ \tfrac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \tfrac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes ... \otimes \tfrac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes ... \otimes dx^{j_q} \ . \qquad (4.1.5.8a)$$

3.1. Para uma transformação de coordenadas $\bar{x} \rightarrow \bar{x} \ (\mathbf{x})$, teremos:

$$\bar{t}^{\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_p}_{\bar{b}_1 \bar{b}_2 ... \bar{b}_q} \ = \ \tfrac{\partial \bar{x}^{\bar{a}_1}}{\partial x^{c_1}} \ \tfrac{\partial \bar{x}^{\bar{a}_2}}{\partial x^{c_2}} \ ... \ \tfrac{\partial \bar{x}^{\bar{a}_p}}{\partial x^{c_p}} \ \tfrac{\partial x^{d_1}}{\partial x^{\bar{b}_1}} \ \tfrac{\partial x^{d_2}}{\partial x^{\bar{b}_2}} \ ... \ \tfrac{\partial x^{d_q}}{\partial x^{\bar{b}_q}} \ t^{c_1 c_2 ... c_p}_{d_1 d_2 ... d_q} \ . \qquad (4.1.5.8b)$$

Registre-se que a maioria dos livros sobre Cálculo Tensorial apresenta a expressão acima como a definição de **tensor**.

Definição 4.1.5.5. Sejam **X** e **Y** dois campos de vetores de uma variedade diferenciável **M** e **f** uma função diferenciável também de **M** [$f \in R(M)$]. Define-se **comutador** entre **X** e **Y** da seguinte maneira:

$$[X,\ Y](f) \ = \ (XY \ - \ YX)(f) \ = \ X\,Y(f) \ - Y\,X(f)\ , \qquad (4.1.5.9)$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $[X,\ Y] \ = \ -\ [Y,\ X]\ ;$ (4.1.5.9a)
2. $[aX \ + \ bY,\ Z] \ = \ a\,[X,\ Z] \ + \ b\,[Y,\ Z]; \quad \forall\ a, b \in K\ ,$ (4.1.5.9b)
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$; (Identidade de Jacobi) (4.1.5.9c)
4. $[fX,\ gY] \ = \ fg\,[X,\ Y] \ + \ f\,X(g)Y \ - \ g\,Y(f)X; \quad \forall\ f, g \in R(M)\ .$ (4.1.5.9d)

Observações

1. Uma Álgebra satisfazendo as expressões (4.1.5.9,a,b,c,d) é denominada **Álgebra de Lie**.

2. O produto (operador) **XY** definido abaixo:

$$(XY)f \ = \ X(Yf) \ = \ X^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j\,\frac{\partial f}{\partial x^j}) \ = \ X^i\,\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial f}{\partial x^j} \ + \ X^i\,Y^j\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\ ,$$

não pertence ao espaço tangente devido à presença do último termo na expressão acima.

Definição 4.1.5.6. Seja uma variedade diferenciável **M** e um conjunto aberto **U** da mesma, isto é, U $\subset$ M. Um conjunto $\{\ X_i\ \}$ de **m** campos vetoriais é chamado uma **base local** ("local frame", "comoving frame" ou "vielbein") se, para qualquer **p** $\in$ **U**, $\{\ X_{(p)i}\ \}$ é uma base de $\mathbf{T}_p\mathbf{(M)}$. Isto significa que cada $\mathbf{X}_{(p)i}$ é um vetor tangente de **M** em **p** e que o conjunto deles é linearmente independente.

Observações

1. Qualquer conjunto de **m** campos de vetores linearmente independentes pode ser usado como uma base local. Para algumas variedades existe uma **base global**, enquanto que para outros, somente base local. Registre-se que, quando $m \ = \ 4$, a base local se denomina **tetrada**.

2. Uma base local $\{\ X_i\ \}$, diretamente relacionada a um sistema de coordenadas locais definido em **U**, é dita **holonômica**, ou **coordenada**, se:

$$[X_i,\ X_j](f) \ = \ 0, \quad \forall\ f \in R(M)\ . \qquad (4.1.5.10a)$$

No caso contrário, isto é:

$$[X_i,\ X_j](f) \neq 0\ , \qquad (4.1.5.10b)$$

ela é dita **não-holonômica** ou **não-coordenada**.

2.1. Se $(x^1,\ x^2,\ ...,\ x^m)$ são coordenadas sobre **U**, então o conjunto de campos de vetores tangentes:

$$\{\ \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\ \}, \quad \forall\ p \in U\ ,$$

forma uma **base coordenada** ou **base holonômica**, considerando-se que ela satisfaz a expressão (4.1.5.10b), em virtude da igualdade das derivadas cruzadas conforme se demonstra no Cálculo Elementar. Cada elemento dessa base $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ representa um vetor tangente à linha coordenada ao longo da qual somente x^i varia, enquanto as outras coordenadas permanecem fixas.

2.2. No caso de uma base não-holonômica o comutador de quaisquer de seus elementos pode ser expandido nessa mesma base, isto é:

$$[X_i,\ X_j]\ =\ C_{ij}^k\ X_k\ , \qquad (4.1.5.11)$$

onde C_{ij}^k são chamados os **coeficientes de estrutura** da Álgebra correspondente.

2.3. Dada uma base não-holonômica $\{\ X_i\ \}$, é sempre possível escrevê-la em alguma base coordenada, ou seja:

$$X_i\ =\ X_i^j\ \frac{\partial}{\partial x^j}\ .$$

Exemplos

1. Seja $(x,\ y,\ z)$ um sistema de coordenadas cartesianas no E^3. A base holonômica correspondente ao mesmo será: $(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z})$ que representam, respectivamente, vetores ortonormados tangentes aos eixos coordenados **x**, **y** e **z**, isto é: $(\hat{e}_x,\ \hat{e}_y,\ \hat{e}_z)$. Observe-se que esse sistema representa a carta $(E^3\ ,\ I)$, onde **I** é a identidade:

$$I\ :\ E^3\ \rightarrow\ E^3,\quad (x,\ y,\ z)\ \rightarrow\ (x,\ y,\ z)\ .$$

2. Seja $(r\ ,\ \theta)$ um sistema de coordenadas polares de $\mathbf{E}^2$. A base holonômica correspondente a esse sistema será: $(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial \theta})$ que representam, respectivamente, vetores tangentes às retas concorrentes passando na origem, e às circunferências centradas também na origem, isto é: $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta)$. Registre-se que esse sistema representa a carta $(E^2\ ,\ f)$, onde:

$$f\ :\ E^2\ \rightarrow\ E^2,\quad (\mathrm{r},\ \theta)\ \rightarrow\ (x\ =\ r\ cos\theta,\ y\ =\ r\ sen\theta)\ ,$$

onde:

$$0 \leq r\ <\ \infty, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\ \pi\ .$$

3. Seja $(r\ ,\ \theta,\ \phi)$ um sistema de coordenadas esféricas do E^3. A base holonômica correspondente ao mesmo será: $(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial \theta},\ \frac{\partial}{\partial \phi})$ que representam, respectivamente, vetores tangentes às retas concorrentes passando pela origem, às circunferências centradas na origem e situadas no plano (x, y), e às circunferências centradas na origem e situadas no plano perpendicular ao plano $(x\ ,\ y)$ e contendo o eixo dos **z**, isto é: $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\phi)$. Note-se que esse sistema representa a carta $(E^3\ ,\ f)$, onde:

$$f\ :\ E^3\ \rightarrow\ E^3,\ \ (\mathrm{r},\ \theta,\ \phi)\ \rightarrow\ (x\ =\ r\ sen\theta\ cos\phi,\ y\ =\ r\ sen\theta\ sen\phi,\ z\ =\ r\ cos\theta)\ ,$$

onde:

$$0 \leq r\ <\ \infty, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\,\pi\ .$$

3.1. Para o sistema de coordenadas esféricas definido acima, a base definida por:

$$X_r\ =\ \frac{\partial}{\partial r}, \quad X_\theta\ =\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad X_\phi\ =\ \frac{1}{r\ sen\theta}\,\frac{\partial}{\partial \phi}\ ,$$

é uma base não-holonômica cujos coeficientes de estrutura são obtidos por intermédio da expressão (4.1.5.11), da seguinte maneira.

$$[X_r,\ X_\theta]\ =\ C^r_{r\theta}\,X_r\ +\ C^\theta_{r\theta}\,X_\theta\ +\ C^\phi_{r\theta}\ =\ [\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}]\ =\ \frac{\partial}{\partial r}\,(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta})\ -\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\frac{\partial}{\partial r})\ =$$

$$=\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\ -\ \frac{1}{r}\,(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta})\ -\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r}\ =\ -\ \frac{1}{r}\,(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta})\ =\ -\ \frac{1}{r}\,X_\theta\ =\ C^r_{r\theta}\,X_r\ +\ C^\theta_{r\theta}\,X_\theta\ +\ C^\phi_{r\theta}\,X_\phi\ .$$

Portanto:

$$C^r_{r\theta}\ =\ C^\phi_{r\theta}\ =\ 0; \quad C^\theta_{r\theta}\ =\ -\ \frac{1}{r}\ .$$

De modo análogo, podemos mostrar que:

$$C^\phi_{r\phi}\ =\ -\ \frac{1}{r}; \quad C^\phi_{\theta\phi}\ =\ -\ \frac{1}{r\ tg\theta}\ ,$$

e os demais coeficientes são nulos.

Exercícios (4.1.5)

EX.4.1.5.1 Para o sistema de coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \phi)$ definido por:

$$f\ :\ (r, \theta,\ \phi)\ \rightarrow\ (x\ =\ r\ sen\theta\ cos\phi,\ y\ =\ r\ sen\theta\ sen\phi,\ z\ =\ r\ cos\theta)\ ,$$

$$f^{-1}\ :\ (x,\ y,\ z)\ \rightarrow\ \Big(r\ =\ \sqrt{x^2\ +\ y^2 +\ z^2},\ \theta\ =\ tg^{-1}\,(\frac{\sqrt{x^2\ +\ y^2}}{z}),\ \phi\ =\ tg^{-1}\,(\frac{y}{x})\ \Big)\ ,$$

encontre as bases holonômica e dual.

$\boxed{\text{Solução}}$

a) **Base holonômica**. Usando-se a regra da cadeia (expressão (4.1.5.2e)) para a transformação de coordenadas **f** considerada, virá:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} = cos\phi\ sen\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + sen\phi\ sen\theta\ \frac{\partial}{\partial y} + cos\theta\ \frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} = r\ cos\theta\ cos\phi\ \frac{\partial}{\partial x} + r\ cos\theta\ sen\phi\ \frac{\partial}{\partial y} - r\ sen\theta\ \frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z} = -\ r\ sen\theta\ sen\phi\ \frac{\partial}{\partial x} + r\ sen\theta\ cos\phi\ \frac{\partial}{\partial y} + 0\ .$$

Em termos matriciais, podem escrever:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen\theta\ cos\phi & sen\theta\ sen\phi & cos\theta \\ r\ cos\theta\ cos\phi & r\ cos\theta\ sen\phi & -\ r\ sen\theta \\ -\ r\ sen\theta\ sen\phi & r\ sen\theta\ cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Em termos de vetores tangentes, teremos:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen\theta\ cos\phi & sen\theta\ sen\phi & cos\theta \\ r\ cos\theta\ cos\phi & r\ cos\theta\ sen\phi & -\ r\ sen\theta \\ -\ r\ sen\theta\ sen\phi & r\ sen\theta\ cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}.$$

Considerando-se que a base $(\hat{e}_x,\ \hat{e}_y,\ \hat{e}_z)$ é ortonormada, o produto escalar entre os vetores da base holonômica calculada acima é dado por:

$$(\vec{e}_r,\ \vec{e}_r) = sen^2\theta\ cos^2\phi + sen^2\theta\ sen^2\ \phi + cos^2\theta =$$

$$= sen^2\theta\ (sen^2\phi + cos^2\phi) + sen^2\theta = sen^2\theta + cos^2\theta = 1\ ,$$

$$(\vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\theta) = r^2\ cos^2\theta\ cos^2\phi + r^2\ cos^2\theta\ sen^2\phi + r^2\ sen^2\theta = r^2\ ,$$

$$(\vec{e}_\phi,\ \vec{e}_\phi) = r^2\ sen^2\theta\ sen^2\phi + r^2\ sen^2\theta\ cos^2\phi = r^2\ sen^2\theta\ ,$$

$$(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta) = (\vec{e}_\theta,\ \vec{e}_r) = r\ sen\theta\ cos\theta\ cos^2\phi + r\ sen\theta\ cos\theta\ sen^2\phi - r\ sen\theta\ cos\theta = 0\ ,$$

$$(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\phi) = (\vec{e}_\phi,\ \vec{e}_r) = -\ r\ sen^2\theta\ sen\phi\ cos\phi + r\ sen^2\theta\ sen\phi\ cos\phi = 0\ ,$$

$$(\vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\phi) = (\vec{e}_\phi,\ \vec{e}_\theta) = -\ r^2\ sen\theta\ cos\theta\ sen\phi\ cos\phi + r^2\ sen\theta\ cos\theta\ cos\phi\ sen\phi = 0\ .$$

Verifica-se, portanto, que a base holonômica $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ é ortogonal, porém não ortonormada. Para torná-la ortonormada, basta dividir o segundo e terceiros vetores, respectivamente, por **r** e $r\ sen\theta$, os famosos **parâmetros de Lamé**. Assim, a base holonômica ortonormada do sistema de coordenadas esféricas será:

$$(\vec{e}_r,\ \tfrac{1}{r}\ \vec{e}_\theta,\ \tfrac{1}{r\ sen\theta}\ \vec{e}_\phi)\ =\ (\hat{e}_r,\ \hat{e}_\theta,\ \hat{e}_\phi\ .)$$

b) **Base dual**. Para obtermos essa base, vamos usar a expressão (4.1.5.6b) para a transformação de coordenadas f^{-1} considerada e a seguinte expressão:

$$\tfrac{d}{dz}\ (tg^{-1} z)\ =\ \tfrac{1}{1\ +\ z^2}\ .$$

Desse modo, teremos:

$$dr\ =\ \tfrac{\partial r}{\partial x}\ dx\ +\ \tfrac{\partial r}{\partial y}\ dy\ +\ \tfrac{\partial r}{\partial z}\ dz\ =\ \tfrac{x}{r}\ dx\ +\ \tfrac{y}{r}\ dy\ +\ \tfrac{z}{r}\ dz\ =$$

$$=\ sen\theta\ cos\phi\ dx\ +\ sen\theta\ sen\phi\ dy\ +\ cos\theta\ dz\ ,$$

$$d\theta\ =\ \tfrac{\partial \theta}{\partial x}\ dx\ +\ \tfrac{\partial \theta}{\partial y}\ dy\ +\ \tfrac{\partial \theta}{\partial z}\ dz\ =\ \frac{z\ x}{r^2\ \sqrt{x^2\ +\ y^2}}\ dx\ +\ \frac{z\ y}{r^2\ \sqrt{x^2\ +\ y^2}}\ dy\ -\ \frac{\sqrt{x^2\ +\ y^2}}{r^2}\ dz\ =$$

$$=\ \tfrac{1}{r}\ (cos\theta\ cos\phi\ dx\ +\ cos\theta\ sen\phi\ dy\ -\ sen\theta\ dz)\ .$$

$$d\phi\ =\ \tfrac{\partial \phi}{\partial x}\ dx\ +\ \tfrac{\partial \phi}{\partial y}\ dy\ +\ \tfrac{\partial \phi}{\partial z}\ dz\ =\ -\ \tfrac{y}{x^2\ +\ y^2}\ dx\ +\ \tfrac{x}{x^2\ +\ y^2}\ dy\ +\ 0\ dz\ =$$

$$=\ \tfrac{1}{r\ sen\phi}\ (-\ sen\phi\ dx\ +\ cos\phi\ dy\ +\ 0\ dz)\ ,$$

Em termos matriciais, podem escrever:

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{bmatrix}\ =\ \begin{bmatrix} sen\theta\ cos\phi & sen\theta\ sen\phi & cos\theta \\ \tfrac{1}{r}\ cos\theta\ cos\phi & \tfrac{1}{r}\ cos\theta\ sen\phi & -\ \tfrac{1}{r}\ sen\theta \\ -\ \tfrac{1}{r\ sen\theta}\ sen\phi & \tfrac{1}{r\ sen\theta}\ cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}\ .$$

Agora, vejamos se essa base dual é ortonormada. Para isso, inicialmente, vamos mostrar que a base dual $(dx\ ,\ dy\ ,\ dz)$ é ortonormada. Com efeito, usando-se os resultados dos exercícios (4.1.2.1) e (3.1.5.1), isto é:

$$\star\ dx\ =\ dy \wedge dz,\quad \star\ dy\ =\ dz \wedge dx,\quad \star\ dz\ =\ dx \wedge dy,\quad \star\ (dx \wedge dy \wedge dz)\ =\ 1\ ,$$

$$(d\alpha,\ d\beta)\ =\ \star\ (d\alpha \wedge \star\ d\beta)\ ,$$

teremos:

$$(dx,\ dx)\ =\ \star\,(dx \wedge \star\, dx)\ =\ \star\,(dx \wedge dy \wedge dz)\ =\ 1\ ,$$

$$(dx,\ dy)\ =\ (dy,\ dx)\ =\ \star\,(dx \wedge dz \wedge dx)\ =\ -\ (dx \wedge dx \wedge dz)\ =\ 0\ ,$$

$$(dx,\ dz)\ =\ (dz,\ dx)\ =\ \star\,(dx \wedge dx \wedge dy)\ =\ 0\ ,$$

$$(dy,\ dy)\ =\ \star\,(dy \wedge dz \wedge dx)\ =\ \star\,(dx \wedge dy \wedge dz)\ =\ 1\ ,$$

$$(dy,\ dz)\ =\ (dz,\ dy)\ =\ \star\,(dy \wedge dx \wedge dy)\ =\ 0\ ,$$

$$(dz,\ dz)\ =\ \star\,(dz \wedge dx \wedge dy)\ =\ \star\,(dx \wedge dy \wedge dz)\ =\ 1\ .$$

De posse desses resultados, teremos:

$$(dr,\ dr)\ =\ sen^2\theta\ cos^2\phi\ +\ sen^2\theta\ sen^2\phi\ +\ cos^2\theta\ =\ 1\ ,$$

$$(dr,\ d\theta)\ =\ (d\theta,\ dr)\ =\ \tfrac{1}{r}\ (sen\theta\ cos\phi\ cos\theta\ cos\phi\ +\ sen\theta\ sen\phi\ cos\theta\ sen\phi - cos\theta\ sen\theta) =\ 0,$$

$$(dr,\ d\phi)\ =\ (d\phi,\ dr)\ =\ \tfrac{1}{r\ sen\theta}\ (sen\theta\ cos\phi\ sen\phi\ +\ sen\theta\ sen\phi\ cos\phi)\ =\ 0\ ,$$

$$(d\theta,\ d\theta)\ =\ \tfrac{1}{r^2}\ (cos^2\theta\ cos^2\phi\ +\ cos^2\theta\ sen^2\phi\ +\ sen^2\theta)\ =\ \tfrac{1}{r^2}\ .$$

$$(d\phi,\ d\phi)\ =\ \tfrac{1}{r^2\ sen^2\theta}\ (sen^2\phi\ +\ cos^2\phi)\ =\ \tfrac{1}{r^2\ sen^2\theta}\ ,$$

$$(d\theta,\ d\phi)\ =\ (d\phi,\ d\theta)\ =\ \tfrac{1}{r^2\ sen\theta}\ (-\ cos\theta\ sen\phi\ cos\phi\ +\ cos\theta\ sen\phi\ cos\phi)\ =\ 0\ .$$

Verifica-se, portanto, que a base dual $(dr,\ d\theta,\ d\phi)$ é ortogonal, porém não ortonormada. Para torná-la ortonormada, basta multiplicar o segundo e terceiros covetores, respectivamente, por $\mathbf{r}$ e $r\ sen\theta$, os famosos **parâmetros de Lamé**. Assim, a base dual ortonormada para o sistema de coordenadas esféricas será:

$$(dr,\ r\ d\theta,\ r\ sen\theta\ d\phi)\ .$$

Observações complementares

As técnicas usadas nesse problema nos permitem demonstrar que:

1. Entre as bases ortonormadas dual e holonômica, existe a seguinte correspondência:

$$dr\ \ \rightarrow \hat{e}_r\ ;\qquad (r\ d\theta)\ \ \rightarrow\ \ \hat{e}_\theta\ ;\qquad (r\ sen\theta\ d\phi)\ \ \rightarrow\ \ \hat{e}_\phi\ .$$

2. Para a base dual ortonormada $(dr,\ r\ d\theta,\ r\ sen\theta\ d\phi)$, podemos escrever:

$$\star\, dr \;=\; r\, d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi, \quad \star\, (r\; send\theta\; d\phi) \;=\; dr\, \wedge r\; d\theta, \quad \star\, (r\; d\theta) \;=\; r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr\ ,$$

$$\star\, (dr \wedge r\; d\theta) \;=\; r\; sen\theta\; d\phi), \quad \star\, (r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr) \;=\; r\; d\theta, \quad \star\, (r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;=\; dr\ ,$$

$$\star\, (dr \wedge r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;=\; 1\ .$$

3. Para o sistema de coordenadas polares $(r,\ \theta)$ definido por:

$$f\ :\ (r, \theta) \quad \rightarrow \quad (x \;=\; r\; cos\theta,\ y \;=\; r\; sen\theta)\ ,$$

$$f^{-1}\ :\ (x,\ y) \quad \rightarrow \quad \Big(\, r \;=\; \sqrt{x^2\; +\; y^2},\ \theta \;=\; tg^{-1}\ (\tfrac{y}{x})\, \Big)\ ,$$

podemos demonstrar que a base dual ortonormada vale:

$$(dr,\ r\; d\theta)\ .$$

$\boxed{\text{EX.4.1.5.2}}$ Usando a Definição (4.1.2.1) e os resultados dos Exercícios (4.1.2.1) e (4.1.5.1), obtenha o gradiente, divergente, rotacional e laplaciano, em coordenadas esféricas $(r,\ \phi,\ \theta)$.

$\boxed{\text{Solução}}$

a) **Gradiente**. Seja a função escalar $f(r,\ \theta,\ \phi)$. Segundo o Exercício (4.1.2.1), o gradiente dessa $(0 - forma)$ será dado por:

$$\nabla\ f \;=\; df\ .$$

Do Cálculo Elementar, podemos escrever que:

$$\nabla f \;=\; df \;=\; \tfrac{\partial f}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{\partial f}{\partial \theta}\; d\theta \;+\; \tfrac{\partial f}{\partial \phi}\; d\phi\ .$$

Em termos da base dual ortonormada do sistema de coordenadas esféricas, a expressão acima é escrita na forma:

$$df \;=\; \tfrac{\partial f}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{1}{r}\, \tfrac{\partial f}{\partial \theta}\; (r\; d\theta) \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\, \tfrac{\partial f}{\partial \phi}\; (r\; sen\theta\; d\phi)\ .$$

Por outro lado, em termos da base holonômica ortonormada desse mesmo sistema, podemos escrever:

$$\boxed{\nabla f \;=\; \tfrac{\partial f}{\partial r}\; \hat{e}_r \;+\; \tfrac{1}{r}\, \tfrac{\partial f}{\partial \theta}\; \hat{e}_\theta \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\, \tfrac{\partial f}{\partial \phi}\; \hat{e}_\phi}$$

b) **Divergência**. Seja o vetor $\vec{A}$. Segundo o Exercício (4.1.2.1), a divergência desse vetor será dada por:

$$\nabla \,.\, \vec{A} \;=\; \star\, d \star A \;.$$

Portanto, para calcularmos essa divergência vamos, inicialmente, considerar a $1 - forma$ associada a esse vetor, isto é:

$$A \;=\; A_r\; dr \;+\; A_\theta\; r\; d\theta \;+\; A_\phi\; r\; sen\theta\; d\phi \;.$$

Assim, usando-se os resultados do Exercício (4.1.5.1) e a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$\star\, A \;=\; \star\, (A_r\; dr \;+\; A_\theta\; r\; d\theta \;+\; A_\phi\; r\; sen\theta\; d\phi) \;=$$

$$=\; A_r \star dr \;+\; A_\theta \star (r\; d\theta) \;+\; A_\phi \star (r\; sen\theta\; d\phi) \;=$$

$$=\; A_r\; r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi \;+\; A_\theta\; r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr \;+\; A_\phi\; dr \wedge r\; d\theta \;,$$

$$d \star A \;=\; d(r^2\; A_r\; sen\theta)\; d\theta \wedge d\phi \;+\; d(r\; sen\theta\; A_\theta)\; d\phi \wedge dr \;+\; d(r\; A_\phi)\; dr \wedge d\theta \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{r^2}\; \tfrac{\partial (r^2\; A_r)}{\partial r}\; dr \wedge r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial (sen\theta\; A_\theta)}{\partial \theta}\; r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\; r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr \wedge r\; d\theta \;=$$

$$=\; (\tfrac{1}{r^2}\; \tfrac{\partial (r^2\; A_r)}{\partial r} \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial (sen\theta\; A_\theta)}{\partial \theta} \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\; (dr \wedge r\; d\theta\; r\; sen\theta\; d\phi) \;,$$

$$\star\, d \star A \;=\; \Big(\; \tfrac{1}{r^2}\; \tfrac{\partial (r^2\; A_r)}{\partial r} \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial (sen\theta\; A_\theta)}{\partial \theta} \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\; \Big) \star (dr \wedge r\; sen\theta\; d\phi \wedge r\; d\theta) \;.$$

Portanto:

$$\boxed{\nabla \,.\, \vec{A} \;=\; \tfrac{1}{r^2}\; \tfrac{\partial}{\partial r}\; (r^2\; A_r) \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial}{\partial \theta}\; (sen\theta\; A_\theta) \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial}{\partial \phi}\; (A_\phi)}$$

c) **Rotacional**. Seja o vetor $\vec{A}$. Segundo o Exercício (4.1.2.1), o rotacional desse vetor será dado por:

$$\nabla \times \vec{A} \;=\; \star\, dA \;.$$

Portanto, para calcularmos esse rotacional vamos, inicialmente, levaremos em consideração a $1 - forma$ associada a esse vetor, isto é:

$$A \;=\; A_r\; dr \;+\; A_\theta\; r\; d\theta \;+\; A_\phi\; r\; sen\theta\; d\phi \;.$$

Usando-se a Definição (4.1.2.1) e o resultado do Exercício (4.1.5.1), virá:

$$dA \;=\; d(A_r)\; dr \;+\; d(r\; A_\theta)\; d\theta \;+\; d(r\; sen\theta\; A_\phi)\; d\phi \;=$$

$$=\; \Big(\; \tfrac{\partial A_r}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\; d\theta \;+\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi}\; d\phi \;\Big) \wedge dr \;+$$

$$+\; \Big(\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial \phi}\; d\phi \;+\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial \theta}\; d\theta \;\Big) \wedge d\theta \;+$$

$$+\; \Big(\; \tfrac{\partial (r\; sen\theta\; A_\phi)}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{\partial (r\; sen\theta\; A_\phi)}{\partial \phi}\; d\phi \;+\; \tfrac{\partial (r\; sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta}\; d\theta \;\Big) \wedge d\phi \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{r}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\; (r\; d\theta \wedge dr) \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi}\; (r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr) \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r}\; (dr \wedge r\; d\theta) \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial (A_\theta)}{\partial \phi}\; (r\; sen\theta\; d\phi \wedge r\; d\theta) \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \tfrac{\partial (r\; A_\phi)}{\partial r}\; (dr \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial (sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta}\; (r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi)\;,$$

$$\star\; dA \;=\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \Big(\; \tfrac{\partial (sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta} \;-\; \tfrac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\; \Big) \star (r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \Big(\; \tfrac{1}{sen\theta}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi} \;-\; \tfrac{\partial (r\; A_\phi)}{\partial r}\; \Big) \star (r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr) \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \Big(\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r} \;-\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\; \Big) \star (dr \wedge r\; d\theta)\;,$$

$$\star\; dA \;=\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \Big(\; \tfrac{\partial (sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta} \;-\; \tfrac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\; \Big)\; dr \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \Big(\; \tfrac{1}{sen\theta}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi} \;-\; \tfrac{\partial (r\; A_\phi)}{\partial r}\; \Big)\; r\; d\theta \;+\; \tfrac{1}{r}\; \Big(\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r} \;-\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\; \Big)\; r\; sen\theta\; d\phi\;.$$

Em termos da base holonômica ortonormada, teremos:

$$\boxed{\nabla \times \vec{A} = \tfrac{1}{rsen\theta}\Big(\tfrac{\partial (sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta} - \tfrac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\Big)\hat{e}_r + \tfrac{1}{r}\Big(\tfrac{1}{sen\theta}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi} - \tfrac{\partial (r\; A_\phi)}{\partial r}\Big)\hat{e}_\theta + \tfrac{1}{r}\; \Big(\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r} - \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\Big)\hat{e}_\phi}$$

d) **Laplaciano**. Seja a função escalar f(r, θ, ϕ). Segundo o Exercício (4.1.2.1), o laplaciano dessa $(0 - forma)$ será dado por:

$$\Delta\; f \;=\; \star\; d \star df\;.$$

Do Cálculo Elementar, podemos escrever que:

$$df \;=\; \tfrac{\partial f}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{\partial f}{\partial \theta}\; d\theta \;+\; \tfrac{\partial f}{\partial \phi}\; d\phi\;.$$

Usando-se o resultado do Exercício (4.1.5.1) e a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$\star\, df \;=\; \frac{\partial f}{\partial r} \star dr \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta} \star (r\ d\theta) \;+\; \frac{1}{r\ sen\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi} \star (r\ sen\theta\ d\phi) \;=$$

$$=\; \frac{\partial f}{\partial r}\,(r\ d\theta \wedge r\ sen\theta\ d\phi) \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,(r\ sen\theta\ d\phi \wedge dr) \;+\; \frac{1}{r\ sen\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,(dr \wedge r\ d\theta)\ ,$$

$$d \star df \;=\; d\,\Big(\,\frac{\partial f}{\partial r}\,(r\ d\theta \wedge r\ sen\theta\ d\phi) \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,(r\ sen\theta\ d\phi \wedge dr) \;+\; \frac{1}{r\ sen\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,(dr \wedge r\ d\theta)\,\Big) \;=$$

$$=\; \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r})\,(dr \wedge r\ d\theta \wedge r\ sen\theta\ d\phi) \;+\; \frac{1}{r\ sen\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\frac{1}{r}\ sen\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta})\,(r\ d\theta \wedge r\ sen\theta\ d\phi \wedge dr) +$$

$$+\; \frac{1}{r^2\ sen^2\theta}\,\frac{\partial}{\partial \phi}\,(\frac{\partial f}{\partial \phi}\,(r\ sen\theta\ d\phi \wedge dr \wedge r\ d\theta) \;=$$

$$=\; \Big(\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}) \;+\; \frac{1}{r^2\ sen\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(sen\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}) \;+\; \frac{1}{r^2\ sen^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\,\Big)\,(dr \wedge r\ d\theta \wedge r\ sen\theta\ d\phi)\ ,$$

$$\star\, d \star f \;=\; \Big(\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}) \;+\; \frac{1}{r^2\ sen\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(sen\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}) \;+\; \frac{1}{r^2\ sen^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\,\Big) \star (dr \wedge r\ d\theta \wedge r\ sen\theta d\phi).$$

Portanto:

$$\boxed{\Delta f \;=\; \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}) \;+\; \frac{1}{r^2\ sen\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(sen\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}) \;+\; \frac{1}{r^2\ sen^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}}$$

4.1.6 Variedades Riemannianas

Definição 4.1.6.1. Seja $T_p(M)$ o conjunto de campos de vetores diferenciáveis. Define-se uma **métrica Riemanniana** a forma bilinear (tensor covariante de ordem 2) definida por:

$$g_p \ :\ \ T_p(M) \times T_p(M) \quad \to \quad R\ ,$$

$$(X,\ Y) \quad \to \quad g_p(X,\ Y)\ ,$$

com as seguintes propriedades:

1. $g_p(X,\ X) \;>\; 0$ (positiva-definida);
2. $g_p(X,\ Y) \;=\; g_p(Y,\ X) \;= \;< X,\ Y >$, onde $<\ ,\ > =$ produto escalar ou interno;
3. $g_p(X,\ Y) \;=\; 0, \quad \forall\ X \in T_p(M) \quad \Longleftrightarrow \quad Y \;=\; 0$.

Observações

1. A métrica é dita **indefinida**, quando:

$$g_p(X,\ X)\ =\ 0 \qquad \text{não implica} \qquad X\ =\ 0\ .$$

2. Sendo a métrica uma forma bilinear, é suficiente conhecer seus valores sobre uma base. Assim, seja a base local $\{\ X_{(p)i}\ \}$ de uma variedade **M**. Portanto, a métrica g_p será dada pela matriz $n\ \times\ n$:

$$g_{(p)ij}\ =\ g_p(X_{(p)i},\ X_{(p)j})\ = < X_{(p)i},\ X_{(p)j} >\ , \qquad (4.1.6.1)$$

que é simétrica ($g_{(p)ij}\ =\ g_{(p)ji}$) e invertível ($det(g_{(p)ij} \neq 0$).

2.1. Seja uma mudança de bases descrita pela matriz γ:

$$\bar{X}_{(p)i}\ =\ \gamma_i^j\ X_{(p)j}\ . \qquad (4.1.6.2a)$$

Segundo a expressão (1.1.4.15), a matriz da métrica se transforma da seguinte maneira:

$$\bar{g}_{(p)ij}\ =\ \left(\gamma^T\ g_p\ \gamma^{-1}\right)_{ij}\ . \qquad (4.1.6.2b)$$

3. **Teorema de Gram-Schmidt**. Qualquer métrica admite sempre uma base ortonormada $\{\ \epsilon_i\ \}$, isto é:

$$g(\epsilon_i,\ \epsilon_j)\ =\ \eta_{ij}\ ,$$

onde η_{ij} é uma matriz diagonal com **P** sinais positivos (+) e **N** sinais negativos, sendo $P\ +\ N\ =\ n$:

$$\eta_{ij}\ =\ diag(1,\ 1,\ ...,\ 1,\ -1,\ -1,\ ...,\ -1)\ .$$

Esse Teorema permite dizer que para qualquer matriz **g**, simétrica e de determinante não-nulo, existe sempre uma matriz invertível γ, tal que:

$$\left(\gamma^T\ g_p\ \gamma^{-1}\right)_{ij}\ =\ \eta_{ij}\ .$$

3.1. Conforme vimos no Capítulo 1, a **assinatura s** de uma métrica é dada por: $s\ =\ P\ -\ N$. Quando $\mathbf{s = 0}$, a métrica é positiva-definida. Assim, estritamente falando, somente nesse caso ela recebe o nome de **métrica riemanniana** ou **produto escalar**. Quando $s \neq 0$, teremos a **pseudométrica riemanniana**, conforme vimos acima.

4. **Teorema de Sylvester**. A assinatura de uma métrica **s** não depende da escolha da base ortonormal.

