Instituto de Física
Universidade de São Paulo

ELEMENTOS DE FÍSICA MATEMÁTICA vol.4

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 66.318
05315-970, São Paulo, SP, Brasil

José Maria Filardo Bassalo
Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Publicação IF E-Book 1685
15/05/2014

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física
Cidade Universitária
Caixa Postal 66.318
05315-970 - São Paulo - Brasil

ELEMENTOS DE FÍSICA MATEMÁTICA
(vol.4)

José Maria Filardo Bassalo
Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Teoria de Grupos e Cálculo Exterior

Os Autores (Bassalo e Cattani) dedicam esse livro, respectivamente, a :
Célia, Jô, Gisa, Lucas , Vitor, Ádria, Saulo, Anna-Beatriz e Matheus
e
Maria Luiza, Maria Beatriz, Marta e Olívia.

Prefácio

Este livro dá continuidade aos Volumes 1, 2 e 3 do estudo da aplicação da Matemática à Física, nos quais os autores trataram da solução das ***Equações Diferenciais Ordinárias*** (EDO). No caso de coeficientes constantes, no Volume 1, usamos os métodos usuais de solução: Método Geral (Operadores Diferenciais e Séries de Fröbenius) e Método das Transformadas (Laplace e Fourier). Nas EDO de coeficientes variáveis, lançamos mão de algumas Funções Especiais (Bessel, Hermite, Hipergeométricas, Laguerre e Legendre). O Volume 2 é composto de duas partes. Na **Parte I** são resolvidas algumas das ***Equações em Derivadas Parciais*** (EDP) de uso frequente em livros textos de Física: D´Alembert, Fourier, Laplace, Poisson e Schrödinger. Na solução dessas equações usamos, basicamente, as técnicas da Separação de Variáveis e da Função de Green. A **Parte II** trata do ***Cálculo das Variações***. Depois de apresentarmos um pequeno histórico de como surgiu esse Cálculo, estudamos a ***Equação de Euler-Lagrange*** em três situações: a) diversas variáveis dependentes; b) diversas variáveis independentes; c) diversas variáveis dependentes e independentes. Depois tratamos dos ***Multiplicadores de Lagrange***, para o estudo dos problemas variacionais com vínculos. O Volume 2 é concluído com o ***Método Variacional de Rayleigh-Ritz***. O Volume 3, também é composto de duas partes. Na **Parte I**, estudamos as ***Equações Integrais*** (EI). Iniciamos com uma Introdução Histórica seguida de uma apresentação dos diversos tipos de EI. Segue, então, as soluções da ***Equação de Volterra*** e da ***Equação de Fredholm***. A **Parte I** é finalizada com um Capítulo destinado a estudar as aplicações das EI a alguns tópicos da Física. A **Parte II** é dedicada ao estudo das ***Integrais de Trajetórias Não Relativísticas***. Depois de uma Introdução Histórica, apresentamos a definição de ***Propagador de Feynman*** (PF) e de ***Integrais de Trajetória*** seguido de seus respectivos cálculos. A **Parte II** é encerrada com o cálculo do PF de oito Equações de Schrödinger Não Lineares.

Como os Volumes 2 e 3, este Volume 4 também é composto de duas partes: **Parte I** - ***Teoria de Grupos*** e **Parte II** – ***Cálculo Exterior***. Para o bom entendimento de cada tema abordado neste Volume 4, ele é acompanhado da resolução de alguns exercícios. A ***Teoria de Grupos*** é dividida em 4 Capítulos. O Capítulo 1 é composto dos seguintes itens: a) Definições de Grupo; b) Alguns exemplos de Grupos importantes no Estudo da Física (p.e.: o de Rotações, o de Lorentz e o de Permutações); c) Demonstrações de teoremas importantes (p.e.: do rearranjamento e o de Laplace) e definições complementares relacionadas aos grupos exemplificados; d) Estudo do isomorfismo e homomorfismo entre grupos quaisquer. O Capítulo 2 tem 6 itens: a) Definições de Representações de Grupos; b) Teoremas Fundamentais das Representações com ênfase nas Representações Irredutíveis, seguido do Lema de Schur e do Teorema da Ortogonalidade e sua representação geométrica; c) Caráteres das Representações e sua interpretação geométrica; d) Produto direto de Representações; e) Bases de Representações; f) Séries e Coeficientes de Clebsch-Gordan. Os 6 itens do Capítulo 3, tratam, respectivamente, de: a) Definições de Grupos de Lie; b) Exemplos de Grupos de Lie [O(n); U(n); SU(n); SL(n); M(u); C(2)]; c) Transformações Infinitesimais e Parâmetros (Geradores) de Grupos; d) Constantes de Estrutura do Grupo de Lie; e) Álgebra de Lie e Operadores de Casimir; f) Teoremas Gerais das

