



Instituto de Física Universidade de São Paulo

Correntes de Foucault: Aspectos Básicos

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 66.318
05315-970, São Paulo, SP, Brasil*

M.Cattani
e A.Vannucci

Publicação IF 1681
16/12/2013

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física
Cidade Universitária
Caixa Postal 66.318
05315-970 - São Paulo - Brasil

Correntes de Foucault: Aspectos Básicos

M.Cattani⁽¹⁾ e A.Vannucci⁽²⁾

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 05508-090, São Paulo, SP, Brasil

⁽¹⁾mcattani@if.usp.br ⁽²⁾vannucci@if.usp.br

Resumo

Este artigo foi escrito para mostrar aos alunos de graduação em Física e Engenharia como estimar as correntes de Foucault. Inicialmente fazemos uma breve análise das condições de contorno entre dois meios com diferentes parâmetros ε , μ e σ , que devem ser obedecidas tanto por campos eletromagnéticos estáticos quanto dependentes do tempo. Em seguida, usando as equações de Maxwell calculamos as “*correntes de Foucault*”, ou “*eddy currents*”, que surgem em um condutor plano metálico (paramagnético ou diamagnético) quando sobre ele é aplicado um campo magnético $\vec{B}(t)$ variável no tempo, gerado por um solenoide longo de seção reta circular.

Palavras-chave: *Foucault, Eddy Current, Freio Magnético, Levitação Magnética*

Abstract

This paper was written to show to undergraduate students of Physics and Engineering how to estimate the Foucault or eddy currents, in conductors. We begin with a brief discussion about the boundary conditions at the interface of two different medias with respective parameters ε , μ and σ , which must be satisfied by both static and time dependent electromagnetic fields. Afterwards, using the Maxwell equations we calculate the eddy currents which are induced in a plane metallic conductor (either paramagnetic or diamagnetic) when a time variable magnetic field $\vec{B}(t)$ produced by a long solenoid of circular cross section is applied upon it.

Keywords: *Foucault, Eddy Current, Magnetic Brake, Magnetic Levitation.*

I - Introdução.

Um tópico constantemente abordado em cursos de eletromagnetismo é o movimento de cargas no vácuo e em condutores sob a ação de campos elétrico $\vec{E}(t)$ e magnético $\vec{B}(t)$.^{1,6} No presente trabalho pretendemos mostrar como reagem as cargas livres existentes em um plano condutor, em resposta à atuação de um campo magnético que varia no tempo. Na Seção II estudamos as condições de contorno que devem ser obedecidas pelos campos eletromagnéticos, dependentes do tempo e estáticos, na

interface entre dois meios com diferentes parâmetros ϵ , μ e σ . Na Seção III calculamos, usando as equações de Maxwell, as correntes de Foucault que são criadas em um *bom condutor* plano (paramagnético ou diamagnético) quando sobre ele é aplicado um campo magnético $\vec{B}(t)$ variável no tempo. Na Seção IV calculamos a força exercida pelas correntes de Foucault sobre um solenoide que gera o campo magnético externo, além da potência dissipada pelas referidas correntes, por efeito Joule, no condutor. Como este artigo foi escrito visando os alunos de graduação, das áreas de física e engenharia, fizemos os cálculos de modo mais elementar possível. A obtenção exata dos campos magnéticos resultantes, interno e externo ao condutor, é extremamente difícil, de forma que neste artigo aproximações foram realizadas (dentro de um quadro simplificado, mas realístico) sem perder o devido rigor matemático.

II - Condições de Contorno para os Campos Elétrico e Magnético.

Como sabemos, na superfície de separação entre dois meios (1 e 2) os campos \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} e \vec{H} obedecem às seguintes condições gerais de contorno:^{3,7}

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \Sigma \quad (1.1)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\kappa} \quad (1.2)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.3)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.4)$$

onde \hat{n} é um versor normal à superfície de separação entre os meios (aqui considerados lineares, homogêneos e isotrópicos), $\vec{\kappa}$ a densidade superficial de corrente e Σ a densidade superficial de cargas existentes na interface entre os meios. A condutividade elétrica será indicada por σ . Lembremos também que $\vec{B} = \mu\vec{H}$ e $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$.

Inicialmente consideraremos que os campos \vec{E} e \vec{B} , de alguma forma, foram gerados em um meio não condutor (meio 2) e são aplicados sobre um material condutor (meio 1). Vamos assumir que a dependência temporal dos campos aplicados são da forma: $E(t) \approx e^{i\omega t}$ e $B(t) \approx e^{i\omega t}$; e o meio condutor pode ser diamagnético ou paramagnético [3-5]. Além disso, levaremos em conta que os campos conseguem penetrar no meio condutor somente até uma distância δ denominada “*skindepth*” (ou “*distância de penetração*”), dada por $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$ [3-7]. Pode-se mostrar que, devido à variação temporal dos campos, correntes aparecem no interior do condutor em uma camada com espessura da ordem de δ [3-5,7].

