

Instituto de Física

Universidade de São Paulo

Solitons Hidrodinâmicos de Korteweg-de Vries.

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 66.318
05315-970, São Paulo, SP, Brasil*

Mauro Sérgio Dorsa Cattani e José Maria Filardo Bassalo

**Publicação IF
1676 / 2013**

07/03/2013

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física
Cidade Universitária
Caixa Postal 66.318
05315-970 - São Paulo - Brasil

Solitons Hidrodinâmicos de Korteweg-de Vries.

M.Cattani¹ and J.M.F.Bassalo²

¹Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil
mcattani@if.usp.br

²Fundação Minerva, Belém, Pará, Brasil
jmfbassalo@gmail.com

Resumo. Esse artigo foi escrito para alunos de graduação e pós-graduação em Física e para alunos de Engenharia. Primeiramente mostramos como construir a equação diferencial não-linear de Korteweg e de Vries a partir das equações básicas da hidrodinâmica. Em seguida mostramos como resolvê-la obtendo as ondas denominadas de *solitons*.

I) Introdução.

Este é o primeiro de vários artigos sobre solitons que pretendemos escrever para alunos de graduação e pós-graduação em Física e de Engenharia. Desse modo, nesses artigos, analisaremos o problema de modo mais simples possível, mas, sem perder o rigor matemático quando tal for necessário. Visando apresentar somente os aspectos básicos do fenômeno não iremos fazer uma análise demasiadamente extensa ou detalhada do problema, tanto teoricamente como experimentalmente. Citaremos um número mínimo de referências onde podem ser encontradas formulações teóricas e comparações com resultados experimentais.

Os fenômenos não-lineares são muito comuns na natureza¹ e uma parte muito importante das pesquisas atuais em vários campos da Física. As **ondas solitárias**, também conhecidas como **solitons**, resultam da não linearidade de equações diferenciais que regem certos fenômenos físicos. Elas aparecem, por exemplo, em fluidos, mecânica, óptica, estado sólido e biofísica. Veremos aqui somente “**solitons hidrodinâmicos**”² que se propagam na superfície de fluidos sob a ação de um campo gravitacional. Faremos aqui somente o seguinte: deduziremos a equação diferencial não-linear de Korteweg-de Vries a partir das equações da hidrodinâmica e obteremos as suas soluções. Não nos preocuparemos em estudar as propriedades dos solitons hidrodinâmicos. Essas propriedades e muitos outros detalhes sobre tais solitons podem ser vistos no livro de Lonngren e Scott.²

O caso mais simples de onda é um “pulso”, ou seja, uma onda não-periódica. Um pulso é chamado de soliton quando ele *se propaga sem mudar de forma e sem diminuir a sua velocidade de propagação*. Em outras palavras, é um pulso que se movimenta de modo estável. Na Fig.1

vemos um pulso se propagando com velocidade c na superfície de um líquido num campo gravitacional g .

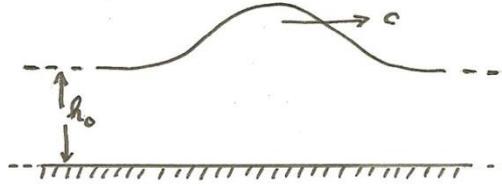


Figura 1. Pulso se propagando com velocidade c na superfície de um líquido submetido a um campo gravitacional g em um canal com profundidade h_0 .

A primeira observação detalhada de uma onda solitária foi feita³ em 1834 em um canal de navegação pelo engenheiro escocês John Scott Russel. Ela foi gerada pela proa de um barco que parou subitamente. Russel acompanhou a propagação do pulso, montado a cavalo, por uns 3 km ao longo do canal. Depois dessa distância perdeu o pulso de vista nas sinuosidades do canal. O pulso se movia, sem mudar de forma, com uma velocidade constante ≈ 14 km/h.

Durante muitos anos vários trabalhos foram feitos para explicar o fenômeno, mas, as equações sendo não-lineares eram muito difíceis de serem resolvidas. A solução analítica exata só foi obtida em 1895 por D.J.Korteweg e G.de Vries.⁴ Eles mostraram que o movimento era regido por uma equação diferencial, que ficou conhecida com o nome de equação de Korteweg-de Vries (KdV) contendo efeitos não-lineares e dispersivos. Eles resolveram exatamente a equação obtendo uma família de soluções estacionárias, sendo o **soliton** um caso particular.