Álgebras de Lie (Diagramas de Schouten). O Capítulo final (4) da **Parte I** trata da Teoria do Momento Angular e é composto de dois itens: a) Representações Irredutíveis do Grupo SU(2) (Spinoriais; Rotacionais; e Harmônicos Esféricos); b) Operador de Momento Angular: b1,2) Orbital ($\hat{L}$) (clássico e quântico); b3) Álgebra de $\hat{L}$; b4) Auto-funções e auto-valores de $\hat{L}^2$ e de $\hat{L}_z$; b5) Operador de Momento Angular Total: $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$; b6) Operadores "escada": $\hat{O}_{\pm}$; b7) Adição de Momentos Angulares; b8) Operadores Tensoriais e Teorema de Wigner-Eckart.

A **Parte – II**, que apresenta o ***Cálculo Exterior***, é composta de 5 Capítulos, que são complementados com Problemas Propostos. Assim, o Capítulo 5, que trata dos Espaços Vetoriais, é dividido em quatro itens: a) Definições e Propriedades; b) Espaços Duais; c) Espaços Vetoriais Euclidianos; d) Transformações ou Operadores Lineares. Os Tensores, objeto do Capítulo 6, tem também quatro itens: a) Produto Tensorial de Espaços Vetoriais; b) Álgebra Tensorial; c) Os Símbolos de Kronecker e o de Levi-Civita, seguido do estudo de Determinantes; d) Tensor de Levi-Civita. O Capítulo 7 estuda a Álgebra Exterior em seis itens: a) Álgebra Exterior de Ordem 2; b) Álgebra Exterior de Ordem p; c) Produto Exterior entre p-vetores; d) Dualidade; e) Produto Interno entre p-vetores. A Diferenciação Exterior é exposta no Capítulo 8, com seis itens: a) Formas Diferenciais; b) Diferenciação de Formas; c) Aplicações e Mudanças de Variáveis; d) Variedades e Sistemas de Coordenadas; e) Campos Vetoriais e Tensoriais Sobre Variedades; f) Variedades Riemannianas. Por fim, o Capítulo 9, que fecha o livro, desenvolve a Integração Exterior, em quatro itens: a) Integração de Formas; b) Teorema Generalizado de Stokes; c) Derivada de Lie; d) Derivada Convectiva e Integração sobre Domínio Móvel.

Registre-se que os **índices onomásticos**, as **aplicações** à Física e as **referências** dos dois temas tratados neste livro podem ser encontradas nos dois livros que os mesmos publicaram pela *Editora Livraria da Física* (ELF) - ***Teoria de Grupos*** e ***Cálculo Exterior*** , respectivamente, em 2008 e 2009 (também publicados como e-books encontrados, respectivamente, nos sítios http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd1661.pdf e http://publicasbi.if.usp.br/PDFs/pd1666.pdf).

Um dos autores (MSDC) agradece à Maria Luiza Mattos Cattani pela revisão gramatical e ortografia do texto.

Por fim, os autores agradecem a José Roberto Marinho, Editor da LF, pela permissão de usar os Capítulos contidos neste volume, e a Virgínia de Paiva, Bibliotecária do *Instituto de Física da Universidade São Paulo* (IF/USP) pela diagramação deste e-book.