De modo geral, dependendo do valor de δ , assumem-se as seguintes aproximações [3-7]:

(a) $\vec{K} \neq 0$ quando $\delta = 0$ (*condutor perfeito*).

(b) $\vec{K} \approx 0$ quando $\delta \ll 1$ (*bom condutor e frequências altas*).

(c) $\vec{K} = 0$ quando $\delta \gg d$, onde d é a espessura da placa condutora.

Este último caso pode, inclusive, ser tratado usando a magnetostática.

II.1 - Condutor perfeito ($\delta = 0$).

Analisemos, inicialmente, o caso no qual o meio 2 é não-condutor, o meio 1 é um *condutor perfeito* ($\sigma \rightarrow \infty$ e $\delta \rightarrow 0$) e o versor \hat{n} , normal à superfície de separação entre ambos, é dirigido de 1 para 2. Convencionemos que os parâmetros do condutor serão indicados por um índice c e os do meio não-condutor não terão índices. As cargas no interior de um *condutor perfeito* serão, por hipótese, tão móveis que se deslocam instantaneamente em resposta às modificações dos campos, por mais rápidas que estas sejam, e criam sempre uma densidade superficial de cargas Σ as quais se acumulam na superfície do condutor de modo a anular o campo ($\vec{D}_c = 0$) no interior do *condutor perfeito*.

Assim, de (1.1) obtemos:

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = \Sigma \quad (1.5)$$

Analogamente, no caso de campos magnéticos externos variáveis no tempo, as cargas superficiais do condutor sempre se movem de forma a criar uma corrente superficial adequada \vec{K} , dada por:

$$\hat{n} \times \vec{H} = \vec{K} \quad (1.6)$$

que, por sua vez, gera um campo magnético $\vec{H}_c = 0$ no *interior* do *condutor perfeito*. Desse modo a equação (1.2) é substituída pela (1.6).

Quanto às outras duas condições de contorno (1.3) e (1.4), elas podem ser escritas na forma,

$$\hat{n} \cdot (\vec{B} - \vec{B}_c) = 0 \quad (1.7)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E} - \vec{E}_c) = 0 \quad (1.8)$$

onde, novamente, a ausência de índice indica o meio não condutor e o índice c se refere ao meio condutor.

Fazendo $\vec{B}_c = \vec{E}_c = 0$ em (1.7) e (1.8) verificamos que na superfície de um *condutor perfeito* temos $\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$ e $\hat{n} \times \vec{E} = 0$. Isto implica que poderia existir um campo magnético tangencial e um campo elétrico normal não nulos na parte externa do condutor. Assim, esse elétrico normal \vec{E}_\perp (perpendicular) e esse campo magnético tangencial \vec{H}_\parallel (paralelo) se anulariam abruptamente, tornando-se zero no interior do condutor.

II.2 - Bom condutor e campos com frequências ω relativamente altas.

Um determinado meio é considerado um *bom condutor* quando a sua condutividade for bastante elevada, $\sigma \gg \omega\epsilon$. Nessas condições, para frequências ω relativamente altas, teremos $\delta \rightarrow 0$. Ou seja, como os campos penetram pouco em um condutor, então o comportamento dos mesmos pode ser considerado aproximadamente análogo ao que temos no caso de um *condutor perfeito*. Para tratarmos este caso vamos usar um esquema de aproximações sucessivas.⁵ Admitamos, em uma primeira aproximação, que imediatamente do lado de fora do condutor exista apenas um campo elétrico normal \vec{E}_\perp e um campo magnético tangencial \vec{H}_\parallel , como no caso do *condutor perfeito*. Porém, assumindo que $\vec{K} = 0$ é possível considerar que existirá um campo não nulo no interior do condutor, já que de (1.2) resulta:

$$\hat{n} \times (\vec{H} - \vec{H}_c) \approx 0 \quad (1.9)$$

Desta última equação vemos que na *superfície* temos $\vec{H}_\parallel = \vec{H}_{c\parallel}$, ou seja, no condutor haverá um campo paralelo à superfície igual ao campo externo \vec{H}_\parallel . Da mesma forma, de (1.4) obtemos $\vec{B}_\perp = \vec{B}_{c\perp}$.

Para meios dia ou paramagnéticos, sendo $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ e levando em conta que $\vec{H}_\parallel = \vec{H}_{c\parallel}$, $\vec{B}_\perp = \vec{B}_{c\perp}$ e $\vec{B} = \mu\vec{H}$, podemos escrever que na superfície de separação $\vec{H} = \vec{H}_c$. Assumindo agora, numa primeira aproximação, que a componente normal do campo magnético $\vec{H}_\perp = 0$, teremos simplesmente $\vec{H}_c = \vec{H}_\parallel$.