5. Segundo vimos anteriormente, o espaço vetorial $T_p(M)$ induz o espaço vetorial $T_p^*(M)$ como seu dual. Desse modo, dada uma base arbitrária $\{\ e_i\ \}$ de $T_p(M)$, existe uma base $\{\ \varepsilon^j\ \}$ de $T_p^*(M)$, chamada sua **base dual**, com a propriedade dada pela expressão (1.1.2.2a), ou seja:

$$\varepsilon^j \ (e_i) \ = \ \delta^j_i \ . \qquad (4.1.6.3)$$

5.1. Essa base dual será holonômica, se ela for uma $1 - forma$ exata, isto é, se existem $0 - formas \ x^j$, tal que:

$$\varepsilon^j \ = \ dx^j \qquad \rightarrow \qquad d(dx^j) \ = \ 0 \ .$$

5.2. Para essa base dual $\{ \ \varepsilon^j \ \}$ podemos definir a seguinte métrica:

$$g^{ij} \ = \ g^*(\varepsilon^i, \ \varepsilon^j) \ . \qquad (4.1.6.4)$$

Conforme mostramos na expressão (1.1.3.11), essa métrica é recíproca da métrica g_{jk}, isto é:

$$g^{ij} \ g_{jk} \ = \ \delta^i_k \ . \qquad (4.1.6.5)$$

5.3. Essa métrica dual será ortonormada, se:

$$g^*(\xi^i, \ \xi^j) \ = \ \eta^{ij} \ = \ \eta_{ij} \ . \qquad (4.1.6.6)$$

6. Usando-se a expressão (4.1.5.8a), podemos escrever para a métrica **g** a seguinte expressão:

$$g \ = \ g_{ij} \ dx^i \otimes dx^j \ . \qquad (4.1.6.7a)$$

Registre-se que a notação usual para essa métrica é a seguinte:

$$ds^2 \ = \ g_{ij} \ dx^i \ dx^j \ . \qquad (4.1.6.7b)$$

6.1. Seja uma curva parametrizada $\gamma(\lambda)$ definida em **M** cujo vetor tangente sobre a mesma é dado por $\vec{X} \ = \ \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$. O seu comprimento será dado por:

$$d\ell^2 \ = < d\vec{x}, \ d\vec{x} > = < \vec{X} \ d\lambda, \ \vec{X} \ d\lambda > = < \vec{X}, \ \vec{X} > \ d\lambda^2 \ = \ g(\vec{X}, \ \vec{X}) \ d\lambda^2 \ .$$

Se a métrica for positiva-definida $\Big(g(\vec{X}, \ \vec{X}) \ > \ 0\Big)$, então o comprimento de um elemento da curva γ será:

$$d\ell \ = \ \sqrt{g(\vec{X}, \ \vec{X})} \ d\lambda \ . \qquad (4.1.6.7c)$$

Quando a métrica é **indefinida**, teremos:

$$d\ell \ = \ \sqrt{|g(\vec{X}, \ \vec{X})|} \ d\lambda \ . \qquad (4.1.6.7d)$$

7. Uma métrica estabelece uma relação entre campos vetoriais e covetoriais, ou seja, ela pode ser definida como uma aplicação unívoca ($um \ - um$) que transforma vetores em $1 - formas$ ($covetores$):

$$g(X, \ ) \ = \ \tilde{X}, \qquad \forall X \in T_p(M), \qquad \tilde{X} \in R(M) \ .$$

7.1. Se $\{ \ e_i \ \}$ for uma base arbitrária de $T_p(M)$, então:

$$g(X, \ e_i) \ = \ \tilde{X}(e_i) \ = \ X_i \ = \ g(X^j e_j, \ e_i) \ = \ X^j \ < e_j, \ e_i > = \ X^j g_{ji} \ ,$$

onde X_i é chamada a **imagem contravariante** de **X**. Considerando-se a simetria de g_{ij} e a expressão (4.1.6.5), observa-se que:

$$X_i \ = \ g_{ij} X^j \ , \qquad (4.1.6.8a)$$

$$g^{ki} X_i \ = \ g^{ki} g_{ij} X^j \ = \ \delta^k_j X^j \ \ \rightarrow \ \ X^k \ = \ g^{ki} X_i \ . \qquad (4.1.6.8b)$$

As expressões (4.1.6.8a,b) nos mostram que o tensor métrico g_{ij} e seu recíproco g^{ij} funcionam, respectivamente, como **abaixadores** e **levantadores** de índices.

Exemplos

1. Para o sistema de coordenadas polares $(r, \ \theta)$, a métrica correspondente (obtida usando-se a expressão (4.1.6.1) e o Exercício (4.1.5.1)), será dada por:

$$g_{rr} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_r) \ = \ 1; \qquad g_{\theta\theta} \ = \ (\vec{e}_\theta, \ \vec{e}_\theta) \ = \ r^2; \qquad g_{r\theta} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_\theta) \ = \ 0 \ ,$$

$$g^{rr} \ g_{rr} \ = \ 1 \ \ \rightarrow \ \ g^{rr} \ = \ 1; \qquad g^{\theta\theta} \ g_{\theta\theta} \ = \ 1 \ \ \rightarrow \ \ g^{\theta\theta} \ = \ \tfrac{1}{r^2} \ .$$

Em termos matriciais, teremos:

$$g_{ij} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{g}^{ij} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} .$$

Destaque-se que essa métrica também pode ser obtida por intermédio da expressão (4.1.6.2b), considerando-se que, para o sistema cartesiano $(x \ , \ y \ , \ z)$, a sua métrica é a matriz unitária.

2. Para o sistema de coordenadas esféricas $(r, \ \theta, \ \phi)$, a métrica correspondente (obtida usando-se a expressão (4.1.6.1) e o Exercício (4.1.5.1)) será dada por:

$$g_{rr} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_r) \ = \ 1; \qquad g_{\theta\theta} \ = \ (\vec{e}_\theta, \ \vec{e}_\theta) \ = \ r^2; \qquad g_{\phi\phi} \ = \ (\vec{e}_\phi, \ \vec{e}_\phi) \ = \ r^2 \ sen^2\theta \ ;$$

$$g_{r\theta} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_\theta) \ = \ 0; \qquad g_{r\phi} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_\phi) \ = \ 0; \qquad g_{\theta\phi} \ = \ (\vec{e}_\theta, \ \vec{e}_\phi) \ = \ 0 \ .$$

Em termos matriciais, teremos:

$$g_{ij} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\ sen^2\theta \end{bmatrix}.$$

É oportuno destacar que essa métrica também pode ser obtida por intermédio da expressão (4.1.6.2b), considerando-se que, para o sistema cartesiano (x , y , z), a sua métrica é a matriz unitária. Destaque-se ainda que, usando-se a expressão (4.1.6.5), a métrica associada à base dual desse sistema de coordenadas será dada por:

$$g^{ij} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\ sen^2\theta} \end{bmatrix}.$$

Definição 4.1.6.2. Define-se uma **variedade Riemanniana** a toda variedade diferenciável **M** sobre a qual é definida uma métrica Riemanniana.

Observações

1. Se a métrica for não-Riemanniana, a variedade é chamada não-Riemanniana.

2. **Teorema de Whitney**. É sempre possível definir pelo menos uma métrica Riemanniana sobre uma variedade diferenciável arbitrária.

Definição 4.1.6.3. Seja *X(M)* um conjunto de campos de vetores **X** de uma variedade diferenciável **M**. Define-se **conexão afim** ∇ sobre **M** a seguinte aplicação:

$$\nabla \;:\; X(M) \times X(M) \quad \rightarrow \quad X(M)\ , \qquad (4.1.6.9a)$$

$$(X, Y) \quad \rightarrow \quad \nabla_X(Y)\ , \qquad (4.1.6.9b)$$

com as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}(Z) \;=\; f\ \nabla_X(Z) \;+\; g\ \nabla_Y(Z)\ , \qquad (4.1.6.9c)$
2. $\nabla_X(Y \;+\; Z) \;=\; \nabla_X(Y) \;+\; \nabla_X(Z)\ , \qquad (4.1.6.9d)$
3. $\nabla_X(fY) \;=\; f\ \nabla_X(Y) \;+\; X(f)(Y)\ , \qquad (4.1.6.9e)$

onde **X, Y, Z** $\in$ *X(M)* e **f, g** $\in$ **R(M)**.

Observações

1. A conexão afim ∇ é dita **simétrica**, se:

$$\nabla_X(Y) \;-\; \nabla_Y(X) \;=\; [X,\ Y]\ . \qquad (4.1.6.10a)$$

2. Para uma base local ($\partial_i \;=\; \frac{\partial}{\partial x^i}$, i = 1, 2, ..., n), define-se:

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) \;=\; \Gamma^k_{ij}\;\partial_k\;. \qquad (4.1.6.10b)$$

3. Para uma base dual (dx^i, i = 1, 2, ..., n), define-se:

$$\nabla_{\partial_i}(dx^j) \;=\; -\;\Gamma^j_{ik}\;d^k\;, \qquad (4.1.6.10c)$$

4. Para uma base arbitrária $\{\;e_i\;\}$ e sua correspondente base dual $\{\;\theta^i\;\}$, define-se a **forma de conexão** ω^i_j da seguinte maneira:

$$\nabla_{e_k}\;e_j \;=\; \omega^i_j(e_k)\;e_i\;, \qquad (4.1.6.11a)$$

onde:

1. $\omega^i_j \;=\; \Gamma^i_{kj}\;\theta^k\;. \qquad (4.1.6.11b)$
2. $\omega_{ij} \;+\; \omega_{ji} \;=\; dg_{ij}, \quad \omega_{ij} \;=\; g_{ik}\;\omega^k_j\;. \qquad (4.1.6.11c)$
3. $d\theta^i \;+\; \omega^i_j \wedge \theta^j \;=\; 0\;. \qquad (4.1.6.11d)$

Definição 4.1.6.4. Dado um campo de vetores **X**, define-se um campo de tensores ∇X, chamado **derivada covariante** ou **derivada absoluta**, da seguinte maneira:

$$\nabla X(Y,\;\omega) \;= <\omega,\;\nabla_Y(X)>\;, \qquad (4.1.6.12a)$$

onde $<\;,\;>$ significa produto interno e ω é uma $1-forma$.

Observações

1. Para uma base local (∂_i) e sua correspondente base dual (dx^i), segundo a expressão (4.1.5.8a), podemos escrever:

$$\nabla X \;=\; \nabla_j X^i\;\partial_i \otimes dx^j\;.$$

Usando-se as expressões (4.1.6.3) e (4.1.6.12a), e considerando-se que $X \;=\; X^k\;\partial_k$, virá:

$$\nabla_j X^i \;=\; \nabla X(\partial_j,\;dx^i) \;= <dx^i,\;\nabla_{\partial_j}(X^k\;\partial_k)> =$$

$$= <dx^i,\;\nabla_{\partial_j}\;(X^k)\;\partial_k \;+\; X^k\;\nabla_{\partial_j}\;(\partial_k)> = <dx^i,\;\partial_j\;X^k\;\partial_k \;+\; X^k\;\Gamma^m_{jk}\partial_m> =$$

$$=\;\partial_j\;X^k\;(dx^i\;\partial_k) \;+\; \Gamma^m_{jk}\;X^k\;(dx^i\;\partial_m) \;=\; \partial_j\;X^k\;\delta^i_k \;+\; \Gamma^m_{jk}\;X^k\;\delta^i_m\;.$$

Portanto:

$$\nabla_j X^i \;=\; X^i_{,j} \;=\; \partial_j X^i \;+\; \Gamma^i_{jk}\;X^k\;. \qquad (4.1.6.12b)$$

1.1. Para um covetor X_i, a sua derivada covariante é obtida usando-se a expressão (4.1.6.10c). Assim, teremos:

$$\nabla_j X_i \; = \; X_{i,j} \; = \; \partial_j X_i \; - \; \Gamma_{ji}^k \; X_k \; . \qquad (4.1.6.12c)$$

2. Seja $\gamma(t)$ uma curva definida em **M**, isto é:

$$\gamma(t) \; : \; [a, \; b] \in R \quad \to \quad M \; .$$

Para um campo de vetores **X** definido em uma vizinhança aberta de $\gamma([a, \; b])$, a sua derivada covariante ao longo de γ é dada por:

$$t \quad \to \quad \nabla_{\dot{\gamma}}(X). \qquad (\dot{\gamma} \; = \; \tfrac{d\gamma}{dt}) \; .$$

2.1. Para uma base local (∂_i) e considerando-se que:

$$X \; = \; X^i \; \partial_i, \qquad \dot{\gamma} \; = \; \tfrac{dx^i}{dt} \; \partial_i \; ,$$

teremos:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(X) \; = \; (\tfrac{dX^k}{dt} \; + \; \Gamma_{ij}^k \; \tfrac{dx^i}{dt} \; X^i) \; \partial_k|_{\gamma(t)} \; . \qquad (4.1.6.13a)$$

2.2. Um campo vetorial **X** é dito ser **transportado paralelamente** ao longo de uma curva suave γ(t) em uma variedade diferenciável **M**, se:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(X) \; = \; 0 \; . \qquad (4.1.6.13b)$$

2.3. A conexão afim ∇ é dita **métrica** se o transporte paralelo de **X** ao longo de toda curva diferenciável em **M** preserva o produto interno, ou seja:

$$\nabla_X g \; = \; 0 \; . \qquad (4.1.6.14)$$

3. Para toda **variedade Riemanniana**, existe uma única conexão afim ∇ que é métrica e simétrica. Assim, dada uma base local, tem-se:

$$\Gamma_{ij}^k \; = \; \Gamma_{ji}^k \; = \; \tfrac{1}{2} \; g^{km} \; (\partial_i \; g_{mj} \; + \; \partial_j \; g_{im} \; - \; \partial_k \; g_{ij}) \; , \qquad (4.1.6.15)$$

que são conhecidos como os **símbolos de Christoffel**, **coeficientes da conexão** ∇, **conexão de Levi-Civita** ou **conexão Riemanniana**.

Definição 4.1.6.5. Seja *X(M)* um conjunto de campos de vetores **X** de uma variedade diferenciável **M** e ∇ a conexão afim sobre **M**. Define-se **torsão T** e **curvatura R** dessa conexão, respectivamente, as aplicações definidas por:

$$T \ : \ X(M) \times X(M) \quad \to \quad X(M), \qquad (4.1.6.16a)$$

$$T(X,\ Y) \ = \ \nabla_X(Y) \ - \ \nabla_Y(X) \ - \ [X,\ Y] \ , \qquad (4.1.6.16b)$$

$$R \ : \ X(M) \times X(M) \times X(M) \quad \to \quad X(M) \ , \qquad (4.1.6.17a)$$

$$R(X,\ Y)(Z) \ = \ \nabla_X\Big(\nabla_Y(Z)\Big) \ - \ \nabla_Y\Big(\nabla_X(Z)\Big) \ - \ \nabla_{[X,Y]}(Z) \ , \qquad (4.1.6.17b)$$

onde **(X, Y, Z)** $\in$ *X(M)*.

Definição 4.1.6.6. Define-se o **tensor torsão** T_{ij}^k de uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável **M** como a aplicação:

$$T \ : \ X^*(M) \times X(M) \times X(M) \quad \to \quad R(M) \ , \qquad (4.1.6.18a)$$

definida por:

$$T(\omega,\ X,\ Y) \ = < \omega,\ T(X,\ Y) > . \qquad (4.1.6.18b)$$

Observações

1. Para uma base local (∂_i) e sua correspondente base dual (dx^i), as expressões (4.1.6.16b), (4.1.6.18b) e (4.1.6.10b) nos permitem escrever que:

$$T_{ij}^k \ = \ T(dx^k,\ \partial_i,\ \partial_j) \ = < dx^k,\ T(\partial_i,\ \partial_j) > =$$

$$= < dx^k,\ \nabla_{\partial_i}\ (\partial_j) \ - \ \nabla_{\partial_j}\ (\partial_i) \ - \ [\partial_i,\ \partial_j] > .$$

Usando-se as expressões (4.1.6.3) e (4.1.6.10a), teremos:

$$T_{ij}^k \ = < dx^k,\ \Gamma_{ij}^m\ \partial_m \ - \ \Gamma_{ji}^n\ \partial_n > = \ \Gamma_{ij}^m\ (dx^k \partial_m) \ - \Gamma_{ji}^n\ (dx^k \partial_n) \ .$$

Por fim, usando-se a expressão (4.1.6.3), virá:

$$T_{ij}^k \ = \ \Gamma_{ij}^m\ \delta_m^k \ - \ \Gamma_{ij}^n\ \delta_n^k \quad \to \quad T_{ij}^k \ = \ \Gamma_{ij}^k \ - \ \Gamma_{ji}^k \ . \qquad (4.1.6.18c)$$

É oportuno esclarecer que, quando a variedade é Riemanniana, o tensor tensão é nulo, uma vez que Γ_{ij}^k é simétrico.

Definição 4.1.6.7. Define-se o **tensor curvatura** $R_{jk\ell}^i$ de uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável **M** como a aplicação:

$$R \ : \ X^*(M) \times X(M) \times X(M) \times X(M) \quad \to \quad R(M) \ , \qquad (4.1.6.19a)$$

definida por:

$$R(\omega,\ Z,\ X,\ Y)\ = <\omega,\ R(X,\ Y)Z> . \qquad (4.1.6.19b)$$

Observações

1. Para uma base local (∂_i) e sua correspondente base dual (dx^i), as expressões (4.1.6.17b), (4.1.6.19b), (4.1.6.10b) e (4.1.6.3) nos permitem escrever que:

$$R^i_{jk\ell}\ =\ R(dx^i,\ \partial_j,\ \partial_k,\ \partial_\ell)\ = < dx^i,\ R(\partial_k,\ \partial_\ell)\ \partial_j > =$$

$$= < dx^i,\ (\nabla_{\partial_k}\ \nabla_{\partial_\ell}\ -\ \nabla_{\partial_\ell}\ \nabla_{\partial_k}\ -\ \nabla_{[\partial_k,\ \partial_\ell]})\ \partial_j > =$$

$$= < dx^i,\ \nabla_{\partial_k}\ (\nabla_{\partial_\ell}\ \partial_j)\ -\ \nabla_{\partial_\ell}\ (\nabla_{\partial_k}\ \partial_j) > = < dx^i,\ \nabla_{\partial_k}\ (\Gamma^m_{\ell j}\ \partial_m)\ -\ \nabla_{\partial_\ell}\ (\Gamma^n_{kj}\ \partial_n) >\ =$$

$$= < dx^i,\ (\nabla_{\partial_k}\ \Gamma^m_{\ell j})\ \partial_m\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ (\nabla_{\partial_k}\ \ \partial_m)\ -\ (\nabla_{\partial_\ell}\ \Gamma^n_{kj})\ \partial_n\ -\ \Gamma^n_{kj}\ (\nabla_{\partial_\ell}\ \partial_n) > =$$

$$= < dx^i,\ (\nabla_{\partial_k}\ \Gamma^m_{\ell j})\ \partial_m\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ \Gamma^r_{km}\ \ \partial_r\ -\ (\nabla_{\partial_\ell}\ \Gamma^n_{kj})\ \partial_n\ -\ \Gamma^n_{kj}\ \Gamma^s_{\ell n}\ \partial_s > =$$

$$=\ \partial_k\ \Gamma^m_{\ell j}\ (dx^i\ \partial_m)\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ \Gamma^r_{km}\ (dx^i\ \partial_r)\ -\ \partial_\ell\ \Gamma^n_{kj}\ (dx^i\ \partial_n)\ -\ \Gamma^n_{kj}\ \Gamma^s_{\ell n}\ (dx^i\ \partial_s)\ =$$

$$=\ \partial_k\ \Gamma^m_{\ell j}\ \delta^i_m\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ \Gamma^r_{km}\ \delta^i_r\ -\ \partial_\ell\ \Gamma^n_{kj}\ \delta^i_n\ -\ \Gamma^n_{kj}\ \Gamma^s_{\ell n}\ \delta^i_s\ .$$

Por fim, teremos:

$$R^i_{jk\ell}\ =\ \partial_k\ \Gamma^i_{\ell j}\ -\ \partial_\ell\ \Gamma^i_{kj}\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ \Gamma^i_{km}\ -\ \Gamma^n_{kj}\ \Gamma^i_{\ell n}\ . \qquad (4.1.6.20a)$$

1.1. O tensor curvatura $R^i_{jk\ell}$, conhecido como **tensor de Riemann-Christoffel**, satisfaz as seguintes propriedades:

a) $R^i_{jk\ell}\ +\ R^i_{\ell jk}\ +\ R^i_{k\ell j}\ =\ 0$. (Primeira Identidade de Bianchi) (4.1.6.20b)

b) $R^i_{jk\ell,m}\ +\ R^i_{jmk,\ell}\ +\ R^i_{j\ell m,k}\ =\ 0$. (Segunda Identidade de Bianchi) (4.1.6.20c)

c) $R^i_{jk\ell}\ =\ -\ R^i_{j\ell k}$. (4.1.6.20d)

d) $R_{ijk\ell}\ =\ g_{im}\ R^m_{jk\ell}\ =\ -\ R_{jik\ell},\quad R_{ijk\ell}\ =\ -\ R_{ij\ell k},\quad R_{ijk\ell}\ =\ R_{k\ell ij}$. (4.1.6.20e,f,g)

2. A partir do tensor curvatura $R^i_{jk\ell}$, define-se:

$$R_{j\ell}\ =\ R^i_{ji\ell}\ , \qquad (\textbf{Tensor de Ricci}) \qquad (4.1.6.21a)$$

$$R\ =\ g^{ik}\ R_{ik}\ . \qquad (\text{Curvatura Escalar}) \qquad (4.1.6.21b)$$

3. Para uma base arbitrária $\{ e_i \}$ e sua correspondente base dual $\{ \theta^i \}$, define-se a **forma de curvatura** Ω^i_j da seguinte maneira:

$$R(e_i,\ e_j)\ e_k\ =\ \Omega^\ell_k(e_i,\ e_j)\ e_\ell\ , \qquad (4.1.6.22a)$$

onde:

1. $\Omega^i_j\ =\ R^i_{kj\ell}\ \theta^k \wedge \theta^\ell\ . \qquad (4.1.6.22b)$

2. $\Omega^i_j\ =\ d\omega^i_j\ +\ \omega^i_k \wedge \omega^k_j\ . \qquad (4.1.6.22c)$

É importante registrar que, no 4-espaço, as **formas de Cartan** - ω^i_j e Ω^i_j - reduzem-se drasticamente. Assim, existem somente seis (6) formas de conexão ω^i_j em comparação com os quarenta (40) **símbolos de Christoffel** Γ^i_{jk}, e somente seis (6) formas de curvatura Ω^i_j em comparação com os vinte (20) componentes do **tensor de Riemann-Christoffel** $\mathrm{R}^i_{jk\ell}$ ou dez (10) do **tensor de Ricci** R_{ij}.

Exercícios (4.1.6)

EX.4.1.6.1 Para um sistema de coordenadas polares $(r,\ \theta)$, calcule as conexões de Cartan.

Solução

Para o sistema de coordenadas polares $(r,\ \theta)$, vimos que:

$$g_{ij}\ =\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}, \qquad g^{ij}\ =\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}.$$

a) **Forma de conexão** Usando-se as expressões (4.1.6.11c) e (4.1.6.22c), teremos:

$$dg_{rr}\ =\ d(1)\ =\ 0\ =\ 2\ \omega_{rr}\quad \rightarrow\quad \omega_{rr}\ =\ 0\ ,$$

$$dg_{\theta\theta}\ =\ d(r^2)\ =\ 2\ r\ dr\ =\ 2\ \omega_{\theta\theta}\quad \rightarrow\quad \omega_{\theta\theta}\ =\ r\ dr\ .$$

Sendo:

$$\omega^i_j\ =\ g^{ik}\ \omega_{jk}\ ,$$

então:

$$\omega^r_r\ =\ g^{rr}\ \omega_{rr}\ =\ 0, \qquad \omega^\theta_\theta\ =\ g^{\theta\theta}\ \omega_{\theta\theta}\ =\ \frac{1}{r^2}\ r\ dr\ =\ \frac{dr}{r}\ .$$

b) **Forma de curvatura**

Usando-se a expressão (4.1.6.22c) e os resultados anteriores, virá:

$$\Omega_r^r \;=\; d\omega_r^r \;+\; \omega_k^r \wedge \omega_r^k \;=\; d(0) \;+\; \omega_r^r \wedge \omega_r^r \;=\; 0 \;+\; 0 \;=\; 0 \;,$$

$$\Omega_\theta^\theta \;=\; d\omega_\theta^\theta \;+\; \omega_k^\theta \wedge \omega_\theta^k \;=\; d(\tfrac{dr}{r}) \;+\; \omega_\theta^\theta \wedge \omega_\theta^\theta \;=\; d(\tfrac{1}{r}) \wedge dr \;+\; 0 \;=\; -\;\tfrac{1}{r^2}\; dr \wedge dr \;=\; 0 \;.$$

Problemas (4.1)

4.1.1. Usando o conceito de diferenciação exterior:

a) Calcule $d\alpha$, onde:

a.1) $\alpha \;=\; x^2\; y\; dy \wedge dz \;-\; x\; z\; dx \wedge dy$; $a.2)\; \alpha \;=\; 2\; x\; y\; dx \;+\; x^2\; dy$;

a.3) $\alpha \;=\; 2\; y\; z\; dy \wedge dz \;+\; x\; y\; dz \wedge dx \;-\; x\; z\; dx \wedge dy$.

b) Demonstre que:

b.1) $\nabla\; .\; (\vec{A} \times \vec{B}) \;=\; \vec{A}\; .\; \nabla \times \vec{B} \;-\; \vec{B}\; .\; \nabla \times \vec{A}$;

b.2) $\nabla \times (f\vec{A}) \;=\; f\; \nabla \times \vec{A} \;+\; \nabla\; f \times \vec{A}$.

4.1.2. Para o sistema de coordenadas cilíndricas $(r,\; \theta,\; z)$ definido por:

$$f\; :\; (r, \theta,\; z) \;\; \rightarrow \;\; (x \;=\; r\; cos\theta,\; y \;=\; r\; sen\theta,\; z \;=\; z)\;,$$

$$f^{-1}\; :\; (x,\; y,\; z) \;\; \rightarrow \;\; \Big(\; r \;=\; \sqrt{x^2 \;+\; y^2},\; \theta \;=\; tg^{-1}\; (\tfrac{y}{x})\; \Big)\;,$$

$$0 \leq r \;<\; \infty, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\;\pi \qquad -\;\infty \;<\; z \;<\; \infty\;,$$

encontre: a) as bases holonômica e dual; b) as formas do gradiente, divergente, rotacional e laplaciano; c) a métrica correspondente g_{ij}; d) a derivada covariante de g^{ij}.

4.1.3. Mostre que o **símbolo de Christoffel** Γ^i_{jk} não é um tensor do tipo (1,2).

4.1.4. Para o **tensor de Riemann-Christoffel** $R^i_{jk\ell}$, demonstre as propriedades representadas pelas expressões (4.1.6.20b,c,d,e,f,g).

4.1.5. Para as **formas de Cartan** (conexão ω^i_j e curvatura Ω^i_j), demonstre as propriedades representadas pelas expressões (4.1.6.11c,d) e (4.1.6.22c), e calcule essas formas para o sistema de coordenadas esféricas.

Capítulo 5

5.1 Integração Exterior

5.1.1 Integração de Formas

Definição 5.1.1.1. Dada uma variedade **M** e um **intervalo fechado I** $\in E^1$, define-se um **segmento de curva** Γ ou $(1 - segmento)$ como a aplicação:

$$\Gamma \ : \ I \ = \ [a, \ b] \quad \to \quad M \ .$$

Definição 5.1.1.2. Seja ω uma $1-forma$ em uma variedade **M** e Γ um $1-segmento$. Define-se a **integral de** ω sobre Γ como:

$$\int_\Gamma \omega \ = \ \int_{[a,b]} \omega^* \ = \ \int_{[a,b]} \Gamma^* \omega \ = \ \int_a^b \omega \ \Big(\ \Gamma'(t) \ \Big) \ dt \ , \qquad (5.1.1.1a)$$

onde (*) é a operação dada pela Definição (4.1.3.2).

Observações

1. Seja $\vec{f} \ = \ \Big(\ f_1(x, \ y, z), \ f_2(x, \ y, z), \ f_3(x, \ y, \ z) \ \Big)$ uma função vetorial contínua em uma região **D** do espaço $\mathbf{R}^3$ e seja ω a correspondente $1 - forma$, dada por:

$$\omega \ = \ f_1 \ dx \ + \ f_2 \ dy \ + \ f_3 \ dz \ .$$

Usando-se o Cálculo Vetorial Elementar, a expressão (5.1.1.1a) é escrita da seguinte forma:

$$\int_\Gamma \omega \ = \ \int_\Gamma f_1 \ dx \ + \ f_2 \ dy \ + \ f_3 \ dz \ = \ \int_\Gamma \vec{f} \ . \ d\vec{r} \ =$$

$$= \ \int_a^b \ [f_1^*(t) \ x'(t) \ + \ f_2^*(t) \ y'(t) \ + \ f_3^*(t) \ z'(t)] \ dt \ ,$$

onde:

$$f_i^* \ = \ f_i \ [x(t), \ y(t), \ z(t)] \ (i \ = \ 1, \ 2, \ 3), \ x'(t) \ = \ \tfrac{dx(t)}{dt}, \ y'(t) \ = \ \tfrac{dy(t)}{dt}, z'(t) \ = \ \tfrac{dz(t)}{dt} \ .$$

No Cálculo Vetorial Elementar, essa integral é conhecida como **integral de linha** ou **circulação**. Na Física, um dos exemplos mais conhecidos dessa integral é o **trabalho** τ de uma força $\vec{F}$ ao longo de uma curva Γ:

$$\tau \ = \ \int_\Gamma \vec{F} \ . \ d\vec{r} \ .$$

2. Seja **f** uma $0 - forma$ e Γ uma curva $(1 - segmento)$ que vai do ponto **a** ao ponto **b** - $\Gamma \ = \ [a, \ b]$. O operador **fronteira** ∂ aplicado a Γ - $\partial\Gamma$ - é definido como:

$$\partial\Gamma \;=\; b \;-\; a \;,$$

e a integral de **f** sobre $\partial\Gamma$ como:

$$\int_{\partial\Gamma} f \;=\; f(b) \;-\; f(a) \;. \qquad (5.1.1.1b)$$

Definição 5.1.1.3. Dada uma variedade **M** e um **retângulo fechado D** $\in E2$, define-se uma **superfície suave S** ou $(2 - segmento)$ como a aplicação:

$$\mathbf{S} \;:\; D \;=\; [u,\; v] \quad \rightarrow \quad M \quad (a \leq u \leq b,\; c \leq v \leq d) \;.$$

Observações

1. Essa superfície **S** é formada por **curvas-arestas**, que são os $1 - segmentos$ $\partial\ \mathbf{S_1},\ \partial\ \mathbf{S_2},\ \partial\ \mathbf{S_3}\ e \partial\ \mathbf{S_4}$, definidos por:

$$\partial\ \mathbf{S}_1(u) \;=\; \mathbf{S}(c,\; u), \qquad \partial\ \mathbf{S}_2(v) \;=\; \mathbf{S}(b,\; v) \;, \qquad (5.1.1.2a,b)$$

$$\partial\ \mathbf{S}_3(u) \;=\; \mathbf{S}(d,\; u) \;, \qquad \partial\ \mathbf{S}_4(v) \;=\; \mathbf{S}(a,\; v) \;, \qquad (5.1.1.2c,d)$$

onde o sentido de percurso se dá no crescimento das variáveis **u** e **v**.

2. Define-se o operador **fronteira** ∂ aplicado a **S** - ∂ **S** - pela expressão:

$$\partial\ \mathbf{S} \;=\; \partial\ \mathbf{S}_1 \;+\; \partial\ \mathbf{S}_2 \;-\; \partial\ \mathbf{S}_3 \;-\; \partial\ \mathbf{S}_4 \;. \qquad (5.1.1.2e)$$

Os sinais de menos na frente de $\partial\ \mathbf{S}_3$ e $\partial\ \mathbf{S}_4$ significam que devemos invertê-los quando se efetua um percurso num só sentido pelas curvas-arestas de **D**.

Definição 5.1.1.4. Seja η uma $2-forma$ em uma variedade **M** e **S** um $2-segmento$. Define-se a **integral de** η sobre **S** como:

$$\int\int_{\mathbf{S}} \eta \;=\; \int\int_D \eta^* \;=\; \int\int_D \mathbf{S}^*\eta \;=\; \int_a^b \int_c^d \eta \Big(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v \Big)\; du\; dv \;. \qquad (5.1.1.3)$$

Observações

1. Seja $\vec{f} \;=\; \Big(f_1(x,\; y, z),\; f_2(x,\; y, z),\; f_3(x,\; y,\; z) \Big)$ uma função vetorial contínua em uma região **D** do espaço $\mathbf{R}^3$ e seja η a correspondente $2 - forma$, dada por:

$$\eta \;=\; f_1\; dy \wedge dz \;+\; f_2\; dz \wedge dx \;+\; f_3\; dx \wedge dy \;.$$

Do Cálculo Vetorial Elementar, temos:

$$\int\int_{\mathbf{S}} \vec{f}\; .\; d\,\vec{S} \;=\; \int\int_{\mathbf{S}} \vec{f}\; .\; \vec{n}\; dS \;=\; \pm \int\int_{R_{yz}} f_1\; dy\; dz \pm \int\int_{R_{zx}} f_2\; dz\; dx \pm \int\int_{R_{xy}} f_3\; dx\; dy \;,$$

onde R_{yz}, R_{zx} *e* R_{xy} representam as projeções de $\vec{S}$ sobre os planos **yz**, **zx** e **xy**, respectivamente, e os sinais das integrais do segundo membro são determinados pela posição relativa entre o vetor unitário $\vec{n}$ e os eixos coordenados $(x\ ,\ y\ ,\ z)$. Desse modo, a expressão (5.1.1.3) será escrita na forma:

$$\int\int_{\mathbf{S}} \eta \ = \ \int\int_{\mathbf{S}} (f_1\ dy \wedge dz \ + \ f_2\ dz \wedge dx \ + \ f_3\ dx \wedge dy) = \ \int\int_{\mathbf{S}} \vec{f}\ .\ d\ \vec{S}\ ,$$

que representa, no Cálculo Vetorial Elementar, um tipo de **integral de superfície**. Na Física, ele representa o **fluxo** de um campo vetorial através de uma superfície.