Na Seção 2 deduziremos a equação de KdV usando as equações básicas da hidrodinâmica. Na Seção 3 resolveremos a equação de KdV mostrando que o soliton é uma das soluções particulares da mesma.

2)A Equação de Korteweg-de Vries.

A dedução da equação de KdV e a obtenção de suas soluções serão feitas seguindo um roteiro visto no artigo de Gratton e Delellis⁵ onde são usadas as equações básicas da Mecânica de Fluidos.⁶

Consideremos um canal horizontal raso contendo água que em repouso tem uma profundidade h_0 . Vamos assumir que um pulso está se movendo na superfície com um perfil mostrado na Fig.2. O sistema de coordenadas (x,y) se move junto com o perfil. A velocidade de propagação $\mathbf{v}(x,y)$ do fluido é dada por

$$\mathbf{v}(x,y) = u(x,y) \mathbf{i} + w(x,y) \mathbf{j} \quad (2.1).$$

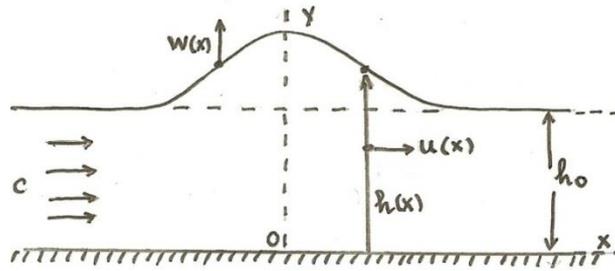


Figura 2. Pulso se propagando com velocidade c , $y_{\text{perfil}} = y_{\text{superfície}} = y_s(x,t) = h(x)$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x,t) = h_0$. No ponto x a velocidade do fluido ao longo do eixo x é $u(x,y)$ e $w(x,y)$ ao longo do eixo y . Longe da deformação $v(x,y) = c$ e nos pontos $y = 0$ temos $w(x,0) = 0$.

Supondo o fluido incompressível ($\rho = \text{densidade} = \text{constante}$) e irrotacional, temos $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ e $\text{rot}(\mathbf{v}) = 0$, respectivamente:⁶

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.3).$$

Da incompressibilidade do fluido decorre $-uh = ch_0$. Assim, numa aproximação de *ordem zero* para a velocidade u teríamos

$$u_0 \approx -ch_0/h(x) \quad (2.4).$$

vamos determinar u e w até a *ordem um*, ou seja,

$$u(x,y) \approx u_0(x,y) + u_1(x,y) + \dots \quad \text{e} \quad w(x,y) \approx w_0(x,y) + w_1(x,y) + \dots$$

De (2.3) e (2.4) tiramos $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0$ de onde vem $\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$, ou seja, $w_0 \neq w_0(x)$. Como $\lim_{|x| \rightarrow \infty} w_0(x,y) = 0$ resulta que $w_0(x,y) = 0$.

De (2.2) e (2.4) decorre, pondo $h'(x) = dh(x)/dx$:

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial u_0}{\partial x} = -ch_0 h'(x)/h^2(x).$$

Como $w_0(x) = 0$ integrando a equação acima verifica-se que

$$w(x,y) \approx w_1(x,y) \approx -c h_0 h'(x)y/h^2(x) \quad (2.5).$$

Como $u_0 \approx u_0(x) = -ch_0/h(x)$, $u = u_0 + u_1$ e $w = w_0 + w_1$, onde $w_0 \approx 0$, de (2.3) obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (u_0 + u_1)}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial (w_0 + w_1)}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x},$$

ou seja, $\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial w_1}{\partial x}$. Desse modo, levando em conta a (2.5),