Na Figura 1 mostramos os campos na vizinhança de um meio bom condutor, mas não perfeito.⁵

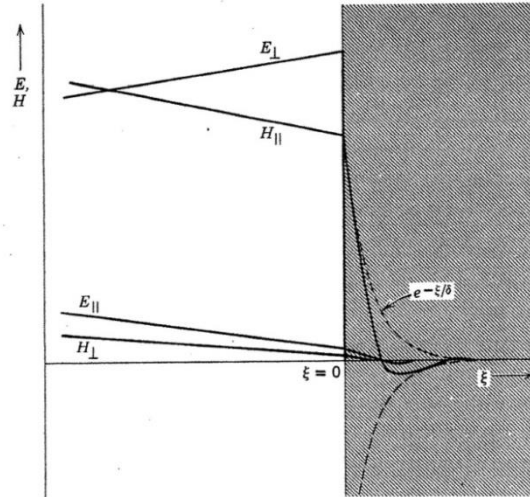


Figura 1: Campos na vizinhança da superfície de um bom condutor, mas não perfeito. Para $\xi > 0$, sendo ξ a coordenada espacial normal à superfície do condutor, as curvas tracejadas mostram a envoltória das oscilações amortecidas de \vec{H}_c .

II.3 - Campo magnético estático.

Quando o campo magnético aplicado é estático, não há corrente superficial de cargas. Assim, como $\vec{K} = 0$, as equações (1.2) e (1.3) são dadas por

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.10)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (1.11)$$

ou ainda, respectivamente, por

$$\hat{n} \cdot \vec{H}_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \hat{n} \cdot \vec{H}_1 \quad (1.12)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_2 = \hat{n} \times \vec{H}_1 \quad (1.13)$$

Ou seja, no caso estático sempre temos $\vec{H}_{2//} = \vec{H}_{1//}$ e, para os campos normais à superfície, fica valendo a relação: $\vec{H}_{2\perp} = (\mu_1 / \mu_2) \vec{H}_{1\perp}$. Portanto, como $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ para a grande maioria dos materiais, temos então:

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_1 \quad (1.14)$$

II.4 - Frequências baixas

Agora estamos em condições de analisar o caso correspondente às *frequências baixas* e, para isso, temos de levar em conta o “*skindepth*” $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$. Para o cobre (que é um bom condutor com $\sigma \sim 10^8$ MKS), por exemplo, quando $f = 60$ Hz temos $\delta = 0,85$ cm; e quando $f = 100$ MHz temos $\delta = 7,1 \times 10^{-4}$ cm. Assim, para *frequências muito baixas*, $f \leq 60$ Hz, se a placa de cobre tiver 2 mm de espessura os campos a atravessariam praticamente sem sofrer alteração. Desse modo poderíamos assumir, numa boa aproximação, uma situação *magnetostática* ($\omega \rightarrow 0$), pondo $\vec{\kappa} = 0$. Assim estaria satisfeita a condição de contorno (1.14), ou seja, $\vec{H}_2 = \vec{H}_1$. Da mesma forma, se o campo magnético externo for perpendicular à placa de cobre, ele continuará sendo perpendicular à superfície da placa no interior do condutor. Uma justificativa matemática desse fato pode ser vista no *Apêndice A*.

III - Correntes de Foucault.

Para uma descrição realística de movimentos de elétrons em condutores metálicos gerados por campos elétricos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnéticos $\vec{B}(\vec{r}, t)$ externos, temos de levar em conta que nos metais há uma densidade volumétrica $n = N/V$ muito grande de “elétrons de condução.”^{1,2} Eles não são exatamente “livres”; estão na verdade interagindo entre si e colidindo caoticamente com os átomos da rede. Para o caso de *bons condutores* metálicos (diamagnéticos ou paramagnéticos) tais como o *Au*, *Pt*, *Cu*, etc..., que possuem $n \sim 10^{28}$ elétrons/m³, o *caminho livre médio* dos elétrons é da ordem de $\ell \sim 10^{-7}$ m, enquanto que o tempo livre médio entre duas colisões é $\tau \sim 10^{-14}$ s. Como sabemos, o campo \vec{E} gera no meio condutor uma corrente $\vec{J} = ne\vec{v}_d$, onde \vec{v}_d é a velocidade de arrastamento ou de “*drift*”, dada por $\vec{v}_d = e\vec{E}\tau/m$ [1,2]. O campo \vec{B} , por outro lado, gera uma força $|\vec{F}_B|$ sobre os elétrons da ordem de $|\vec{F}_B| = e v_d B$. Comparando o módulo desta força magnética com o da força elétrica $F_e = eE$, temos $F_B/F_e \sim (e/m) \tau B$. Para valores usuais de B , ou seja $B \leq 1$ T, e levando em conta que $(e/m) = 1,76 \times 10^{11}$ C/Kg, verificamos que $F_B/F_e \sim 10^{-3}$. Ou seja, os efeitos do campo \vec{B} são muito pequenos comparados com os efeitos do campo \vec{E} . Desse modo, numa primeira aproximação, assumiremos que a corrente elétrica pode ser descrita simplesmente pela lei de Ohm $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, onde a condutividade σ pode ser estimada por $\sigma = ne^2\tau/m$.^{1,2}

Vamos então investigar a formação de correntes elétricas num condutor desprezando os efeitos da força magnética. Para descrever o sistema macroscópico podemos utilizar as equações de Maxwell ou a equação de transporte de Boltzmann.^{8,9}