Definição 5.1.1.5. Seja ω uma $1 - forma$ e $\partial\ \mathbf{S}$ a fronteira de **S**. Define-se a **integral** de ω sobre $\partial\ \mathbf{S}$ como:

$$\int_{\partial S} \omega \ = \ \int_{\partial S_1} \omega + \ \int_{\partial S_2} \omega \ + \ \int_{-\ \partial S_3} \omega + \ \int_{-\ \partial S_4} \omega \ =$$

$$= \ \int_{\partial S} \omega \ = \ \int_{\partial S_1} \omega + \ \int_{\partial S_2} \omega \ - \ \int_{\partial S_3} \omega - \ \int_{\partial S_4} \omega\ . \qquad (5.1.1.4)$$

Exercícios (5.1.1)

EX.5.1.1.1 Calcule $\int_{\Gamma} \omega$, nos seguintes casos:

a) $\omega \ = \ x\ dy \ - \ y\ dx;\quad \Gamma\ :\ (x,\ y) \ \ \rightarrow \ \ (cos\ t,\ sen\ t), \quad 0 \leq t \leq 2\,\pi\ .$

b) $\omega \ = \ x^2\ dx \ + \ y\ dy \ + \ xyz\ dz;\quad \Gamma\ :\ (x,\ y,\ z) \ \ \rightarrow \ \ (t,\ t,\ t), \quad 0 \leq t \leq 1\ .$

Solução

a) Segundo a expressão (5.1.1.1a), teremos:

$$\int_{\Gamma} (x\ dy \ - \ y\ dx) \ = \ \int_{[0,\ 2\pi]} \Gamma^*\ (x\ dy \ - \ y\ dx) \ =$$

$$= \ \int_0^{2\pi} [cost\ d(sen\ t) \ - \ sen\ t\ d(cos\ t)] \ = \ \int_0^{2\pi} [cos^2\ t \ + \ sen^2\ t]\ dt \ = \ \int_0^{2\pi} dt \ = \ 2\pi\ .$$

b) Tomando-se ainda a expressão (5.1.1.1a), teremos:

$$\int_{\Gamma} (x^2\ dx \ + \ y\ dy \ + \ xyz\ dz) \ = \ \int_{[0,\ 1]} \Gamma^*\ (x^2\ dx \ + \ y\ dy \ + \ xyz\ dz) \ =$$

$$= \ \int_0^1 (t^2 \ + \ t \ + \ t^3)\ dt \ = \ \left[\ \frac{t^3}{3} \ + \ \frac{t^2}{2} \ + \ \frac{t^4}{4}\ \right]_o^1 \ = \ (\tfrac{1}{3} \ + \ \tfrac{1}{2} \ + \ \tfrac{1}{4}) \ = \ \frac{13}{12}\ .$$

EX.5.1.1.2 Calcule $\int\int_{\mathbf{S}} \eta$, nos seguintes casos:

a) $\eta \ = \ x\ dy \wedge dz \ + \ y\ dx \wedge dy\ ;$

$\mathbf{S} \ : \ (x, \ y) \quad \rightarrow \quad (u \ + \ v, \ u \ - \ v, uv), \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 \ .$

b) $\eta \ = \ xy \ dy \wedge dz \ + \ x \ dz \wedge dx \ + \ 3xz \ dx \wedge dy$;

$\mathbf{S} \ : \ (x, \ y, \ z) \quad \rightarrow \quad (u, \ v, \ u^2 \ + \ v^2), \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 \ .$

Solução

a) Inicialmente, calculemos $\mathbf{S}^* \ \eta$:

$$\mathbf{S}^* \ (x \ dy \wedge dz \ + \ y \ dx \wedge dy) \ =$$

$$= \ (u \ + \ v) \ d(u \ - \ v) \wedge d(uv) \ + \ (u \ - \ v) \ d(u \ + \ v) \wedge d(u \ - \ v) \ =$$

$$= \ (u \ + \ v) \ (du \ - \ dv) \wedge (u \ dv \ + \ vdu) \ + \ (u \ - \ v) \ (du \ + \ dv) \wedge (du - \ dv) \ =$$

$$= \ (u \ + \ v) \ (u \ du \wedge dv \ - \ v \ dv \wedge du) \ + (u \ - \ v) \ (- \ du \wedge dv \ + \ dv \wedge du) \ =$$

$$= \ (u \ + \ v)(u \ + \ v)du \wedge dv - 2 \ (u - v) \ du \wedge dv = [(u \ + \ v)^2 - 2 \ u \ + \ 2 \ v]du \wedge \ dv \ ,$$

$$\mathbf{S}^* \ (x \ dy \wedge dz \ + \ y \ dx \wedge dy) \ = \ (u^2 \ + \ 2 \ u \ v \ + \ v^2 \ - \ 2 \ u + \ 2v) \ du \wedge dv \ .$$

Usando-se a expressão (5.1.1.3), teremos:

$$\textstyle\int\int_{\mathbf{S}} \ (x \ dy \wedge dz \ + \ y \ dx \wedge dy) \ = \ \int\int_D \ \mathbf{S}^* \ (x \ dy \wedge dz \ + \ y \ dx \wedge dz) \ =$$

$$= \ \textstyle\int_o^1 \int_o^1 \ (u^2 \ + \ 2 \ u \ v \ + \ v^2 \ - \ 2 \ u + \ 2v) \ du \ dv \ =$$

$$= \ \textstyle\int_o^1 [\int_o^1 \ (u^2 \ - \ 2u \ + \ 2 \ u \ v) \ du] \ (v^2 \ + \ 2 \ v) \ dv \ =$$

$$= \ \textstyle\int_o^1 \ (\frac{1}{3} \ - \ 2 \ . \ \frac{1}{2} \ + \ 2 \ . \ \frac{v}{2} \ + \ v^2 \ + \ 2v) \ dv \ = \ \int_o^1 \ (v^2 \ + \ 3 \ v \ - \ \frac{2}{3}) \ dv \ = \ \frac{7}{6} \ .$$

b) Inicialmente, calculemos $\mathbf{S}^* \ \eta$:

$$\mathbf{S}^* \ (xy \ dy \wedge dz \ + \ x \ dz \wedge dx \ + \ 3xz \ dx \wedge dy) \ =$$

$$= \ \mathbf{S}^* \ (uv \ dv \wedge d(u^2 \ + \ v^2) \ + \ u \ d(u^2 \ + \ v^2) \wedge du \ + \ 3u(u^2 \ + \ v^2) \ du \wedge dv \ =$$

$$= \ uv \ dv \wedge (2 \ udu + 2vdv) + u \ (2 \ udu \ + \ 2 \ vdv) \ \wedge du + (3 \ u^3 + 3uv^2) \ du \wedge dv =$$

$$= \ 2 \ u^2 v \ dv \wedge du \ + \ 2 \ uv \ dv \wedge du \ + \ (3 \ u^3 \ + \ 3 \ uv^2) \ du \wedge dv \ =$$

$$= \ (3 \ u^3 \ + \ 3 \ uv^2 \ - \ 2 \ u^2 v \ - \ 2 \ uv) \ du \wedge dv \ .$$

Usando-se a expressão (5.1.1.3), teremos:

$$\int\int_{\mathbf{S}} (xy\ dy \wedge dz\ +\ x\ dz \wedge dx\ +\ 3xz\ dx \wedge dy)\ =$$

$$=\ \int\int_D \mathbf{S}^* \ (xy\ dy \wedge dz\ +\ x\ dz \wedge dx\ +\ 3xz\ dx \wedge dy)\ =$$

$$=\ \int_o^1 \int_o^1 (3\ u^3\ +\ 3\ uv^2\ -\ 2\ u^2 v\ -\ 2\ uv)\ du\ dv\ =$$

$$=\ \int_o^1 (\tfrac{3}{4}\ +\ \tfrac{3}{2}\ v^2\ -\ 2\ .\ \tfrac{1}{3}\ v\ -\ 2\ .\ \tfrac{1}{2}\ v)\ dv\ =\ (\tfrac{3}{4}\ +\ \tfrac{3}{2} \times \tfrac{1}{3}\ -\ \tfrac{5}{3} \times \tfrac{1}{2})\ =\ \tfrac{5}{12}\ .$$

5.1.2 Teorema Generalizado de Stokes

Seja α uma $p-forma$ e **D** um **(p + 1)-domínio** orientado com uma fronteira ∂ **D** cuja orientação é induzida pela de **D**. O **Teorema Generalizado de Stokes** afirma que:

$$\int_D d\alpha\ =\ \int_{\partial D} \alpha\ . \qquad (5.1.2.1)$$

Observações

1. O **Teorema Generalizado de Stokes**, também conhecido como **Teorema de Barrow-Newton-Leibniz-Gauss-Ostrogradski-Green-Stokes-Poincaré**, pode ser demonstrado em uma variedade diferenciável **M**. Neste caso, **D** e ∂ **D** recebem o nome genérico de **cadeia**.

2. Se α é uma $p-forma$ e β uma $q-forma$, as expressões (4.1.2.1b) e (5.1.2.1) nos permitem obter a generalização da **integração por partes**, ou seja:

$$\int_D d(\alpha \wedge \beta)\ =\ \int_D (d\alpha \wedge \beta\ +\ (-1)^p\ \alpha \wedge d\beta)\ =\ \int_{\partial D} (\alpha \wedge \beta)\ . \qquad (5.1.2.2)$$

3. O operador fronteira ∂ satisfaz a seguinte propriedade:

$$\partial\ .\ \partial\ =\ 0\ . \qquad (5.1.2.3)$$

Intuitivamente, essa propriedade é entendida da seguinte forma: uma curva que limita uma superfície não tem pontos extremos; a superfície que limita um volume não tem borda.

3.1. Uma cadeia **C**, para a qual $\partial\ \mathbf{C}\ =\ 0$, é dita um **ciclo**.

3.2. Uma cadeia **C**, que pode ser escrita como $\mathbf{C} = \partial\ \mathbf{B}$ para algum **B**, é dita uma **fronteira**. Em vista da expressão (5.1.2.3), temos:

$$\partial\ \mathbf{C}\ =\ \partial(\partial\ \mathbf{B})\ =\ 0\ . \qquad (5.1.2.4)$$

A expressão acima é equivalente ao **Lema de Poincaré**:

$$d(d\alpha) \ = \ 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \partial(\partial\ \mathbf{B}) \ = \ 0 \ .$$

Exemplo

Verificar o **Teorema Generalizado de Stokes** no caso particular em que α é uma $1 - forma$ dada por:

$$\alpha \ = \ f_1(x,\ y,\ z)\ dx \ + \ f_2(x,\ y,\ z)\ dy \ + \ f_3(x,\ y,\ z)\ dz \ .$$

Consideremos uma transformação **T** que muda α para um novo sistema de coordenadas $(u\ ,\ v)$. Então, segundo a Definição (4.1.3.2), teremos:

$$\alpha^* \ = \ f(u,\ v)\ du \ + \ g(u,\ v)\ dv \ ,$$

onde **f** e **g** são funções diferenciáveis de (u, v). Usando-se a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$d(\alpha^*) \ = \ df \wedge du \ + \ dg \wedge dv \ = \ (\tfrac{\partial f}{\partial u}\ du \ + \ \tfrac{\partial f}{\partial v}\ dv) \wedge du \ + \ (\tfrac{\partial g}{\partial u}\ du \ + \ \tfrac{\partial g}{\partial v}\ dv) \wedge dv \ ,$$

$$d(\alpha^*) \ = \ (\tfrac{\partial g}{\partial u} \ - \ \tfrac{\partial f}{\partial v})\ du \wedge dv \ .$$

Usando-se a Definição (5.1.1.4), a expressão (4.1.3.2c) e o resultado anterior, virá:

$$\textstyle\int\int_S d\alpha \ = \ \int\int_D (d\alpha)^* \ = \ \int\int_D d(\alpha^*) \ = \ \int\int_D (\frac{\partial g}{\partial u} \ - \ \frac{\partial f}{\partial v})\ du\ dv \ =$$

$$\textstyle = \ \int\int_D \frac{\partial g}{\partial u}\ du\ dv \ - \ \int\int_D \frac{\partial f}{\partial v}\ du\ dv \ .$$

Para resolvermos as integrais duplas acima, vamos tratá-las como integrais iteradas. Inicialmente, lembremos que o $2 - segmento$ **S** tem as fronteiras ∂_{S_1}, ∂_{S_2}, ∂_{S_3} e ∂_{S_4} e que o correspondente retângulo **D** $(a \leq u \leq b;\ c \leq v \leq d)$, decorrente da transformação **T**, tem as fronteiras $\partial\ D_1(u) \ = \ D(c,\ u),\ \partial\ D_2(v) \ = \ D(b,\ v),\ \partial\ D_3(u) \ = \ D(d,\ u)\ e\ \partial\ D_4(v) \ = \ D(a,\ v)$. Assim, teremos:

$$\textstyle\int\int_D \frac{\partial g}{\partial u}\ du\ dv \ = \ \int_c^d \Big(\ \int_a^b \frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\ du\ \Big)\ dv \ = \ \int_c^d I(v)\ dv \ .$$

Como **v** é uma constante na integral $\mathbf{I(v)}$, o integrando é uma derivada ordinária em relação a **u**. Portanto, de acordo com o **Teorema Fundamental do Cálculo**, teremos:

$$\textstyle I(v) \ = \ \int_a^b \frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\ du \ = \ g(b,\ v) \ - \ g(a,\ v) \ ,$$

conseqüentemente:

$$\textstyle\int\int_D \frac{\partial g}{\partial u}\ du\ dv \ = \ \int_c^d g(b,\ v)\ dv \ - \ \int_c^d g(a,\ v)\ dv \ .$$

Sobre a curva $\partial\ D_2, du = 0$, então $\alpha^* = g(b,\ v)\ dv$. Portanto, usando-se a Definição (5.1.1.2), resultará:

$$\int_c^d g(b,\ v)\ dv\ =\ \int_{\partial D_2} \alpha^*\ =\ \int_{\partial S_2} \alpha\ .$$

De modo análogo, teremos:

$$\int_c^d g(a,\ v)\ dv\ =\ \int_{\partial D_4} \alpha^*\ =\ \int_{\partial S_4} \alpha\ .$$

Em vista disso, podemos escrever que:

$$\int\int_D \frac{\partial g}{\partial u}\ du\ dv\ =\ \int_{\partial S_2} \alpha\ -\ \int_{\partial S_4} \alpha\ .$$

Um raciocínio análogo ao que foi considerado acima nos mostra que:

$$\int\int_D \frac{\partial f}{\partial v}\ du\ dv\ =\ \int_{\partial S_3} \alpha\ -\ \int_{\partial S_1} \alpha\ .$$

Os resultados obtidos acima e mais a Definição (5.1.1.5) nos levam a verificar o **Teorema Generalizado de Stokes**. Com efeito:

$$\int_S d\alpha\ =\ \int_{\partial S_1} \alpha\ +\ \int_{\partial S_2} \alpha\ -\ \int_{\partial S_3} \alpha\ -\ \int_{\partial S_4} \alpha\ \ \rightarrow\ \ \int_S d\alpha\ =\ \int_{\partial S} \alpha\ .$$

Exercícios (5.1.2)

EX.5.1.2.1 Use o **Teorema Generalizado de Stokes** para demonstrar:

a) O **Teorema Fundamental do Cálculo** ou **Teorema de Barrow-Newton-Leibniz** - $\int_a^b df\ =\ f(b)\ -\ f(a)$;

b) O **Teorema de Gauss-Ostrogradski** - $\int_V \nabla\ .\ \vec{A}\ dV\ =\ \int_S \vec{A}\ .\ d\vec{S}$;

c) O **Teorema de Stokes** - $\int_S \nabla \times \vec{A}\ .\ d\vec{S}\ =\ \oint \vec{A}\ .\ d\vec{\ell}$.

Solução

a) **Teorema de Barrow-Newton-Leibniz** - Seja **f** uma $0 - forma$ e consideremos D = [a, b] cuja fronteira é $\partial D\ =\ \partial([a,\ b])$. Então, usando-se as expressões (5.1.1.1b) e (5.1.2.1), teremos:

$$\int_{[a,b]} df\ =\ \int_a^b df\ =\ \int_{\partial([a,b])} f\ =\ f(b)\ -\ f(a)\ .$$

b) **Teorema de Gauss-Ostrogradski** - Sejam os seguintes vetores:

$$\vec{A}\ =\ A_x(x,\ y,\ z)\ \hat{x}\ +\ A_y(x,\ y,\ z)\ \hat{y}\ +\ A_z(x,\ y,\ z)\ \hat{z}\ ,$$

$$d\vec{S} \ = \ dy\ dz\ \hat{x} \ + \ dz\ dx\ \hat{y} \ + \ dx\ dy\ \hat{z}\ .$$

Seja ϕ_A a $1 - forma$ correspondente ao vetor $\vec{A}$, isto é:

$$\phi_A \ = \ A_x(x,\ y,\ z)\ dx \ + \ A_y(x,\ y,\ z)\ dy \ + \ A_z(x,\ y,\ z)\ dz\ .$$

Segundo vimos no Exercício (4.1.2.1), temos:

$$\star\ \phi_A \ = \ A_x\ dy \wedge dz \ + \ A_y\ dz \wedge dx \ + \ A_z\ dx \wedge dy\ ,$$

$$d\star\ \phi_A \ = \ (\tfrac{\partial A_x}{\partial x} \ + \ \tfrac{\partial A_y}{\partial y} \ + \ \tfrac{\partial A_z}{\partial z})\ dx \wedge dy \wedge dz\ .$$

Escolhendo-se $\alpha \ = \ \star\ \phi_A$, o **Teorema Generalizado de Stokes** nos permite escrever que:

$$\int_V\ d\ (\star\ \phi_A) \ = \ \int_S\ (\star\ \phi_A) \quad \rightarrow$$

$$\int_V\ (\tfrac{\partial A_x}{\partial x} \ + \ \tfrac{\partial A_y}{\partial y} \ + \ \tfrac{\partial A_z}{\partial z})\ dx \wedge dy \wedge dz \ = \ \int_S\ A_x\ dy \wedge dz \ + \ A_y\ dz \wedge dx \ + \ A_z\ dx \wedge dy\ .$$

Usando-se a notação do Cálculo Vetorial, teremos:

$$\int_V\ \nabla\ .\ \vec{A}\ dV \ = \ \int_S\ \vec{A}\ .\ d\vec{S}\ .$$

c) **Teorema de Stokes** - Sejam os seguintes vetores:

$$\vec{A} \ = \ A_x(x,\ y,\ z)\ \hat{x} \ + \ A_y(x,\ y,\ z)\ \hat{y} \ + \ A_z(x,\ y,\ z)\ \hat{z}\ ,$$

$$d\vec{S} \ = \ dy\ dz\ \hat{x} \ + \ dz\ dx\ \hat{y} \ + \ dx\ dy\ \hat{z}\ ,$$

$$d\vec{\ell} \ = \ dx\ \hat{x} \ + \ dy\ \hat{y} \ + \ dz\ \hat{z}\ .$$

Seja ϕ_A a $1 - forma$ correspondente ao vetor $\vec{A}$, isto é:

$$\phi_A \ = \ A_x(x,\ y,\ z)\ dx \ + \ A_y(x,\ y,\ z)\ dy \ + \ A_z(x,\ y,\ z)\ dz\ .$$

Segundo vimos no Exercício (4.1.2.1), temos:

$$d\ \phi_A \ = \ (\tfrac{\partial A_z}{\partial y} \ - \ \tfrac{\partial A_y}{\partial z})\ dy \wedge dz \ + \ (\tfrac{\partial A_x}{\partial z} \ - \ \tfrac{\partial A_z}{\partial x})\ dz \wedge dx \ + \ (\tfrac{\partial A_y}{\partial x} \ - \ \tfrac{\partial A_x}{\partial y})\ dx \wedge dy\ .$$

Escolhendo-se $\alpha \ = \ \phi_A$, o **Teorema Generalizado de Stokes** nos permite escrever que:

$$\int_S\ d\ \phi_A \ = \ \oint_\Gamma\ \phi_A \quad \rightarrow$$

$$\int_S \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \int_\Gamma A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz\ .$$

Usando-se a notação do Cálculo Vetorial, teremos:

$$\int_S \nabla \times \vec{A}\ .\ d\vec{S} = \int_\Gamma \vec{A}\ .\ d\vec{\ell}\ .$$

$\boxed{\text{EX.5.1.2.2}}$ Considere um campo de força descrito pela $1 - forma$:

$$\alpha = (2x + y)\, dx + x\, dy\ .$$

Encontre o trabalho τ realizado por esse campo para mover uma partícula do ponto **A** (1, -2) ao ponto **B** (2, 1) ao longo de qualquer curva.

$\boxed{\text{Solução}}$

Inicialmente, calculemos $d\alpha$:

$$d\alpha = d[(2x + y)\, dx + x\, dy] = 2\, dx \wedge dx + dy \wedge dx + dx \wedge dy =$$

$$= -\, dx \wedge dy + dx \wedge dy = 0\ .$$

Portanto, segundo o **Lema de Poincaré**, essa forma é fechada. Vejamos se ela é exata. Para isso, procuremos a $0 - forma$ $\tau(x,\ y)$ de modo que tenhamos:

$$\alpha = d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \tau}{\partial y}\, dy = (2x + y)\, dx + x\, dy\ ,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 2x + y \quad \rightarrow \quad \tau = x^2 + y\, x + f(y)\ ,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = x \quad \rightarrow \quad \tau = x\, y + g(x) \quad \rightarrow \quad \tau(x,\ y) = x^2 + x\, y + C\ .$$

Usando-se o **Teorema Generalizado de Stokes** e o **Teorema Fundamental do Cálculo**, virá:

$$\int_D d\tau = \int_{\partial D} \tau = \int_A^B \tau = \tau(B) - \tau(A) = [x^2 + x\, y + C]_{(2,\ 1)} - [x^2 + x\, y + C]_{(1,\ -\ 2)},$$

$$\tau = 4 + 2 + C - 1 + 2 - C \quad \rightarrow \quad \tau = 7\ .$$

5.1.3 Derivada de Lie

Definição 5.1.3.1. Seja $(X_1,\ X_2,\ ...\ X_{p-1})$ um conjunto de campos de vetores sobre uma variedade **M** e α uma $p - forma$. Define-se o operador **produto interno** de α por **X**, a $(p - 1) - forma$ diferencial $i_X \alpha$ dada por:

$$(i_X \alpha)\ (X_1,\ X_2,\ ...\ X_{p-1})\ =\ \alpha(X, X_1,\ X_2,\ ...\ X_{p-1})\ , \qquad (5.1.3.1)$$

com as seguintes propriedades:

1) $i_{X\ +\ Y}\ =\ i_X\ +\ i_Y$; (5.1.3.2a)

2) $(i_X)^2\ =\ i_X\ i_X\ =\ 0$; (5.1.3.2b)

3) Se $\alpha\ e\ \beta$ são $p - formas$ e $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, então:

$$i_X(\alpha\ +\ \beta)\ =\ i_X\alpha\ +\ i_X\beta;\quad i_X\ (a\ \alpha)\ =\ a\ i_X\alpha\ ; \qquad (5.1.3.2c,d)$$

4) Se α é uma $p - forma$ e β uma $q - forma$, então:

$$i_X(\alpha \wedge \beta)\ =\ (i_X\alpha) \wedge \beta\ +\ (-\ 1)^p\ \alpha \wedge (i_X\beta)\ ; \qquad (5.1.3.2e)$$

5) Se α é uma $p - forma$ e $\mathbf{f}$ uma $0 - forma$, então:

$$i_{fX}\ \alpha\ =\ i_X(f\ \alpha)\ ; \qquad (5.1.3.2f)$$

6) Se α é uma $1 - forma$ e $\mathbf{f}$ uma $0 - forma$, então:

$$i_X\alpha\ =\ \alpha(X);\quad i_X(f)\ =\ 0\ . \qquad (5.1.3.2g,h)$$

Observações

1. Seja α uma $p - forma$ escrita em termos da base $\{\ dx^i\ \}$:

$$\alpha\ =\ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p}\ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}\ ... \wedge dx^{i_p}\ ,$$

e seja ainda $\mathbf{X} = X^i\ \frac{\partial}{\partial x^i}$, onde $\{\ \frac{\partial}{\partial x^i}\ \}$ é uma base natural de $T_p(M)$, dual de $\{\ dx^i\ \}$, então:

$$i_X\alpha\ =\ \frac{1}{(p\ -\ 1)!}\ X^{i_1}\ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p}\ dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} \wedge ... \wedge dx^{i_p}\ . \qquad (5.1.3.3a)$$

1.1. Seja a $1 - forma$ **df**, dada por:

$$df\ =\ \frac{\partial f}{\partial x^i}\ dx^i\ ,$$

então:

$$i_X df\ =\ X^i\ \frac{\partial f}{\partial x^i}\ = < X,\ df > =\ X(f)\ , \qquad (5.1.3.3b)$$

onde $<\ ,\ >$ é o produto escalar ou interno.

Definição 5.1.3.2. Seja α uma $p - forma$ escrita em termos da base $\{\ dx^i\ \}$:

$$\alpha \ = \ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p} \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} \ .$$

Define-se a **Derivada de Lie** de α em relação a **X** - $L_X \alpha$ - como:

$$L_X \alpha \ = \ X(\alpha_{i_1 i_2 ... i_p}) \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} \ + \ (\partial_{i_1} \ X^k) \ \alpha_{k i_2 ... i_p} \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} \ +$$

$$+ \ (\partial_{i_2} \ X^k) \ \alpha_{i_1 k ... i_p} \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} + ...$$

$$... \ + \ (\partial_{i_p} \ X^k) \ \alpha_{i_1 i_2 ... i_{p-1} k} \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} \ . \qquad (5.1.3.4)$$

Observações

1. Para a $0-forma$ **f**, as expressões (5.1.3.4) e (5.1.3.3b) permitem escrever que:

$$L_X f \ = \ X(f) \ = \ i_X \ df \ = \ X^i \ \frac{\partial f}{\partial x^i} \ = < X, \ df > . \qquad (5.1.3.5)$$

Comparando-se a expressão acima com a expressão (4.1.5.2a), que define a derivada direcional, verifica-se que elas são equivalentes. Desse modo, podemos dizer que:

A Derivada de Lie de uma função é a derivada direcional.

2. Para a $1-forma$ $\alpha \ = \ \alpha_j \ dx^j$, segundo as expressões (5.1.3.4) e (5.1.3.5), teremos:

$$L_X \alpha \ = \ X(\alpha_j) \ dx^j \ + \ (\partial_j \ X^i) \ \alpha_i \ dx^j \ = \ X^i \ (\partial_i \ \alpha_j) \ dx^j \ + \ (\partial_j \ X^i) \ \alpha_i \ dx^j \ .$$

Usando-se as expressões (5.1.3.2d,e) e (5.1.3.3b), obtêm-se os seguintes resultados:

$$i_X \ d\alpha \ = \ i_X [d\alpha_i \wedge dx^i] \ = \ i_X [(\partial_j \alpha_i) \ dx^j \wedge dx^i] \ ,$$

$$i_X \ d\alpha \ = \ \partial_j \alpha_i \ (i_X dx^j) \wedge dx^i \ - \ (\partial_j \alpha_i \ dx^j) \wedge (i_X dx^i) \ = \ X^j \ \partial_j \alpha_i \ dx^i \ - \ X^i \ \partial_j \alpha_i \ dx^j \ .$$

$$d(i_X \alpha) \ = \ d(X^i \ \alpha_i) \ = \ (\partial_i \ X^j) \ \alpha_j \ dx^i \ + \ X^i \ (\partial_j \ \alpha_i) \ dx^j \ .$$

$$i_X \ d\alpha \ + \ d(i_X \alpha) \ = \ X^j \ \partial_j \alpha_i \ dx^i \ + \ (\partial_i \ X^j) \ \alpha_j \ dx^i \ = \ X^i \ \partial_i \alpha_j \ dx^j \ + \ (\partial_j \ X^i) \ \alpha_i \ dx^j \ .$$

Comparando-se esse resultado com o de $L_X \alpha$ calculado acima, verifica-se que:

$$L_X \alpha \ = \ i_X \ d\alpha \ + \ d(i_X \alpha) \ = \ (i_X \ d)\alpha \ + \ (d \ i_X)\alpha \quad \rightarrow \quad L_X \alpha \ = \ \{ \ i_X, \ d \ \} \ \alpha \ ,$$

onde $\{ \ , \ \}$ indica o operador **anti-comutador**.

2.1. A expressão acima vale para uma $p-forma$ α. Desse modo, podemos apresentar a seguinte definição.

Definição 5.1.3.3. Seja α uma $p-forma$. Define-se a **Derivada de Lie** de α como:

$$L_X\alpha \;=\; (i_X\; d)\;\alpha \;+\; (d\; i_X)\alpha \;=\; (i_X\; d \;+\; d\; i_X)\alpha \;=\; \{\; i_X,\; d\;\}\;\alpha\;. \qquad (5.1.3.6)$$

Observação

A expressão acima mostra que os operadores **d**, i_X e L_X satisfazem a chamada **identidade de homotopia**:

$$L_X \;=\; i_X\; d \;+\; d\; i_X\;, \qquad (5.1.3.7a)$$

com as seguintes propriedades:

a) $L_X\;.\;d \;=\; d\;.\;L_X; \qquad L_X\;.\;i_X \;=\; i_X\;.\;L_X\;;$ (5.1.3.7b,c)

b) $[L_X,\; L_Y] \;=\; L_{[X,\;Y]}; \qquad [L_X,\; i_Y] \;=\; i_{[X,\;Y]}\;;$ (5.1.3.7d,e)

c) $[[L_X,\; L_Y],\; L_Z] \;+\; [[L_Z,\; L_X],\; L_Y] \;+\; [[L_Y,\; L_Z],\; L_X] \;=\; 0\;;$ (5.1.3.7f)

d) $L_X(\alpha \;+\; \beta) \;=\; L_X\alpha \;+\; L_X\beta; \qquad L_X(a\;\alpha) \;=\; a\;L_X\alpha\;;$ (5.1.3.7g)

e) $L_X(\alpha \wedge \beta) \;=\; L_X\alpha \wedge \beta \;+\; \alpha \wedge L_X\beta\;;$ (5.1.3.7h)

f) $L_X\; f \;=\; X\; f; \qquad L_X\; df \;=\; d(X\; f)\;;$ (5.1.3.7i,j)

g) $L_{fX}\alpha \;=\; f\; L_X\alpha \;+\; df \wedge i_X\alpha\;;$ (5.1.3.7k)

h) $L_{X\;+\;Y} \;=\; L_X \;+\; L_Y; \qquad L_{aX} \;=\; a\; L_X\;,$ (5.1.3.7l,m)

i) $L_X\;\alpha \;=\; d[\alpha(X)] \;+\; (d\alpha)(X)\;.$ (5.1.3.7n).

Observação

A expressão (5.1.3.7n) é conhecida como **Identidade de Cartan** [Burke (1985)].

Definição 5.1.3.4. Para o tensor $T^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_q}$, a **Derivada de Lie** é definida da seguinte maneira:

$$(L_X T)^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_q} \;=\; X^k\; \partial_k T^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_q} \;-\; (\partial_k X^{a_1})\; T^{k a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_q} \;-(\partial_k X^{a_2})\; T^{a_1 k \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_q} \;-\; \ldots \;-$$

$$-\;(\partial_k X^{a_p})\; T^{a_1 a_2 \ldots a_{p-1} k}_{b_1 b_2 \ldots b_q} \;+\; (\partial_{b_1} X^k)\; T^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{k b_2 \ldots b_q} \;+\; (\partial_{b_2} X^k)\; T^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 k \ldots b_q} \;+\; \ldots \;+$$

$$+\;(\partial_{b_q} X^k)\; T^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_{q-1} k}\;. \qquad (5.1.3.8a)$$

Observação

Para o **tensor métrico** g_{ij}, tem-se:

$$(L_X g)_{ij} \;=\; X_{i,\;j} \;+\; X_{j,\;i}\;, \qquad (5.1.3.8b)$$

onde a vírgula (,) representa a Derivada Covariante. Registre-se que, quando $L_X\mathbf{g} \,=\, 0$, temos a chamada **Equação de Killing**, que representa uma **isometria**, definida como uma transformação de uma variedade em si própria que preserva a métrica. Essa transformação é também chamada de **movimento**.

Exercícios (5.1.3)

EX.5.1.3.1 Use a Definição de Derivada Covariante, dada pela expressão (4.1.6.12c), para demonstrar a expressão (5.1.3.8b).

Solução

Usando-se as expressões (5.1.3.8a) e (4.1.6.8a), teremos:

$$(L_X g)_{ij} \ = \ X^k \ \partial_k \ g_{ij} \ + \ (\partial_i \ X^k) \ g_{kj} \ + \ (\partial_j \ X^k) \ g_{ik} \ , \qquad \text{(I)}$$

$$\partial_j \ X_i = \partial_j \ (g_{ki} \ X^k) \ = \ X^k \ \partial_j \ g_{ki} \ + \ (\partial_j \ X^k) \ g_{ki} \ \ \to \ \ (\partial_j \ X^k) \ g_{ki} = \partial_j \ X_i \ - \ X^k \ \partial_j \ g_{ki} \ ,$$

$$\partial_i \ X_j = \partial_i \ (g_{kj} \ X^k) \ = \ X^k \ \partial_i \ g_{kj} \ + \ (\partial_i \ X^k) \ g_{kj} \ \ \to \ \ (\partial_i \ X^k) \ g_{kj} = \partial_i \ X_j \ - \ X^k \ \partial_i \ g_{kj} \ ,$$

Levando-se essas duas últimas expressões na expressão (I) e lembrando que o tensor $\mathbf{g}_{ij}$ é simétrico, virá:

$$(L_X g)_{ij} \ = \ X^k \ (\partial_k \ g_{ij} \ - \ \partial_j \ g_{ki} \ - \ \partial_i \ g_{kj}) \ + \ \partial_i \ X_j \ + \ \partial_j \ X_i \ . \qquad \text{(II)}$$

Tomemos o **símbolo de Christoffel**, dado pela expressão (4.1.6.15):

$$\Gamma^k_{ij} \ = \ \Gamma^k_{ji} \ = \ \frac{1}{2} \ g^{km} \ (\partial_i \ g_{mj} \ + \ \partial_j \ g_{im} \ - \ \partial_m \ g_{ij}) \ \to \ 2 \ \Gamma^k_{ij} \ = \ g^{km} \ (\partial_i \ g_{mj} + \partial_j \ g_{im} \ - \ \partial_m \ g_{ij}),$$

$$2 \ \Gamma^k_{ij} \ X_k = g^{km} \ X_k \ (\partial_i \ g_{mj} \ + \ \partial_j \ g_{im} \ - \ \partial_m \ g_{ij}) \ = \ X^m \ (\partial_i \ g_{mj} \ + \ \partial_j \ g_{im} \ - \ \partial_m \ g_{ij}) \ ,$$

$$2 \ \Gamma^k_{ij} \ X_k \ = \ X^k \ (\partial_i \ g_{kj} \ + \ \partial_j \ g_{ik} \ - \ \partial_k \ g_{ij}) \ \ \to$$

$$- \ \Gamma^k_{ij} \ X_k \ - \ \Gamma^k_{ji} \ X_k \ = \ X^k \ (\partial_k \ g_{ij} \ - \ \partial_i \ g_{kj} \ - \ \partial_j \ g_{ki}) \ . \qquad \text{(III)}$$

Levando-se (III) em (II), e usando-se a expressão (4.1.6.12c), virá:

$$(L_X g)_{ij} \ = \ \partial_i \ X_j \ - \ \Gamma^k_{ij} \ X_k \ + \ \partial_j \ X_i \ - \ \Gamma^k_{ji} \ X_k \ \ \to \ \ (L_X g)_{ij} \ = \ X_{j,\ i} \ + \ X_{i,\ j} \ .$$

5.1.4 Derivada Convectiva e Integração sobre um Domínio Móvel

Existem situações onde a evolução de sistemas físicos pode ser vista como um fluxo em alguma configuração espacial apropriadamente escolhida, como acontece, por exemplo, na Mecânica dos Fluidos e nos problemas de transporte de um modo geral, tanto clássico quanto quântico. Neste caso, a existência de um fluxo sugere imediatamente o uso da **Derivada de Lie** relativa à velocidade **V** para a generalização do conceito de **Derivada Convectiva** δ_t, importante no tratamento de problemas de fluxo, uma vez que este é descrito por um campo vetorial **V** de velocidades.

Definição 5.1.4.1. Seja α uma $p-forma$. Define-se a **Derivada Convectiva** de α - $\delta_t\ \alpha$ - como:

$$\delta_t\ \alpha\ =\ \partial_t\ \alpha\ +\ L_V\ \alpha\ . \qquad (5.1.4.1)$$

Observações

1. Para a $0-forma$ **f**, as expressões (5.1.4.1) e (5.1.3.5) permitem escrever que:

$$\delta_t\ f\ =\ \partial_t\ f\ +\ L_V\ f\ =\ \partial_t\ f\ +\ V^i\ \partial_i\ f\ =\ \partial_t\ f\ +\ (\vec{V}\ .\ \nabla)\ f\ . \qquad (5.1.4.2a)$$

2. Para a $p-forma$ α, as expressões (5.1.4.1) e (5.1.3.6) permitem escrever que:

$$\delta_t\ \alpha\ =\ \partial_t\ \alpha\ +\ L_V\ \alpha\ =\ \partial_t\ \alpha\ +\ i_V\ (d\ \alpha)\ +\ d\ (i_V\ \alpha)\ . \qquad (5.1.4.2b)$$

Definição 5.1.4.2. Seja α uma $p-forma$ e consideremos um domínio **D** que se move com uma velocidade **V**. Define-se a taxa de variação da integral de α ao longo de **D**, como:

$$\delta_t \int_D \alpha\ =\ \int_D \delta_t\ \alpha\ . \qquad (5.1.4.3a)$$

Observações

1. Usando-se as expressões (5.1.4.3a) e (5.1.4.2b), teremos:

$$\delta_t \int_D \alpha\ =\ \int_D \partial_t\ \alpha\ +\ \int_D i_V\ (d\ \alpha)\ +\ \int_D d\ (i_V\ \alpha)\ .$$

Usando-se o **Teorema Generalizado de Stokes**, dado pela expressão (5.1.2.1), virá:

$$\delta_t \int_D \alpha\ =\ \int_D \partial_t\ \alpha\ +\ \int_D i_V\ d\ \alpha\ +\ \int_{\partial D} i_V\ \alpha\ . \qquad (5.1.4.3b)$$

1.1. A expressão acima generaliza as fórmulas do Cálculo Vetorial relativas à integração sobre domínios de dimensões 1, 2 e 3. Por exemplo, na dimensão 2, ela corresponde ao **Teorema de Helmholtz**:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{A}\ .\ d\vec{S}\ =\ \int_S \Big(\ \vec{V}\ \nabla\ .\ \vec{A}\ -\ \nabla \times (\vec{V} \times \vec{A})\ \Big)\ .\ d\vec{S}\ . \qquad (5.1.4.3c)$$

Problemas (5.1)

5.1.1. Dada a $1 - forma\ \omega$:

$$\omega \ = \ 2\ x\ y\ z\ dx \ + \ x^2\ z\ dy \ + \ x^2\ y\ dz \ ,$$

calcule $\int_\Gamma \omega$, para:

$$\Gamma \ : \ \ (x,\ y,\ z) \ \ \rightarrow \ \ (ru,\ su,\ tu), \quad 0 \leq u \leq 1 \ .$$

5.1.2. Para cada uma das $1 - formas\ \omega$ dadas abaixo, verifique se elas são fechadas, e quais são exatas.

a) $2\ x\ y\ dx \ + \ x^2\ dy \ + \ 2\ z\ dz$;

b) $\frac{(-\ y\ dx\ +\ x\ dy)}{\sqrt{x^2\ +\ y^2}}$;

c) $e^{x\ y}\ (dx \ + \ \frac{x}{y}\ dy)$;

d) $\frac{(x\ cos\ x\ -\ senx)}{x^2}\ y\ dx \ + \ \frac{senx}{x}\ dy$.