Belém e São Paulo, 16 maio de 2014

José Maria Filardo Bassalo
Professor Titular Aposentado da UFPA e Membro da *Academia Paraense de Ciências*

Mauro Sérgio Dorsa Cattani
Professor Titular Aposentado do IF/USP e Membro Titular das *Academias Paulista e Paraense de Ciências*

ÍNDICE

Parte I – TEORIA DE GRUPOS

Parte II – CÁLCULO EXTERIOR

PARTE I

TEORIA DE GRUPOS

CAPÍTULO 1

Grupo[1]

1.1 Primeiras Definições

Definição 1.1.1 Um conjunto **G** consistindo dos elementos a, b, c,... $G = \{a,b,c,...\} \equiv \{G, *\}$
é chamado de **Grupo** para uma dada operação – (*), se seus elementos satisfazem às seguintes propriedades:

a) $\forall$ a,b ε G, a*b = c ε G (Condição de **Fechamento**);

b) $\forall$ a,b,c ε G, (a*b)*c = a*(b*c) (Condição de **Associatividade**;

c) $\exists$ e ε G, tal que: $\forall$ a ε G, a*e = e*a = a (**e** é chamado o **Elemento Unidade);**

d) $\forall$ a ε G, $\exists$ a^{-1} tal que: $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (**a^{-1}** é chamado o **Elemento Inverso** de a).

Definição 1.1.2 Se para $\forall$ a,b ε G tem-se a*b = b*a, diz-se que o grupo é **Comutativo** ou **Abeliano.**

Definição 1.1.3 O número de elementos de um grupo é chamado de **ordem** do grupo. Os grupos podem ser **finitos** ou **infinitos.**

Definição 1.1.4 Um grupo cujos elementos são caracterizados por um número de parâmetros contínuos é chamado **Grupo Contínuo**.

---

[1] Esta parte deste Capítulo foi ministrada pelo professor José Maria Filardo Bassalo no *Curso de Extensão*, realizado em 1985, na UFPA, sobre **Teoria de Grupo**.

Exercício 1.1.1 Mostre que:

a) Se a,b $\in$ G, então para as equações:

$a*x = b$ e $y*a = b$, tem-se, de maneira unívoca:

$x = a^{-1} * b$ e $y = b * a^{-1}$;

b) Se a,b $\in$ G, então:

$(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$;

c) Se a $\in$ G e n é inteiro, por definição, temos (Bak e Lichtenberg, 1967):

I) $a^n = \underbrace{a*a*a* \;....\; a*}_{n}$, se $n > 0$;

II) $a^n = e$, se $n = 0$;

III) $a^n = \underbrace{a^{-1}* \; a^{-1}* \; a^{-1}* \ldots a^{-1}*}_{n}$, se $n < 0$,

então:

$a^n * a^m = a^{n+m}$,

$(a^n)^m = a^{nm}$.

1.2 Exemplos de Grupos

a) **Conjunto** $\mathbb{Z}$. O conjunto dos inteiros positivos e negativos forma um grupo infinito Abeliano em relação à adição, pois:

I) a,b $\in \mathbb{Z}$; $a+b = b+a$;

II) a,b,c $\in \mathbb{Z}$; $(a+b) + c = a + (b+c)$;

III) $\exists\; e \equiv 0 \in \mathbb{Z}$; $0+a = a+0 = a$;

IV) $\forall\; a \in \mathbb{Z}$, $\exists a^{-1} \equiv -a$; $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

b) **Vetores no $\mathbf{R^3}$.** O conjunto de vetores no espaço tridimensional forma um grupo infinito Abeliano em relação à adição vetorial, pois:

I) $\vec{A}, \vec{B} \in R^3;\ (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \in R^3;$

II) $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in R^3;\ (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C});$

III) $\exists\ e \equiv \vec{0}\,;\ \vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}\,;$

IV) $\forall\ \vec{A} \in R^3, \exists\ (\vec{A})^{-1} \equiv -\vec{A}\,;\ \vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}\,.$

Exercício 1.2.1 a) Verifique as propriedades de grupo do conjunto de vetores no R^3 , usando para isso a regra do paralelogramo;