Analisemos o caso em que um campo magnético variável no tempo $\vec{B}(x, y, z, t)$, gerado (no vácuo) por um solenóide circular de raio R , é aplicado sobre um condutor plano metálico, conforme vemos na Figura 2. A placa metálica condutora é “macroscópica”, ou seja, tem dimensões onde efeitos quânticos são desprezíveis, os quais surgem somente para sistemas com dimensões menores do que 10 nm.¹⁰

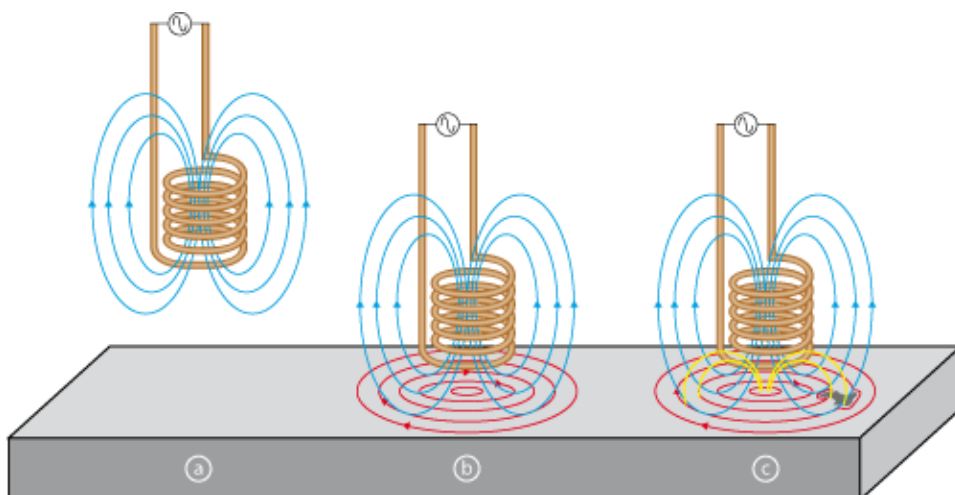


Figura 2: Ilustração mostrando a formação das correntes concêntricas de Foucault à medida que aproximamos o solenóide do condutor plano (vide a e b).¹¹ São também mostradas as linhas de campo magnético geradas pelas correntes de Foucault em oposição (vide c) ao campo externo aplicado, de acordo com a lei de Lenz.

Consideremos a placa estando num plano (x,y) , passando por $z = 0$ e com o eixo z coincidindo com o eixo de simetria do solenóide, apontando positivamente para o meio condutor.

Numa primeira aproximação, para variações temporais dos campos com frequências ω relativamente elevadas, vamos considerar o metal como sendo um “condutor perfeito”. Nessas condições, conforme a Seção 1, o campo magnético não penetra na placa; ele se torna nulo no interior do metal de forma a só haver um campo magnético tangente à superfície do metal. No Apêndice B mostramos como estimar a configuração do campo externo ao condutor usando o “método de imagens”, na suposição de um condutor perfeito. Numa segunda aproximação, assumiremos que a placa é um “bom condutor”, ou seja, que ela tem uma condutividade muito grande, porém finita.

Então, partindo das equações de Maxwell, mostraremos o mecanismo pelo qual podem aparecer campos magnéticos e elétricos dentro do condutor. As correntes elétricas $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}_c$, onde \vec{E}_c é o campo dentro do condutor, são ilustradas em vermelho na Fig. 2. Elas são as *correntes de Foucault*.

As equações de Maxwell relevantes para a resolução deste problema são [3-5,7]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} = \mu \sigma \vec{E} \quad (2.3)$$

lembrando que a equação 2.3 (sem a derivada temporal do campo elétrico) será sempre uma boa aproximação nas situações em que a variação temporal dos campos for pequena comparada com o tempo livre médio dos elétrons no condutor [7].

De (2.1) e (2.3) obtemos então:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Vamos assumir que o meio seja homogêneo com condutividade σ e permeabilidade magnética μ constantes. Lembrando que $\vec{B} = \mu \vec{H}$ e usando a equação (2.2) obtemos que $\nabla \cdot \vec{B} = \mu \nabla \cdot \vec{H} = 0$. Dessa maneira, como:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H};$$

e, levando-se em conta (2.2), temos:

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (2.5)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano.

Muito longe do meio condutor o campo $\vec{B}(x, y, z, t)$ do solenóide (considerado muito longo) é dado por $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0(x, y, z) e^{-i\omega t}$, de forma que:

$$\vec{B}_0(x, y, z) = \mu_0 \vec{H}_0(x, y, z)$$

Ao aproximarmos o solenóide da placa condutora o campo é modificado devido à interação com o material condutor onde são geradas as correntes de Foucault. Assumiremos que o campo externo alterado seja agora dado por $\vec{H}(x, y, z) e^{-i\omega t}$. No caso de um *bom condutor*, dia ou paramagnético, se considerarmos variações no tempo correspondentes a frequências ω *relativamente elevadas* (e levando em conta que $\mu \approx \mu_0$), vemos, de acordo com a Seção II.2, que nas *proximidades* da superfície da placa condutora são válidas as seguintes condições de contorno: (1) as componentes normais $H_{\perp} = H_z$ dos campos internos e externos ao condutor são nulas e (2) $\vec{H}_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel c}$, onde \vec{H}_{\parallel} e $\vec{H}_{\parallel c}$ são os campos paralelos à superfície de separação dos meios no exterior e no interior do condutor, respectivamente.