5.1.3. Use o **Teorema Generalizado de Stokes** para demonstrar:

a) **Teorema de Green**: $\int_V\ (f\ \Delta\ g\ -\ g\ \Delta\ f)\ dV \ = \ \oint_S\ (f\ \nabla\ g\ -\ g\ \nabla\ f)\ .\ d\vec{S}$.

b) $V \ = \ \frac{1}{3}\ \int_{\partial R}\ (x\ dy \wedge dz \ + \ y\ dz \wedge dx \ + \ z\ dx \wedge dy)$.

5.1.4. Demonstre as propriedades da **Derivada de Lie -** L_X.

5.1.5. Demonstre o **Teorema de Helmholtz**:

$$\frac{d}{dt}\ \int_S\ \vec{A}\ .\ d\vec{S} \ = \ \int_S\ \Big(\ \vec{V}\ \nabla\ .\ \vec{A} \ - \ \nabla \times (\vec{V} \times \vec{A})\ \Big)\ .\ d\vec{S}\ .$$

Bibliografia - Parte 1

1. Aldrovandi, R. and Pereira, J. G. **An Introduction to Geometrical Physics**. World Scientific (1995).

2. Arnold, V. I. **Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica**. Editora Mir Moscovo (1987).

3. Bamberg, P. and Sternberg, S. **A Course in Mathematics for Students of Physics 1, 2**. Cambridge University Press (1992).

4. Bressoud, D. M. **Second Year Calculus**. Springer-Verlag (1991).

5. Burke, W. L. **Applied Differential Geometry**. Cambridge University Press (1987).

6. Costa, J. E. R. **O Cálculo das Componentes do Tensor de Riemann através de Formas Diferenciais**. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora (1990).

7. Deschamps, G. A. **Exterior Differential Forms**. IN: **Mathematics Applied to Physics**. Springer-Verlag (1970).

8. ————, **Electromagnetics and Differential Forms**, *Proceedings of the IEEE, 69 (6)*: 676-696 (1981).

9. Eguchi, T., Gilkey, P. B. and Hanson, A. J. **Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry**, *Physics Reports 66 (6)*:213-393 (1980).

10. Ferreira, B. A. **Equações de Maxwell em Forma Tensorial e em Linguagem de Formas Diferenciais**. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora (1992).

11. Flanders, H. **Differential Forms with Applications to the Physical Sciences**. Academic Press (1963).

12. ———, **Differential Forms**, IN: **Studies in Global Geometry and Analysis 4**. The Mathematical Association of America. (1967).

13. Göckeler, M. and Schücker, T. **Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity**. Cambridge University Press (1995).

14. Hsu, H. P. **Vector Analysis**. Simon and Schuster, Inc. (1969).

15. Kremer, H. F. **Cálculo Tensorial**. Notas de aulas. Instituto de Física da Universidade Federal do Paraná (1962).

16. Nash, C. and Sen, S. **Topology and Geometry for Physicists**. Academic Press (1992).

17. Oliveira, W. **Introdução à Geometria Riemanniana**. Notas de Aulas. Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora (1990).

18. O'Neil, B. **Elementos de Geometria Diferencial**. Editorial Limusa-Wiley, S. A. (1972).

19. Schleifer, N. **Differential Forms as a Basis for Vector Analysis, with Applications to Electrodynamics**, *American Journal of Physics 51 (12)*: 1139-1145 (1983).

20. Schutz, B. **Geometrical Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press (1995).

21. Spivak, M. **Calculus on Manifolds**. W. A. Benjamin, Inc. (1965).

22. von Westenholz, C. **Differential Forms in Mathematical Physics**. North-Holland Publishing Company (1986).

Capítulo 6

6.1 Mecânica

6.1.1 Introdução: Geometria dos Espaços Físicos

Até o Capítulo 5 apresentamos os aspectos formais do Cálculo Exterior. A partir deste Capítulo 6 e nos dois Capítulos seguintes, vamos apresentar algumas aplicações físicas desse Cálculo: Mecânica, Termodinâmica e Eletrodinâmica. Contudo, para entendermos a relevância do Cálculo Exterior precisaríamos estudar a **Geometria dos Espaços Físicos**.

Entendemos por *Geometria* a ciência do espaço, ou melhor, dos espaços que são adotados para estudar os fenômenos físicos. Não é nossa intenção analisar essa geometrização. Esta pode ser vista, por exemplo, nos excelentes livros citados na Bibliografia - Parte 2: [Aldrovandi e Pereira (1995); Schutz (1995)].

Geometrizar um certo fenômeno dinâmico [Videira (1987)], como a gravitação, ou o eletromagnetismo (ou qualquer outro fenômeno significa incorporar o *campo* (ou o *potencial*) associado a esse fenômeno dinâmico numa dada estrutura geométrica, isto é, o *objeto dinâmico campo (potencial)* terá de ser parte constituinte de uma certa **variedade**. Esse é o objetivo quando buscamos geometrizar um certo *campo (potencial)*.

Isto implica que devemos escolher ou postular o tipo de **variedade** de acordo com as necessidades físicas. Desse ponto de vista,a Geometria deverá depender estritamente do tipo da dinâmica que precisa ser incorporada. Poderemos fazer isso definindo uma Geometria, isto é, uma **variedade**, e dependendo dessa escolha verificar que tipo de dinâmica ela comporta ou, partindo de certos aspectos denâmicos inferir qual deve ser a Geometria. Em outras palavras, esse acoplamento entre dinâmica e geometria exige que a estrutura geométrica do sistema físico a ser descrito seja postulada de antemão ou inferida [Videira, Rocha Barros e Fernandes (1985)]. De qualquer modo é claro que a estrutura geométrica deverá ser suficientemente complexa e rica para que possa comportar a dinâmica necessária.

Conforme podemos ver nos textos citados acima, a *geometrização dos processos físicos* leva-nos a usar *variedades* com uma Geometria muito mais complicada, mais rica, que a Riemaniana denominadas de **variedades fibradas**. Nestas variedades os objetos geomêtricos básicos são as $p-formas$ e usa-se o Cálculo Exterior, conforme vimos no Capítulo 3. As atuais teorias de *gauge*, por exemplo, baseiam-se na Geometria Fibrada.

Vejamos, agora, sem muita preocupação com o rigor matemático (sobre este, ver Capítulo 4) as propriedades matemáticas e geométricas essenciais de entes que chamamos de **variedades**, **variedades diferenciáveis** e **variedades fibradas**, objetivando o estudo da Mecânica, objeto deste Capítulo.

Em Física usamos a palavra *espaço* para definir, muitas vezes, intuitivamente e de modo pouco rigoroso um conjunto de pontos (coordenadas) usados para descrever a dinâmica de um dado sistema. As suas propriedades são definidas, muitas vezes, baseadas em nossa experiência cotidiana (Aldrovandi e Pereira, op. cit.). É difícil de imaginar um problema físico (Schutz, op. cit.) que não envolva alguma espécie de *espaço contínuo*. Ele pode ser um espaço euclidiano 3-dim, um espaço-tempo 4-dim de Minkowski, um espaço de fase em Mecânica Clássica ou Mecânica Quântica, o espaço de estados de equilíbrio termodinâmico (ver Capítulo 7), ou outro espaço ainda mais abstrato. Todos esses espaços têm diferentes propriedades geométricas, mas eles partilham algo em comum, algo que tem a ver com o fato de serem *espaços contínuos*, em vez, digamos, de serem redes de pontos discretos.

Um dos objetivos primordiais da Geometria Diferencial é o de estudar as propriedades comuns a todos esses *espaços físicos contínuos* criando um substituto matematicamente preciso para o ente *espaço contínuo*. Veremos a seguir como isso é feito definindo primeiramente **variedade** e **variedade diferenciável**.

6.1.1.1 Variedade ("Manifold")

Seja R^n o conjunto de todas as ênuplas de números reais $x = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$. O conjunto desses "pontos" x constitui uma **variedade ("manifold")**, que indicaremos por M, se cada ponto x de M tem uma vizinhança aberta que tem um mapeamento contínuo $1-1$ sobre um conjunto aberto de R^n para um dado n. Isto significa que M é localmente semelhante a R^n. A dimensão de M é igual a de n.É importante que a definição envolva somente conjuntos abertos e não a totalidade de M e R^n, porque não se pretende restringir a *topologia* global de M. Notemos que só se exige que o mapa seja $1 - 1$, sem que haja necessidade de preservar *comprimentos* ou ângulos ou qualquer outra noção geométrica. Comprimento não é nem definido nesse nível de geometria, e encontramos muitas aplicações físicas nas quais não desejamos introduzir a noção de *distância* entre pontos numa variedade. Nesse nível geométrico elementar ("primitivo") pretendemos somente assegurar que a **topologia** de M permaneça idêntica a de R^n. Entendemos por **topologia** o conjunto de elementos estruturais básicos mínimos responsáveis por propriedades qualitativas gerais de um dado conjunto ou espaço. Estes seriam: pontos, conjuntos de pontos, mapas entre conjuntos de pontos, propriedades geométricas que não dependem de tamanhos que são comuns a esferas, toros, etc. (Aldrovandi e Pereira, op. cit.)

6.1.1.2 Variedade Diferenciável

Não procuraremos dar aqui uma definição rigorosa de **variedade diferenciável**, como fizemos no Capítulo 4. Vamos mostrar somente as propriedades essenciais que caracterizam essa variedade, tendo em vista o objetivo deste Capítulo. Desse modo, consideremos que $(x_1,\ x_2,\ ...\ x_n) = (x_i)_{i\ =\ 1,\ 2,\ ...\ n}$ seja um conjunto de variáveis contínuas independentes, que implica $\partial x_i/\partial x_k = \delta_i^k$, que são as coordenadas de pontos que descrevem as propriedades de uma certa variedade. Suponhamos que seja possível descrever a variedade em questão por um novo conjunto de coordenadas $(y_1,\ y_2,\ ...\ y_n) = (y_j)_{j\ =\ 1,\ 2,\ ...\ n}$ que sejam funções das antigas, isto é, que $y_j = y_j(x_i)$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ ...\ n)$. Se essa descrição é, sob todos os aspectos, equivalente à antiga nós devemos ser capazes de obter as variáveis x como funções das novas variáveis y, isto é: $x_i = x_i(y_j)$. Desse modo, nada é perdido quando efetuamos a transformação $x \rightarrow y$. Se quisermos podemos recuperar tudo por uma transformação inversa $y \rightarrow x$. Tais transformações denominam-se *biunívocas* ou $1 - 1$. Se as transformações de coordenadas $y_j = y_j(x_i)$ e $x_i = x_i(y_j)$ e as derivadas parciais de *primeira ordem*, $\partial x_i/\partial y_k$ e $\partial y_i/\partial x_k$, forem contínuas dizemos que a variedade é **diferenciável**.

6.1.1.3 Espaços Físicos Contínuos

Esses espaços são variedades diferenciáveis com propriedades matemáticas adicionais às que foram definidas acima. Por exemplo, em Física Clássica Não-Relativística os espaço físico é 3-dim vetorial onde se define uma distância ou **norma cartesiana** entre dois pontos (Capítulo 1). Em outras palavras, é uma **variedade diferenciável** com propriedade vetorial e com norma cartesiana. Ele ́denominado **Espaço Euclidiano** e indicado por E^3. A Geometria desse espaço é dita Geometria Euclidiana. A norma adotada neste espaço define uma métrica conhecida como **métrica euclidiana**. O tempo t é uma "coordenada" completamente independente das coordenadas espaciais que fazem parte da Geometria Euclidiana de E^3. As transformações entre referenciais inerciais newtonianos são realizadas segundo as **transformações de Galileu**, que formam um grupo chamado de **grupo de Galileu**.

Com o advento da Relatividade Restrita Einsteniana um novo espaço físico foi postulado onde as três coordenadas espaciais e o tempo fazem parte de uma nova variedade 4-dim com uma **norma pseudo-euclidiana** (ou **pseudo-norma**) (Capítulo 8). Esse espaço 4-dim é conhecido como **Espaço de Minkowski** onde a métrica é dita **métrica de Minkowski** e a Geometria é denominada de Geometria de Minkowski. Nesta o tempo e o espaço estão indissoluvelmente ligados. As transformações entre os referenciais inerciais newtonianos descritos por quatro coordenadas, três espaciais e uma temporal, são feitas por intermédio de transformações de coordenadas denominadas de **transformações de Lorentz**. Descobriu-se que o **espaço de Minkowski** é feito sob medida para acolher o formalismo das **Equações de Maxwell** e assim descrever os fenômenos eletromagnéticos, conforme veremos no Capítulo 8.

Na sua tentativa de construir uma teoria relativística para a gravitação, o físico germano-norte-americano Albert Einstein (1879-1955; PNF, 1921), foi, provavelmente, levado a uma *descrição geométrica* dessa classe de fenômeno. Notemos que uma representação geométrica do fenômeno gravitacional já havia sido sugerida pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) em sua Tese para o cargo de *Privatdozent* da Universidade de Göttingen, na Alemanha, em 1854 [Boyer (1968)]. Das quatro interações físicas fundamentais (gravitacional, elétrica, fraca e forte) apenas as duas primeiras são de longo alcance e, portanto, com manifestações globais. Como o Universo é eletricamente neutro, devemos esperar que a estrutura em larga escala do espaço físico 4-dim deveria ser determinada pelo potencial gravitacional. Einstein teve sucesso em sua descrição geométrica da dinâmica gravitacional. A sua teoria é denominada de Geometrodinâmica ou, também, impropriamente de Relatividade Geral. Einstein mostrou que a descrição dos fenômenos gravitacionais pode ser feita em uma **variedade pseudo-Riemanniana espaço-temporal 4-dim** [Bassalo, Cattani e Nassar (1999)].

6.1.1.4 Espaço Tangente

Indiquemos por $M^n(x)$ uma variedade n-dimensional onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Numa variedade podemos ainda manter a imagem de um vetor como uma seta tangente à curva. Entretanto, agora, devemos perceber que somente vetores num mesmo ponto $P \in M^n(x)$ podem ser somados juntos. Vetores em diferentes pontos não possuem nenhuma relação uns com os outros. Os vetores estão contidos, não em $M^n(x)$, mas em um

espaço tangente a $M^n(x)$ no ponto P denominado de TM_P ou, simplesmente, TM. Para variedades comuns tal como, por exemplo, a superfície de uma esfera, o espaço tangente é facilmente visualizado como um plano tangente à esfera no ponto P. Para variedades mais abstratas essa visualização pode ser muito mais difícil (Schutz, op. cit.). Nós usamos o termo **vetor** para indicar um vetor em um dado ponto P de $M^n(x)$. O termo **campo vetorial** refere-se à regra que define um vetor em cada ponto de $M^n(x)$.

6.1.1.5 Espaço Tangente Fibrado

Consideremos duas variedades M e N formadas por elementos a e b, respectivamente. Definimos **produto de espaços** $M \times N$ ou **produto cartesiano de espaços** (Schutz, op. cit.) como sendo uma variedade formada por pares $(a,\ b)$ com a em M e b em N. Se as dimensões de M e N forem, respectivamente, m e n, a dimensão da variedade resultante $M \times N$ será igual a $m + n$.

Uma variedade particularmente interessante é formada pelo produto $M\ X\ TM_P$, ou seja, combinando uma variedade M com todos os espaços tangentes TM_p. A união dos espaços tangentes à variedade $\bigcup TM_{P P \in M}$ em diferentes pontos possui a estrutura natural de uma variedade diferenciável, cuja dimensão é duas vezes maior do que a dimensão de M. Essa variedade diferenciável é denominda de **espaço fibrado tangente**, **feixe de fibras** ("fiber bundles") ou, simplesmente, **fibrado** e é designada por FM. A variedade M é, em geral, conhecida como **variedade base**.

Consideremos o caso mais simples possível (Schutz, op. cit.): uma variedade 1-dim M, uma curva $y = y(x)$, e seus espaços tangentes que são as linhas tracejadas tangentes em cada ponto da curva, conforme Figura 1. Como as tangentes se estendem para longe infinitamente em ambas as direções elas se interceptariam umas com as outras e também com a curva $y = y(x)$. Como essses pontos de contacto não teriam nenhum significado e tornariam muito confusa a figura resultante, a melhor descrição é mostrada na Figura 2 onde as tangentes ou os *espaços tangentes* são desenhados como retas tracejadas paralelas entre si: desse modo elas não se interceptariam e a atravessam a curva $y(x)$ nos pontos onde elas seriam tangentes.

Infelizmente essa descrição não mostra o fato de que cada elemento de TM é tangente à curva $y(x)$ (ou M), mas esse é o preço que devemos pagar para ter uma melhor clareza da união entre as variedades em questão. As linhas verticais de TM representam vetores, com certos "comprimentos" e sendo tangentes a M nos pontos P. Em cada ponto da Figura 2 passa um e somente um vetor em um e somente um ponto de M. Assim, somos levados a definir uma nova variedade FM, *formada por todos os vetores tangentes em todos os pontos*, que é 2-dim. Como dissemos acima, ela se denomina **fibrado tangente**, **feixe de fibras** ("fiber bundles") ou **fibrado**. Cada vetor tangente $V(P)$ num ponto P (ou x) é dado por $V(x) = y(x)\ \partial/\partial x$. Assim, o **fibrado** FM é formado pelos pares $[x,\ V(x)]$.As **fibras** são os espaços tangentes à **variedade base** M.

É oportuno lembrarmos aqui que a geometria dos fibrados é fundamental para a moderna Teoria de Gauge (Videira, op. cit.; Videira, Rocha Barros e Fernandes, op. cit.) usada para investigar a estrutura de Partículas Elementares. Nessa teoria o fibrado é constituído pelo produto topológico (cartesiano) entre dois tipos de variedades: a variedade *base* espaço-temporal $M(x)$, que leva em conta as simetrias externas, e as variedades tangentes (*fibras*) que levam em conta as simetrias internas. A ligação entre essas simetrias é feita por um operador chamado de "**conexão**" ou **potencial de gauge**. O operador quântico unitário U que depende de x e de graus internos de simetria [Moriyasu (1983)] é dado por:

$$U\ =\ exp[-i\ q\ \Theta^k(x)\ F_k]\ , \qquad (6.1.1.5.1)$$

onde $\Theta^k(x)$ é um parâmetro que depende da variedade base $M(x)$, que é uma função contínua de x, F_k são geradores do *grupo interno de simetria* e q é a constante de acoplamento para um grupo arbitrário de gauge. A transformação dada pela Equação (6.1.1.5.1), denominada de *transformação de gauge*, é formalmente idêntica a de uma rotação espacial se identificarmos o parâmetro $\Theta^k(x)$ com os ângulos de rotação. Quando a partícula vai de um ponto x para um outro $x\ +\ dx$ na variedade espaço-temporal o "ângulo" $\Theta^k(x)$ no espaço interno "roda" de um valor $d\Theta^k(x)\ =\ \Theta^k(x\ +\ dx)\ -\ \Theta^k(x)$. Pode-se mostrar (Moriyasu, op. cit.) que existe um operador A_μ ($\mu\ =\ 1, 2, 3, 4$) que gera essas transformações internas dado por $A_\mu\ =\ \partial_\mu\ \Theta^k(x)\ F_k$. Ele é uma generalização do potencial vetor A_μ do eletromagnetismo (Capítulo 8). Ele é um "operador de conexão" (ou só "conexão") entre a variedade-base espaço-temporal $M(x)$ e o espaço interno das partículas ("fibras") e a conexão A é $1-forma$ (Capítulo 3), um objeto geométrico fibrado. Esse tipo de teoria se presta para a descrição, não apenas do eletromagnetismo, como também de fenômenos envolvendo as interações forte e fraca que são de curto alcance.

No caso do eletromagnetismo o grupo interno de simetria é o grupo de fase $U(1)$ e o operador de gauge U, definido pela Equação (6.1.1.5.1), é dado por $U\ =\ exp[-\ i\ q\ \lambda(x)]$ mostrando que o espaço interno de uma carga elétrica consiste de todos os possíveis valores de uma fase $\lambda(x)$ de sua função de onda. Pode-se mostrar que U é responsável por uma transformação de gauge familiar do eletromagnetismo: $A_\mu \rightarrow A_\mu^{'}\ =\ A_\mu\ -\ \partial_\mu\ \lambda(x)$ (Capítulo 8). Como o operador de gauge roda o espaço interno isso sugere uma interpretação geométrica para a transformação de A_μ. Como A_μ é um campo externo, o campo transformado $A_\mu^{'}$ é o campo visto por um observador no sistema de coordenadas que foi rodado. No caso de interação forte o grupo de simetria é o $SU(3)_{cor}$ e no caso da interação eletrofraca o grupo de simetria é o $SU(2) \times U(1)$.

6.1.2 Mecânica Lagrangiana em Variedades

Com sabemos [Goldstein (1959)] a Mecânica Lagrangiana descreve o movimento de um sistema dinâmico assumindo que o mesmo é descrito por **n coordenadas generalizadas** independentes $\vec{q} \; = \; (q_1, \; q_2, \; ..., \; q_n)$ onde $q_i \; = \; q_i(t)$, supondo vínculos holônomos. O espaço n-dim $M^n(\vec{q})$ descrito pelas coordenadas generalizadas $\vec{q}$, que é denominado **espaço configuracional** possui a estrutura de uma **variedade diferenciável**.

A evolução temporal do sistema mecânico conservativo é obtida resolvendo as **equações de Lagrange** que são dadas por:

$$d/dt \; \partial L/\partial q_{i,\;t} \; - \; \partial L/\partial q_i \; = \; 0 \; , \qquad (6.1.2.1)$$

onde $q_{i,\;t} \; = \; \partial q_i/\partial t$, $L \; = \; L(q_i, \; qi, \; t)$ é a **função de Lagrange** ou **Lagrangiana** dada por $L \; = \; T(q_i, \; q_{i\,t}) \; - \; V(q_i, \; q_{i\,t})$, sendo T a energia cinética e V a energia potencial.

A evolução do sistema dinâmico com o tempo é descrita por uma curva $\vec{q}(t)$ na variedade $M^n(\vec{q})$.

6.1.2.1 Espaço Tangente

Como dissemos antes, numa variedade podemos ainda manter a imagem de um vetor como uma seta tangente à curva. E que somente vetores num mesmo ponto $P \in M^n(\vec{q})$ podem ser somados juntos. Vetores em diferentes pontos não possuem nenhuma relação uns com os outros. Os vetores estão contidos, não em $M^n(\vec{q})$, mas em um **espaço tangente** a $M^n(\vec{q})$ no ponto P denominado de TM_P ou, simplesmente, TM. O termo *vetor* indica um vetor em um dado ponto P de $M^n(\vec{q})$ e o termo *campo vetorial* refere-se à regra que define um vetor em cada ponto de $M^n(\vec{q})$.

É fácil verificar que a velocidade generalizada $\vec{q}_{\prime t} \; = \; \partial \vec{q}/\partial t$ é um vetor tangente à variedade $M^n(\vec{q})$, ou seja, $\vec{q}_{\prime t} \in TM$ [Arnold (1987)]. A Lagrangiana L é uma função de q_i e $q_{\prime t}$, assim é uma função sobre o TM.

6.1.3 Mecânica Hamiltoniana Simplética

A descrição de um sistema dinâmico feita pelo Formalismo Hamiltoniano começa com a Lagrangiana $L(\vec{q}, \; \vec{q}_{\prime,t})$ que é função das variáveis $\vec{q}$. O momento generalizado $\vec{p}$ é definido por $\vec{p} \; = \; \partial L/\partial \vec{q}_{\prime,t}$ e a Hamiltoniana $H(\vec{q}, \; \vec{p})$ é dada por: $H \; = \; \vec{p} \; \vec{q}_{\prime,t} \; - \; L$. A Lagrangiana L sendo função de $\vec{q}$ e $\vec{q}_{\prime,t}$ é uma função sobre o fibrado FM.

Na Mecânica Hamiltoniana o **espaço de fase** ou **espaço configuracional** descrito pelas coordenadas $(\vec{q}, \; \vec{p})$ é uma variedade diferenciável $M^{2n}(\vec{q}, \; \vec{p}) = M^{2n}$ de dimensão par igual a $2n$. Assim, a Mecânica Hamiltoniana obedece a Geometria de um espaço de fase de $2n$-dim.

6.1.3.1 Variedade Simplética

Seja M^{2n} uma variedade diferenciável de dimensão par. Chamamos de **estrutura simplética** em M^{2n} a $2 - forma$ diferencial fechada ω_2 não degenerada em M^{2n}. O par

$(M^{2n},\ \omega_2)$ é denominado **variedade simplética**.

Na variedade $M^{2n}(\vec{q},\ \vec{p})$ a $2-forma$ definida acima vale $\omega_2\ =\ d\vec{p}\wedge d\vec{q}\ =\ dp_i \wedge dq^i$ é fechada e não degenerada, ou seja, $d\omega_2\ =\ 0$. Como conseqüência vemos que o espaço de fase Hamiltoniano $[M^{2n}(\vec{q},\ \vec{p}),\ \omega_2]$ é uma variedade simplética (Arnold, op. cit.). A $2-forma$ ω_2 é chamada de **forma simplética**.

6.1.3.2 Fibrado Cotangente e sua Estrutura Simplética

Seja $M\ =\ M^n(\vec{q})$ uma variedade diferenciável n-dimensional com coordenadas $\vec{q}$. Uma $1-forma$ no espaço tangente TM no ponto $\vec{q}$ chama-se **vetor cotangente** a M no ponto $\vec{q}$. O conjunto de todos os vetores cotangentes a M no ponto $\vec{q}$ forma um espaço linear n-dimensional conjugado no espaço tangente TM. Este espaço linear de vetores cotangentes designa-se por $T*M$ e é denominado de **espaço cotangente** à variedade M no ponto $\vec{q}$.

De modo análogo ao caso do fibrado tangente FM, definimos a reunião dos espaços cotangentes $T*M$ à variedade M em todos os seus pontos $\vec{q}$ do **fibrado cotangente** de M e representa-se por $F*M$. Este espaço tem a estrutura natural de uma variedade de dimensão $2n$. Um ponto de $F*M$ é uma $1-forma$ no espaço TM em qualquer ponto $\vec{q}$.

O fibrado cotangente $F*M$ de $M^{2n}(\vec{q},\ \vec{p})$ tem uma estrutura simplética natural (Arnold, op. cit.). Nas coordenadas $(\vec{q},\ \vec{p})$ esta estrutura simplética é dada pela $2-forma$ $\omega_2\ =\ d\vec{p}\wedge d\vec{q}\ =\ dp_i\wedge dq^i$. Em $F*M$ temos a *1-forma* ω^1 dada por $\sigma\ =\ \vec{p}\,d\vec{q}\ =\ p_i\,dq^i$ conhecida como **forma de Liouville**. Notemos que a $2-forma$ ω_2 é não degenerada, ou seja, $d\omega^2\ =\ 0$ e que $\omega_2\ =\ d\omega_1$.

Observações

(a) Consideremos o sistema mecânico Lagrangiano com variedade configuracional $M(\vec{q})$ e a função de Lagrange L. Verifica-se que a velocidade generalizada Lagrangiana $\vec{q_i}$ é um *vetor tangente* à variedade base $M(\vec{q})$, ou seja, $\vec{q_i}\in TM$ enquanto o momento generalizado $\vec{p}\ =\ \partial L/\partial\vec{q'}_{,t}$ é um *vetor cotangente* (Arnold, op. cit.), ou seja, $\vec{p}\ =\ \partial L/\partial\vec{q'}_{,t}\in T*M$.

(b) O espaço de fase $(\vec{q},\ \vec{p})$ é um *fibrado cotangente* $F*M$ da variedade $M(\vec{q})$ e a Hamiltoniana $H(\vec{p},\ \vec{q})$ é uma função sobre esse fibrado (Schutz, op. cit.).

6.1.4 Campos Vetoriais Hamiltonianos

Com o intuito de simplificar a notação no estudo de **campos vetoriais** na variedade $M^{2n}(\vec{p},\ \vec{q})$ ("espaço de fase") vamos considerar somente $p\ =\ p(t)$ e $q\ =\ q(t)$, omitindo os índices $i\ =\ 1,\ 2,\ ...,\ n$ dessas variáveis. As equações de movimento de um sistema dinâmico no formalismo Hamiltoniano começa com o Lagrangiano $L(q,\ q'_{,t})$ que é função da variável $q(t)$. O momento p definido pela expressão $p\ =\ \partial L/\partial q'_{,t}$ e a Hamiltoniana pela expressão H $=\ p\,q'_{,t}\ -\ L\ =\ H(p,\ q)$. As equações dinâmicas são dadas por:

$$d/dt\ (\partial L/\partial q'_{,t})\ -\ \partial L/\partial q\ =\ 0\ , \qquad (6.1.4.1)$$

e o momento p definido pelas equações:

$$\partial H/\partial q\ =\ -\ dp/dt \qquad \text{e} \qquad \partial H/\partial p\ =\ dq/dt\ . \qquad (6.1.4.2a,b)$$

A função Hamiltoniana $H(q,\ p)$ tem como diferencial a $1 - forma$:

$$dH \ = \ (\partial H/\partial p)\ dp \ + \ (\partial H/\partial q)\ dq. \qquad (6.1.4.3)$$

Derivando a expressão (6.1.4.3) em relação ao tempo t, e usando as expressões (6.1.4.2a,b), virá:

$$dH/dt \ = \ (\partial H/\partial p)\ dp/dt + (\partial H/\partial q)\ dq/dt \ = \ -\ (\partial H/\partial p)\ \partial H/\partial q + (\partial H/\partial q)\ \partial H/\partial dp \ = \ 0,$$

resultado esse que indica o valor de H é conservado ao longo de cada curva integral dada por: $[q \ = \ q(t),\ p \ = \ p(t)]$.

Consideremos em M^{2n} a $2-forma\ \omega_2 \ = \ d\vec{q} \wedge d\vec{p}$ e a curva $[q \ = \ q(t),\ p \ = \ p(t)]$ que é solução das equações (6.1.4.2a,b). Vamos mostrar que, se o vetor tangente (*campo de velocidade vetorial*) a essa curva é definido por [segundo as expressões (4.1.5.2a) e (6.1.4.2a,b)]:

$$U_H \ = \ d/dt \ = \ (dq/dt)\ (\partial/\partial q) \ + \ (dp/dt)\ (\partial/\partial p) \ =$$

$$= \ (\partial H/\partial p)\ (\partial/\partial q) \ - \ (\partial H/\partial q)\ (\partial/\partial p)\ , \qquad (6.1.4.4)$$

então ω_2 obedece a seguinte condição:

$$L_H\ \omega_2 \ = \ 0\ , \qquad (6.1.4.5)$$

onde $U \ = \ U_H$ e L_H é a **Derivada de Lie** [ver expressão (5.1.3.6)].

Ora, levando em conta que a **Derivada de Lie** de uma $p - forma$ com respeito a um campo vetorial U_H é dada por [ver expressão (5.1.3.7n)]:

$$L_U\ \omega_p \ = \ d[\omega_p(U)] \ + \ (d\omega_p)(U)$$

e que $d\omega_p \ = \ 0$, pelo **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)], teremos:

$$L_U\ \omega_2 \ = \ d[\omega_2(U)]\ . \qquad (6.1.4.6)$$

Porém, como [ver expressão (3.1.1.1a)]:

$$\omega_2(U) \ = \ d\vec{q} \wedge d\vec{p} \ = \ dq \otimes dp \ - \ dp \otimes dq\ , \qquad (6.1.4.7)$$

então (Schutz, op. cit.):

$$\omega_2(U) \ = \ (dq/dt)\ dp \ - \ (dp/dt)\ dq\ . \qquad (6.1.4.8)$$

Usando as expressões (6.1.4.2a,b;3), a expressão (6.1.4.8), ficará:

$$\omega_2(U) \;=\; (\partial H/\partial p)\; dp \;+\; (\partial H)/\partial q)\; dq \;=\; dH\;. \qquad (6.1.4.9)$$

Levando a expressão (6.1.4.9) na expressão (6.1.4.6) e usando o **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)], teremos:

$$L_{U_H}\, \omega_2 \;=\; d(dH) \;=\; 0\;,$$

o que demonstra a expressão (6.1.4.5). O campo vetorial U_H que satisfaz essa expressão é conhecido como **campo vetorial Hamiltoniano**. Por outro lado, esse mesmo campo gera um grupo uniparamétrico (Aldrovandi e Pereira, op. cit.) denominado de **fluxo Hamiltoniano**.

Derivando a expressão (6.1.4.3) em relação ao tempo t, e usando as expressões (6.1.4.2a,b), virá:

$$dH/dt \;=\; (\partial H/\partial p)\; dp/dt \;+\; (\partial H/\partial q)\; dq/dt \;=$$

$$=\; -\; (\partial H/\partial p)\; (\partial H/\partial q) \;+\; (\partial H/\partial q)\; (\partial H/\partial p) \;=\; 0 \quad\rightarrow\quad dH/dt \;=\; 0\;, \qquad (6.1.4.10)$$

resultado esse que indica que o valor de H é conservado ao longo de cada curva integral $[q \;=\; q(t),\; p \;=\; p(t)]$.

Vejamos agora uma outra maneira de escrevermos a relação entre U_H e dH. Calculando o produto interno i_H [expressão (5.1.3.1)] da $2 - forma$ ω_2, teremos (Aldrovandi e Pereira, op. cit.):

$$i_H\; \omega_2 \;=\; dH\;, \qquad (6.1.4.11)$$

resultado esse que estabelece um isomorfirmo entre **campo de vetores** (U_H) e $1 - formas$ (co-vetores) (dH) sobre a variedade M^{2n}. Em outras palavras, o produto interno (i_H) gera uma correspondência um-a-um entre **campos vetoriais** e $1 - formas$ sobre a variedade M^{2n}.

6.1.4.1 Evolução Temporal

Aplicando o campo vetorial [vide expressão (6.1.4.4)]:

$$U_H \;=\; (\partial H/\partial p)\; (\partial/\partial q) \;-\; (\partial H/\partial q)\; (\partial/\partial p)\;,$$

em um função qualquer diferenciável $F(q,\; p)$, usando as expressões (6.1.4.2a,b) e a definição de **parênteses de Poisson** ($\{\}$) [Goldstein (1959)], obteremos:

$$U_H\; F \;=\; (\partial H/\partial p)\; (\partial F/\partial q) \;-\; (\partial H/\partial q)\; (\partial F/\partial p) \;=\; \{F,\; H\} \;=$$

$$=\; (\partial F/\partial p)\; (dp/dt) \;+\; (\partial F/\partial q)\; (dq/dt) \;=\; dF/dt \quad\rightarrow$$

$$dF/dt \ = \ U_H F \ = \ \{F, \ H\} \ . \qquad (6.1.4.1.1)$$

A expressão (6.1.4.1.1) representa a equação de movimento conhecida como **Equação de Liouville**. Portanto, "o campo vetorial U_H faz fluir a função F ao longo do tempo", e representa exatamente o papel do gerador de transformações infinitesimais no tempo (Aldrovandi e Pereira, op. cit.).

Observação

O operador U_H é conhecido em Mecânica Estatística como **operador de Liouville**. As funções $F(q, \ p)$ são *observáveis clássicos* ou *funções dinâmicas*. A função $H(q, \ p)$ "preside" a evolução temporal do sistema físico: dizemos que $H(q, \ p)$ é a *função geratriz* do campo vetorial U_H.