$$\partial u_1 / \partial y = -c h_0 h'(x) y / h^2(x)$$

que integrando dá

$$u_1(x,y) \approx Ay^2/2 + k(x) \quad (2.6),$$

onde

$$A = -ch_0 \{h''(x)/h^2(x) - 2h'(x)/h^3(x)\}$$

Levando em conta a conservação do fluxo de massa devemos ter

$$-ch_0 = \int_0^{h(x)} u(x,y) dy = \int_0^{h(x)} \{u_0 + Ay^2 + k(x)\} dy ,$$

ou seja,

$$u_0 h(x) + Ah^3(x)/3 = k(x)h(x) = -ch_0$$

de onde tiramos

$$k(x) = -ch_0/h - u_0 - Ah^3(x)/3.$$

Usando esse fator $k(x)$ e (2.6) e levando em conta que $u = u_0 + u_1$ temos

$$u(x,y) = ch_0 \{1/h + A(y^2 - h^3/3)/2\} \quad (2.7).$$

Assumindo que o fluxo é estacionário e isentrópico⁶ considerando dois pontos quaisquer 1 e 2 ao longo do fluxo temos, de acordo com o teorema de Bernoulli,

$$v_1^2/2 + p_1/\rho + \phi_1 = v_2^2/2 + p_2/\rho + \phi_2 = \text{constante} \quad (2.8),$$

onde p é a pressão e $\phi = gy$ é o potencial gravitacional. Pegando o ponto 1, por exemplo, na superfície onde $p_1 = p_{\text{atm}}$ e longe da origem onde $v_1 = c$, a (2.8) fica escrita num ponto 2 genérico *também na superfície* onde $y = h(x)$:

$$c^2/2 + gy = (u^2 + w^2)/2 + gh(x) \quad (2.9).$$

Assim, diferenciando (2.9) em relação a x ,

$$0 = udu/dx + wdw/dx + gh'(x) \quad (2.10).$$

Vamos agora escrever $h(x) = h_0[1 + \epsilon(x)]$ e definir o parâmetro $\varphi = x/\ell$, onde $\ell = \text{“escala”} = \text{distância característica horizontal da perturbação da superfície do fluido, conforme mostramos na Figura 3. A altura } \xi(x) \text{ da perturbação é dada por } \xi(x) = h_0\epsilon(x).$

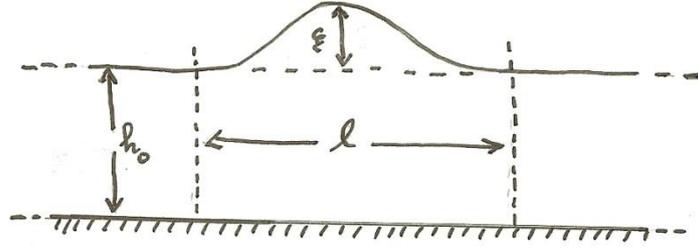


Figura 3. Altura $\xi(x,y)$ da deformação da superfície e o fator de escala ℓ .

Consequentemente, $h'(x) = h_0(d\epsilon/dx) = h_0(d\epsilon/d\phi)(d\phi/dx)$, ou seja,

$$h' = (h_0/\ell)(d\epsilon/d\ell) = \alpha(d\epsilon/d\ell) \quad (2.11),$$

onde $\alpha = (h_0/\ell)$.

Admitiremos que a curvatura da superfície seja “suave”, ou seja, que $\epsilon(x) \ll 1$, $\alpha = (h_0/\ell) \ll 1$ e que $\epsilon(x) \approx d\epsilon(x)/d\phi \approx \dots \approx d^n\epsilon(x)/d\phi^n$ ($n = 2, \dots$). Levando em conta essas aproximações ds (2.5) obtemos,

$$w(x,h) = -c\alpha(d\epsilon/d\phi) + (\text{termos de ordem superior em } \alpha, \epsilon) \quad (2.12),$$

e, assim

$$dw(x,h)/dx \approx -(c/\ell)\alpha(d^2\epsilon/d\phi^2). \quad (2.13).$$

Levando em conta somente termos até segunda ordem em α e $\epsilon(x)$ vemos que a função $u(x,y)$ definida por (2.7) fica escrita como

$$u(x,h) \approx -c\{1 - \epsilon + (\alpha^2/3)(d^2\epsilon/d\phi^2)\} \quad (2.14)$$

e que

$$du(x,h)/dx \approx -(c/\ell)\{1 - (d\epsilon/d\phi)(1 - 2\epsilon) + (\alpha^2/3)(d^3\epsilon/d\phi^3)\} \quad (2.15).$$