Devido à simetria plana do problema vamos assumir que o campo $\vec{H}_c(x, y, z, t)$ nas vizinhanças da superfície só deve depender de z e do tempo t , ou seja, $\vec{H}_c = \vec{H}_c(z, t)$ Assim, como $\nabla \cdot \vec{H}_c = 0$ temos: $\frac{\partial \vec{H}_{cz}(z, t)}{\partial z} = 0$.

Como $H_{cz}(z=0, t) = 0$ na superfície do condutor, a componente H_{cz} será também sempre nula em qualquer parte do condutor. Desta forma, considerando $\vec{H}_c(z, t) = \vec{H}_c(z) e^{-i\omega t}$ no condutor, temos de (2.5):

$$\frac{\partial^2 H_c(z)}{\partial z^2} + \kappa^2 H_c(z) = 0, \quad (2.6)$$

onde:

$$\kappa = \sqrt{i\mu_0\sigma\omega} = (1+i)\sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$$

Levando em conta que em $z = 0$ temos $\vec{H}_c(z=0) = \vec{H}_{//}$ obtemos, integrando (2.6):

$$\vec{H}_c(z, t) = \vec{H}_{//} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}; \quad (2.7)$$

onde a distância:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$$

corresponde à “*profundidade de penetração*” (“*skindepth*” ou “*penetration depth*”) do campo magnético externo dentro do condutor [3-5,7].

Levando em conta a equação (2.3) temos ainda:

$$\vec{E}_c \approx \frac{\nabla \times \vec{H}_c}{\sigma} \quad (2.8)$$

Considerando \hat{n} como sendo o versor normal à superfície externa do condutor, e lembrando que o operador rotacional pode, neste caso, ser escrito como $\nabla \times = -\hat{n} \frac{\partial}{\partial z}$, a

(2.8) fica:

$$\vec{E}_c = -\hat{n} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \vec{H}_c}{\partial z} \quad (2.9)$$

Como $\vec{H}_c = \vec{H}_\parallel e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$, a equação acima fica então sendo dada por:

$$\vec{E}_c \approx \frac{1}{\delta \sigma} (1-i) (\hat{n} \times \vec{H}_\parallel) e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)} \quad (2.10)$$

Pegando a parte real de (2.10) e levando em conta que $\hat{n} \times \vec{H}_\parallel = H_\parallel \hat{\phi}$, onde $\hat{\phi}$ é o versor tangente definido no sistema de coordenadas polares cilíndricas,⁵ temos:

$$\vec{E}_c \approx \frac{1}{\delta \sigma} H_\parallel e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \hat{\phi} \quad (2.11)$$

Na Figura 2 o versor $\hat{\phi}$ é tangente às circunferências desenhadas no plano paralelo à superfície do condutor.

Assim, as densidades de corrente de Foucault \vec{J}_c no plano condutor são dadas, usando (2.11), por

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}_c = \frac{1}{\delta} H_\parallel e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \hat{\phi} \quad (2.12)$$

de onde constata-se que as *correntes de Foucault* são induzidas no interior do condutor em uma camada metálica de espessura $\sim \delta$, e que elas circulam em torno do eixo de simetria do solenóide em circunferências concêntricas com raios ρ (vide Figura 2).

IV - Força do plano condutor sobre um solenóide

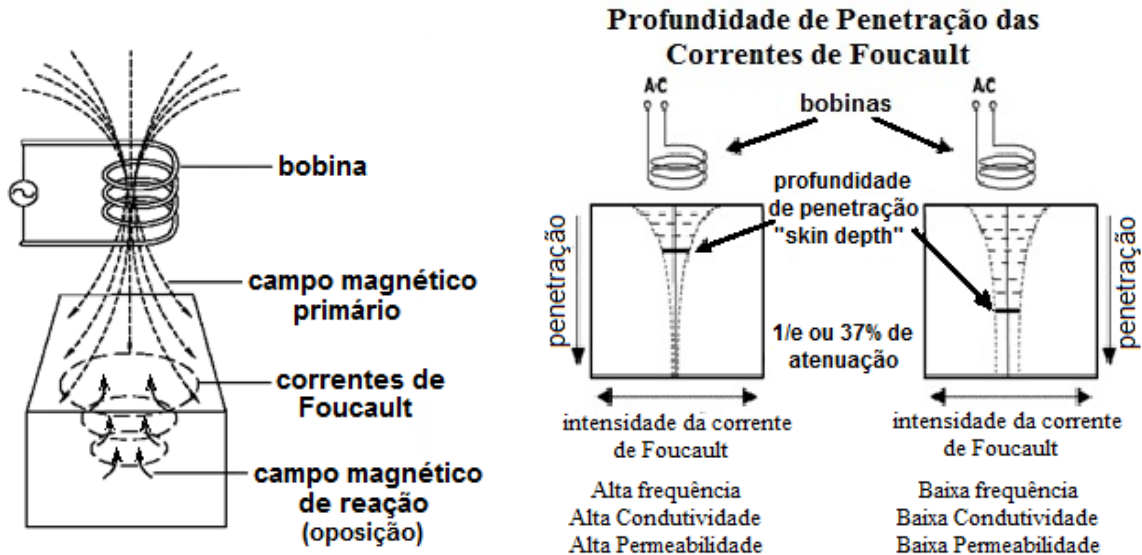
Supondo agora que a base do solenóide (vide Figura 2) esteja a uma altura h da superfície metálica, o campo \vec{H}_\parallel gerado pela corrente que circula por ele, num ponto ρ distante do eixo z de simetria do solenoide, será representado por $\vec{H}_\parallel(h, \rho)$. Assim, a (2.12) fica escrita como:

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}_c = \frac{1}{\delta} H_\parallel(h, \rho) e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \hat{\phi} \quad (2.13)$$

Como o cálculo exato de $\vec{H}_\parallel(h, \rho)$ é extremamente complicado, no *Apêndice C* estimamos $\vec{H}_\parallel(h, \rho)$ supondo que ele seja criado por uma espira muito distante de um “condutor perfeito”. Da equação (2.13) verifica-se que as *correntes de Foucault* são induzidas no interior do condutor, em uma camada metálica de espessura da ordem de δ ; e que elas circulam em torno do eixo de simetria do solenóide em circunferências concêntricas com raios ρ (vide Figura 2). As correntes $I(t)$ no solenóide e no condutor

circulam em sentidos opostos, segundo a lei de indução de Faraday, gerando uma força de repulsão F_z entre o solenóide e a placa condutora.

De (2.12) constata-se que as correntes de Foucault diminuem exponencialmente de intensidade à medida que os campos penetram no condutor, de acordo com o termo $\exp(-z/\delta)$. Isto é ilustrado nas Figuras 3 e 4 [11].



Figuras 3 e 4: Esquemas [11] mostrando a diminuição exponencial $\exp(-z/\delta)$ da intensidade da corrente de Foucault ou “eddy currents” à medida que a profundidade z cresce. A distância $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$ é chamada de “depth penetration”, ou simplesmente “skin depth”.³

A densidade de corrente \vec{J}_c está confinada numa região delgada de espessura δ sob a superfície do condutor, que é equivalente a uma corrente superficial eficaz \vec{k}_{ef} .

$$\vec{k}_{ef} = \int_0^{\infty} \vec{J}_c dz = \hat{n} \times \vec{H}_{||} \quad (2.14)$$

Vemos então que um bom condutor, para frequências altas, se comporta praticamente como um condutor perfeito, com a densidade superficial de corrente \vec{k} substituída por uma corrente superficial equivalente que está, na realidade, distribuída em uma camada muito delgada, mas finita, sob a superfície.^{12,13}

As correntes de Foucault causam dissipação de energia do campo eletromagnético, em forma de calor, pelo efeito Joule. O valor médio da potência Joule dissipada é dada por:

$$P = \int \langle \vec{J}_c \cdot \vec{E}_c \rangle dV = \int \sigma \langle \vec{E}_c^2 \rangle dV = \frac{1}{2\delta\sigma} |\vec{k}_{ef}|^2 \quad (2.15)$$

onde os símbolos lógicos $\langle \dots \rangle$ indicam uma média no tempo. A equação (2.15) mostra que a grandeza $1/\delta\sigma$ tem o papel de uma resistência superficial do meio condutor. A força F_z entre a placa e o solenóide pode ser estimada por [4,14]:

$$F_z = \frac{1}{2\mu} \int_{(S)} B_{//}^2(h, \rho) dS, \quad (2.16)$$

onde $B_{//}(h, \rho) = \mu H_{//}(h, \rho)$ e a integral é sobre uma superfície (S) da placa; lembrando ainda que a força por unidade de área é igual à densidade de energia magnética.

Mais detalhes sobre “*eddy currents*” e “*skindepth*” para condutores bons e pobres (não metais) podem ser vistos nas referências 14 e 15, além de aplicações práticas tais como, por exemplo, levitação magnética,¹⁵ frenagem e detecção de metais.¹¹⁻¹⁴

Agradecimento: Os autores agradecem a bibliotecária Virginia de Paiva por sua valiosa ajuda na obtenção de textos que foram utilizados como referência neste artigo.

Apêndice A - Aproximação Magnetostática.