A evolução temporal de $F(q, \ p)$ é obtida resolvendo a expressão (6.1.4.1.1), ou seja, usando a expansão de Euler, a expressão (6.1.4.1.1), e as propriedades do { } (Goldstein, op. cit.):

$$F(t) \ = \ F[q(t), \ p(t)] \ = \ F(0) \ exp(t \ U_H) =$$

$$= \ F(0) \ [1 \ + \ t \ U_H] \ + \ (t \ U_H)^2/2!) \ + \ ... \ ] \ =$$

$$= \ F(0) \ + \ t \ \{F(0) \ , \ U\} \ + \ (t^2/2!) \ \{\{F(0) \ , \ H\}, \ H\} \ + \ ... \ =$$

$$= \ F[exp(t \ H_H) \ q(0) \ , \ exp(t \ U_H) \ p(0)] \ . \qquad (6.1.4.1.2)$$

Como a **Derivada de Lie** de uma função qualquer $F(q, \ p)$ dada por (5.1.3.7i) $L_{U(H)} \ F \ = \ U_H \ F$ e considerando a expressão (6.1.4.1.1), poderemos escrever que:

$$L_{U(H)} \ F \ = \ U_H \ F \ = \ \{F, \ H\} \ = \ dF/dt \ . \qquad (6.1.4.1.3)$$

Se a função F é uma constante de movimento, isto é, $dF/dt \ = \ 0$, então, de acordo com a expressão (6.1.4.1.3), $\{F, \ H\} \ = \ 0$, o que significa que L comuta com H. Além disso, $L_{U(H)} \ F \ = \ 0$. Ora, como mostramos que $L_{U(H)} \ \omega_2 \ = \ 0$ [expressão (6.1.4.5)] e considerando que $\omega_2 \ = \ d\vec{q} \wedge d\vec{p}$, concluimos que $2 - forma \ \omega_2$ é uma *constante de movimento.*

Aplicando a expressão (5.1.3.7h) $[L_X \ (\alpha \wedge \beta \ = \ (L_X \ \alpha) \wedge \beta \ + \ \alpha \wedge (L_X \ \beta)]$ para o caso geral $(\omega_2)^n$ dado por:

$$(\omega_2)^n \ = \ \omega_2 \wedge \omega_2 \wedge ... \ \omega_2 \ = \ (-1)^n \ dq^1 \wedge dq^2 \wedge ... \ dq^n \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge ... \ dp_n \ , \qquad (6.1.4.1.4)$$

e usando a expressão (6.1.4.5), concluimos que ω_2 também é uma *constante de movimento.*

Observação

Quando $n \ = \ 1$, temos que $\omega_2 \ = \ dq \wedge dp$ que é a *2-forma-área* do espaço de fase, e sua conservação temporal é simplesmente o **Teorema de Liouville** para um grau de liberdade. No caso geral n, a conservação temporal de $(\omega_2)^n$ pelo *fluxo Hamiltoniano* representa o **Teorema Geral de Liouville**. Note que os sistemas dissipativos violam esse Teorema.

6.1.4.2 Transformações Canônicas

A escolha das coordenadas q e p para estudar um sistema dinâmico não é única. Podemos escolher outrad coordenadas $P = P(q, p)$ e $Q = Q(q, p)$ para descrever o mesmo sistema. Nas coordenadas (q, p) temos $H(q, p)$ e as equações de movimento são dadas (6.1.4.2a,b). Se com as transformações $P = P(q, p)$ e $Q = Q(q, p)$ as novas equações de movimento forem dadas por:

$$\partial H^* / \partial Q = - dP/dt \quad e \quad \partial H^* / \partial P = dQ/dt , \qquad (6.1.4.2.1a,b)$$

onde $H^* = H(Q, P)$, dizemos que a transformação de coordenadas $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ é uma **transformação canônica**.

Para garantirmos que as expressões (6.1.4.2a,b) e (6.1.4.2.1a,b) estejam satisfeitas é necessário que os *fluxos Hamiltonianos* em ambos os sistema de coordenadas obedeçam a **Derivada de Lie** dada pela expressão (6.1.4.5). Isto implica que devemos ter:

$$\omega_2(q, p) = dq \wedge dp = dQ \wedge dP = \omega_2(Q, P) . \qquad (6.1.4.2.2)$$

A condição necessária e suficiente para isso é que (Schutz, op. cit.):

$$(\partial Q/\partial q)\ (\partial P/\partial p) - (\partial Q/\partial p)\ (\partial P/\partial q) = 1 . \qquad (6.1.4.2.3)$$

Observação

As várias formas de **transformações canônicas** podem ser vistas, por exemplo, em Landau et Lifchitz (1973) e Goldstein, op. cit.

Capítulo 7

7.1 Termodinâmica

7.1.1 Lei Zero da Termodinâmica

Definição 7.1.1.1. Um **sistema termodinâmico** - uma parte isolada do Universo que é objeto de estudo - é caracterizado por **parâmetros termodinâmicos** que são quantidades macroscópicas (X_i) medidas experimentalmente. Um conjunto desses parâmetros define um **estado termodinâmico** representado por uma função f, satisfazendo a equação:

$$f\ (_i)\ =\ 0\ , \quad \text{i= 1, 2, ..., n.} \qquad (\textbf{Equação de Estado})$$

Observações

1. A menos que seja especificado ao contrário, um estado termodinâmico representa sempre um **estado de equilíbrio**, ou seja, um estado que não muda com o tempo. Na descrição de cada um desses estados há certas funções que representam um papel importante e que se denominam **variáveis de configuração**. O conjunto de estados de equilíbrio de um sistema tem a estrutura de uma variedade diferenciável de um espaço vetorial de dimensão finita, e as variáveis de configuração representam um sistema de coordenadas locais desse espaço. Essas variáveis são de dois tipos: **extensivas**, se dependem ou são proporcionais a um fator de escala global do sistema; **intensivas**, se não dependem.

1.1. No caso de um gás, as variáveis de configuração são: **pressão** P (intensiva), **volume** V (extensiva), e **temperatura** T (intensiva).

1.2. Costuma-se representar a equação de estado termodinâmico de um gás - a função $f\ (P,\ V, T)$ - por uma superfície (variedade) no espaço tridimensional: $P - V - T$. A projeção dessa superfície nos planos coordenados $(P - V)$, $(P - T)$ e $(V - T)$ dão, respectivamente, os seguintes diagramas: **diagrama** $P - V$, **diagrama** $P - T$ e **diagrama** $V - T$.

1.3. Para um **gás ideal**, a equação de estado foi obtida pelo físico francês Emile Clapeyron (1799-1864), em 1834, conhecida como a **Equação de Clapeyron**:

$$P\ V\ =\ n\ R\ T\ , \qquad (7.1.1.1)$$

onde $R\ =\ 8,315 joule/K$ é a **constante universal dos gases** e n é o **número de moles**.

2. Quando há mudanças nas condições externas de um estado termodinâmico, devido à **interação** do sistema com o resto do Universo, diz-se que o mesmo sofreu uma **transformação**. Esta é dita **quasi-estática** quando ela ocorre lentamente de modo que em qualquer instante o sistema pode ser considerado aproximadamente em equilíbrio. Ela é dita **reversível** se o sistema retrocede no tempo quando as condições externas também retrocederem. Enquanto toda transformação reversível é quasi-estática, a situação inversa nem sempre é verdadeira. As trajetórias $\Gamma(t)$ seguidas pelo estado termodinâmico numa transformação (quasi) reversível recebem nomes específicos, como **isotérmicas** ($T\ =\ constante$),

isobáricas ($P = constante$), **isovolumétricas** ou **isométricas** ($V = constante$), **adiabáticas** (calor constante), etc.

Lei Zero da Termodinâmica

Existe uma forma especial de interação entre dois sistemas, chamada **contacto térmico**, na qual os estados de equilíbrio do sistema combinado deles constituem um subconjunto de um conjunto de pares de estados de equilíbrio dos sistemas iniciais. Por exemplo, se p_1 é o estado de equilíbrio do primeiro sistema e p_2 o do segundo, quando os dois sistemas são levados a um contacto térmico os mesmos tenderão a um estado de equilíbrio (q_1, q_2), onde q_1 é um novo estado de equilíbrio do primeiro sistema e q_2 do segundo. Desse modo, diz-se que os dois sistemas estão em **equilíbrio térmico**. Em 1909, o matemático alemão Constantin Carathéodory (1873-1950) apresentou um conceito matemático para a temperatura ao desenvolver o seguinte raciocínio. É um fato experimental que se dois corpos estão em equilíbrio térmico deve existir uma relação entre seus parâmetros termodinâmicos. Portanto, se os corpos 1 e 2 estão em equilíbrio térmico, assim como os corpos 2 e 3, então 1 e 3 também deverão estar em equilíbrio térmico. Desse fato, Carathéodory concluiu que existe uma temperatura empírica que é a mesma para todos os corpos em equilíbrio térmico. Em outras palavras, isso significa dizer que a classe de equivalência de todos os sistemas em equilíbrio térmico é chamada **temperatura abstrata**, e o sistema escolhido que dá o valor numérico da mesma é chamado **termômetro**. Esse postulado de Carathéodory foi mais tarde reconhecido como a **Lei Zero da Termodinâmica**:

Dois sistemas em equilíbrio térmico com um terceiro estão em equilíbrio térmico entre si.

7.1.2 Primeira Lei da Termodinâmica

Definição 7.1.2.1. Define-se o **trabalho elementar** ω realizado *por* um sistema termodinâmico como a $1-forma$ diferencial linear, dada por:

$$\omega = \nu_1 \, dx_1 + ... + \nu_n \, dx_n \, , \qquad (7.1.2.1a)$$

onde ν_i são funções definidas no espaço dos estados de equilíbrio do sistema termodinâmico. O **trabalho total** W realizado *por* um sistema ao longo de qualquer curva γ (quasi) reversível é dado por:

$$W(\gamma) = \int_\gamma \omega \, . \qquad (7.1.2.1b)$$

Observações

1. No caso de o sistema termodinâmico ser um **gás**, teremos:

$$\omega = \pm \, P \, dV \, , \qquad (7.1.2.1c,d)$$

onde o sinal mais (+) refere-se ao trabalho realizado *pelo* gás, e o sinal menos (−), *sobre* o gás.

2. Experimentalmente, observa-se que o trabalho realizado *por* (ou *sobre*) um sistema termodinâmico depende do tipo de transformação. Portanto, para um ciclo, teremos:

$$\oint \omega \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d\omega \neq 0 \ .$$

Esse último resultado deriva do **Teorema Generalizado de Stokes** [ver expressão (5.1.2.1)].

Definição 7.1.2.2. Define-se a **quantidade de calor elementar**, ou simplesmente **calor elementar** α adicionado ou retirado a um sistema termodinâmico, como a $1-forma$ diferencial linear, dada por:

$$\alpha \ = \ \Lambda \ dX \ + \ C \ dY \ , \qquad (7.1.2.2a)$$

onde Λ e C são funções definidas na variedade dos estados de equilíbrio e X, Y são as variáveis de configuração. O **calor total** Q adicionado ou retirado por um sistema ao longo de qualquer curva γ (quasi) reversível é dado por:

$$Q(\gamma) \ = \ \int_\gamma \alpha \ . \qquad (7.1.2.2b)$$

Observações

1. Para um gás, considerando-se as variáveis de configuração V, T ou P, T, teremos, respectivamente:

$$\alpha \ = \ \Lambda_V \ dV \ + \ C_V \ dT \ , \qquad (7.1.2.2c)$$

$$\alpha \ = \ \Lambda_P \ dP \ + \ C_P \ dT \ . \qquad (7.1.2.2d)$$

1.1. Até a metade do Século XIX, pensava-se que o calor fosse uma forma fechada, isto é, acreditava-se que existia uma função C, chamada **calórico**, representando o "total de calor em um sistema" tal que:

$$\alpha = \mathrm{dC}. \quad \Big(\ \mathrm{ddC} = 0 \ [\text{Lema de Poincaré (4.1.2.1c)}] \rightarrow d\alpha \ = \ 0 \ \Big)$$

Acreditava-se, portanto, que o "calórico" em um sistema seria alterado pela quantidade de calor adicionada ao mesmo. Tal crença levou a uma confusão entre os conceitos de "calor" e "temperatura". Assim, os partidários da teoria do "calórico" supunham que a temperatura de um corpo "refletia o total de calor que ele continha". Essa mesma crença levou-os a apresentar o conceito de "calor latente". Com efeito, de um modo geral, quando se adiciona calor a um corpo ele aumenta a sua temperatura. No entanto, existem situações em que o calor adicionado apenas aumenta o volume ou altera a pressão do sistema considerado, mantendo a temperatura constante, como acontece, por exemplo, na fusão do gelo e na vaporização da água. Parecia, portanto, que o calor estava "latente" ou "escondido". Em vista disso, historicamente, as funções Λ_V e Λ_P representam, respectivamente, o **calor latente de dilatação** (relativo ao volume) e o **calor latente de compressão** (relativo à pressão). Registre-se que o **calórico** foi proposto pelo químico francês Antoine Lavoisier (1743-1794), em 1777.

1.2. As funções C_V e C_P representam, respectivamente, a **capacidade calorífica a volume constante** e a **capacidade calorífica à pressão constante**. Quando a capacidade calorífica é referida à unidade de massa ou à de mol, ela se denomina **calor específico** c. Essas funções são ligadas por uma expressão obtida pelo médico alemão Julius Robert Mayer (1814-1878), em 1842, conhecida como **Relação de Mayer**:

$$C_P \ - \ C_V \ = \ n \ R \ . \qquad (7.1.2.3)$$

1.3. Experimentalmente, observa-se que o calor total de um sistema depende do tipo de transformação. Portanto, para um ciclo, teremos:

$$Q(\gamma) \ = \ \oint_\gamma \alpha \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\alpha \neq 0 \ .$$

Esse resultado mostra que α é uma forma não fechada.

2. Um **reservatório de calor**, ou simplesmente **reservatório**, é um sistema tão grande que o ganho ou a perda de uma certa quantidade de calor não muda sua temperatura.

3. Um sistema é dito **isolado termicamente** se não há nenhuma troca de calor entre ele e o ambiente externo. O **isolamento térmico** de um sistema pode ser conseguido envolvendo-o por uma **parede adiabática**. Assim, qualquer transformação sofrida por um sistema isolado termicamente é dita **transformação adiabática**. Em nosso mundo cotidiano, o isolamento térmico é aproximadamente conseguido por uma **garrafa de Dewar** ou **garrafa térmica**. Este tipo de garrafa foi inventada pelo físico e químico inglês James Dewar (1842-1923), em 20 de janeiro de 1893.

Primeira Lei da Termodinâmica

Até aqui, vimos que as $1 - formas$ ω e α não são fechadas. Contudo, experimentalmente, observou-se que a sua soma é fechada, isto é:

$$d(\omega \ + \ \alpha) \ = \ 0 \ .$$

Em vista do **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)], a expressão acima pode ser escrita na forma:

$$\omega \ + \ \alpha \ = \ dU \ , \qquad (7.1.2.4a)$$

onde U é uma função bem definida sobre um sistema termodinâmico (determinada a menos de uma constante aditiva) conhecida como **energia interna**.

Consideremos um sistema termodinâmico que sofre um determinado processo de transformação que o leva de um estado (1) a um outro estado (2). Então, as expressões (7.1.2.1b), (7.1.2.2b), (7.1.2.4a) e o **Teorema Fundamental do Cálculo** nos mostram que:

$$\int_\gamma \omega \ + \ \int_\gamma \alpha \ = \ \int_1^2 dU \quad \to \quad U(2) \ - \ U(1) \ - W \ = \ Q \ , \qquad (7.1.2.4b)$$

onde Q representa o **calor total** fornecido *ao* sistema pelo processo e W o **trabalho total** realizado *pelo* sistema em decorrência desse mesmo processo. Contudo, enquanto Q e W dependem do mecanismo como o sistema é levado do estado (1) ao estado (2), a expressão (7.1.2.4b) mostra que a variável de estado U não depende daquele mecanismo. Esse resultado traduz a **Primeira Lei da Termodinâmica**:

A energia é conservada num sistema termodinâmico.

Observações

1. A expressão (7.1.2.4b) mostra que o calor Q é uma grandeza física **derivada** e não **fundamental**, uma vez que ela é calculada pela diferença entre a energia interna (U) e o trabalho (W). Contudo, historicamente, o calor Q foi estudado como uma grandeza fundamental nas célebres experiências realizadas por Mayer, pelo físico inglês James Prescott Joule (1818-1889) e pelo físico e fisiologista alemão Hermann von Helmholtz (1821-1894), na década de 1840, para a determinação do **equivalente mecânico do calor J**. Com efeito, nessas experiências, eles estudaram o comportamento adiabático ($Q \ = \ 0$) de um sistema quando recebe uma quantidade externa de trabalho. Assim, tomando-se $Q \ = \ 0$ na expressão (7.1.2.4b), resultará:

$$W \ = \ U(2) \ - \ U(1) \ .$$

Esse resultado significa dizer que se um sistema isolado termicamente é levado de um estado (1) a um outro estado (2) por aplicação de um trabalho externo, o total desse trabalho é sempre o mesmo não importa como esse trabalho foi aplicado. Recordemos que Joule estudou a produção de calor pela passagem da corrente elétrica em um fio condutor, assim como pela agitação da água colocada em um recipiente, por intermédio de pás acionadas por um peso suspenso em uma corda que passava por uma polia. Como resultado de suas pesquisas, Joule constatou que:

A quantidade de calor capaz de aumentar a temperatura de uma libra de água de 1^oF é equivalente à força mecânica representada pela queda de 772 libras pelo espaço de um pé.

2. Quando um gás recebe uma certa quantidade de calor ($\alpha \ > \ 0$), é realizado um certo trabalho ω *sobre* o mesmo, provocando uma variação de sua energia interna U. Portanto, de acordo com as expressões (7.1.2.1d) e (7.1.2.4a), para esse sistema termodinâmico, a **Primeira Lei da Termodinâmica** é escrita na forma:

$$\alpha \ = \ P \ dV \ + \ dU \ . \qquad (7.1.2.4c)$$

A expressão acima pode ser interpretada como uma relação entre várias $1-formas$ em uma variedade bidimensional cujas coordenadas são $(V,\ U)$, sobre a qual a função $P \ = \ P(V,\ U)$ (Equação de Estado) é definida.

3. Sabemos, experimentalmente, que a $1-forma$ α não é fechada, ou seja: $d\alpha \neq 0$. Contudo, vejamos a condição para que a mesma seja fechada. Para isso, procuremos uma $1-forma$ Q, dada pela expressão:

$$Q \ = \ P \ dV \ + \ dU \ ,$$

tal que: $dQ \ = \ 0$. Portanto, usando-se a expressão acima, o fato de que $P \ = \ P(V,\ U)$ e o **Lema de Poincaré** [expressão (4.1.2.1c)], teremos:

$$dQ \ = \ 0 \ = \ dP \wedge dV \ + \ ddU \ = \ [(\tfrac{\partial P}{\partial V})_U \ dV \ + \ (\tfrac{\partial P}{\partial U})_V \ dU] \wedge dV \quad \rightarrow$$

$$0 \ = \ (\tfrac{\partial P}{\partial U})_V \ dU \wedge dV \quad \rightarrow \quad (\tfrac{\partial P}{\partial U})_V \ = \ 0 \ .$$

Portanto, para que Q seja fechada é necessário que $(\frac{\partial P}{\partial U})_V$ seja sempre nulo, o que, contudo, ainda não foi observado para nenhum gás.

4. **Capacidades Caloríficas:** $C_V,\ C_P$. Consideremos a energia interna U definida em uma variedade bidimensional cujas coordenadas são $(V,\ T)$. Então:

$$dU \ = \ (\tfrac{\partial U}{\partial V})_T \ dV \ + \ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_V \ dT \ .$$

Levando-se a expressão acima na expressão (7.1.2.4c), teremos:

$$\alpha \ = \ P \ dV \ + \ (\tfrac{\partial U}{\partial V})_T \ dV \ + \ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_V \ dT \ = \ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_V \ dT \ + \ [(\tfrac{\partial U}{\partial V})_T \ + \ p] \ dV \ .$$

Para o caso de uma transformação em que o volume V permaneça constante, virá:

$$(\alpha)_V \ = \ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_V \ dT \ .$$

Desse modo, comparando-se a expressão acima com a expressão (7.1.2.2c) e usando-se a expressão (7.1.2.4c), verifica-se que:

$$(\alpha)_V \ = \ C_V \ dT \ = \ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_V \ dT \quad \rightarrow \quad \mathrm{C}_V \ = \ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_V \ , \qquad (7.1.2.5a)$$

$$(\alpha)_V \ = \ dU \quad \rightarrow \quad \mathrm{dU} = \mathrm{C}_V \ dT \ . \qquad (7.1.2.5b)$$

Consideremos, agora, a energia interna U definida em uma variedade bidimensional cujas coordenadas são $(P,\ T)$. Então:

$$dU \;=\; (\frac{\partial U}{\partial P})_T \; dP \;+\; (\frac{\partial U}{\partial T})_P \; dT \;.$$

Levando-se a expressão acima na expressão (7.1.2.4c), teremos:

$$\alpha \;=\; P\;dV \;+\; (\frac{\partial U}{\partial P})_T \; dP \;+\; (\frac{\partial U}{\partial T})_P \; dT \;.$$

Para o caso de uma transformação em que a pressão P permaneça constante, virá:

$$(\alpha)_P \;=\; P\;dV \;+\; (\frac{\partial U}{\partial T})_P \; dT \;.$$

Diferenciando-se a expressão (7.1.1.1), no caso em que a pressão P é constante, e substituindo-se na expressão acima, virá:

$$(\alpha)_P \;=\; n\;R\;dT \;+\; (\frac{\partial U}{\partial T})_P \; dT \;=\; [n\;R \;+\; (\frac{\partial U}{\partial T})_P] \; dT \;.$$

Comparando-se a expressão acima com a expressão (7.1.2.2d) e usando-se a expressão (7.1.2.3), verifica-se que:

$$(\alpha)_P \;=\; C_P \; dT \;=\; (n\;R \;+\; C_V)\; dT \;=\; [n\;R \;+\; (\frac{\partial U}{\partial T})_P] \; dT \quad \rightarrow$$

$$C_V \;=\; (\frac{\partial U}{\partial T})_P \;. \qquad (7.1.2.6a)$$

Usando-se a expressão (7.1.2.5a) obtém-se:

$$C_V \;=\; (\frac{\partial U}{\partial T})_V \;=\; (\frac{\partial U}{\partial T})_P \;. \qquad (7.1.2.6b)$$

É oportuno registar que esse resultado indica que a energia interna U de um gás ideal só depende da temperatura: $U \;=\; U(T)$. Ele foi obtido experimentalmente por Joule, em uma das experiências que realizou para a determinação do equivalente mecânico da caloria, conhecida como a **expansão livre de um gás**. Nessa experiência, ele mergulhou dois recipientes, ligados por uma válvula, um evacuado e o outro contendo ar a uma pressão de $\sim 20\;atm$, num calorímetro pequeno, contendo o mínimo possível de água e isolado termicamente. Após medir a temperatura inicial (T_i) da água, Joule abriu a válvula, produzindo a expansão livre do ar, e tornou a medir a temperatura final (T_f) da água. Ele observou que não houve nenhuma variação da temperatura, ou seja:

$$\Delta T \;=\; T_f \;-\; T_i \;=\; 0 \;.$$

Ora, como a expansão do ar foi livre, ele não realizou nenhum trabalho externo, ou seja: $P\;dV \;=\; 0$. Portanto, considerando-se que o calorímetro estava isolado adiabaticamente ($\alpha \;=\; 0$), a expressão (7.1.2.4c) nos mostra que:

$$dU \;=\; 0 \quad \rightarrow \quad U \;= \text{constante}, \;\; \text{nas transformações isotérmicas.}$$

Essa mesma conclusão sobre a dependência $U(T)$ foi obtida por Joule e pelo físico inglês William Thomson (1824-1907), posteriormente Lord Kelvin (1892), em uma experiência que realizaram, em 1862, conhecida como **experiência do tampão poroso**. Nessa experiência, a expansão livre usada por Joule é substituída por uma expansão de um gás, também adiabática, através de uma parede porosa (tampão), que reduz a pressão do gás. Assim, inicialmente, o gás tem um volume V_i e uma pressão P_i; depois da expansão ele passa a ter um volume V_f e uma pressão P_f. Desse modo, o trabalho total (W) realizado nessa expansão será:

$$W \;=\; P_i\;(0\;-\;V_i)\;+\;P_f\;(V_f\;-\;0)\;=\;P_f\;V_f\;-\;P_i\;V_i\;.$$

Ora, considerando-se que a expansão é adiabática ($\alpha\;=\;0$), a expressão (7.1.2.4c) nos mostra que a variação da energia interna ocorrida na expansão porosa é dada por:

$$U_f\;-\;U_i\;=\;-\,W\;=\;P_i\;V_i\;-\;P_f\;V_f\quad\rightarrow\quad U_i\;+\;P_i\;V_i\;=\;U_f\;+\;P_f\;V_f\;=\text{constante.}$$

Essa função foi definida pelo físico-químico norte-americano Josiah Williard Gibbs (1839-1903), em 1875, e denominada "função calor sob pressão constante", e representa a troca de calor nas reações químicas. Seu conceito como uma função de estado foi introduzido pelo físico-químico alemão Richard Mollier (1863-1935), em 1902, e o nome **entalphia** H para essa função foi cunhado pelo físico holandês Heike Kamerlingh-Onnes (1853-1926; PNF, 1913). Assim:

$$H\;=\;U\;+\;P\;V\;.\qquad(7.1.2.7a)$$

Diferenciando-se a expressão acima e usando-se as expressões (7.1.1.1), (7.1.2.3) e (7.1.2.5b), resultará:

$$dH\;=\;dU\;+\;d(PV)\;=\;dU\;+\;d(n\;R\;T)\;=\;C_V\;dT+\;n\;R\;dT\;=\;(C_V\;+\;n\;R)\;dT\qquad\rightarrow$$

$$dH\;=\;C_P\;dT\;.\qquad(7.1.2.7b)$$

5. **Calores Latentes:** $\Lambda_V,\;\Lambda_P$. Consideremos a energia interna U definida em uma variedade bidimensional cujas coordenadas são $(V,\;T)$. Então:

$$dU\;=\;(\tfrac{\partial U}{\partial V})_T\;dV\;+\;(\tfrac{\partial U}{\partial T})_V\;dT\;.$$

Levando-se a expressão acima na expressão (7.1.2.4c), teremos:

$$\alpha\;=\;P\;dV\;+\;(\tfrac{\partial U}{\partial V})_T\;dV\;+\;(\tfrac{\partial U}{\partial T})_V\;dT\;=\;(\tfrac{\partial U}{\partial T})_V\;dT\;+\;[(\tfrac{\partial U}{\partial V})_T\;+\;p]\;dV\;.$$

Para o caso de uma transformação em que a temperatura T permaneça constante, virá:

$$(\alpha)_T\;=\;[(\tfrac{\partial U}{\partial V})_T\;+\;p]\;dV.$$

Comparando-se a expressão acima com a expressão (7.1.2.2c), teremos:

$$(\alpha)_T \;=\; \Lambda_V \; dV \;=\; [(\tfrac{\partial U}{\partial V})_T \;+\; p] \; dV \quad \rightarrow \quad \Lambda_V \;=\; (\tfrac{\partial U}{\partial V})_T \;+\; P \; . \qquad (7.1.2.8a)$$

Consideremos, agora, a energia interna U definida em uma variedade bidimensional cujas coordenadas são $(P, \; T)$. Então:

$$dU \;=\; (\tfrac{\partial U}{\partial P})_T \; dP \;+\; (\tfrac{\partial U}{\partial T})_P \; dT \; .$$

Levando-se a expressão acima na expressão (7.1.2.4c), teremos:

$$\alpha \;=\; P \; dV \;+\; (\tfrac{\partial U}{\partial P})_T \; dP \;+\; (\tfrac{\partial U}{\partial T})_P \; dT \; .$$

Diferenciando-se a expressão (7.1.1.1) e substituindo-se na expressão acima, virá:

$$\alpha \;=\; n \, R \, dT \;-\; V \; dP \;+\; (\tfrac{\partial U}{\partial P})_T \; dP \;+\; (\tfrac{\partial U}{\partial T})_P \; dT \;=\; [n \; R \;+\; (\tfrac{\partial U}{\partial T})_P] \; dT \;+\; [(\tfrac{\partial U}{\partial P})_T \;-\; V] \; dP \; .$$

Para o caso de uma transformação em que a temperatura T permaneça constante, virá:

$$(\alpha)_T \;=\; [(\tfrac{\partial U}{\partial P})_T \;-\; V] \; dP.$$

Comparando-se a expressão acima com a expressão (7.1.2.2d), teremos:

$$(\alpha)_T \;=\; \Lambda_P \; dP \;=\; [(\tfrac{\partial U}{\partial P})_T \;-\; V] \; dP \quad \rightarrow \quad \Lambda_P \;=\; (\tfrac{\partial U}{\partial P})_T \;-\; V \; . \qquad (7.1.2.8b)$$

6. **Teorema de Reech:** $\gamma \;=\; \frac{C_P}{C_V}$. Diferenciando-se a expressão (7.1.1.1), virá:

$$P \; dV \;+\; V \; dP \;=\; n \; R \; dT \;=\; \tfrac{P \; V}{T} \; dT \quad \rightarrow \quad \tfrac{dV}{V} \;+\; \tfrac{dP}{P} \;=\; \tfrac{dT}{T} \; . \qquad (\mathrm{I})$$

Para uma transformação isotérmica (T = constante), teremos:

$$(\tfrac{dP}{dV})_T \;=\; -\; \tfrac{P}{V} \; , \qquad (\mathrm{II})$$

Essa equação diferencial representa a transformação isotérmica. Para uma transformação adiabática ($\alpha \;=\; 0$), as expressões (7.1.1.1), (7.1.2.3), (7.1.2.4c) e (7.1.2.5b) nos mostram que:

$$0 \;=\; dU \;+\; P \; dV \;=\; C_V \; dT \;+\; n \; R \; T \; \tfrac{dV}{V} \;=\; C_V \; dT \;+\; (C_P \;-\; C_V) \; T \; \tfrac{dV}{V} \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{dT}{T} \;=\; -\; (\tfrac{C_P \;-\; C_V}{C_V}) \; \tfrac{dV}{V} \;=\; -\; (\gamma \;-\; 1) \; \tfrac{dV}{V} \; .$$

Usando-se a expressão (I), virá:

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = -(\gamma - 1)\frac{dV}{V} \rightarrow (\frac{dP}{dV})_\alpha = -\gamma \frac{P}{V} . \qquad \text{(III)}$$

Essa equação diferencial representa a transformação adiabática. Dividindo-se as equações (III) e (II), teremos o teorema demonstrado pelo engenheiro naval francês Ferdinand Reech (1805-1884), em 1844, conhecido como **Teorema de Reech**:

$$\gamma = \frac{(\frac{dP}{dV})_\alpha}{(\frac{dP}{dV})_T} . \qquad (7.1.2.9)$$

Esse teorema significa que γ é obtido pela relação entre os coeficientes angulares das transformações adiabática e isotérmica que passam em um mesmo ponto, no diagrama $(P - V)$.

6.1. Esse teorema resolveu uma questão que ficou polêmica por muito tempo, qual seja, a do cálculo da velocidade do som no ar. O físico e matemático inglês Sir Isaac Newton (1642-1727), em 1687, havia afirmado que a velocidade do som c era dada por:

$$c^2 = (\frac{dP}{d\rho})_T, \qquad \rho = \frac{m}{V}, \qquad \frac{P}{\rho} = P\ V = \text{constante}.$$

No entanto, durante mais de 100 anos, o valor experimental calculado para c era cerca de 15% maior que o dado pela **Fórmula de Newton**. Foi o matemático francês Pierre Simon de Laplace (1749-1827) quem, em 1816, corrigiu esse erro ao mostrar que a propagação do som no ar é um processo adiabático e não isotérmico, como considerou Newton e, portanto, o valor de c^2 que ele encontrara deveria ser multiplicado por γ, ou seja:

$$c^2 = (\frac{dP}{d\rho})_\alpha = \gamma\ (\frac{dP}{d\rho})_T.$$

Esse resultado concordou com a experiência, pois para o ar, $\sqrt{\gamma} = \sqrt{1,4} \simeq 1,18$.

7.1.3 Segunda Lei da Termodinâmica

Vimos anteriormente que a **Primeira Lei da Termodinâmica**, que trata do princípio geral de conservação de energia, reconhece o calor como uma forma de energia. Assim, segundo essa lei, qualquer processo em que a energia seja conservada em cada instante pode ocorrer em dois sentidos: em seqüência temporal ou invertendo-se tal seqüência, ou seja, o processo seria **reversível**. Contudo, a experiência mostra que os processos observados na escala macroscópica tendem a ocorrer num só sentido, isto é, são processos **irreversíveis**. As primeiras observações sobre esse tipo de processo foram feitas pelo físico francês Nicolas Sadi Carnot (1796-1832), em 1824, ao descrever sua famosa **máquina de calor**. Esta máquina descrita por Carnot é uma máquina ideal, sem atrito, que realiza um ciclo completo, de modo que a substância usada - vapor, gás ou outra qualquer - é levada de volta a seu estado inicial. Esse ciclo completo, mais tarde denominado de **ciclo de Carnot**, é composto de duas transformações isotérmicas e duas adiabáticas, da seguinte maneira. Inicialmente, o gás (ideal) encontra-se em um estado caracterizado por $(P_1,\ V_1,\ T_1)$. Ele então é expandido isotermicamente até o estado $(P_2,\ V_2,\ T_1)$, ao receber a quantidade de calor $(Q_1 > 0)$ do exterior. Em seguida, ele é expandido adiabaticamente até o estado $(P_3,\ V_3,\ T_2)$, sem troca de calor com o exterior. A partir daí, ele é comprimido. Primeiro, isotermicamente, levando-o ao estado $(P_4,\ V_4,\ T_2)$, ocasião em que ele fornece a quantidade de calor $(Q_2\ <\ 0)$ ao exterior e, finalmente, o ciclo é completado com uma compressão adiabática que o leva ao estado inicial $(P_1,\ V_1,\ T_1)$, sem troca de calor. Ora, como nas transformações isotérmicas a energia interna é conservada, segundo as expressões (7.1.1.1), (7.1.2.2b) e (7.1.2.4c), teremos:

$$Q_1\ =\ \int_1^2 P_1\ dV\ =\ n\ R\ T_1 \int_1^2 \frac{dV}{V}\ =\ n\ R\ T_1\ \ell n\ \frac{V_2}{V_1}\ , \qquad \text{(IV)}$$

$$Q_2\ =\ \int_3^4 P_3\ dV\ =\ n\ R\ T_2 \int_3^4 \frac{dV}{V}\ =\ n\ R\ T_2\ \ell n\ \frac{V_4}{V_3}\ . \qquad \text{(V)}$$

Como as transformações $(2 \to 3)$ e $(4 \to 1)$ são adiabáticas, usando-se as expressões (7.1.1.1) e (II), virá:

$$\frac{dP}{dV}\ =\ -\ \gamma\ \frac{P}{V}\ \ \rightarrow\ \ \ell n\ (P\ V^{\gamma})\ =\ constante \rightarrow T\ V^{\gamma\ -\ 1} = \text{constante}\ ,$$

$$T_1\ V_2^{\gamma\ -\ 1}\ =\ T_2\ V_3^{\gamma\ -\ 1}; \qquad T_2\ V_4^{\gamma\ -\ 1}\ =\ T_1\ V_1^{\gamma\ -\ 1}\ ,$$

$$(\frac{V_2}{V_1})^{\gamma\ -\ 1}\ =\ (\frac{V_3}{V_4})^{\gamma\ -\ 1}\ \ \rightarrow\ \ \frac{V_2}{V_1}\ =\ \frac{V_3}{V_4}\ . \qquad \text{(V)}$$

O rendimento η de uma máquina ideal que realiza esse ciclo reversível será (lembrar que $Q_2\ <\ 0$):

$$\eta\ =\ \frac{Q_1\ +\ Q_2}{Q_1}\ .$$

Assim, usando-se as expressões (IV), (V) e (VI), teremos:

$$\eta\ =\ \frac{n\ R\ T_1\ \ell n\ \frac{V_2}{V_1}\ -\ n\ R\ T_2\ \ell n\ \frac{V_3}{V_4}}{n\ R\ T_1\ \ell n\ \frac{V_2}{V_1}}\ \rightarrow \eta\ =\ \frac{T_1\ -\ T_2}{T_1}\ \ \rightarrow\ \ \eta\ =\ 1\ -\ \frac{T_2}{T_1}\ . \qquad \text{(VII)}$$

Por outro lado, temos:

$$\eta\ =\ \frac{Q_1\ -\ \mid Q_2 \mid}{Q_1}\ \ \rightarrow\ \ \eta\ =\ 1\ -\ \frac{\mid Q_2 \mid}{Q_1}\ . \qquad \text{(VIII)}$$

Comparando-se as expressões (VII) e (VIII), virá:

$$\frac{Q_1}{T_1}\ +\ \frac{Q_2}{T_2}\ =\ 0\ . \qquad (7.1.3.1)$$

É oportuno observar que esse rendimento identifica-se com a **potência motriz do fogo** referida por Carnot, conforme pode-se concluir de suas palavras:

A potência motriz do fogo (calor) é independente dos agentes empregados para produzi-la; sua quantidade é determinada somente pelas temperaturas dos corpos entre os quais, no resultado final, ocorre a transferência do calórico.