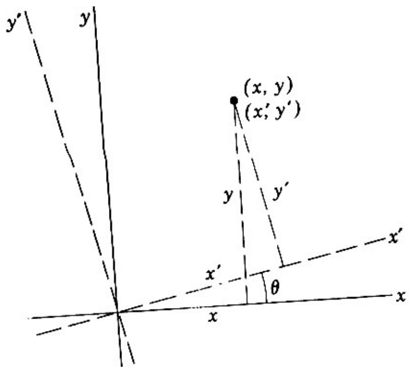
b) Mostre que o conjunto dos racionais (Q) forma um grupo Abeliano em relação à multiplicação.

---

c) **Grupo de Rotações**. O conjunto de rotações de um vetor no R^3 em torno do eixo dos **z** de um certo ângulo **θ**, forma um grupo contínuo Abeliano denotado por 0(2). Vejamos como.

Por definição, temos:

$$\vec{r}\,'(x', y') = R\ (\theta)\ \vec{r}(x, y)$$



A figura anterior nos mostra que:

$$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\theta$$

$$y' = -x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta \ .$$

As equações acima podem ser colocadas na forma matricial, da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Mostremos, agora, que $R(\theta)$ forma um grupo, com relação à seguinte operação definida por:

$$\vec{r}\,' = R(\theta_1)\,\vec{r}\,; \quad \vec{r}\,'' = R(\theta_2)\,\vec{r}\,'$$

$$\vec{r}\,'' = R(\theta_2)\,R(\theta_1)\,\vec{r} = R(\theta_2 + \theta_1)\,\vec{r} \,,$$

onde:

$$R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \mathrm{sen}\theta_2 \\ -\mathrm{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}; \ R(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \mathrm{sen}\theta_1 \\ -\mathrm{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} .$$

Usando a definição de produto de matrizes, virá:

$$R(\theta_2)\ R(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \mathrm{sen}\theta_2 \\ -\mathrm{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \mathrm{sen}\theta_1 \\ -\mathrm{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c:c} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \mathrm{sen}\theta_2\ \mathrm{sen}\theta_1 & \cos\theta_2\ \mathrm{sen}\theta_1 + \mathrm{sen}\theta_2\ \cos\theta_1 \\ \hdashline -\mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1 - \mathrm{sen}\theta_1\ \cos\theta_2 & \cos\theta_2\cos\theta_1 - \mathrm{sen}\theta_2\ \mathrm{sen}\theta_1 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2+\theta_1) & \operatorname{sen}(\theta_2+\theta_1) \\ -\operatorname{sen}(\theta_2+\theta_1) & \cos(\theta_2+\theta_1) \end{pmatrix} \equiv R(\theta_2+\theta_1)\,.$$

Portanto:

I) $R(\theta_2)\ R(\theta_1) = R\,(\theta_2 + \theta_1) = R(\theta)$.

A regra da multiplicação de matrizes nos permite facilmente mostrar que:

II) $R(\theta_3)\ [R(\theta_2)\, R(\theta_1)\,] = [R(\theta_3)\, R(\theta_2)]\, R(\theta_1)$;

III) $R(0)\, R(\theta) = R(\theta)\, R(0) = R(\theta)$;

IV) $R(-\theta)\ R(\theta) = R(\theta)\ R(-\theta)\,) = R(0)$,

onde:

$$R(0) = \begin{pmatrix} \cos 0^o & \operatorname{sen} 0^o \\ -\operatorname{sen} 0^o & \cos 0^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.2.2 Demonstre as propriedades II, III e IV do grupo 0 (2).