Conforme a Seção II, e supondo $\mu \approx \mu_0$, no caso geral $\vec{H}(\vec{r}, t)$ obedece à equação (2.5):

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\mu_0 \sigma \omega \vec{H} = \frac{2i\vec{H}}{\delta^2}; \quad (A.1)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano. De acordo com a Seção II o campo magnético $\vec{H}_c(z, t)$ dentro da placa condutora é dado por:

$$\vec{H}_c(z, t) = \vec{H}_s e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}, \quad (A.2)$$

onde $\vec{H}_s = \vec{H}_s(z=0)$ é o campo na superfície da placa. De acordo com (A.2), quando a espessura da placa d for tal que $\delta \gg d$, o módulo do campo no interior da placa permanece praticamente constante. Isto ocorre, por exemplo, para campos estáticos quando $\omega \rightarrow 0$, pois $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2} \rightarrow \infty$. Nessas condições, o efeito da movimentação de cargas livres no condutor pode ser desprezado. Assim, *ab initio*, poderíamos assumir que $\vec{k} = 0$, que seria semelhante (pelo menos para as condições de contorno) a um caso magnetostático (vide Seção 1c).

Landau & Lifschitz chegam a essas mesmas conclusões colocando $\delta \rightarrow \infty$ em (A.1) e resolvendo a equação $\nabla^2 \vec{H} = 0$.⁶

Essa aproximação magnetostática é levada em conta em artigos onde correntes de Foucault são criadas em películas de metal líquido de *Ga In Sn*.^{16,17}

Apêndice B - Campo magnético gerado pelas correntes de Foucault.

As correntes de Foucault se distribuem sobre a placa condutora de acordo com equação (2.10), ou seja,

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}_c = \frac{1}{\delta} H_{//}(h, \rho) e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \hat{\phi} \quad (\text{B.1})$$

Como elas estão contidas numa profundidade δ e distribuídas em anéis infinitesimais concêntricos com raio ρ , os elementos de corrente $dI(\rho, t)$ nesses anéis (espiras de raio ρ) são dadas por (omitindo a parte temporal):

$$dI(h, \rho) \approx \vec{J}_c \delta d\rho = H_{//}(h, \rho) d\rho \quad (\text{B.2})$$

Esses elementos de correntes dI geram uma contribuição dH para o campo magnético no centro da espira externa, que está a uma altura h da placa, dado por:¹⁸

$$dH(h, \rho) = \frac{1}{2\pi} dI(h, \rho) \frac{\rho^2}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (\text{B.3})$$

Assim, levando em conta (B.3), no centro da espira externa há um campo $H(h)$ gerado pelas correntes de Foucault:

$$\begin{aligned} H(h) &= \int dH(h, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho^2}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} dI(h, \rho) = \\ &= \int H_{//}(h, \rho) \frac{\rho^2}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Como, de acordo com (C.4):

$$H_{//}(h, \rho) = \frac{m}{2\pi} \frac{h\rho}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}},$$

teremos, usando (B.4):

$$H(h) = \frac{m}{(2\pi)^2} h \int_0^\infty \rho^3 \frac{d\rho}{(h^2 + \rho^2)^4} = \frac{m}{(2\pi)^2} 24\pi h^3 \quad (\text{B.5})$$

Agora, como o campo $H(R)$ no centro da espira externa que tem raio R é $H(R) = (m/2\pi R^3)$,¹⁹ vemos que a razão $H(h)/H(R)$ é dada por:

$$\frac{H(h)}{H(R)} = \frac{R^3}{24\pi h^3} = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{R}{h} \right)^3 \quad (\text{B.6})$$

De acordo com (B.6), quando $h > R$ o campo devido às correntes de Foucault é muito pequeno comparado com o campo da bobina externa. Assim, o campo irá provocar na bobina apenas uma pequena alteração de sua corrente $I(t)$.

Apêndice C - Campo $H_{//}(h,\rho)$ criado por uma espira próxima de um condutor perfeito plano.

Consideremos uma espira isolada com N fios percorrida por uma corrente I . Se a área de sua seção reta é $\vec{A} = A\hat{k}$, o seu momento de dipolo magnético será $\vec{m} = NI\vec{A}$.^{1,6} O campo magnético gerado por essa espira num ponto P muito longe do seu centro é dado, numa “aproximação dipolar”, por:^{3,5}

$$H_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 m \cos \theta}{2\pi r^3} \quad (C.1)$$

$$H_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3}$$

Os campos são calculados em um sistema de coordenadas com origem do centro O da seção reta da espira, sendo \vec{r} a distância de P ao centro O . O momento de dipolo magnético \vec{m} está orientado ao longo do eixo z perpendicular ao plano da espira e o ângulo θ é formado entre \vec{r} e o eixo z . As equações (C.1) valem somente para distâncias muito maiores que o diâmetro da espira.

Supondo que essa espira esteja próxima de um *condutor perfeito* plano, estimaremos, numa primeira aproximação, o campo $H_{//}(h,\rho)$ usando o “método de imagens”. No caso geral, sendo I a corrente elétrica real no vácuo, a corrente I_{im} imagem criada num meio com permeabilidade magnética μ , pode ser expressa por:^{15,20}

$$I_{im} = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I \quad (C.2)$$

Assumindo que um *condutor perfeito* se assemelha a um material diamagnético perfeito, como um supercondutor [15], podemos fazer $\mu \rightarrow 0$ em (C.2) resultando $I_{im} = -I$. Obtemos assim o dipolo magnético imagem $\vec{m}_{im} = -\vec{m}$. Na figura (C1) vemos a configuração dos campos magnéticos dos dipolos \vec{m} e \vec{m}_{im} .