Substituindo (2.11)-(2.15) em (2.10) obtemos

$$(gh_0/c^2 - 1)(d\epsilon/d\phi) + 3\epsilon(d\epsilon/d\phi) + (\alpha^2/3)(d^3\epsilon/d\phi^3) = 0 \quad (2.16).$$

Como sabemos⁶ ondas superficiais em camadas líquidas pouco profundas, ou seja, $2\pi h_0/\lambda \rightarrow 0$, onde λ é o comprimento da onda, se propagam sem se dispersar com velocidade $c_0 = \sqrt{gh_0}$. Assim, assumindo que $\lambda \sim \ell$ teremos $gh_0/c^2 = (c_0/c)^2 \approx 1$. Desse modo fazendo

$$(c_0/c)^2 - 1 = (c_0^2 - c^2)/c^2 = (c_0 - c)(c_0 + c)/c^2 \approx 2c_0(c_0 - c)/c^2 \approx 2(1 - c/c_0).$$

Substituindo esse resultado na (2.16) decorre:

$$(1 - c/c_0 + 3\epsilon/2)(d\epsilon/d\phi) + (\alpha^2/6)(d^3\epsilon/d\phi^3) = 0 \quad (2.17).$$

A (2.17) foi obtida no referencial (x,y) que se move com velocidade c em relação ao referencial fixo no laboratório (x',y'). Como x' = x + ct, y' = y = h(x) = h(x' - ct) e φ' = x'/ℓ no laboratório a (2.17) fica escrita na forma

$$(c/c_0)(d\epsilon/d\tau) + (1 + 3\epsilon/2)(d\epsilon/d\phi') + (\alpha^2/6)(d^3\epsilon/d\phi'^3) = 0 \quad (2.18),$$

ou ainda, lembrando que $\alpha = h_0/\ell$, $c_0 = \sqrt{gh_0}$, $\tau = ct/\ell$ e $\epsilon = \xi(x)/h_0$,

$$\partial\xi/\partial t + \sqrt{gh_0}\{1 + (3\xi/2h_0)\}(\partial\xi/\partial x') + (h_0^2\sqrt{gh_0}/6)(\partial^3\xi/\partial x'^3) = 0 \quad (2.19),$$

que é uma outra forma de escrever a **equação de Kortweg-de Vries**.⁶

3) Soluções da Equação de KdV.

Mostraremos, seguindo ainda o artigo do Gratton e Delellis,⁵ como obter as soluções da Eq. de KdV. É importante lembrarmos que as soluções são obtidas levando em conta sempre que a amplitude perturbação da altura $\epsilon = \xi/h_0$ é muito pequena, ou seja, $\epsilon \ll 1$.

A primeira integração de (2.17) dá

$$(2/3)\alpha^2(d^2\epsilon/d\phi'^2) = A + 4(c/c_0 - 1)\epsilon - 3\epsilon^2 \quad (3.1),$$

onde A = constante. Integrando o segundo membro de (3.1) obtemos

$$V(\epsilon) = B - A\epsilon - 2(c/c_0 - 1)\epsilon^2 + \epsilon^3 \quad (3.2),$$

onde B = constante. Assim, a (3.1) fica escrita na forma

$$(2/3)\alpha^2(d^2\epsilon/d\phi'^2) = -dV/d\epsilon \quad (3.3).$$

A (3.2) é formalmente equivalente a equação que descreve o movimento de uma partícula em 1-dim submetida a um potencial V, interpretando ϵ como sendo a “coordenada” X do movimento, ϕ como “tempo” T e $(2/3)\alpha^2$ como a “massa” M da partícula. Nesse contexto a (3.3) torna-se,

$$Md^2X/dT^2 = -dV/dX \quad (3.4).$$

Com essa interpretação $(\alpha^2/3)(d\epsilon/d\phi')^2$ corresponde a “energia cinética” $K = (M/2)(dX/dT)^2$. Ainda com essa analogia, é evidente que (3.4) tem uma integral primeira, correspondendo à energia mecânica $E = K + V$ do movimento equivalente,

$$(\alpha^2/3)(d\epsilon/d\phi')^2 + V(\epsilon) = E = \text{constante} \quad (3.5),$$

ou seja, usando (3.2):

$$(\alpha^2/3) (d\epsilon/d\varphi)^2 + B - A\epsilon - 2(c/c_0 - 1)\epsilon^2 + \epsilon^3 = E \quad (3.6).$$