----

d) **Grupo de Lorentz**. As Transformações de Lorentz da Relatividade Restrita formam um grupo. Vejamos como. (Smirnov, 1970)

As Transformações de Lorentz a duas variáveis são definidas por:

$$x' = \gamma\,(x - vt)$$

$$t' = \gamma\,(t - \frac{vx}{c^2})\,,$$

onde:

$$\gamma = \left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{-1/2} = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} ; \quad \beta = \frac{v}{c} .$$

Usando a representação matricial, teremos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma\frac{v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \equiv L(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} .$$

Assim, sejam duas Transformações de Lorentz $L_1(v_1)$ e $L_2(v_2)$ e formemos o seu produto L_2L_1. Então:

$$L_2L_1 = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 c \\ -\frac{\gamma_2\beta_2}{c} & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 c \\ -\frac{\gamma_1\beta_1}{c} & \gamma_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_2\gamma_1 + \gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1 & -\gamma_2\gamma_1\beta_1 c \; - \; \gamma_2\gamma_1\beta_2 c \\ -\gamma_2\gamma_1\frac{\beta_2}{c} \quad -\gamma_2\gamma_1\frac{\beta_1}{c} & \gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1 + \; \gamma_2\gamma_1 \end{pmatrix} =$$

$$= [\gamma_2\gamma_1\,(1+\beta_2+\beta_1)] \,.\, \begin{pmatrix} 1 & -\frac{(\beta_1+\beta_2)c}{1+\beta_2\beta_1} \\ -\frac{\frac{1}{c}(\beta_1+\beta_2)}{1+\beta_2\beta_1} & 1 \end{pmatrix} .$$

Segundo a Relatividade Restrita, temos:

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \ ,$$

portanto:

$$\gamma_2\gamma_1\,(1+\beta_2\beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2{}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1{}^2}}\,(1+\beta_2\beta_1) =$$

$$= \frac{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}{\sqrt{(1-\frac{v_2{}^2}{c^2})\;(1-\frac{v_1{}^2}{c^2})}} = \frac{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{v_1{}^2}{c^2}+\frac{v_2{}^2}{c^2}-\frac{v_1{}^2 v_2{}^2}{c^4})}}$$

Por outro lado, notemos que:

$$\frac{v_3{}^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{(v_1{}^2 + v_2{}^2 + 2v_1v_2)}{(1+\frac{v_1{}^2 v_2{}^2}{c^4}+\frac{2v_1v_2}{c^2})} \rightarrow 1-\frac{v_3{}^2}{c^2} =$$

$$= 1-\frac{v_1{}^2+v_2{}^2+2v_1v_2}{c^2+\frac{v_1{}^2v_2{}^2}{c^2}+2v_1v_2} \rightarrow \sqrt{1-\frac{v_3{}^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-(\frac{v_1{}^2}{c^2}+\frac{v_2{}^2}{c^2}-\frac{v_1{}^2v_2{}^2}{c^4})}}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} \ .$$

Portanto:

$$\gamma_2\gamma_1\,(1+\beta_2+\beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_3{}^2}{c^2}}} = \gamma_3 \ .$$

Por outro lado, temos:

$$\frac{\beta_1 c + \beta_2 c}{1+\beta_2\beta_1} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} = v_3 \ ,$$

$$\frac{\dfrac{\beta_2}{c}+\dfrac{\beta_1}{c}}{1+\beta_2\beta_1} = \frac{\dfrac{1}{c^2}(v_2+v_1)}{1+\dfrac{v_2 v_1}{c^2}} = \frac{v_3}{c^2} \quad .$$

Por fim, temos:

$$L_2L_1 = \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & - & v_3 \\ -\dfrac{v_3}{c^2} & & 1 \end{pmatrix} = L_3 \ ,$$

ou seja:

I) $L_2L_1 = L_3; L_{1,} L_{2,} L_3 \, \varepsilon \, L(v)$.

A regra de multiplicação de matrizes permite mostrar que:

II) $L_1 \, (L_2L_3) = (L_1L_2) \, L_3$;

III) $L_0L = LL_0 = L$; $L_0 \equiv L\,(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

IV) $L^{-1}L = LL^{-1} = L_0$; $L^{-1} \equiv L\,(-v)$.