O estudo do **ciclo de Carnot** visto acima mostra que para uma certa quantidade de calor ser convertida em trabalho há necessidade de haver duas fontes: uma quente e uma fria. Para que esse calor fosse convertido integralmente em trabalho, a fonte fria não deveria existir, ou seja, sua temperatura deveria ser nula. Foi isso que Kelvin afirmou em 1851:

É impossível realizar um processo (cíclico) cujo único efeito seja remover calor de um reservatório térmico e produzir uma quantidade equivalente de trabalho.

As conseqüências imediatas desse enunciado de Kelvin são as seguintes:

a) A geração de calor por atrito a partir de trabalho mecânico é irreversível.

b) A expansão livre de um gás é um processo irreversível.

Um outro tipo de processo irreversível foi estudado pelo físico alemão Rudolf Julius Emmanuel Clausius (1822-1888). Assim, em 1850, ele afirmou que:

É impossível realizar um processo (cíclico) cujo único efeito seja transferir calor de um corpo mais frio para um corpo mais quente.

Observe-se que, mais tarde, com o desenvolvimento da Termodinâmica, mostrou-se que os enunciados de Clausius e de Kelvin são equivalentes e, hoje, são traduzidos pelo **Teorema de Carnot**:

a) Nenhuma máquina térmica que opere entre uma dada fonte quente e uma dada fonte fria pode ter rendimento superior ao de uma máquina de Carnot: $\eta_I \leq \eta_R$.

b) Todas as máquinas de Carnot que operem entre duas fontes (quente e fria) terão o mesmo rendimento:

$$\eta_R \ = \ \eta_{R'}.$$

Em 1854, Clausius começou a pensar que a transformação de calor em trabalho e a transformação de calor em alta temperatura para calor em baixa temperatura poderiam ser equivalentes. Em vista disso, propôs que o fluxo de calor de um corpo quente para um corpo frio (com a conseqüente transformação de calor em trabalho) deveria ser compensado pela transformação de trabalho em calor, de modo que o calor deveria fluir do corpo frio para o quente. Desse modo, Clausius introduziu o conceito de **valor de equivalência** de uma transformação térmica, que era medido pela relação entre a quantidade de calor (ΔQ) e a temperatura (T) na qual ocorre a transformação. Por intermédio desse conceito físico, Clausius pôde então fazer a distinção entre processos reversíveis e irreversíveis. Assim, assumindo arbitrariamente que a transformação de calor de um corpo quente para um frio tenha um valor de equivalência positivo, apresentou uma nova versão para o seu enunciado de 1850:

A soma algébrica de todas as transformações ocorrendo em um processo circular somente pode ser positiva.

Em 1865, Clausius propôs o termo **entropia** (do grego, que significa **transformação**), denotando-o por S, em lugar do termo **valor de equivalência**, que havia usado em 1854. Portanto, retomando suas idéias sobre esse novo conceito físico, considerou um ciclo qualquer como constituído de uma sucessão de ciclos infinitesimais de Carnot e chegou ao célebre **Teorema de Clausius**. Em notação atual, usando-se a expressão (7.1.3.1), esse teorema é escrito na forma:

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} + ... + \frac{\Delta Q_i}{T_i} + ... = \oint \frac{\delta Q}{T} = \oint dS \leq 0 , \qquad (7.1.3.2)$$

onde o sinal de menor (<) ocorre para as transformações irreversíveis e o de igualdade (=), para as reversíveis.

Segunda Lei da Termodinâmica

Até aqui, apresentamos o desenvolvimento histórico-empírico da **Segunda Lei da Termodinâmica**. Agora, vejamos como essa lei foi tratada formalmente, via formas diferenciais exteriores, graças aos trabalhos pioneiros de Carathéodory, em 1909, referido anteriormente, e do físico alemão Max Born (1882-1970; PNF, 1954), em 1921. Conforme vimos, essa lei deriva do comportamento de um sistema termodinâmico quando não é permitida a troca de calor. Assim, se considerarmos esse sistema em um ambiente adiabático, onde não há troca de calor (α) com o exterior, isso significa dizer que, nesse ambiente, o sistema segue caminhos Γ (funções contínuas e seccionalmente diferenciáveis), as chamadas **curvas nulas**, definidas como segue.

Definição 7.1.3.1. Seja uma $1 - forma$ α definida no R^n e dada por:

$$\alpha = A_i(x)\ dx^i , \quad \text{i = 1, 2, ..., n.} \qquad (7.1.3.3a)$$

Uma curva Γ parametrizada ($\Gamma(t)$) é dita uma **curva nula** de α, se:

$$\int_{\Gamma(t)} \alpha = \int \Big(A_i[x(t)]\ \dot{x}^i(t) \Big)\ dt = 0 , \qquad (7.1.3.3b)$$

onde $\dot{x}^i$(t) é o vetor tangente.

Observação

Uma curva reversível nula para a $1 - forma$ α (calor elementar) é denominada **curva adiabática reversível**.

Exemplos

1. Encontre uma curva nula Γ para a $1 - forma$ $\alpha = x\ dy + dz$ definida no R^3. Para essa forma, segundo a expressão (7.1.3.3a), teremos:

$$A_1 = 0; \quad A_2 = x; \quad A_3 = 1 .$$

Sem perda de generalidades, vamos encontrar uma curva nula Γ para essa $1-forma$, que ligue a origem $O\ =\ (0,\ 0,\ 0)$ ao ponto $Q\ =\ (a,\ b,\ c)$, e que seja composta de vários trechos retos representando curvas nulas. Inicialmente, observamos que um deslocamento sobre o eixo dos x, ou paralelamente a ele, será uma curva nula para α, pois, como para esse deslocamento $y\ =\ z\ =\ 0$ (ou constante), teremos: $dy\ =\ dz\ =\ 0$, logo: $\alpha\ =\ 0$. Portanto, indo da origem O ao ponto $A\ =\ (-\ \frac{c}{b}, 0,\ 0)$ durante o intervalo $0 \leq t \leq 1$, essa curva $(O\ -\ A)$ será uma curva nula para α. Em seguida, vamos desse ponto A ao ponto $B\ =\ (-\ \frac{c}{b},\ b,\ c)$ segundo a reta:

$$\vec{x}(t)\ =\ \Big(\ -\ \tfrac{c}{b},\ (t\ -\ 1)\ b\ +\ (t\ -\ 1)\ c\ \Big). \qquad (1 \leq t \leq 2).$$

Para essa curva $(A\ -\ B)$, calculemos a expressão (7.1.3.3b):

$$\int_{\Gamma(t)} \alpha\ =\ \int\ \Big(\ A_1[x(t)]\ \dot{x}^1(t)\ +\ A_2[x(t)]\ \dot{x}^2(t)\ +\ A_3[x(t)]\ \dot{x}^3(t)\ \Big)\ dt\ ,$$

$$\int_{\Gamma(t)} \alpha\ =\ \int\ \Big(\ 0 \times 0\ -\ \tfrac{c}{b} \times b\ +\ 1 \times c\ \Big)\ dt\ =\ 0\ .$$

Esse resultado mostra que $(A\ -\ B)$ é uma curva nula para α. Por fim, vamos do ponto B ao ponto Q segundo a reta:

$$\vec{x}(t)\ =\ \Big(\ -\ \tfrac{c}{b}\ +\ (t\ -\ 2)\ (a\ +\ \tfrac{c}{b}),\ b,\ c\ \Big). \qquad (2 \leq t \leq 3)\ .$$

Para essa curva $(B\ -\ Q)$, calculemos a expressão (7.1.3.3b):

$$\int_{\Gamma(t)} \alpha\ =\ \int\ \Big(\ A_1[x(t)]\ \dot{x}^1(t)\ +\ A_2[x(t)]\ \dot{x}^2(t)\ +\ A_3[x(t)]\ \dot{x}^3(t)\ \Big)\ dt\ ,$$

$$\int_{\Gamma(t)} \alpha\ =\ \int\ \Big(\ 0 \times (a\ +\ \tfrac{c}{b})\ -\ \tfrac{c}{b} \times 0\ +\ 1 \times 0\ \Big)\ dt\ =\ 0\ .$$

Esse resultado mostra que $(B\ -\ Q)$ é também uma curva nula para α. Portanto, uma curva nula Γ de α será: $(O\ -\ Q)\ =\ (O\ -\ A) + (A\ -\ B) + (B\ -\ Q)$. Esse exemplo nos mostra que quaisquer dois pontos do R^3 podem ser ligados por intermédio de uma curva nula para a $1-forma\ \alpha\ =\ x\ dy\ +\ dz$, para a qual vale:

$$d\alpha\ =\ dx \wedge dy; \quad \alpha \wedge d\alpha\ =\ (dz\ +\ x\ dy) \wedge dx \wedge dy\ =\ dx \wedge dy \wedge dz \neq 0\ .$$

2. Se $\alpha\ =\ df$, sendo f uma $0-forma$, o **Teorema Fundamental do Cálculo** nos mostra que para dois pontos A e B de uma curva nula teremos:

$$0\ =\ \int_\Gamma df\ =\ \int_A^B df\ =\ f(B)\ -\ f(A) \quad \rightarrow \quad f(A)\ =\ f(B)\ .$$

Vimos acima que existem $1 - formas$ para as quais dois pontos do espaço no qual elas estão definidas podem ser ligados por curvas nulas. Contudo, em 1909, Carathéodory demonstrou o seguinte teorema:

Seja α uma forma diferencial linear com a propriedade de que para qualquer ponto arbitrário P existem pontos Q, arbitrariamente próximos de P, que não podem ser ligados a P por intermédio de curvas nulas de α. Então, localmente, existem funções f e g, tais que:

$$\alpha \ = \ f \ dg \ . \qquad (7.1.3.4)$$

Essa expressão, contudo, não determina f e g completamente.

Esse teorema permitiu ao próprio Carathéodory, assim como, mais tarde, a Born, apresentarem uma formulação axiomática da Termodinâmica, considerando-se os enunciados de Clausius e de Kelvin sobre a segunda lei dessa parte da Física. Por exemplo, segundo esses enunciados, há certos tipos de trabalho realizados sobre um sistema termodinâmico isolado adiabaticamente, tal como um violento movimento, que não pode ser recuperado por intermédio de uma transformação adiabática reversível. Essa afirmação significa que essa situação pode ocorrer em pontos próximos do estado de equilíbrio, que é, exatamente, a situação descrita pelo Teorema de Carathéodory. Ou seja, existem estados termodinâmicos vizinhos que não podem ser ligados por uma curva adiabática reversível nula.

Por outro lado, segundo vimos anteriormente, usando o conceito de **entropia** S, Clausius havia mostrado que a variação líquida de S em torno de qualquer ciclo é zero. Como ele definiu S como a relação entre a troca de calor (ΔQ) e a temperatura absoluta (T) numa transformação isotérmica (vide expressão (7.1.3.2)), Carathéodory identificou f com T, a **temperatura absoluta** (variável intensiva), que é sempre positiva, e g com S (variável extensiva), que é determinada a menos de uma constante. Assim, na formulação de Carathéodory-Born, a **Segunda Lei da Termodinâmica** tem o seguinte enunciado:

Na vizinhança de qualquer estado de equilíbrio de um sistema existem estados de equilíbrio próximos que não podem ser ligados por curvas adiabáticas reversíveis nulas da $1 - forma$ α - calor elementar:

$$\alpha \ = \ T \ dS \ . \qquad (7.1.3.5)$$

Observações

1. **Funções (Potenciais) Termodinâmicas**. O uso combinado das Primeira e Segunda Leis da Termodinâmica, dadas pelas expressões (7.1.2.4c) e (7.1.3.5), isto é:

$$T \ dS \ = \ P \ dV \ + \ dU \ , \qquad (7.1.3.6)$$

permite estudar as transformações do estado de um sistema termodinâmico como função de duas variáveis independentes, por intermédio das chamadas **Funções (Potenciais) Termodinâmicas:** U, H, F, G.

1.1. **Variáveis Volume (V) e Entropia (S): Energia Interna -** U. Usando-se a expressão (7.1.3.6) e considerando-se que $U = U(V, S)$, teremos:

$$dU = -P\,dV + T\,dS = (\tfrac{\partial U}{\partial V})_S\,dV + (\tfrac{\partial U}{\partial S})_V\,dS \quad \to$$

$$P = -(\tfrac{\partial U}{\partial V})_S; \quad \mathrm{T} = (\tfrac{\partial U}{\partial S})_V\,. \qquad (7.1.3.7a,b)$$

1.2. **Variáveis Pressão (P) e Entropia (S): Entalpia -** H. Diferenciando-se a expressão (7.1.2.7a) e usando-se a expressão (7.1.3.6), teremos:

$$dH = dU + d(P\,V) = dU + P\,dV + V\,dP \to$$

$$dH = V\,dP + T\,dS\,. \qquad (7.1.3.8a)$$

Considerando-se $H = H(P, S)$, virá:

$$dH = (\tfrac{\partial H}{\partial P})_S\,dP + (\tfrac{\partial H}{\partial S})_P\,dS \quad \to$$

$$V = (\tfrac{\partial H}{\partial P})_S; \quad T = (\tfrac{\partial H}{\partial S})_P\,. \qquad (7.1.3.8b,c)$$

1.3. **Variáveis Volume (V) e Temperatura (T): Energia Livre (Função de Helmholtz) -** F. Em 1877, o físico e fisiologista alemão Hermann Ludwig von Helmholtz (1821-1894) desenvolveu o conceito de **energia livre** F, definida por:

$$F = U - T\,S\,. \qquad (7.1.3.9a)$$

Diferenciando-se a expressão acima, usando-se a expressão (7.1.3.6) e considerando-se que $F = F(V, T)$, resultará:

$$dF = dU - d(T\,S) = dU - T\,dS - S\,dT = -P\,dV - S\,dT =$$

$$= (\tfrac{\partial F}{\partial V})_T\,dV + (\tfrac{\partial F}{\partial T})_V\,dT \quad \to$$

$$P = -(\tfrac{\partial F}{\partial V})_T; \quad S = -(\tfrac{\partial F}{\partial T})_V\,. \qquad (7.1.3.9b,c)$$

1.4. **Variáveis Pressão (P) e Temperatura (T): Entalpia Livre (Função de Gibbs) -** G. Em 1875, Gibbs desenvolveu o conceito de **entalpia livre** G, definida por:

$$G = H - T\,S\,. \qquad (7.1.3.10a)$$

Diferenciando-se a expressão acima, usando-se as expressões (7.1.3.6) e (7.1.3.8a), e considerando-se que $G = G(P, T)$, teremos:

$$dG = dH - d(T\,S) = dH - T\,dS - S\,dT = V\,dP - S\,dT = (\tfrac{\partial G}{\partial P})_T\,dP + (\tfrac{\partial G}{\partial T})_P\,dT \quad \to$$

$$V = (\tfrac{\partial G}{\partial P})_T; \qquad S = -\,(\tfrac{\partial G}{\partial T})_P\,. \qquad (7.1.3.10b,c)$$

2. **Relações de Maxwell**. Em 1870, o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) deduziu relações entre as variáveis termodinâmicas (P, V, T, S) e suas derivadas parciais. Vejamos algumas dessas relações. Vamos partir da expressão (7.1.3.6) e calcular a sua diferenciação exterior. Considerando-se o **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)] ($dd = 0$), teremos:

$$d(T\,dS) = d(P\,dV) + d(dU) \quad \to \quad dT \wedge dS = dP \wedge dV\,. \qquad (7.1.3.11)$$

Supondo-se $S = S(P,\,T)$ e $V = V(P,\,T)$, a expressão (7.1.3.11) ficará:

$$dT \wedge [(\tfrac{\partial S}{\partial P})_T\,dP + (\tfrac{\partial S}{\partial T})_P\,dT] = dP \wedge [(\tfrac{\partial V}{\partial P})_T\,dP + (\tfrac{\partial V}{\partial T})_P\,dT] \quad \to$$

$$(\tfrac{\partial S}{\partial P})_T\,dT \wedge dP = (\tfrac{\partial V}{\partial T})_P\,dP \wedge dT \quad \to [(\tfrac{\partial S}{\partial P})_T + (\tfrac{\partial V}{\partial T})_P]\,dP \wedge dT = 0 \quad \to$$

$$(\tfrac{\partial S}{\partial P})_T = -\,(\tfrac{\partial V}{\partial T})_P\,, \qquad (7.1.3.12a)$$

que representa uma **Relação de Maxwell**.

Agora, considerando-se $S = S(T,\,V)$ e $P = P(T,\,V)$, a expressão (7.1.3.11) ficará:

$$dT \wedge [(\tfrac{\partial S}{\partial T})_V\,dT + (\tfrac{\partial S}{\partial V})_T\,dV] = [(\tfrac{\partial P}{\partial T})_V\,dT + (\tfrac{\partial P}{\partial V})_T\,dV] \wedge dV \quad \to$$

$$(\tfrac{\partial S}{\partial V})_T\,dT \wedge dV = (\tfrac{\partial P}{\partial T})_V\,dT \wedge dV \quad \to [(\tfrac{\partial S}{\partial V})_T - (\tfrac{\partial P}{\partial T})_V]\,dT \wedge dV = 0 \quad \to$$

$$(\tfrac{\partial S}{\partial V})_T = (\tfrac{\partial P}{\partial T})_V\,, \qquad (7.1.3.12b)$$

que representa uma outra **Relação de Maxwell**.

Agora, considerando-se $T = T(P,\,S)$ e $V = V(P,\,S)$, a expressão (7.1.3.11) ficará:

$$[(\tfrac{\partial T}{\partial P})_S\,dP + (\tfrac{\partial T}{\partial S})_P\,dS] \wedge dS = dP \wedge [(\tfrac{\partial V}{\partial P})_S\,dP + (\tfrac{\partial V}{\partial S})_P\,dS] \quad \to$$

$$(\tfrac{\partial T}{\partial P})_S\,dP \wedge dS = (\tfrac{\partial V}{\partial S})_P\,dP \wedge dS \quad \to [(\tfrac{\partial T}{\partial P})_S - (\tfrac{\partial V}{\partial S})_P]\,dP \wedge dS = 0 \quad \to$$

$$(\tfrac{\partial T}{\partial P})_S = (\tfrac{\partial V}{\partial S})_P\,, \qquad (7.1.3.12c)$$

que representa, também, uma outra **Relação de Maxwell**.

É interessante destacar que, em 1929, Born apresentou um diagrama mnemônico para obter algumas **relações de Maxwell**. Esse diagrama consiste de um quadrado com flechas apontando para cima ao longo das duas diagonais. Os lados são denominados com os quatro potenciais termodinâmicos ($F,\ G,\ H,\ U$), nessa ordem, partindo de F colocado na parte de cima do quadrado e seguindo a direção dos ponteiros do relógio. Os dois vértices à esquerda são denominados V e S, de cima para baixo, e os dois da direita, T e P, também de cima para baixo. Para usar esse diagrama, consultar Callen (1960).

3. **Outras Relações Termodinâmicas**. Tomando-se a expressão (7.1.3.6), dividindo-a por T e calculando a sua diferenciação exterior, obteremos:

$$ddS \ = \ d(\tfrac{P}{T})\ dV \ + \ d(\tfrac{1}{T})\ dU \quad \rightarrow \quad 0 \ = \ \tfrac{T\ dP\ -\ P\ dT}{T^2} \wedge dV \ - \ \tfrac{1}{T^2}\ dT \wedge dU \ .$$

Considerando-se $U \ = \ U(T,\ V)$ e $P \ = \ P(T,\ V)$, virá:

$$\tfrac{1}{T}\ [(\tfrac{\partial P}{\partial T})_V\ dT + (\tfrac{\partial P}{\partial V})_T\ dV] \wedge dV - \tfrac{P}{T^2}\ dT \wedge dV - \tfrac{1}{T^2}\ dT \wedge [(\tfrac{\partial U}{\partial T})_V\ dT + (\tfrac{\partial U}{\partial V})_T\ dV] \ = \ 0 \ \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{T}\ [(\tfrac{\partial P}{\partial T})_V \ - \ \tfrac{P}{T} \ - \ \tfrac{1}{T}\ (\tfrac{\partial U}{\partial V})_T]\ dT \wedge dV \ = \ 0 \quad \rightarrow$$

$$T\ (\tfrac{\partial P}{\partial T})_V \ - \ P \ = \ (\tfrac{\partial U}{\partial V})_T \ . \qquad (7.1.3.13)$$

Agora, vamos obter uma outra relação termodinâmica. Assim, tomando-se a expressão (7.1.3.6), dividindo-a por P e calculando a sua diferenciação exterior, obteremos:

$$d(\tfrac{T}{P})\ dS = \ d(dV) \ + \ d(\tfrac{1}{P})\ dU \quad \rightarrow \ \tfrac{P\ dT\ -\ T\ dP}{P^2} \wedge dS \ = \ 0 \ - \ \tfrac{1}{P^2}\ dP \wedge dU \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{P}\ dT \wedge dS \ = \ \tfrac{1}{P^2}\ dP \wedge (T\ dS \ - \ dU) \ .$$

Considerando-se $U \ = \ U(T,\ S)$ e $P \ = \ P(T,\ S)$, resultará:

$$\tfrac{1}{P}\ dT \wedge dS \ = \ \tfrac{1}{P^2}\ [(\tfrac{\partial P}{\partial T})_S\ dT \ + \ (\tfrac{\partial P}{\partial S})_T\ dS] \wedge [T\ dS \ - \ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_S\ dT \ - \ (\tfrac{\partial U}{\partial S})_T\ dS] \ =$$

$$= \ \tfrac{1}{P^2}\ [T\ (\tfrac{\partial P}{\partial T})_S\ dT \wedge dS \ - \ (\tfrac{\partial P}{\partial T})_S\ (\tfrac{\partial U}{\partial S})_T\ dT \wedge dS \ - \ (\tfrac{\partial P}{\partial S})_T\ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_S\ dS \wedge dT] \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{P}\ dT \wedge dS \ = \ \tfrac{1}{P^2}\ [\ T\ (\tfrac{\partial P}{\partial T})_S \ - \ (\tfrac{\partial P}{\partial T})_S\ (\tfrac{\partial U}{\partial S})_T \ + \ (\tfrac{\partial P}{\partial S})_T\ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_S]\ dT \wedge dS \quad \rightarrow$$

$$T(\tfrac{\partial P}{\partial T})_S \ - \ P \ = \ (\tfrac{\partial P}{\partial T})_S\ (\tfrac{\partial U}{\partial S})_T \ - \ (\tfrac{\partial P}{\partial S})_T\ (\tfrac{\partial U}{\partial T})_S \ . \qquad (7.1.3.14)$$

Por fim, uma outra relação termodinâmica será obtida partindo-se do produto exterior $dT \wedge dS$ e considerando-se $T \ = \ T(P,\ S)$, $S \ = \ S(T,\ P)$ e $P \ = \ (T,\ S)$. Desse modo, teremos:

$$dT \wedge dS \;=\; [(\tfrac{\partial T}{\partial P})_S \; dP \;+\; (\tfrac{\partial T}{\partial S})_P \; dS] \wedge dS \;=\; (\tfrac{\partial T}{\partial P})_S \; dP \wedge dS \;=$$

$$=\; (\tfrac{\partial T}{\partial P})_S \; dP \wedge [(\tfrac{\partial S}{\partial T})_P \; dT \;+\; (\tfrac{\partial S}{\partial P})_T \; dP] \;=\; (\tfrac{\partial T}{\partial P})_S \; (\tfrac{\partial S}{\partial T})_P \; dP \wedge dT \;=$$

$$=\; (\tfrac{\partial T}{\partial P})_S \; (\tfrac{\partial S}{\partial T})_P \; [(\tfrac{\partial P}{\partial T})_S \; dT \;+\; (\tfrac{\partial P}{\partial S})_T \; dS] \wedge dT \;=\; (\tfrac{\partial T}{\partial P})_S \; (\tfrac{\partial S}{\partial T})_P \; (\tfrac{\partial P}{\partial S})_T \; dS \wedge dT \quad \rightarrow$$

$$[1 \;+\; (\tfrac{\partial T}{\partial P})_S \; (\tfrac{\partial S}{\partial T})_P \; (\tfrac{\partial P}{\partial S})_T] \; dT \wedge dS \quad \rightarrow \quad (\tfrac{\partial T}{\partial P})_S \; (\tfrac{\partial S}{\partial T})_P \; (\tfrac{\partial P}{\partial S})_T \;=\; -\,1 \; . \qquad (7.1.3.15)$$

7.1.4 Terceira Lei da Termodinâmica

Vimos que a **Segunda Lei da Termodinâmica** nos permite determinar a entropia (S) do estado de um sistema termodinâmico a menos de uma constante aditiva. Em vista disso, sua definição depende da existência de uma transformação reversível ligando um estado de referência escolhido arbitrariamente ao estado em estudo. Esses dois estados, contudo, devem pertencer à mesma superfície (variedade diferenciável) da equação de estado. No entanto, se considerarmos dois sistemas termodinâmicos, ou estados meta-estáveis de um único sistema termodinâmico, a equação de estado correspondente pode não ser representada pela mesma superfície. Desse modo, a **Segunda Lei da Termodinâmica** não permite determinar, de maneira unívoca, a variação de entropia entre dois estados desses sistemas, pois não existe uma transformação reversível ligando esses estados. Essa univocidade só poderá ser garantida se houver uma temperatura na qual a entropia seja uma constante universal. Vejamos como se chegou a essa temperatura.

Em 1819, os franceses, o químico Pierre Louis Dulong (1785-1838) e o físico Alexis Thérése Petit (1791-1820), descobriram que:

Os átomos de todos os corpos simples têm exatamente a mesma capacidade para o calor.

Essa descoberta, que significa dizer que a capacidade calorífica dos corpos (C_P ou C_V) é uma constante, ficou conhecida como a **Lei de Dulong-Petit**. Porém, com o desenvolvimento da Criogenia, com a qual foram obtidas temperaturas cada vez mais baixas, verificou-se que C_P (C_V) diminuía à medida que a temperatura também diminuía.

Terceira Lei da Termodinâmica

Em 1905, o físico e químico alemão Walther Hermann Nerst (1864-1941; PNQ, 1920) demonstrou o hoje famoso **Teorema do Calor de Nerst**, segundo o qual a variação de energia total de um gás com a temperatura tende a zero na medida em que a temperatura também tende para zero:

$$\tfrac{dU}{dT} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \rightarrow \quad C_V \quad \propto \quad T \quad (T \quad \rightarrow \quad 0)$$

A demonstração desse teorema levou Nerst a apresentar a **Terceira Lei da Termodinâmica**:

A entropia de um sistema termodinâmico no zero absoluto ($T = 0$) é uma constante universal, a qual pode ser considerada como nula: $S(0) = 0$.

Observações

1. Em 1910, o físico alemão Max Karl Planck (1858-1947; PNF, 1918) afirmou que a **capacidade calorífica** dos sólidos e líquidos tende a zero quando $T \to 0$.

2. Em 1914, Nerst apresentou a hipótese de que a capacidade calorífica a volume constante (C_V) dos gases tende a zero quando a sua temperatura tende ao zero absoluto. Isso significava dizer que a **Terceira Lei da Termodinâmica** também se aplicava aos gases.

3. O **coeficiente de expansão térmica** β de qualquer substância se anula no zero absoluto. Com efeito, tomemos a definição de β:

$$\beta \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P . \qquad (7.1.4.1)$$

Usando-se as expressões (7.1.2.2d) e (7.1.3.5), e considerando-se $P =$ constante, teremos:

$$T\, dS = \Lambda_P\, dP + C_P\, dT \quad \to \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{C_P}{T} \quad \to \quad S = \int C_P \left(\frac{dT}{T}\right)_P . \qquad (7.1.4.2a,b)$$

Usando-se as expressões (7.1.3.12a) e (7.1.4.2a), virá:

$$\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = T \left(\frac{\partial}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = T \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \quad \to$$

$$\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -\, T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P = -\, T \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P . \qquad (7.1.4.2c)$$

Agora, usando-se as expressões (7.1.3.12a), (7.1.4.1) e (7.1.4b,c), teremos:

$$V\, \beta = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial P}\right)_T \int_o^T C_P \frac{dT}{T} = -\int_o^T \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T \frac{dT}{T} =$$

$$= \int_o^T \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT \quad \to \quad V\, \beta = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \right]_T - \left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \right]_{T\, =\, 0} . \qquad (7.1.4.3)$$

A expressão (7.1.4.3) nos mostra que:

$$\beta \ \to \ 0, \ se \ \ T \ \to \ 0 .$$

Capítulo 8

8.1 Eletrodinâmica

8.1.1 Introdução

No final do Século 19, dois formalismos matemáticos se rivalizavam: a **Teoria dos Quatérnios** apresentada pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) em seu célebre livro intitulado **Lectures on Quaternions**, publicado em 1853, e difundido pelo físico e matemático inglês Peter Guthrie Tait (1831-1901), em seu livro **Elementary Treatise on Quaternions**, publicado em 1867; e a **Análise Vetorial**, apresentada, independentemente, pelo físico e químico norte-americano Josiah Williard Gibbs (1839-1903) em seu **Elements of Vector Analysis**, publicado em 1881, e pelo físico e engenheiro eletricista inglês Oliver Heaviside (1850-1925) que a usou em seu livro **Electromagnetic Theory**, cuja primeira edição ocorreu em 1893. Registre-se que Gibbs foi influenciado pelo livro publicado, em 1844, pelo matemático alemão Hermann Günter Grassmann (1809-1877), que tem como título **Die Lineale Ausdehnungslehre - Ein neuer Zweig der Mathematik** ("A Teoria de Extensão Linear - Um novo Ramo da Matemática"). Esse livro pode ser considerado o precursor do **Cálculo Vetorial** já que, as duas operações (**produto interno** e **produto externo**) que ele define nesse livro para tratar dos **hipernúmeros** - uma generalizaç o dos números complexos -, são hoje conhecidos como o **produto escalar** e o **produto vetorial** entre vetores.

A Teoria Eletromagnética, tema deste Capítulo, foi desenvolvida pelo físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) em seu livro intitulado **A Treatise on Electricity and Magnetism**, publicado pela primeira vez em 1873. Em seu desenvolvimento, Maxwell usou os **quatérnios Hamiltonianos**, e suas célebres equações, com as quais sintetizou todo o conhecimento teórico e experimental sobre os fenômenos eletromagnéticos, foram apresentadas em 8 equações envolvendo derivadas parciais. Conforme podemos ver no livro citado acima, porém, com as notações atuais, tais equações têm as seguintes representações (válidas para o vácuo):

$$\partial B_x/\partial x \ + \ \partial B_y/\partial y \ + \ \partial B_z/\partial z \ = \ 0 \ , \qquad (8.1.1.1)$$

$$\partial E_z/\partial y \ - \ \partial E_y/\partial z \ = \ - \ \partial B_x/\partial t \ , \qquad (8.1.1.2)$$

$$\partial E_x/\partial z \ - \ \partial E_z/\partial x \ = \ - \ \partial B_y/\partial t \ , \qquad (8.1.1.3)$$

$$\partial E_y/\partial x \ - \ \partial E_x/\partial y \ = \ - \ \partial B_z/\partial t \ , \qquad (8.1.1.4)$$

$$\partial E_x/\partial x \ + \ \partial E_y/\partial y \ + \ \partial E_z/\partial z \ = \ \rho \ , \qquad (8.1.1.5)$$

$$\partial B_z/\partial y \ - \ \partial B_y/\partial z \ = \ \partial E_x/\partial t \ + \ J_x \ , \qquad (8.1.1.6)$$

$$\partial B_x/\partial z \ - \ \partial B_z/\partial x \ = \ \partial E_y/\partial t \ + \ J_y \ , \qquad (8.1.1.7)$$

$$\partial B_y/\partial x \ - \ \partial B_x/\partial y \ = \ \partial E_z/\partial t \ + \ J_z \ , \qquad (8.1.1.8)$$

onde E_x, E_y e E_z, B_x, B_y e B_z representam, respecticamente, os componentes cartesianos dos campos elétrico e magnético, ρ é a **densidade de carga elétrica**, e J_x, J_y e J_z, são os componentes cartesianos do **vetor densidade de corrente elétrica**.

As oito **equações de Maxwell** vistas acima, foram reduzidas para quatro por Heaviside, no livro referido acima e, para isso, ele usou a notação do Cálculo Vetorial (Kline, 1972), e que, na notação atual, apresentam o seguinte aspecto (ver os livros de Eletrodinâmica citados na Bibliografia - Parte 2):

$$\nabla \ . \ \vec{B} \ = \ 0 \ , \qquad \nabla \times \vec{E} \ + \ (1/c) \ \partial \vec{B}/\partial t \ = \ 0 \ , \qquad (8.1.1.9,10)$$

$$\nabla \ . \ \vec{E} \ = \ 4 \ \pi \ \rho \ , \qquad \nabla \times \vec{B} \ = \ (1/c) \ \partial \vec{E}/\partial t \ + \ (4 \ \pi/c) \ \vec{J} \ . \qquad (8.1.1.11,12)$$

Comparando-se as expressões (8.1.1.1-8) e (8.1.1.9-12), vê-se as seguintes correspondências: (8.1.1.1) $\rightarrow$ (8.1.1.9), (8.1.1.2-4) $\rightarrow$ (8.1.1.10), (8.1.1.5) $\rightarrow$ (8.1.1.11) e, por fim, (8.1.1.6-8) $\rightarrow$ (8.1.1.12).

Na década final do Século 19 e no começo do Século 20, um novo formalismo matemático foi desenvolvido pelo matemático italiano Gregorio Ricci-Curbestro (1853-1925), em 1892 (*Bulletin des Sciences Mathématiques* **16**, p. 167), e pelo próprio Ricci e seu famoso discípulo italiano Tullio Levi-Civita (1873-1941), em 1901 (*Mathematische Annalen* **64**, p. 125), conhecido inicialmente como **Cálculo Diferencial Absoluto**. Contudo, com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral por parte do físico germano-norte-americano Albert Einstein (1879-1955; PNF, 1921), em 1916 (**Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie**), esse novo tipo de Cálculo passou a ser denominado de **Cálculo Tensorial**, nome dado pelo próprio Einstein (Kline, op. cit.), uma vez que envolvia os entes matemáticos conhecidos como **tensores**, termo cunhado pelo físico alemão Woldemar Voigt (1950-1919), em 1898, em conexão com a elasticidade dos cristais (Whittaker, 1953).

Neste Capítulo, veremos que o **Cálculo Tensorial** permite escrever as **Equações de Maxwell** por intermédio de apenas duas expressões:

$$\partial_\lambda \ F_{\mu\nu} \ + \ \partial_\nu \ F_{\lambda\mu} \ + \ \partial_\mu \ F_{\nu\lambda} \ = \ 0 \ , \qquad (8.1.1.13)$$

$$\partial_\tau \ F^{\mu\tau} \ = \ j^\mu \ , \qquad (8.1.1.14)$$

onde $F_{\mu\nu} \ = \ \partial_\mu \ A_\nu \ - \ \partial_\nu \ A_\mu$ representa o **Tensor Campo-Força Eletromagnético** [ver a Definição (8.1.5.1)]. Observe-se que, conforme se pode ver no item 8.1.5, as expressões (8.1.1.13,14) representam, respectivamente, o grupo homogêneo [expressões (8.1.1.9,10)] e o não-homogêneo [expressões (8.1.1.11,12)] das quatro **Equações de Maxwell**.