Como a constante B pode ser escolhida arbitrariamente é sempre possível, sem perda de generalidade, fazer $E = 0$. Assim, de (3.5) e (3.6) com $E = 0$, obtemos

$$V(\epsilon) = (\alpha^2/3) (d\epsilon/d\varphi)^2 = -B + A\epsilon + 2(c/c_0 - 1)\epsilon^2 - \epsilon^3 \quad (3.7),$$

cujas soluções dependem dos valores de A, B e c/c_0 . Assumindo ainda que a função $\epsilon(\varphi)$ seja tal que $d\epsilon(\varphi)/d\varphi = 0$ em $\epsilon = 0$ teremos $B = 0$. Neste caso escreveremos $V(\epsilon)$, pondo $B = 0$ em (3.7), na forma

$$V(\epsilon) = \epsilon (\epsilon - \epsilon_3)(\epsilon_1 - \epsilon) = \epsilon (\epsilon - a)(a - b - \epsilon) \quad (3.8),$$

onde , $\epsilon_1 = a - b = c/c_0 - 1 - \{(c/c_0 - 1)^2 + A\}^{1/2}$,
 $\epsilon_2 = 0$ e
 $\epsilon_3 = a = c/c_0 - \{(c/c_0 - 1)^2 + A\}^{1/2}$ (3.9)

onde $\epsilon_1, \epsilon_2 = 0$ e ϵ_3 são as raízes de $V(\epsilon) = 0$.

3.a) Onda solitária.

Assumindo que $A = 0$ em (3.9) verifica-se de ϵ_1 que $a = b$ e de ϵ_3 que

$$c = c_0(1 + a/2)^{1/2} \quad (3.10)$$

e de (3.7) e (3.8),

$$(\alpha^2/3) (d\epsilon/d\varphi)^2 = (a - \epsilon) \epsilon^2 \quad (3.11).$$

Fazendo $q = 3\varphi/\alpha^2$ a (3.11) fica dada por

$$(d\epsilon/dq)^2 = (a - \epsilon) \epsilon^2 \quad (3.12).$$

Integrando a (3.12), obtemos

$$q = -(2/\sqrt{a}) \operatorname{tgh}^{-1}[(1 - (\epsilon/a)^2)^{1/2}] \quad (3.13).$$

Lembrando que $\operatorname{tgh}^{-1}(z) = \pm \sinh^{-1}[1/(1 - z^2)^{1/2}]$, $\varphi = x/\ell$ e que $\alpha = h_0/\ell$ de (3.13) teremos

:

$$\epsilon = a \operatorname{sech}^2[(3a/4h_0^2)^{1/2}x] \quad (3.14).$$

Vemos de (3.12) que a perturbação ϵ da altura dada por $h = h_0(1 + \epsilon)$ cresce de 0 do ponto $\varphi = -\infty$ até o valor máximo a em $\varphi = 0$ e vai zero novamente

em $\varphi = +\infty$. Desse modo notamos que a amplitude máxima da deformação da superfície é $\epsilon_{\max} = a$. Assim, como $\xi(x,t) = h_0 \epsilon(x,t)$ o seu valor máximo será $\xi_0 = h_0$, conforme ilustramos na Figura 3. Portanto, no sistema de referência (x',y') fixo no “laboratório” teremos,⁶ a deformação $\xi(x', t)$,

$$\xi(x', t) = \xi_0 \operatorname{sech}^2[(3\xi_0/4h_0^3)^{1/2} (x' - ct)] \quad (3.15).$$