Exercício 1.2.3 a) Mostre as propriedades II, III e IV do Grupo de Lorentz;

b) Mostre que as Transformações de Lorentz espaciais formam um grupo. [Chame $\dfrac{v}{c} = \beta = \mathrm{th}\,(\alpha)$];

c) Mostre que o grupo de rotações 0(2) e o Grupo de Lorentz L(2) deixam invariantes, respectivamente:

$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ e $x'^2 - y'^2 = x^2 - y^2$;

d) Mostre que as Transformações de Poincaré formam um grupo.

----

e) Grupo de Permutações S_n (Smirnov, 1980)

Definição 1.2.1 Sejam **n** (> 1) objetos que numeramos com os números inteiros 1, 2 ,3, ... , n. Com eles podemos formar n! permutações. Seja uma delas:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ P_1 & P_2 & P_3 & \ldots & P_n \end{pmatrix} \equiv (P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_n).$$

Tal permutação significa que o elemento que está na posição ou ordem indicada por P_1, vai para a primeira posição, o que está na posição ou ordem indicada por P_2, vai para a segunda posição, e assim sucessivamente. Por exemplo, a permutação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ indica que a permutação que quer se realizar, é obtida da permutação fundamental (1 2 3), fazendo com que o seu terceiro elemento (3) ocupe a primeira posição, o seu primeiro (1) ocupe a segunda posição e o seu segundo elemento (2) ocupe a terceira posição. Vejamos um segundo exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} (a\ b\ c\ d\ e) = (e\ a\ b\ c\ d).$$

Definição 1.2.2 Chama-se de **Permutação Inversa P^{-1}** a operação que significa fazer com que o primeiro elemento da permutação fundamental ocupe a ordem ou posição indicada por P_1, o segundo elemento da permutação fundamental ocupe a ordem ou a posição indicada por P_2, e assim sucessivamente. Portanto:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; (a\,b\,c) \to P^{-1} = (b\,c\,a).$$

Da definição acima, é fácil mostrar que $\left(P^{-1}\right)^{-1} = P$.

Definição 1.2.3 Chama-se **Produto de Permutações** P_1P_2 à permutação obtida primeiro aplicando P_2 e depois P_1. Assim, se:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

então:

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vejamos um outro exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} (a\,b\,c\,d\,e) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} (e\,a\,b\,c\,d) = (a\,c\,e\,d\,b).$$

Por outro lado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} (a\ b\ c\ d\ e) = (a\ c\ e\ d\ b)$$, então:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.2.4 Chama-se de **Permutação Unitária** E, a permutação na qual cada elemento é substituído por ele próprio. Ela é representada por:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.2.1 Mostre que o conjunto de permutações S_3 forma um grupo.

O grupo S_3 é formado pelos seguintes elementos:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Propriedades de Fechamento:

$$P_1P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = E;$$

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P_4 ;$$

$$P_1P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_5 ;$$

$$P_1P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P_2;$$

$$P_1P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P_3.$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$P_2P_1 = P_5$; $P_2P_2 = E$; $P_2P_3 = P_4$; $P_2P_4 = P_3$; $P_2P_5 = P_1$; $P_3P_1 = P_4$;

$P_3P_2 = P_5$; $P_3P_3 = E$; $P_3P_4 = P_1$; $P_3P_5 = P_2$; $P_4P_1 = P_3$; $P_4P_2 = P_1$;

$P_4P_3 = P_2$; $P_4P_4 = P_5$; $P_4P_5 = E$; $P_5P_1 = P_2$; $P_5P_2 = P_3$; $P_5P_3 = P_1$;

$$P_5P_4 = E \text{ e } P_5P_5 = P_4.$$

b) Propriedade Associativa:

$$(P_1P_2)\, P_3 = P_1\, (P_2P_3).$$

Em vista da propriedade anterior, temos:

$$(P_1P_2)\, P_3 = P_4P_3 = P_2,$$

$$P_1\, (P_2P_3) = P_1P_4 = P_2.$$

c) Elemento Unidade:

$$P_iE = EP_i = P_i\,. \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Assim, por exemplo:

$$P_1E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = P_1\,,$$

$$EP_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = P_1\,.$$

d) Elemento Inverso:

$$P_i^{-1}P_i = P_iP_i^{-1} = E. \quad \left(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\right).$$

Assim, por exemplo, usando a Definição 1.2.2, virá:

$$P_4^{-1}\,P_4 = P_4P_4^{-1} = E\,,$$

$$P_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_5\,.$$

Então, em vista do resultado anterior, temos:

$$P_4^{-1}\ P_4 = P_5P_4 = E;\ P_4P_4^{-1} = P_4P_5 = E\,.$$

As propriedades a, b, c e d, permitem escrever a seguinte tabela de multiplicação para o grupo S_3.