Por fim, as duas **Equações de Maxwell** vistas acima e escritas na linguagem tensorial, podem ser escritas de uma maneira mais compacta, conforme veremos no decorrer deste Capítulo, usando-se o formalismo das **Formas Diferenciais**, desenvolvido pelo matemático francês Éli-Joseph Cartan (1869-1951), na primeira metade do Século 20. (Cartan, 1945).

Na conclusão desta introdução histórica sobre as **Equações de Maxwell**, é oportuno dizer que tais equações também podem ser escritas por intermédio de apenas uma equação, usando a Álgebra Geométrica Associativa, cujos trabalhos iniciais foram apresentados por Grassmann em seu livro de 1844, referido anteriormente, e posteriormente completada pelo matemático inglês William Kingdon Clifford (1845-1879), em 1878 (*American Journal of Mathematics* **1**, p. 350). Tal equação é dada por (Ferreira, 2006):

$$\nabla'' \, (\vec{E} \, + \, I \, \vec{B}) \, = \, 4 \, \pi \, [\rho \, - \, (1/c) \, \vec{J}] \, , \qquad (8.1.1.15)$$

onde I é um pseudo-escalar, tal que $I^2 \, = \, - \, 1$, e $\nabla'' \, = \, \nabla \, + \, (1/c) \, \partial/\partial t$ é o **multivetor gradiente generalizado**. Registre-se que, em Ferreira, op. cit., pode-se ver como a expressão (8.1.1.15) contém as expressões (8.1.1.9-12).

8.1.2 Formas Diferenciais da Eletromagnetostática

Definição 8.1.2.1. A **Intensidade do Campo Elétrico** E é uma $1 - forma$ diferencial linear:

$$E \, = \, E_x(x, \, y, \, z) \, dx \, + \, E_y(x, \, y, \, z) \, dy \, + \, E_z(x, \, y, \, z) \, dz \, , \qquad (8.1.2.1a)$$

tal que:

$$\tau \, = \, \int_\Gamma \, E \, = \, \int_\Gamma \, E_x(x, \, y, \, z) \, dx \, + \, E_y(x, \, y, \, z) \, dy \, + \, E_z(x, \, y, \, z) \, dz \, , \qquad (8.1.2.1b)$$

onde Γ é uma curva definida por:

$$\Gamma \, : \, [a, \, b] \subset R \, \rightarrow \, R^3 \, : \, t \in [a, \, b] \, \rightarrow \, r \, = \, \Gamma(t) \, . \qquad (8.1.2.1c)$$

Observações

1. Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.1a) representa o **Vetor Campo Elétrico** $\vec{E}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) \, = \, E_x \, \hat{x} \, + \, E_y \, \hat{y} \, + \, E_z \, \hat{z} \, = \, E_x \, \partial_x \, + \, E_y \, \partial_y \, + \, E_z \, \partial_z \, , \qquad (8.1.2.1d)$$

e é interpretado como a força que atua uma carga elétrica unitária ($q \, = \, 1$), colocada em repouso no ponto $\vec{r}$.

2. Ainda na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.1b) significa a **circulação** de $\vec{E}$ ao longo de Γ e representa o **trabalho** τ realizado por $\vec{E}$ sobre a carga unitária, ao longo de Γ:

$$\tau \ = \ \int_\Gamma E \ = \ E \mid \Gamma \ = \ \int_\Gamma \vec{E} \ . \ d\vec{r} \ . \qquad (8.1.2.1e)$$

3. Experimentalmente observou-se que:

$$\oint_\Gamma E \ = \ 0 \ .$$

Usando-se o **Teorema de Stokes Generalizado** [ver expressão (5.1.2.1)], teremos:

$$\int_D dE \ = \ \oint_\Gamma E \ = \ 0 \quad \rightarrow \quad dE \ = \ 0 \ . \qquad (8.1.2.1f)$$

Usando-se o **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)] ($dd \ = \ 0$), a expressão (8.1.2.1f) permite escrever que:

$$E \ = \ - \ dV \ , \qquad (8.1.2.1g)$$

onde V é uma $0-forma$ denominada **potencial elétrico**. Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.1g) é escrita como:

$$\vec{E} \ = \ - \ \nabla \ V \ . \qquad (8.1.2.1h)$$

É oportuno destacar que o sinal menos ($-$) deriva da **Lei de Coulomb**, formulada experimentalmente pelo físico francês Charles Augustin Coulomb (1736-1806), em 1785. Por exemplo, no vácuo, o campo elétrico $\vec{E}$ e o respectivo potencial elétrico V, a uma distância $\vec{r}$, criado por uma carga elétrica q colocada na origem de um sistema de eixos ortogonais, são dados, respectivamente, por:

$$\vec{E} \ = \ \frac{q}{4 \ \pi \ \epsilon_o} \ \frac{\hat{r}}{r^2}; \qquad V \ = \ \frac{q}{4 \ \pi \ \epsilon_o} \ \frac{1}{r} \ . \qquad (8.1.2.1i,j)$$

3.1. Calculando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão (8.1.2.1f), teremos:

$$\star dE \ = \ 0 \ . \qquad (8.1.2.1k)$$

Usando-se a linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão acima é escrita na forma:

$$\nabla \times \vec{E} \ = \ 0 \ . \qquad (8.1.2.1\ell)$$

4. O uso de E como uma $1-forma$ representando a circulação $\vec{E} \ . \ d\vec{r}$ mostra que ela pode ser escrita da mesma maneira em qualquer sistema de coordenadas. Por exemplo, em coordenadas esféricas $(r, \ \theta, \ \phi)$, teremos:

$$E \ = \ E_r(r, \ \theta, \ \phi) \ dr \ + \ E_\theta(r, \ \theta, \ \phi) \ d\theta \ + \ E_\phi(r, \ \theta, \ \phi) \ d\phi \ .$$

Registre-se, contudo, que a tripla ($dr,\ d\theta,\ d\phi$) não forma uma base ortonormada, como ocorre com a tripla ($dx,\ dy,\ dz$). E mais ainda, que a circulação $\omega_E \mid \Gamma$ será calculada simplesmente por uma transformação de coordenadas ("pullback").

Definição 8.1.2.2. A **Densidade de Corrente Elétrica** J é uma $2-forma$ diferencial linear:

$$J \ = \ J_x(x,\ y,\ z)\ dy \wedge dz \ + \ J_y(x,\ y,\ z)\ dz \wedge dx \ + \ J_z(x,\ y,\ z)\ dx \wedge dy\ , \qquad (8.1.2.2a)$$

tal que:

$$I \ = \ \int_S J \ = \ J \mid S \ =$$

$$= \ \int_S J_x(x,\ y,\ z)\ dy \wedge dz \ + \ J_y(x,\ y,\ z)\ dz \wedge dx \ + \ J_z(x,\ y,\ z)\ dx \wedge dy\ , \qquad (8.1.2.2b)$$

onde S é uma superfície definida por:

$$S \ : \ [u,\ v] \subset R^2 \ \ \rightarrow \ \ R^3 \ \ (a \leq u \leq b;\ c \leq v \leq d)\ . \qquad (8.1.2.2c)$$

Observações

1. Aplicando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão (8.1.2.2a), teremos:

$$\star\ J \ = \ \star\ [J_x\ dy \wedge dz \ + \ J_y\ dz \wedge dx \ + \ J_z\ dx \wedge dy] \ =$$

$$= \ J_x \star (dy \wedge dz) \ + \ J_y \star (dz \wedge dx) \ + \ J_z \star (dx \wedge dy) \ \ \rightarrow$$

$$\star\ J \ = \ J_x\ dx \ + \ J_y\ dy \ + \ J_z\ dz\ . \qquad (8.1.2.2d)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.2d) representa o **Vetor Densidade de Corrente Elétrica** $\vec{J}$:

$$\vec{J} \ = \ \star\ J \ = \ J_x\ \hat{x} \ + \ J_y\ \hat{y} \ + \ J_z\ \hat{z} \ = \ J_x\ \partial_x \ + \ J_y\ \partial_y \ + \ J_z\ \partial_z\ . \qquad (8.1.2.2e)$$

2. Ainda na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.2b) significa o **fluxo** de $\vec{J}$ através de uma superfície S e representa a **corrente elétrica** I em um circuito elétrico:

$$I \ = \ \int_S J \ = \ J \mid S \ = \ \int_S \vec{J}\ .\ \hat{n}\ dS\ . \qquad (8.1.2.2f)$$

3. No estudo dos condutores, o físico alemão Georg Simon Ohm (1787-1854), em 1825, observou experimentalmente que:

$$\vec{J} \; = \; \sigma \; \vec{E} \; , \qquad (8.1.2.2g)$$

onde σ é a **condutividade elétrica** do condutor, que é, via de regra, um tensor de ordem 2. Contudo, se o condutor for homogêneo e isotrópico, então $\sigma =$ constante.

3.1. Aplicando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão (8.1.2.1a), teremos:

$$\star \; E \; = \; \star \; [E_x \; dx \; + \; E_y \; dy \; + \; E_z \; dz] \; ,$$

$$\star \; E \; = \; E_x \; dy \wedge dz \; + \; E_y \; dz \wedge dx \; + \; E_z \; dx \wedge dy \; . \qquad (8.1.2.2h)$$

Assim, para os condutores homogêneos e isotrópicos, as expressões (8.1.2.2a,h) permitem escrever a expressão (8.1.2.2g), em termos de formas diferenciais, da seguinte maneira:

$$J \; = \; \bar{\sigma} \star E \; , \qquad (8.1.2.2i)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a $0 - forma$ correspondente à condutividade elétrica σ.

Definição 8.1.2.3. A **Densidade de Carga Elétrica** Q é uma $3 - forma$ diferencial linear:

$$Q \; = \; \rho \; dx \wedge dy \wedge dz \; , \qquad (8.1.2.3a)$$

tal que:

$$q \; = \; \int_V \; Q \; = \; Q \mid V \; = \; \int_V \; \rho \; dx \wedge dy \wedge dz \; . \qquad (8.1.2.3b)$$

Observações

1. Aplicando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão (8.1.2.3a), teremos:

$$\star \; Q \; = \; \rho \star (dx \wedge dy \wedge dz) \quad \rightarrow \quad \star Q \; = \; \rho \; . \qquad (8.1.2.3c)$$

2. Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.3b) é dada por:

$$q \; = \; \int_V \; \rho \; dV \; , \qquad (8.1.2.3d)$$

e q representa a **carga elétrica** no interior do volume.

Definição 8.1.2.4. O **Deslocamento Dielétrico** D é uma $2 - forma$ diferencial linear:

$$D \; = \; D_x(x, \; y, \; z) \; dy \wedge \; dz \; + D_y(x, \; y, \; z) \; dz \wedge dx \; + \; D_z(x, \; y, \; z) \; dx \wedge dy \; , \qquad (8.1.2.4a)$$

tal que:

$$\int_S D \;=\; \int_V Q \quad \to \quad D \mid S \;=\; Q \mid V \; . \qquad (8.1.2.4b)$$

Observações

1. Aplicando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão (8.1.2.4a), teremos:

$$\star\, D \;=\; \star\, [D_x\, dy \wedge dz \;+\; D_y\, dz \wedge dx \;+\; D_z\, dx \wedge dy] \;=$$

$$=\; D_x \star (dy \wedge dz) \;+\; D_y \star (dz \wedge dx) \;+\; D_z \star (dx \wedge dy) \quad \to$$

$$\star\, D \;=\; D_x\, dx \;+\; D_y\, dy \;+\; D_z\, dz \; . \qquad (8.1.2.4c)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.4c) representa o **Vetor Deslocamento (Indução) Elétrico** $\vec{D}$:

$$\vec{D} \;=\; \star\, D \;=\; D_x\, \hat{x} \;+\; D_y\, \hat{y} \;+\; D_z\, \hat{z} \;=\; D_x\, \partial_x \;+\; D_y\, \partial_y \;+\; D_z\, \partial_z \; . \qquad (8.1.2.4d)$$

2. Aplicando-se o **Teorema de Stokes Generalizado** [ver expressão (5.1.2.1)] ao primeiro membro da expressão (8.1.2.4b), virá:

$$\int_S D \;=\; \int_V dD \;=\; \int_V Q \quad \to \quad dD \;=\; Q \; . \qquad (8.1.2.4e)$$

Calculando-se a diferenciação exterior [ver Definição (4.1.1.1)]da expressão (8.1.2.4a), virá:

$$dD \;=\; d\Big(\, D_x(x,\; y,\; z)\; dy \wedge dz \;+\; D_y(x,\; y,\; z)\; dz \wedge dx \;+\; D_z(x,\; y,\; z)\; dx \wedge dy \,\Big)$$

$$dD \;=\; \Big(\, \frac{\partial D_x}{\partial x} \;+\; \frac{\partial D_y}{\partial y} \;+\; \frac{\partial D_z}{\partial z} \,\Big)\; dx \wedge dy \wedge dz \; .$$

Usando-se as expressões (8.1.2.3a) e (8.1.2.4e), teremos:

$$dD \;=\; \Big(\, \frac{\partial D_x}{\partial x} \;+\; \frac{\partial D_y}{\partial y} \;+\; \frac{\partial D_z}{\partial z} \,\Big)\; dx \wedge dy \wedge dz \;=\; \rho\; dx \wedge dy \wedge dz \; .$$

Calculando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão acima e considerando que $\star(dx \wedge dy \wedge dz) \;=\; 1$, virá:

$$\star dD \;=\; \Big(\, \frac{\partial D_x}{\partial x} \;+\; \frac{\partial D_y}{\partial y} \;+\; \frac{\partial D_z}{\partial z} \,\Big) \star(dx \wedge dy \wedge dz) \;=\; \rho \star(dx \wedge dy \wedge dz) \quad \to$$

$$\star dD \;=\; \rho \; . \qquad (8.1.2.4f)$$

Considerando-se que $\star^2 \ = \ \star\,\star \ = \ 1$ (no R^3), a expressão (8.1.2.4f) poderá ser escrita na forma:

$$\star d\ (\star\star)\ D \ = \ (\star d \star)\ (\star D) \ = \ \rho\ .$$

Usando-se a linguagem do Cálculo Vetorial e expressão (8.1.2.4d), a expressão acima traduz a **Primeira Equação de Maxwell** (1873), para meios dielétricos:

$$\nabla\ .\ \vec{D} \ = \ \rho\ . \qquad (8.1.2.4g)$$

3. No estudo dos dielétricos, observou-se experimentalmente que:

$$\vec{D} \ = \ \epsilon\ \vec{E}\ , \qquad (8.1.2.4h)$$

onde ϵ é a **permitividade elétrica** do dielétrico, que é, via de regra, um tensor de ordem 2. Contudo, se o dielétrico for homogêneo e isotrópico, então $\epsilon =$ constante.

3.1. Para os dielétricos homogêneos e isotrópicos, as expressões (8.1.2.2h) e (8.1.2.4a) permitem escrever a expressão (8.1.2.4h), em termos de formas diferenciais, da seguinte maneira:

$$D \ = \ \bar{\epsilon} \star E\ , \qquad (8.1.2.4i)$$

onde $\bar{\epsilon}$ é a $0 - forma$ correspondente à **permitividade elétrica** ϵ.

4. Aplicando-se o operador ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] à expressão (8.1.2.1g) e usando-se a expressão (8.1.2.4i), teremos:

$$\star E \ = \ - \star dV \quad \rightarrow \quad \frac{D}{\bar{\epsilon}} \ = \ - \star dV\ .$$

Diferenciando-se a expressão acima e usando-se a expressão (8.1.2.4e). virá:

$$\frac{1}{\bar{\epsilon}}\ dD \ = \ -\ d \star dV \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{\bar{\epsilon}} \ = \ -\ d \star dV\ .$$

Aplicando-se o operador ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] à expressão acima e usando-se a expressão (8.1.2.3c), resultará:

$$\frac{\star\ Q}{\bar{\epsilon}} \ = \ - \star d \star dV \quad \rightarrow \quad \star\ d \star dV \ = \ -\ \frac{\rho}{\bar{\epsilon}}\ .$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão acima traduz a **Equação de Poisson**, que foi apresentada pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), em 1813:

$$\Delta V \ = \ -\ \frac{\rho}{\epsilon}\ . \qquad (8.1.2.4j)$$

Definição 8.1.2.5. A **Intensidade do Campo Magnético** H é uma $1 - forma$ diferencial linear:

$$H \ = \ H_x(x, \ y, \ z) \ dx \ + H_y(x, \ y, \ z) \ dy \ + \ H_z(x, \ y, \ z) \ dz \ , \qquad (8.1.2.5a)$$

tal que:

$$I \ = \ \oint_\Gamma H \ = \ \oint_\Gamma H_x(x, \ y, \ z) \ dx \ + \ H_y(x, \ y, \ z) \ dy \ + \ H_z(x, \ y, \ z) \ dz \ , \qquad (8.1.2.5b)$$

onde Γ e I foram definidos, respectivamente, pelas expressões (8.1.2.1c) e (8.1.2.2b).

Observações

1. Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.5a) define o **Vetor Campo Magnético** $\vec{H}$:

$$\vec{H}(\vec{r}) \ = \ H_x \ \hat{x} \ + \ H_y \ \hat{y} \ + \ H_z \ \hat{z} \ = \ H_x \ \partial_x \ + \ H_y \ \partial_y \ + \ H_z \ \partial_z \ . \qquad (8.1.2.5c)$$

2. Ainda na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.5b) significa a **circulação** de $\vec{H}$ ao longo de Γ e representa a **Intensidade de Corrente** I que circula através de uma superfície S limitada por Γ:

$$I \ = \ \oint_\Gamma H \ = \ H \mid \Gamma \ = \ \oint_\Gamma \vec{H} \ . \ d\vec{r} \ . \qquad (8.1.2.5d)$$

A expressão acima decorre de uma observação experimental feita, em 1820, independentemente, pelos físicos, o dinamarquês Hans Christiaan Oersted (1777-1851) e o francês André Marie Ampére (1775-1836). Com efeito, eles observaram que o campo magnético $\vec{H}$ é criado toda vez que uma corrente I circula em um condutor.

3. Usando-se a expressão (8.1.2.2b) e o **Teorema de Stokes Generalizado** [ver expressão (5.1.2.1)] na expressão (8.1.2.5b), virá:

$$\oint_\Gamma H \ = \ \int_S dH \ = \ \int_S J \ \ \rightarrow \ \ dH \ = \ J \ . \qquad (8.1.2.5e)$$

3.1. Aplicando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] à expressão acima, resultará:

$$\star \ dH \ = \ \star \ J \ . \qquad (8.1.2.5f)$$

Usando-se a linguagem do Cálculo Vetorial e a expressão (8.1.2.2e), a expressão acima traduz a **Equação de Ampère** (1820):

$$\nabla \times \vec{H} \ = \ \vec{J} \ . \qquad (8.1.2.5g)$$

Definição 8.1.2.6. A **Indução Magnética** B é uma $2 - forma$ diferencial linear:

$$B \ = \ B_x(x,\ y,\ z)\ dy \wedge dz \ + \ B_y(x,\ y,\ z)\ dz \wedge dx \ + \ B_z(x,\ y,\ z)\ dx \wedge dy \ , \qquad (8.1.2.6a)$$

tal que:

$$0 \ = \ \oint_S B \ = \ B \mid S \ =$$

$$= \ \oint_S B_x(x,\ y,\ z)\ dy \wedge dz \ + \ B_y(x,\ y,\ z)\ dz \wedge dx \ + \ B_z(x,\ y,\ z)\ dx \wedge dy \ , \qquad (8.1.2.6b)$$

onde S foi definido pela expressão (8.1.2.2c).

Observações

1. Aplicando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] à expressão (8.1.2.6a), teremos:

$$\star\, B \ = \ \star\, [B_x\ dy \wedge dz \ + \ B_y\ dz \wedge dx \ + \ B_z\ dx \wedge dy] \ =$$

$$= \ B_x\ dx \ + \ B_y\ dy \ + \ B_z\ dz\ . \qquad (8.1.2.6c)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.6c) representa o **Vetor Indução Magnética** $\vec{B}$:

$$\vec{B} \ = \ \star\, B \ = \ B_x\ \hat{x} \ + \ B_y\ \hat{y} \ + \ B_z\ \hat{z} \ = \ B_x\ \partial_x \ + \ B_y\ \partial_y \ + \ B_z\ \partial_z\ . \qquad (8.1.2.6d)$$

2. Ainda na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.6b) mostra que o **fluxo** de $\vec{B}$ através de uma superfície S que limita um determinado volume V é nulo:

$$\oint_S B \ = \ B \mid S \ = \ \oint_S \vec{B}\ .\ \hat{n}\ dS \ = \ 0\ . \qquad (8.1.2.6e)$$

A expressão acima significa que as linhas de força de $\vec{B}$ são fechadas, conforme observaram, o erudito francês Petrus Peregrinus de Maricourt [c.1240-c.1270(1290)], em 1269, e o físico inglês Michael Faraday (1791-1862), em 1832.

3. Aplicando-se o **Teorema de Stokes Generalizado** [ver expressão (5.1.2.1)] à expressão (8.1.2.6e), virá:

$$\oint_S B \ = \ \int_V dB \ = \ 0 \quad \rightarrow \quad dB \ = \ 0\ . \qquad (8.1.2.6f)$$

Calculando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão acima e considerando-se que $\star^2 \ = \ \star\,\star = 1$ (no R^3) e que $\star\ 0 \ = \ 0$, teremos:

$$\star d\ (\star\star)\ B \ = \ (\star d \star)\ (\star B) \ = \ 0\ .$$

Usando-se a linguagem do Cálculo Vetorial e a expressão (8.1.2.6d), a expressão acima traduz a **Segunda Equação de Maxwell** (1873), para meios materiais:

$$\nabla \, . \, \vec{B} \; = \; 0 \; . \qquad (8.1.2.6g)$$

4. Usando-se o **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)] (dd = 0), a expressão (8.1.2.6f) permite escrever que:

$$B \; = \; dA \; , \qquad (8.1.2.6h)$$

onde A é uma $1 - forma$ denominada **Potencial Vetor** definida por:

$$A \; = \; A_x(x, \; y, \; z) \; dx \; + \; A_y(x, \; y, \; z) \; dy \; + \; A_z(x, \; y, \; z) \; dz \; , \qquad (8.1.2.6i)$$

introduzido por Maxwell, em 1865. Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão (8.1.2.6i) representa o **Potencial Vetor** $\vec{A}$:

$$\vec{A} \; = \; A_x \; \hat{x} \; + \; A_y \; \hat{y} \; + \; A_z \; \hat{z} \; = \; A_x \; \partial_x \; + \; A_y \; \partial_y \; + \; A_z \; \partial_z \; . \qquad (8.1.2.6j)$$

4.1. Aplicando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] à expressão (8.1.2.6h), teremos:

$$\star \, B \; = \; \star dA \; . \qquad (8.1.2.6k)$$

Usando-se a linguagem do Cálculo Vetorial e as expressões (8.1.2.6d,j), a expressão acima é escrita na forma:

$$\vec{B} \; = \; \nabla \times \vec{A} \; . \qquad (8.1.2.6\ell)$$

4.2. Em virtude do **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)] (dd = 0), para qualquer função ψ, a expressão (conhecida como **transformação 'gauge'**):

$$A' \; = \; A \; + \; d\psi \; , \qquad (8.1.2.6m)$$

satisfaz a expressão (8.1.2.6h), pois:

$$B \; = \; d(A' \; + \; d\psi) \; = \; dA' \; + \; dd\psi \; = \; dA' \; . \qquad (8.1.2.6n)$$

4.3. Desde que Maxwell apresentou o potencial vetor $\vec{A}$, em 1865, este foi considerado apenas como um artifício matemático, sem interpretação física. Contudo, em 1959, os físicos, o israelense Yaki Aharonov (1932-   ) e o norte-americano David Joseph Bohm (1917-1992), apresentaram uma interpretação física daquele vetor através da Eletrodinâmica Quântica, hoje conhecida como o **efeito Aharonov-Bohm**.

5. No estudo dos materiais magnéticos, observou-se experimentalmente que:

$$\vec{B} \; = \; \mu \, \vec{H} \; , \qquad (8.1.2.6o)$$

onde μ é a **permitividade magnética** do material magnético, que é, via de regra, um tensor de ordem 2. Contudo, se esse material for homogêneo e isotrópico, então $\mu =$ constante.

5.1. Aplicando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] à expressão (8.1.2.5a), teremos:

$$\star\, H \;=\; \star\,[H_x\; dx \;+\; H_y\; dy \;+\; H_z\; dz]\;,$$

$$\star\, H \;=\; H_x\; dy \wedge dz \;+\; H_y\; dz \wedge dx \;+\; H_z\; dx \wedge dy\;. \qquad (8.1.2.6p)$$

Para os materiais magnéticos homogêneos e isotrópicos, as expressões (8.1.2.6a,p) permitem escrever a expressão (8.1.2.6o), em termos de formas diferenciais, da seguinte maneira:

$$B \;=\; \bar{\mu} \star H\;, \qquad (8.1.2.6q)$$

onde $\bar{\mu}$ é a $0-forma$ correspondente à **permitividade magnética** μ.

6. Aplicando-se o **operador de Laplace-Beltrami** (ver Capítulo 4) à $1-forma\ A$ e considerando-se que $(\star)^2 \;=\; 1$ (no R^3), teremos:

$$\Delta_{L-B}\; A \;=\; -\;(d\;\delta \;+\; \delta\; d)\; A \;=\; -\;[d(-)(\star\; d\;\star)\; A \;+\; (\star d)\;(\star d\; A)]\;.$$

Usando-se as expressões (8.1.2.5d) e (8.1.2.6k,q), virá:

$$\Delta_{L-B}\; A \;=\; d\;(\star\; d\;\star)\; A \;-\; (\star d)\;(\star\; B) \;=\; d\;(\star\; d\;\star)\; A \;-\; (\star d)\;(\bar{\mu}\; H) \quad\rightarrow$$

$$\Delta_{L-B}\; A \;=\; d\;(\star\; d\;\star)\; A \;-\; \bar{\mu}\;(\star\; dH) \;=\; d\;(\star\; d\;\star)\; A \;-\; \bar{\mu} \star J\;.$$

Considerando-se o **'gauge' de Coulomb**:

$$(\star\; d\;\star)\; A \;=\; 0, \qquad (\nabla\;.\;\vec{A} \;=\; 0) \qquad (8.1.2.6r,s)$$

$$\Delta_{L-B}\; A \;=\; -\;\bar{\mu} \star J\;. \qquad (8.1.2.6t)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, teremos:

$$\Delta\;\vec{A} \;=\; -\;\mu\;\vec{J}\;. \qquad (8.1.2.6u)$$

7. Aplicando-se a divergência à expressão (8.1.2.6m) e usando-se o **'gauge' de Coulomb** - $\star\; d\;\star)\; A' \;=\; (\star\; d\;\star)\; A \;=\; 0$ - resultará:

$$(\star\; d\;\star)\; A' \;=\; (\star\; d\;\star)\; A \;+\; (\star\; d\;\star)\; d\psi \quad\rightarrow\quad (\star\; d\star\; d)\;\psi \;=\; 0\;. \qquad (8.1.2.6v)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, virá:

$$\Delta\ \psi\ =\ 0\ . \qquad (8.1.2.6x)$$

8.1.3 Formas Diferenciais da Eletrodinâmica

Definição 8.1.3.1. O **Campo-Força Eletromagnético** F é uma $2 - forma$ diferencial linear:

$$F\ =\ B\ +\ E \wedge dt\ , \qquad (8.1.3.1a)$$

tal que:

$$\int_{\partial C} F\ =\ \int_{\partial C} (B\ +\ E \wedge dt)\ =\ 0\ , \qquad (8.1.3.1b)$$

onde:

$$B\ =\ B_x(x,y,z,t) dy \wedge dz + B_y(x,y,z,t) dz \wedge dx\ +\ B_z(x,y,z,t) dx \wedge dy\ , \quad (8.1.3.1c)$$

$$E\ =\ E_x(x,\ y,\ z,\ t)\ dx\ +\ E_y(x,\ y,\ z,\ t)\ dy\ +\ E_z(x,\ y,\ z,\ t)\ dz\ , \qquad (8.1.3.1d)$$

e ∂C é a fronteira de um cilindro tridimensional C gerado pelo deslocamento de uma superfície cilíndrica bidimensional S entre dois instantes de tempo ($t \in [a,\ b]$).

Observações

1. Usando-se o **Teorema de Stokes Generalizado** [ver expressão (5.1.2.1)] na expressão (8.1.3.1b), teremos:

$$\int_{\partial C} F\ =\ \int_C dF\ =\ 0\ \ \rightarrow dF\ =\ d(B\ +\ E \wedge dt)\ =\ 0\ . \ (8.1.3.1e)$$

Usando-se a expressão (4.1.2.1b) e considerando-se que $B(x,\ y,\ z,\ t)$, a expressão (8.1.3.1e) ficará:

$$(dB\ +\ \dot{B} \wedge dt\ +\ dE \wedge dt\ -\ E \wedge ddt)\ =\ [dB\ +\ (\dot{B}\ +\ dE) \wedge dt]\ =\ 0\ , \qquad (8.1.3.1f)$$

onde o operador d significa uma diferencial com relação às variáveis espaciais $(x,\ y,\ z)$ e $\dot{B}$ é obtido da forma B substituindo-se seus coeficientes por suas derivadas em relação à variável t, isto é:

$$\dot{B}\ =\ \frac{\partial B}{\partial t}\ =\ \frac{\partial B_x}{\partial t}\ dy \wedge dz\ +\ \frac{\partial B_y}{\partial t}\ dz \wedge dx\ +\ \frac{\partial B_z}{\partial t}\ dx \wedge dy\ . \quad (8.1.3.1g)$$

2. Partindo-se da expressão (8.1.3.1f), podemos escrever que:

$$dB\ =\ 0\ , \qquad (8.1.3.1h)$$

$$dE \ + \ \partial_t \ B \ = \ dE \ + \ \dot{B} \ = \ 0 \ . \qquad (8.1.3.1i)$$

Considerando-se que $\star^2 \ = \ \star \star \ = \ 1$ (no R^3), $\star 0 \ = \ 0$ e $\star \ \partial_t \ = \ \partial_t \ \star$, as expressões (8.1.3.1h,i) tomam os seguintes aspectos:

$$\star d \ (\star\star) \ B \ = \ (\star d \star) \ (\star B) \ = \ 0 \ , \qquad (8.1.3.1j)$$

$$\star dE \ + \ \partial_t \ (\star B) \ = \ 0 \ . \qquad (8.1.3.1k)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, as expressões acima traduzem, respectivamente, a **Segunda Equação de Maxwell** (1873), para meios materiais (conforme vimos acima):

$$\nabla \ . \ \vec{B} \ = \ 0 \ , \qquad (8.1.3.1\ell)$$

e a **Terceira Equação de Maxwell** (1873):

$$\nabla \times \vec{E} \ + \ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ = \ 0 \ . \qquad (8.1.3.1m)$$

3. Integrando-se a expressão (8.1.3.1i) através de uma superfície S cuja fronteira vale $\partial S \ = \ C$, usando-se o **Teorema de Stokes Generalizado** [ver expressão (5.1.2.1)], teremos:

$$\int_S \ dE \ + \ \int_S \ \dot{B} \ = \ 0 \quad \rightarrow \quad \int_S \ dE \ + \ \int_S \ \partial_t \ B \ = \ 0 \ . \qquad (8.1.3.1n)$$

3.1. Considerando-se S fixa, a expressão acima ficará:

$$\int_C \ E \ + \ \partial_t \ \int_S \ B \ = \ 0 \ . \qquad (8.1.3.1o)$$

Usando-se as expressões (8.1.3.1c,d), virá:

$$\int_C (E_x dx + E_y dy + E_z dz) + \partial_t \int_S (B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx \ + \ B_z dx \wedge dy) \ = \ 0 \ . \quad (8.1.3.1p)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão acima traduz a célebre **Lei de Faraday** (1831):

$$\oint_C \ \vec{E} \ . \ d\vec{\ell} \ = \ - \ \frac{d}{dt} \ \int_S \ \vec{B} \ . \ d\vec{S} \ . \qquad (8.1.3.1q)$$

3.2. Considerando-se que a superfície S se move com uma velocidade $\vec{V}$, e usando-se as expressões (5.1.4.3b) e (8.1.3.1i), teremos:

$$\delta_t \ \int_S \ B \ = \ \int_S \ \partial_t \ B \ + \ \int_S \ i_V \ dB \ + \ \int_C \ i_V \ B \ = \ \int_S \ \partial_t \ B \ + \ \int_C \ i_V \ B \quad \rightarrow$$

$$\int_S \partial_t B \;=\; \delta_t \int_S B \;-\; \int_C i_V B \;.$$

Levando-se a expressão acima na expressão (8.1.3.1n), resultará:

$$\int_C E \;+\; \delta_t \int_S B \;-\; \int_C i_V B \;=\; 0 \quad \rightarrow$$

$$\delta_t \int_S B \;+\; \int_C (E \;-\; i_V B) \;=\; 0 \;. \qquad (8.1.3.1r)$$

Usando-se a expressão (5.1.3.3a) e a notação do Cálculo Vetorial, a expressão acima representa a **Lei da Indução de Faraday para um Circuito Móvel**:

$$\oint_C (\vec{E} \;-\; \vec{V} \times \vec{B}).\, d\vec{\ell} \;=\; -\,\tfrac{d}{dt} \int_S \vec{B} \;.\; d\vec{S} \;. \qquad (8.1.3.1s)$$

3.3. Chamando-se:

$$\vec{E'} \;=\; \vec{E} \;-\; \vec{V} \times \vec{B}, \qquad (8.1.3.1t)$$

a expressão (8.1.3.1s) tomará a seguinte forma:

$$\oint_C \vec{E'} \;.\; d\vec{\ell} \;=\; -\,\tfrac{d}{dt} \int_S \vec{B} \;.\; d\vec{S} \;,$$

que representa a **Lei de Faraday para um Circuito Fixo**, e o campo elétrico $\vec{E'}$ é relativo ao sistema de laboratório. Por outro lado, da expressão (8.1.3.1t), podemos escrever:

$$\vec{E} \;=\; \vec{E'} \;+\; \vec{V} \times \vec{B} \;. \qquad (8.1.3.1u)$$

A expressão acima nos mostra que quando um circuito está em movimento, o campo elétrico no laboratório ($\vec{E'}$) é transformado para ($\vec{E}$), que representa o campo elétrico relativo ao referencial móvel, isto é, preso ao circuito em movimento. É oportuno registrar que, multiplicando-se essa expressão pela carga q de uma partícula carregada (por exemplo, o elétron de condução do material do circuito), ela traduz a famosa **Fórmula de Lorentz**, apresentada pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902), em 1892:

$$\vec{F}_{em} \;=\; q\, \vec{E} \;=\; q\, (\vec{E'} \;+\; \vec{V} \times \vec{B'}) \;, \qquad (8.1.3.1v)$$

onde (’) indica o sistema de laboratório.

4. Usando-se o **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)] (dd = 0), a expressão (8.1.3.1d) permite escrever que:

$$F \;=\; d\Phi \;, \qquad (8.1.3.1v)$$

com Φ dado por:

$$\Phi \ = \ A \ - \ V \ dt \ , \qquad (8.1.3.1x)$$

onde A é a $1-forma$ definida pela expressão (8.1.2.6i) (**Potencial Vetor**) e V é a $0-forma$ definida pela expressão (8.1.2.1g) (**Potencial Elétrico**). As expressões acima e mais a expressão (8.1.3.1a) nos mostram que:

$$F = d\Phi = d(A - V dt) = dA + (-dV + \dot{A}) \wedge dt = B + E \wedge dt \ \ \rightarrow$$

$$B \ = \ dA, \qquad E \ = \ - \ dV \ + \ \dot{A} \ . \qquad (8.1.3.1y,w)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, as expressões acima são escritas da seguinte forma:

$$\vec{B} \ = \ \nabla \times \vec{A} \ , \qquad \vec{E} \ = \ - \ \nabla V \ - \ \tfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ . \qquad (8.1.3.1z',z")$$

Registre-se que a troca de sinal da $1 - forma$ A para o vetor $\vec{A}$ mostrada acima, decorre do fato de que essas equações são escritas na linguagem não-relativista. [Lembrar (ver Capítulo 1) que a assinatura **s** da métrica quadridimensional $(x, \ y, \ z, \ t)$ relativista vale: $s \ = \ 3 \ - \ 1 \ = \ 2$.]