A (3.15) descreve uma “onda solitária” que se propaga sem se deformar com velocidade constante c e altura $h(x',t)$ dadas, respectivamente, por

$$c = \sqrt{gh_0 [1 + \xi_0/2h_0]} \quad (3.14)$$

e

$$h(x',t) = h_0 \{ 1 + (\xi_0/h_0) \operatorname{sech}^2[(3\xi_0/4h_0^3)^{1/2} (x' - ct)] \}$$

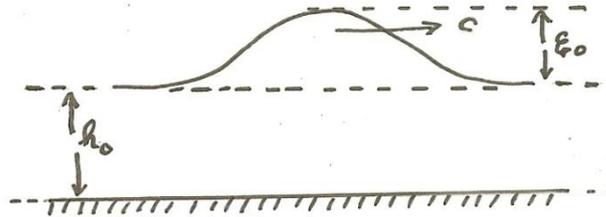


Figura 4. Soliton com altura $h(x',t) = h_0 + \xi(x',t)$ se propagando com velocidade c .

Um soliton hidrodinâmico (3.14) pode ser gerado, por exemplo, pela compressão ou descompressão do líquido por um pistão,⁷ como mostra a Figura 5.

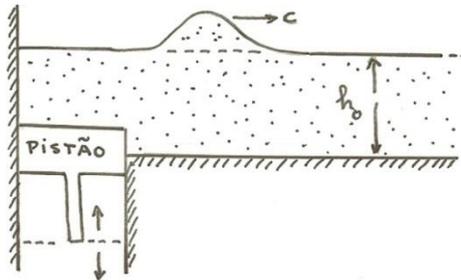


Figura 5. Modo de criar solitons com de compressões e descompressões do líquido.

Num litoral oceânico a compressão ou descompressão pode ser gerada, por exemplo, por um abaixamento ou levantamento de uma placa tectônica, ou ainda, pela compressão devida a queda de uma falésia sobre o oceano. Esses processos podem gerar um maremoto denominado, na mídia, de “tsunami”. Uma estimativa de sua velocidade de propagação, supondo que esteja se propagando onde $h_0 = 6 \text{ km}$, é $c \sim \sqrt{gh_0} = 250 \text{ m/s} \sim 900 \text{ km/h}$.

3.b) Ondas Cnoidais.

De acordo com Gratton e Delellis⁵ resolvendo a EKdV (2.17) além da onda solitária, vista acima, aparecem ondas periódicas cujo perfil pode ser expresso através de funções elípticas de Jacobi.⁸ Na Figura 6 ilustramos essas ondas que são dispersivas e se propagam com velocidade $c \approx c_0(1 - k^2 h_0^2/3)$ onde $k = 2\pi/\lambda$ e λ é o comprimento de onda dado por $\lambda = (2h_0/3) \int_0^a d\epsilon/[\epsilon(\epsilon - a)(a - b - \epsilon)]^{1/2}$.

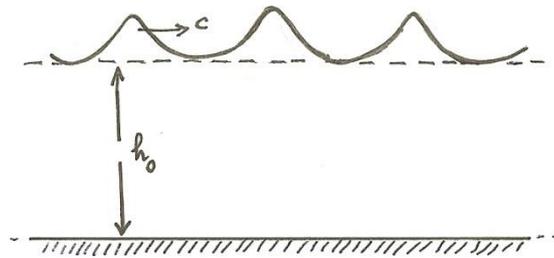


Figura 6. Ondas periódicas cnoidais se propagando no líquido.

Referências.

- 1) A.C.Scott. "Nonlinear Universe". Springer-Verlag (2007).
- 2) K. Lonngren and A.C.Scott. "Solitons in Action". Academic Press (1978).
- 3) A.Libchaber et G.Toulouse. La Recherche 17,1027 (1976).
- 4) D.J.Korteweg et G.de Vries. Phil.Mag. 39,422 (1895).
- 5) J.Gratton and R.Delellis. Am.J.Phys.57,683 (1989).
- 6) M.Cattani. "Elementos de Mecânica de Fluidos". Editora Edgard Blücher (1990).
- 7) M.J.Ablowitz and H.Segur. "Solitons and the Inverse Scattering Transform". Siam Philadelphia (1981).
- 8) K.Chandrasekharan. "Elliptic Functions". Springer-Verlag (1985)