	E	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
E	E	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	E	P_4	P_5	P_2	P_3
P_2	P_2	P_5	E	P_4	P_3	P_1

P_3	P_3	P_4	P_5	E	P_1	P_2
P_4	P_4	P_3	P_1	P_2	P_5	E
P_5	P_5	P_2	P_3	P_1	E	P_4

Exercício 1.2.4 a) Termine a demonstração das propriedades do grupo S_3;

b) A tabela de multiplicação do grupo S_3 mostra que ele é não-comutativo. Demonstre a afirmativa;

c) Mostre que o conjunto de permutações S_4 forma um grupo não-comutativo.

Vimos que dado um conjunto de **n** (> 1) elementos podemos formar o grupo de permutações S_n. Contudo, as permutações para obter cada elemento (a partir do elemento anterior) desse grupo podem ser um número par ou número ímpar. O grupo formado então de todas as permutações **pares** dos números 1,2,..., n é chamado de **Grupo Alternado** ou **Alternativo A_n** cuja ordem (número de elementos) é n!/2 (Jansen e Boon, 1967).

Por exemplo, para os números 1,2,3, as permutações formadas de deslocamentos **pares** e **ímpares**, são:

1,2,3	1,3,2 1,2,3	2,3,1 2,1,3 1,2,3	2,1,3 1,2,3	3,1,2 1,3,2 1,2,3	3,2,1 1,2,3
par(0)	ímpar(1)	par(2)	ímpar(1)	par(2)	ímpar(1)

Dado um elemento do grupo de permutações $\mathbf{S_n}$, podemos formar um conjunto de permutações que se compõe de subconjuntos constituídos por **Permutações Circulares** ou **Cíclicas**.

Assim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1,3) \quad (2,4,5) = (2,4,5) \quad (1,3).$$

Pois, como vemos, na permutação considerada existem duas permutações cíclicas entre os números 1 e 3, e 2,4 e 5 respectivamente, ou seja: (1,3) e (2,4,5) → (5,2,4) → (4,5,2). Vejamos outros exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1,3,4) \quad (2,5,6) = (2,5,6) \quad (1,3,4),$$

pois: (1,3,4) → (4,1,3) → (3,4,1) e (2,5,6) → (6,2,5).

Exercício 1.2.5 Encontre as permutações cíclicas de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

---

f) **Reflexão Espacial**. O conjunto de reflexões espaciais em torno da origem forma um grupo. Seus elementos são definidos por:

$E(x,y,z) = (x,y,z) \rightarrow E(\vec{r}) = (\vec{r})$, (**Identidade**)

$P(x,y,z) = (-x,-y,-z) \rightarrow P(\vec{r}) = (-\vec{r})$. (**Paridade**)

Exercício 1.2.6 Mostre que:

a) E e P formam um grupo;
b) $P^2 = E$.

---

g) **Grupo Unitário U(1).** O conjunto de elementos definido por:

$$g(\alpha) = e^{i\alpha},$$

é um grupo contínuo de um parâmetro (α). (Este é o grupo da Eletrodinâmica Quântica).

Exercício 1.2.7 Mostre que:

a) O conjunto $\{g(\alpha)\}$ forma um grupo;
b) O conjunto U(1) é unitário.

1.3 Teoremas Elementares e outras Definições

Teorema 1.3.1 - Teorema do Rearranjamento. Seja **G** um grupo de ordem **g** com os elementos: $E, A_2, A_3, ..., A_g$. Se A_k é um elemento arbitrário desse grupo, então cada elemento ocorre uma e somente uma vez na seqüência $EA_k = A_k, A_2A_k, A_3A_k, ..., A_gA_k$.