Definição 8.1.3.2. O **Campo-Fonte Eletromagnético** G é uma $2-forma$ diferencial linear:

$$G \ = \ D \ - \ H \wedge dt \ , \qquad (8.1.3.2a)$$

tal que:

$$\textstyle\int_{\partial C} G \ = \ \int_{\partial C} (D \ - \ H \wedge dt) \ = \ \int_C j \ , \qquad (8.1.3.2b)$$

onde:

$$D \ = \ D_x(x, y, z, t) dy \wedge dz + D_y(x, y, z, t) dz \wedge dx + D_z(x, y, z, t) dx \wedge dy \ , \quad (8.1.3.2c)$$

$$H \ = \ H_x(x, \ y, \ z, \ t) \ dx \ + \ H_y(x, \ y, \ z, \ t) \ dy \ + \ H_z(x, \ y, \ z, \ t) \ dz \ , \qquad (8.1.3.2d)$$

$$j \ = \ Q \ - \ J \wedge dt \ , \qquad (8.1.3.2e)$$

$$Q \ = \ \rho(x, \ y, \ z, \ t) \ dx \wedge dy \wedge dz \ , \qquad (8.1.3.2f)$$

$$J \ = \ J_x(x, y, z, t) dy \wedge dz + J_y(x, y, z, t) dz \wedge dx + J_z(x, y, z, t) dx \wedge dy \ , \quad (8.1.3.2g)$$

e ∂C e C foram definidos anteriormente.

Observações

1. Usando-se o **Teorema de Stokes Generalizado** [ver expressão (5.1.2.1)] e a expressão (8.1.3.2e), a expressão (8.1.3.2b) será escrita na forma:

$$\int_{\partial C} G \;=\; \int_C dG \;=\; \int_C d(D \;-\; H \wedge dt) \;=\; \int_C j \;=\; \int_C (Q \;-\; J \wedge dt) \;\;\to$$

$$dG \;=\; j \;\;\to\;\; d(D \;-\; H \wedge dt) \;=\; Q \;-\; J \wedge dt \;. \qquad (8.1.3.2h)$$

Usando-se as expressões (4.1.2.1b), (8.1.3.2f) e considerando-se que $D(x,\, y,\, z,\, t)$, a expressão (8.1.3.2h) ficará:

$$[dD \;+\; (\dot{D} \;-\; dH) \wedge dt] \;=\; Q \;-\; J \wedge dt \;, \qquad (8.1.3.2i)$$

onde o operador d significa uma diferencial com relação às variáveis espaciais $(x,\; y,\; z)$ e $\dot{D}$ é obtido da forma D substituindo-se seus coeficientes por suas derivadas em relação à variável t, isto é:

$$\dot{D} \;=\; \frac{\partial D}{\partial t} \;=\; \frac{\partial D_x}{\partial t}\, dy \wedge dz \;+\; \frac{\partial D_y}{\partial t}\, dz \wedge dx \;+\; \frac{\partial D_z}{\partial t}\, dx \wedge dy \;. \quad (8.1.3.2j)$$

2. Partindo-se da expressão (8.1.3.2i), podemos escrever que:

$$dD \;=\; Q \;, \qquad (8.1.3.2k)$$

$$dH \;-\; \partial_t\, D \;=\; dH \;-\dot{D} \;=\; J \;. \qquad (8.1.3.2\ell)$$

Calculando-se a operação $(\star)$ [ver Definição (3.1.4.1)] nas expressões acima e considerando-se que $\star^2 \;=\; \star\,\star \;=\; 1$ (no R^3) e $\star\, \partial_t \;=\; \partial_t\, \star$, teremos:

$$\star d\; (\star\star)\; D \;=\; (\star d \star)\; (\star D) \;=\; \star\, Q \;, \qquad (8.1.3.2m)$$

$$\star dH \;-\; \partial_t\; (\star D) \;=\; \star\, J \;. \qquad (8.1.3.2n)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, as expressões acima traduzem, respectivamente, a **Primeira Equação de Maxwell** (1873) (conforme vimos acima):

$$\nabla\, .\, \vec{D} \;=\; \rho \;, \qquad (8.1.3.2o)$$

e a **Quarta Equação de Maxwell** (1873), para meios materiais:

$$\nabla \times \vec{H} \;-\; \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \;=\; \vec{J} \;. \qquad (8.1.3.2p)$$

3. Usando-se o **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)] (dd = 0), a expressão (8.1.3.2h) permite escrever que:

$$ddG \;=\; dj \;=\; d(Q \;-\; J \wedge dt) \;=\; 0 \;.$$

Usando-se a expressão (4.1.2.1b) e considerando-se que $Q = Q\ (x,\ y,\ z,\ t)$, a expressão acima ficará:

$$d(Q - J \wedge dt) = dQ + (\dot{Q} - dJ) \wedge dt = 0\ , \qquad (8.1.3.2q)$$

onde o operador d, no segundo membro da expressão acima, significa uma diferencial com relação às variáveis espaciais $(x,\ y,\ z)$ e $\dot{Q}$ é dado por:

$$\dot{Q} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dx \wedge dy \wedge dz\ . \qquad (8.1.3.2r)$$

Considerando-se a expressão (8.1.3.2f), teremos:

$$dQ = d\rho{\wedge}dx{\wedge}dy{\wedge}dz = (\tfrac{\partial\rho}{\partial x}dx + \tfrac{\partial\rho}{\partial y}dy + \tfrac{\partial\rho}{\partial z}dz){\wedge}dx{\wedge}dy{\wedge}dz = 0\ . \qquad (8.1.3.2s)$$

Desse modo, a expressão (8.1.3.2q) ficará:

$$d(Q - J \wedge dt) = (\dot{Q} - dJ) \wedge dt = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{Q} - dJ = 0\ . \qquad (8.1.3.2t)$$

Calculando-se a operação $(\star)$ da expressão acima e considerando-se que $\star^2 = \star\star = 1$ (no R^3) e $\star\ \partial_t = \partial_t\ \star$, virá:

$$\star d\star(\star J) - \partial_t(\star Q) = 0\ . \qquad (8.1.3.2u)$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão acima traduz a famosa **Equação da Continuidade**:

$$\nabla\ .\ \vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\ . \qquad (8.1.3.2v)$$

Registre-se que a troca de sinal da $3 - forma$ Q para a função ρ mostrada acima, decorre do fato de que essa equação é escrita na linguagem não-relativista. [Lembrar (ver Capítulo 1) que a assinatura s da métrica quadridimensional (x, y, z, t) relativista vale: $s = 3 - 1 = 2$.] O resultado visto acima nos mostra que a **Equação da Continuidade** é traduzida pela expressão:

$$dj = 0\ . \qquad (8.1.3.2x)$$

8.1.4 Forma Diferencial da Lei de Conservação da Eletrodinâmica

Definição 8.1.4.1. O **Fluxo-Energia do Campo Eletromagnético** S é uma $2 - forma$ diferencial linear:

$$S = E \wedge H = S_x\ dy \wedge dz + S_y\ dz \wedge dx + S_z\ dx \wedge dy\ , \qquad (8.1.4.1a)$$

onde E e H são dados, respectivamente, pelas expressões (8.1.3.1d) e (8.1.3.2d).

Observações

1. Calculando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão (8.1.4.1a), virá:

$$\star S \;=\; \star(E \wedge H) \;=\; \star[S_x\, dy \wedge dz \;+\; S_y\, dz \wedge dx \;+\; S_z\, dx \wedge dy] \quad \rightarrow$$

$$\star S \;=\; S_x\, dx \;+\; S_y\, dy \;+\; S_z\, dz \;=\; S_x\, \hat{x} \;+\; S_y\, \hat{y} \;+\; S_z\, \hat{z}\;.$$

Na linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão acima traduz o famoso **Vetor de Poynting** $\vec{S}$, proposto pelo físico inglês John Henry Poynting (1852-1914), em 1883:

$$\vec{S} \;=\; \vec{E} \;\times \vec{H}\;. \qquad (8.1.4.1b)$$

2. Calculando-se a diferencial exterior da expressão (8.1.4.1a) por intermédio da expressão (4.1.2.1b), resultará:

$$dS \;=\; d(E \wedge H) \;=\; dE \wedge H \;-\; E \wedge dH\;. \qquad (8.1.4.1c)$$

Usando-se as expressões (8.1.3.1i) e (8.1.3.2ℓ), a expressão (8.1.4.1c) ficará:

$$dS \;=\; -\; \dot{B} \wedge H \;-\; E \wedge (\dot{D} \;+\; J) \quad \rightarrow$$

$$\dot{B} \wedge H \;+\; E \wedge \dot{D} \;+\; E \wedge J \;+\; dS \;=\; 0\;. \qquad (8.1.4.1d)$$

Calculando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão acima e considerando-se que $\star^2 \;=\; \star\,\star \;=\; 1$ (no R^3) e que $\star\, \partial_t \;=\; \partial_t\, \star$, teremos:

$$\star[\star\,(\star\dot{B}) \wedge H] \;+\; \star\,[E \wedge \star\,(\star\dot{D})] \;+\; \star\,[E \wedge \star(\star J)] \;+\; (\star d \star)\star S \;=\; 0\;.$$

Usando-se a linguagem do Cálculo Vetorial, a expressão acima traduz o famoso **Teorema de Poynting** ou **Teorema da Conservação da Energia Eletromagnética**:

$$\dot{\vec{B}}\;.\;\vec{H} \;+\; \vec{E}\;.\;\dot{\vec{D}} \;+\; \vec{E}\;.\;\vec{J} \;+\; \nabla\;.\;\vec{S} \;=\; 0\;. \qquad (8.1.4.1e)$$

2.1. Usando-se as expressões (8.1.2.4h) e (8.1.2.6o) e considerando-se que ϵ e μ são constantes no tempo, a expressão (8.1.4.1e) ficará:

$$\tfrac{\partial u_{em}}{\partial t} \;+\; \vec{E}\;.\;\vec{J} \;+\; \nabla\;.\;\vec{S} \;=\; 0\;, \qquad (8.1.4.1f)$$

onde:

$$u_{em} \; = \; \frac{1}{2} \, (\epsilon \; \vec{E}^2 \; + \; \mu \; \vec{H}^2) \; = \; \frac{1}{2} \, (\vec{E} \; . \; \vec{D} + \; \vec{H} \; . \; \vec{B}) \; , \qquad (8.1.4.1g)$$

é a **densidade de energia do campo eletromagnético**, cuja $3 - forma$ correspondente é dada por:

$$\mu_{em} \; = \; \frac{1}{2} \, (E \wedge D \; + \; H \wedge B) \; , \qquad (8.1.4.1h)$$

pois:

$$\star\mu_{em} \; = \; \frac{1}{2} \, \Big(\star[E \wedge \star(\star D)] \; + \; \star[H \wedge \star(\star B)] \Big) \; \rightarrow \; u_{em} \; = \; \frac{1}{2} \, (\vec{E} \; . \; \vec{D} + \; \vec{H} \; . \; \vec{B}) \; .$$

2.2. Integrando-se a expressão (8.1.4.1d) sobre um volume V limitado por uma superfície A e usando-se o **Teorema de Stokes Generalizado** [ver expressão (5.1.2.1)], teremos:

$$\int_V (\dot{B} \wedge H \; + \; E \wedge \dot{D}) \; + \; \int_V \; E \wedge J \; + \; \oint_A \; S \; = \; 0 \; . \qquad (8.1.4.1i)$$

Usando-se a linguagem do Cálculo Vetorial e considerando-se que ϵ e μ são constantes no tempo, a expressão (8.1.4.1i) ficará:

$$\int_V \; \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \; dV \; + \; \int_V \vec{E} \; . \; \vec{J} \; dV \; = \; - \; \oint_A \; \vec{S} \; . \; d\vec{A} \; . \qquad (8.1.4.1j)$$

A expressão acima, que representa o Princípio da Conservação da Energia, é interpretada da seguinte forma: o primeiro termo do primeiro membro representa a taxa da energia armazenada no interior de um certo volume V, o segundo termo dá a taxa de dissipação de energia (**efeito Joule**) sobre as fontes (sem histerésis) no interior de V, e o segundo membro mede o fluxo da potência externa através da fronteira A que limita V.

8.1.5 Formas Diferenciais da Eletrodinâmica no Espaço-Tempo

Consideremos o espaço vetorial de Minkowski (4-dimensional) cujas coordenadas são: $(x^\mu) \; = \; (x^1, \; x^2, \; x^3, \; x^4) \; = \; (x, \; y, \; z, \; t) \; (c \; = \; 1)$, com a métrica (dual) definida por:

$$g(dx^\mu, \; dx^\nu) \; = \; g^{\mu\nu} \; = \; g_{\mu\nu} \; = \; diag(1, \; 1, \; 1, \; -1) \; , \qquad (8.1.5.0a)$$

e que funciona como um levantador ou abaixador de índices, ou seja:

$$g^{\mu\nu} \; V_\mu \; = \; V^\nu \quad e \quad g_{\mu\nu} \; V^\mu \; = \; V_\nu \; . \qquad (8.1.5.0b)$$

De acordo com a Definição (3.1.4.1) e as expressões obtidas no item (4.1.5), podemos escrever que:

$$\star(dx^i \wedge dt) \; = \; dx^j \wedge dx^k; \qquad \star(dx^j \wedge dx^k) \; = \; - \; dx^i \wedge dt \; , \qquad (8.1.5.0c,d)$$

onde $(i,\ j,\ k)$ deve ser tomado na ordem cíclica de $(x,\ y,\ z)$ ou de $(1,\ 2,\ 3)$.

Segundo vimos no Exercício 4.1.2.1, o operador Laplaciano Δ é dado por:

$$\Delta \;=\; -\,(d\,\delta \;+\; \delta\,d)\ ,$$

onde a **coderivada** δ é dada por:

$$\delta \;=\; (-)^{p\,+\,1} \star^{-\,1} d \star .$$

Para o espaço de Minkowski, o Exercício (3.1.4.1) nos mostra que:

$$\star^2 \;=\; 1 \quad \rightarrow \quad \star^{-\,1} \;=\; \star \qquad \rightarrow \qquad \delta \;=\; (-)^{p\,+\,1} \star d \star . \qquad \text{(8.1.5.0e,f,g)}$$

Nesse espaço, o operador Laplaciano, que é denominado **operador d'Alembertiano** $\Box$, é representado por:

$$\Box \;=\; -\,(d\,\delta \;+\; \delta\,d)\ , \qquad \text{(8.1.5.0h)}$$

com δ obtido pela expressão (8.1.5.0g).

Usando-se a expressão (4.1.2.1c) e o **Teorema Generalizado de Stokes** [ver expressão (5.1.2.1)], podemos escrever que:

$$\int_D d(\alpha \wedge \star\,\beta) \;=\; \int_D \left[d\,\alpha \wedge \star\,\beta \;+\; (-1)^p\,\alpha \wedge d \star \beta\right] \;=\; \int_{\partial D} \alpha \wedge \star\,\beta\ .$$

Considerando-se que α se anula na fronteira ∂D e as expressões (8.1.5.0e,g), teremos:

$$\int d\,\alpha \wedge \star\,\beta \;=\; \int \alpha \wedge \star\,\delta\,\beta\ . \qquad \text{(8.1.5.0i)}$$

Definição (8.1.5.1). - Tensor Campo-Força Eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Considerando-se o vácuo (e um sistema particular de unidades: $\epsilon_o = \mu_o = c = 1$) e partindo-se das expressões (8.1.2.4h,i), (8.1.2.6o,q) e (8.1.3.1a,c,d) podemos escrever que:

$$F \;=\; B \;+\; E \wedge dt \;=$$

$$=\; B_x dy{\wedge}dz + B_y dz{\wedge}dx + B_z dx{\wedge}dy + E_x dx{\wedge}dt + E_y dy{\wedge}dt + E_z\ dz{\wedge}\ dt \quad \rightarrow$$

$$F \;=\; H_x dy{\wedge}dz + H_y dz{\wedge}dx + H_z dx{\wedge}dy + E_x dx{\wedge}dt + E_y dy{\wedge}dt + E_z dz{\wedge}dt\ . \quad \text{(8.1.5.1a)}$$

Usando-se a **métrica de Minkowski** [proposta pelo matemático russo-alemão Hermann Minkowski (1864-1909), em 1908] relacionada acima, a expressão acima será escrita na forma:

$$F \;=\; \tfrac{1}{2}\,F_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu\ , \quad \text{(8.1.5.1b)}$$

onde o **Tensor Campo-Força Eletromagnético** $F\mu\nu$ é dado por:

$$F_{\mu\nu} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & H_z & -\,H_y & E_x \\ -\,H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -\,H_x & 0 & E_z \\ -\,E_x & -\,E_y & -\,E_z & 0 \end{bmatrix} . \qquad (8.1.5.1c)$$

Observações

1. **Equações de Maxwell no Espaço-Tempo: Grupo Homogêneo**. Esse grupo é dado pela expressão (8.1.3.1e):

$$dF \;=\; 0\;. \qquad (8.1.5.1d)$$

Usando-se a expressão (8.1.5.1b) e a Definição (4.1.2.1), a expressão acima ficará:

$$dF = \; d(\tfrac{1}{2}\; F_{\mu\nu}\; dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}) \;=\; \tfrac{1}{2}\; dF_{\mu\nu} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{3!}\; (\partial_{\lambda}\; F_{\mu\nu} \;+\; \partial_{\nu}\; F_{\lambda\mu} \;+\; \partial_{\mu}\; F_{\nu\lambda})\; dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \;=\; 0 \quad \rightarrow$$

$$\partial_{\lambda}\; F_{\mu\nu} \;+\; \partial_{\nu}\; F_{\lambda\mu} \;+\; \partial_{\mu}\; F_{\nu\lambda} \;=\; 0\;. \qquad (8.1.5.1e)$$

2. Usando-se o **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)] (dd = 0), a expressão (8.1.5.1d) permite escrever que (veja-se as expressões (8.1.3.1v,x)):

$$F \;=\; d\Phi\;, \qquad (8.1.5.1f)$$

com Φ dado por:

$$\Phi \;=\; A \;-\; V\; dt\;, \qquad (8.1.5.1g)$$

onde A é a $1-forma$ (tridimensional) definida pela expressão (8.1.2.6i) (**Potencial Vetor**) e V é a $0-forma$ definida pela expressão (8.1.2.1g) (**Potencial Elétrico**). Usando-se a **métrica de Minkowski** referida anteriormente, vamos redefinir a $1-forma$ Φ pela $1-forma$ A (quadridimensional):

$$\Phi \equiv A \;=\; A_{\mu}\; dx^{\mu}\;. \qquad (8.1.5.1h)$$

Usando-se a Definição (4.1.2.1) e as expressões (8.1.5.f,h), teremos:

$$F \;=\; dA \;=\; d(A_{\mu}\; dx^{\mu}) \;=\; \tfrac{1}{2}(\partial_{\mu}\; A_{\nu} \;-\; \partial_{\nu}\; A_{\mu})\; dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}\;. \qquad (8.1.5.1i)$$

Comparando-se as expressões (8.1.5.1b,i), virá:

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu \, A_\nu \;-\; \partial_\nu \, A_\mu \;. \qquad (8.1.5.1j)$$

É oportuno destacar que as Equações Homogêneas de Maxwell decorrem somente da identidade:

$$dF \;=\; ddA \;=\; 0 \;,$$

e não de um princípio variacional.

Definição (8.1.5.2). - **Tensor Campo-Fonte Eletromagnético** $G_{\mu\nu}$. Considerando-se o vácuo (e um sistema particular de unidades: $\epsilon_o \;=\; \mu_o \;=\; c \;=\; 1$) e partindo-se das expressões (8.1.2.4h,i), (8.1.2.6o,q) e (8.1.3.2a,c,d) podemos escrever que:

$$G \;=\; D \;-\; H \wedge dt \;=$$

$$= \; D_x dy{\wedge}dz + D_y dz{\wedge}dx + D_z dx{\wedge}dy - H_x dx{\wedge}dt - H_y dy{\wedge}dt - H_z \; dz{\wedge} \; dt \quad \rightarrow$$

$$G \;=\; E_x dy{\wedge}dz + E_y dz{\wedge}dx + E_z dx{\wedge}dy - H_x dx{\wedge}dt - H_y dy{\wedge}dt - H_z dz{\wedge}dt \;. \quad (8.1.5.2a)$$

Usando-se a **métrica de Minkowski** relacionada acima, a expressão acima será escrita na forma:

$$G \;=\; \tfrac{1}{2} \, G_{\mu\nu} \; dx^\mu \wedge dx^\nu \;, \quad (8.1.5.2b)$$

onde o **Tensor Campo-Fonte Eletromagnético** $G_{\mu\nu}$ é dado por:

$$G_{\mu\nu} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & E_z & -\,E_y & -\,H_x \\ -\,E_z & 0 & E_x & -\,H_y \\ E_y & -\,E_x & 0 & -\,H_z \\ H_x & H_y & H_z & 0 \end{bmatrix} . \qquad (8.1.5.2c)$$

Observações

1. **Equações de Maxwell no Espaço-Tempo: Grupo Não-Homogêneo**. Esse grupo é dado pela expressão (8.1.3.2h):

$$dG \;=\; j \qquad \equiv \qquad d\, j \;=\; 0 \;. \qquad (8.1.5.2d)$$

Usando-se as expressões (8.1.5.0c,d), calculemos a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] da expressão (8.1.5.1a):

$$\star \, F \;=\; H_x \star (dy \wedge dz) \;+\; H_y \star (dz \wedge dx) \;+\; H_z \star (dx \wedge dy) \;+$$

$$+ \; E_x \star (dx \wedge dt) \;+\; E_y \star (dy \wedge dt) \;+\; E_z \star (dz \wedge dt) \quad \rightarrow$$

$$\star F \;=\; -\; H_x\; dx \wedge dt \;-\; H_y\; dy \wedge dt \;-\; H_z\; dz \wedge dt \;+$$

$$+\; E_x\; dy \wedge dz \;+\; E_y\; dz \wedge dx \;+\; E_z\; dx \wedge dy\ .$$

Comparando-se a expressão acima com a expressão (8.1.3.2a), usando-se também as expressões (8.1.2.4h) e (8.1.5.2d) e considerando-se o vácuo (e, ainda, um sistema particular de unidades: $\epsilon_o \;=\; \mu_o \;=\; c \;=\; 1$), teremos:

$$G \;=\; \star\, F \quad \rightarrow \quad d\,(\star\, F) \;=\; j\ . \qquad (8.1.5.2e)$$

2. Vejamos como se escreve a expressão acima na forma tensorial. Inicialmente, calculemos $\star\, F$. Para isso, usemos as expressões (3.1.4.3) e (8.1.5.1b). Desse modo, resultará:

$$\star\; F \;=\; \star(\tfrac{1}{2}\; F_{\mu\nu}\; dx^\mu \wedge dx^\nu) \;=\; \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\; \eta_{\mu\nu\rho\sigma}\; F^{\mu\nu})\; dx^\rho \wedge dx^\sigma\ ,$$

com a seguinte convenção para o **tensor de Levi-Civita**: $\eta_{1234} \;=\; +\,1$. Agora, calculemos o diferencial da expressão acima por intermédio da Definição (4.1.2.1). Assim, teremos:

$$d(\star F) = d[\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\; \eta_{\mu\nu\rho\sigma}\; F^{\mu\nu})\; dx^\rho \wedge dx^\sigma] \;=\; \frac{1}{2\,\times\,2}\; \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\; dF^{\mu\nu} \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \;\;\rightarrow$$

$$d\;(\star\; F) \;=\; \tfrac{1}{3!}\; [\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\; \partial_\tau\; F^{\mu\tau}]\; dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma\ . \qquad (8.1.5.2f)$$

Considerando-se as expressões (8.1.3.2e,f,g) podemos escrever a $3 - forma\ j$, da seguinte maneira:

$$j \;=\; \tfrac{1}{3!}\; [\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\; j^\mu]\; dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma\ , \qquad (8.1.5.2g)$$

onde o $4 - vetor\ j^\mu \;=\; (\vec{J},\; -\,\rho)$. Portanto, comparando-se as expressões (8.1.5.2f,g), virá:

$$\partial_\tau\; F^{\mu\tau} \;=\; j^\mu\ . \qquad (8.1.5.2h)$$

3. Calculando-se a operação ($\star$) [ver Definição (3.1.4.1)] na expressão (8.1.5.2e), teremos:

$$\star\, d \star F \;=\; \star\, j\ .$$

Considerando-se que F é uma $2 - forma$ ($p \;=\; 2$) e usando-se as expressões (8.1.5.0e) e (8.1.5.1f,h) , a expressão acima ficará:

$$\delta\; F \;=\; \delta\; dA \;=\; \star\, j\ , \qquad (8.1.5.2i)$$

que representa uma equação de movimento para A. Escolhendo-se, por exemplo, o **'Gauge' de Lorentz**:

$$\delta\ A\ =\ 0\ , \qquad (8.1.5.2j)$$

e considerando-se as expressões (8.1.5.0h) e (8.1.5.2i) podemos escrever que:

$$(\delta\ d\ +\ d\ \delta)\ A\ =\ \star\ j \quad \rightarrow \quad \square\ A\ =\ -\star\ j\ . \qquad (8.1.5.2k)$$

Definição (8.1.5.3). - A **Ação Eletromagnética** $S[A]$ é uma $4-forma$ definida por:

$$S[A]\ =\ \int(-\ \tfrac{1}{2}\ F \wedge \star\ F\ -\ j \wedge A)\ , \qquad (8.1.5.3a)$$

onde F, A e j são dados, respectivamente, pelas expressões (8.1.5.1b), (8.1.5.1h) e (8.1.5.2g).

Observações

1. Seja a transformação 'gauge' dada por:

$$A'\ =\ A\ +\ d\ \Lambda\ .$$

Considerando-se as expressões (8.1.5.3a), (8.1.5.1i), e o **Lema de Poincaré** [ver expressão (4.1.2.1c)] (dd = 0), teremos:

$$S[A']\ =\ S[A\ +\ d\ \Lambda]\ =\ \int\ [-\ \tfrac{1}{2}\ d(A\ +\ d\ \Lambda) \wedge \star\ d(A\ +\ d\ \Lambda)\ -$$

$$-\ j \wedge (A\ +\ d\ \Lambda)]\ =\ S[A]\ -\int\ j \wedge d\ \Lambda\ . \qquad (8.1.5.3b)$$

Usando-se a expressão (4.1.2.1c) e o **Teorema Generalizado de Stokes** [ver expressão (5.1.2.1)], podemos escrever que:

$$\int_D\ d(j \wedge \Lambda)\ =\ \int_D\ [d\ j \wedge \Lambda\ +\ (-1)^p\ j \wedge d\ \Lambda]\ =\ \int_{\partial D}\ j \wedge \Lambda\ .$$

Considerando-se que j ($3-forma$) se anula na fronteira ∂D e a expressão (8.1.5.2d), teremos:

$$\int\ j \wedge d\ \Lambda\ =\ 0\ .$$

Levando-se a expressão acima na expressão (8.1.5.3b), resultará:

$$S[A\ +\ d\ \Lambda]\ =\ S[A]\ . \qquad (8.1.5.3c)$$

A expressão acima indica que a $S[A]$ é um **invariante 'gauge'**.

2. Considerando-se S como um funcional de **A**, estudemos então a sua variação para $A'\ =\ A\ +\ a$. Assim, usando-se as expressões (8.1.5.1i), (8.1.5.3a) e mantendo-se somente termos lineares em a, virá:

$$S[A\ + a]\ -\ S[A]\ =\ \int\ [-\ \tfrac{1}{2}\ d(A\ +\ a) \wedge \star\ d(A\ +\ a)\ -$$

$$-\ j \wedge (A\ +\ a)]\ -\ \int\ (-\ \tfrac{1}{2}\ dA \wedge \star\ dA\ -\ j \wedge A)\quad \to$$

$$S[A\ + a]\ -\ S[A] \sim\ -\ \int\ [\tfrac{1}{2}\ (dA \wedge \star\ da\ +\ da \wedge \star\ dA)\ +\ j \wedge a]\ .$$

Usando-se as expressões (3.1.5.2) e (8.1.5.0e,i), a expressão acima ficará:

$$S[A\ + a]\ -\ S[A]\ =\ \int\ a \wedge \star\ (-\ \delta\ dA\ +\ \star\ j)\ . \qquad (8.1.5.3d)$$

Considerando-se S estacionário, isto é:

$$S[A\ + a]\ -\ S[A]\ =\ 0$$

e sendo a qualquer, expressão (8.1.5.3d) dará:

$$\delta\ dA\ =\ \star\ j\ ,$$

que reproduz a expressão (8.1.5.2i).

Bibliografia - Parte 2

1. Abraham, M. and Becker, R. **The Classical Theory of Eectricity and Magnetism**. Blackie and Son Limited (1950).

2. Aharonov, Y. and Bohm, D. **Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory**, *Physical Review 115*: 485-491 (1959).

3. Aldrovandi, R. and Pereira, J. G. **An Introduction to Geometrical Physics**. World Scientific (1995).

4. Andrade, S. C. B. de **Introdução ao Eletromagnetismo I, II, III, IV**. *Departamento de Física*. PUC/RJ (1972).

5. Arnold, V. I. **Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica**. Editora Mir (1987).

6. Azevedo, J. C. A. **Eletrodinâmica Clássica**. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. e EDUSP (1981).

7. Bamberg, P. and Sternberg, S. **A Course in Mathematics for Students of Physics 1, 2**. Cambridge University Press (1992).

8. Bassalo, J. M. F. **Eletrodinâmica Clássica**. Editora Livraria da Física (2007).

9. Bassalo, J. M. F., Alencar, P. T. S., Nassar, A. B. e Cattani, M. S. D. **A Crônica do Potencial Vetor e do Potencial Quântico**. *MensAgitat 2*: 93-108 (2006).

10. Bassalo, J. M. F. e Cattani, M. S. D. **Teoria de Grupos para Físicos**. Editora Livraria da Física (2008).

11. Bassalo, J. M. F., Cattani, M. S. D. e Nassar, A. B. **Aspectos Contemporâneos da Física**. EDUFPA (2000).

12. Bassalo, J. M. F., Valente, Z. A. e Cattani, M. S. D. **Relações Termodinâmicas de Maxwell via Formas Diferenciais**, *Revista Brasileira de Ensino da Física 22*: 210-215 (2000).

13. Boyer, C. B. **A History of Mathematics**. John Wiley and Sons, Inc. (1968).

14. Bressoud, D. M. **Second Year Calculus**. Springer-Verlag (1991).

15. Burke, W. L. **Applied Differential Geometry**. Cambridge University Press, (1987).

16. Callen, H. B. **Thermodynamics**. John Wiley and Sons, Inc. (1960).

17. Campos, I. y De La Peña, L. *IN*: **Ciencias de la Materia: Génesis y Evolución de sus Conceptos Fundamentales**. Siglo Veintiuno Editores y Centro de Investigaciones Interdisciplinares en Ciencias y Humanidades (UNAM), (1998).

18. Cartan, E. **Les Systemes Differentials Exterieurs et Leurs Applications Geometriques**. Hermann (1945).

19. Deschamps, G. A. **Exterior Differential Forms**. *IN*: **Mathematics Applied to Physics**. Springer-Verlag (1970).

20. ————, **Electromagnetics and Differential Forms**, *Proceedings of the IEEE 69 (6)*: 676-696 (1981).

21. Einstein, A. **Zur Elektrodynamik bewegter Körper**, *Annalen der Physik 17 (4)*: 891-921 (1905).

22. Ferreira, G. F. L. **Uma mini-introdução à concisa àlgebra geométrica do eletromagnetismo**, *Revista Brasileira de Ensino de Física 28(4)*: 441-443 (2006).

23. Flanders, H. **Differential Forms with Applications to the Physical Sciences**. Academic Press (1963).

24. Frenkel, J. **Princípios de Eletrodinâmica Clássica**. EDUSP (1996).

25. Göckeler, M. and Schücker, T. **Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity**. Cambridge University Press (1995).

26. Goldstein, H. **Classical Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1959).

27. Hsu, H. P. **Vector Analysis**. Simon and Schuster, Inc. (1969).

28. Jackson, J. D. **Classical Electrodynamics**, John Wiley and Sons, Inc. (1999).

29. Jeans, J. **The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism**. Cambridge University Press (1966).

30. Kline, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. Oxford University Press (1972).

31. Landau, L. D. et Lifchitz, E. M. **Mécanique**. Éditions Mir (1973).

32. Leite Lopes, J. **Fundamentos da Eletrodinâmica Clássica**. Faculdade Nacional de Filosofia (1960).

33. Macedo, A. **Eletromagnetismo**. Editora Guanabara (1988).

34. Maxwell, J. C. **A Treatise on Electricity and Magnetism I, II**. Dover Publications, Inc. (1954).

35. Minkowski, H. **Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern**, *Nachrichten von der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*: 53-111 (1908).

36. Moreira, A. **Eletromagnetismo**. Almeida Neves Editores Ltda. (1971).

37. Moriyasu,K. **An Elementary Primer for Gauge Theory**. World Scientific (1983).

38. Nussenzveig, H. M. **Curso de Física Básica - 2**, Edgard Blücker Ltda. (1983).

39. Panofsky, W. K. H. and Phillips, M. **Classical Electricity and Magnetism**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1962).

40. Parrott, S. **Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry**. Springer-Verlag, N. Y. (1987).

41. Portis, A. M. **Electromagnetic Fields: Sources and Media**. John Wiley and Sons, Inc. (1978).

42. Pugh, E. M. and Pugh, E. W. **Principles of Electricity and Magnetism**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1962).

43. Ramo, S., Winnery, J. R. and Van Duzer, T. **Fields and Waves in Communications Electronics**. John Wiley and Sons, Inc. (1994).

44. Reitz, J. R., Milford, F. J. e Christy, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. Campus (1982).

45. Schleifer, N. **Differential Forms as a Basis for Vector Analysis, with Applications to Electrodynamics**, *American Journal of Physics 51 (12)*: 1139-1145 (1983).

46. Schutz, B. **Geometrical Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press (1995).

47. Slater, J. C. and Frank, N. **Electromagnetism**. McGraw-Hill Book Company, Inc. (1947).

48. Smythe, W. R. **Static and Dynamic Electricity**. McGraw-Hill Book Company, Inc. (1968).

49. Sommerfeld, A. **Electrodynamics**. Academic Press (1952).

50. Stratton, J. A. **Electromagnetic Theory**. McGraw-Hill Book Company, Inc. (1941).

51. Tiomno, J. **Eletromagnetismo I, II, III**, *Monografias de Física.* CBPF (1963).

52. Valente, Z. A. **Relações de Maxwell da Termodinâmica através de Formas Diferenciais**, *Tese de Mestrado.* DFUFPA (1999).

53. Videira, A. L. L. **A Geometria de Maxwell**, *IN*: **Perspectivas em Física Teórica: Anais do Simpósio de Física em Homenagem aos 70 Anos do Prof. Mário Schenberg**. IFUSP (1987).

54. Videira, A. L. L., Rocha Barros, A. L. e Fernandes, N. C. *Foundations of Physics 15*: 1247 (1985).

55. Von Westenholz, C. **Differential Forms in Mathematical Physics**. North-Holland Publishing Company (1986).

56. Wangness, R. K. **Electromagnetic Fields**. John Wiley and Sons, Inc. (1979).

57. Warnick, K. F., Selfridge, R. H. and Arnold, D. V. **Teaching Electromagnetic Field Theory Using Differential Forms**, *IEEE Transactions on Education 40*: 53-68 (1997).

58. Weinhold, F. **Metric Geometry of Equilibrium Thermodynamics**, *Journal of Chemical Physics 63*: 2479-2501 (1975).

59. Weber, E. **Electromagetic Theory: Static Fields and Their Mapping**. Dover Publications, Inc. (1965).

60. Whittaker, Sir E. T. **A History of the Theories of Aether and Electricity**. Thomas Nelson and Sons Ltd. (1953).

61. Zemansky, M. W. **Heat and Thermodynamics**. McGraw-Hill Book Company, Inc. (1957).

Índice Onomástico

J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

W

Z