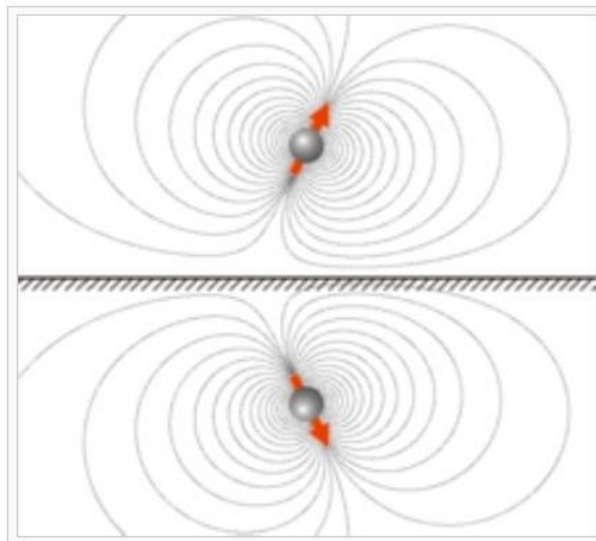


Figura (C1): Campos resultantes no interior e no exterior do “condutor perfeito” devido à superposição dos campos magnéticos dipolares¹⁸ criados pelos dipolos \vec{m} e \vec{m}_{im} .

Note na Figura (C1) o campo magnético normal à superfície $\vec{H}_\perp = 0$, na interface entre os dois meios. Levando em conta que no nosso caso \vec{m} está apontado perpendicularmente para baixo e o \vec{m}_{im} perpendicularmente para cima, o campo tangencial $H_{//}$ é dado, usando a equação (C.1), por

$$H_{//}(r, \theta) = 2H_\theta(r, \theta) \cos \theta = \frac{\mu_0 m \cos \theta \sin \theta}{2\pi r^3} \quad (C.3)$$

Suponhamos agora que a base do solenóide esteja a uma altura h da superfície metálica. Nesta situação, campo $H_{//}$ gerado por ele num ponto com coordenadas (h, ρ) na superfície do metal, onde ρ é a distância do ponto ao eixo de simetria do solenóide, é dado por

$$H_{//}(h, \rho) = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \frac{h \rho}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}}, \quad (C.4)$$

considerando em (C.3) que $r = (h^2 + \rho^2)^{1/2}$, $\sin \theta = \rho/r$ e $\cos \theta = h/r$.

REFERÊNCIAS

- 1) D. Halliday e R. Resnick. “Física 3”. Ed. Livros Técnicos e Científicos (1978).
- 2) R. A. Serway. “Física 3”, Ed. Livros Técnicos e Científicos (1992).
- 3) J. R. Reitz, F. J. Milfordand e R. W. Christy. “Fundamentos da Teoria Eletromagnética”, Ed. Campus (1982).
- 4) J. A. Stratton. “Electromagnetic Theory”, Ed. McGraw-Hill (1941).
- 5) J. D. Jackson. “Eletrodinâmica Clássica” Ed. Guanabara Dois (1983).
- 6) L. D. Landau and E. M. Lifchitz. “Théorie du Champ”. Éditions de La Paix (1963).
- 7) L. D. Landau, E. M. Lifchitz and L. P. Pitaevskii . “Electrodynamics of Continuous Media”, Ed. Elsevier (1984).
- 8) K. Huang. “Statistical Mechanics”. John Wiley & Sons (1963).
- 9) M. Cattani. <http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd1671.pdf> (09maio12). “Boltzmann Transport Equation and the Electrical and Thermal Conductivities of Metallic Bulks”.
- 10) M. Cattani. <http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd1672.pdf> (18maio12). “Electrical Conductivity of Very Thin Metallic Films”.
- 11) Google eddy currents: ver imagens.
- 12) http://en.wikipedia.org/wiki/Skin_effect#CITEREFHayt1981
- 13) http://en.wikipedia.org/wiki/Eddy_current
- 14) B. Novak and S. Pekarek. Rev. Sci. Instrum. **41** (1970) 369.
- 15) M. D. Simon, L. O. Heflinger and A. K. Geim. Am. J. Phys. **69** (2001) 702.
- 16) P. Hammond. “The Institution of Electrical Engineers”. Monograph No.379 (1960).
- 17) http://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_images
- 18) F. W. Sears. “Física, Tomo II”, Ed. Livro Técnico e Científico (1956).
- 19) J. Burguette and A .M. Miranda. Magnetohydrodynamics **48** (2012) 69.
- 20) Y. Fautrelle and A. D. Sneyd. Eur. J. Mech. B Fluids **24** (2005) 91.