Demonstração:

Seja **X** qualquer elemento de G. Seja ainda $XA_k^{-1} = A_r$; então $XA_k^{-1}A_k = A_rA_k = X$, logo **X** pertence à seqüência dada. Por outro lado, **X** não pode ocorrer duas vezes na seqüência dada pois, se $A_rA_k = X$ e $A_sA_k = X$, então $A_r = A_s$. Certamente o mesmo acontece para a seqüência: $A_kE = A_k$, A_kA_2, A_kA_3 ... A_kA_g. (É através desse teorema que se constrói as tabelas de multiplicação de um grupo finito).

Corolário 1.3.1 Se J_E, $J_{A_2}, J_{A_3}, ..., J_{A_k}$, são números tais que cada elemento **X** do grupo correspondente a um número J então:

$$\sum_{\nu=1}^{g} J_{A_\nu} = \sum_{\nu=1}^{g} J_{A_\nu X} = \sum_{\nu=1}^{g} J_{XA_\nu} .$$

Exemplo 1.3.1 Construa a tabela de multiplicação do grupo G = {E, A, B} $\equiv$ {G, *}, dado abaixo:

*	E	A	B
E	E	A	B
A	A		
B	B		

O elemento (2,3), isto é, segunda linha e terceira coluna não pode ser nem A e nem B, pois haveria repetição da linha ou da coluna. Assim: (2,3) = E. O mesmo ocorre para o elemento (3,2). O Teorema 1.3.1 permite concluir que: (2,2) = B e (3,3) = A. É fácil ver que essa tabela goza da Propriedade Associativa, pois, por exemplo:

*	E	A	B
E	E	A	B
A	A	B	E
B	B	E	A

$(E*A)*B = A*B = E$,
$E*(A*B) = E*E = E$.

Exercício 1.3.1 Construa as possíveis tabelas de multiplicação do grupo G = {E,A,B,C} ≡ {G,*}, indicado abaixo:

*	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A			
B	B			
C	C			

Definição 1.3.1 Seja **x** qualquer elemento de um grupo. A seqüência: E, x, x^2, x^3,...., x^n = E é denominada **período** de **x** e **n** é chamado a **ordem** de x.

É fácil ver que o período de **x** forma um grupo Abeliano, chamado **Grupo Cíclico,** sendo que **x** é chamado o **gerador** desse grupo. Às vezes, um único elemento não é suficiente para gerar o grupo todo, precisando-se, então, de mais de um gerador. Assim, ao número mínimo de geradores requeridos para definir a estrutura do grupo chamamos de **grau** (“rank”) do grupo. Ao conjunto mínimo dos elementos que geram o grupo chamamos de **base.** Um grupo pode ter mais de uma base.

Exemplo 1.3.2 Calcule os períodos do grupo de reflexão espacial, e determine suas ordens.

Conforme vimos, esse grupo é formado por E, P. Sendo $P^2 = E$, então ele é de ordem 2.

Exemplo 1.3.3 Calcule os períodos do grupo S_3, e determine suas ordens.

O grupo S_3 é formado por:

$S_3 = \{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$.

Usando-se a tabela de multiplicação desse grupo vista no Exemplo 1.2.1, vê-se que:

a) $P_1^2 = E$; logo sua ordem é 2;
b) $P_2^2 = E$; logo sua ordem é 2;
c) $P_3^2 = E$; logo sua ordem é 2;
d) $P_4^2 = P_5$; $P_4^3 = P_4^2P_4 = P_5P_4 = E$, logo sua ordem é 3;
e) $P_5^2 = P_4$; $P_5^3 = P_5^2P_5 = P_4P_5 = E$, logo sua ordem é 3.

Exemplo 1.3.4 Seja o grupo $G = \{E, A, B, C\} \equiv \{G, *\}$ dado pela tabela abaixo. Calcule seu **grau** (“rank”).

*	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

A tabela nos mostra que:

$A^2 = E$; $B^2 = E$; $C^2 = E$,

$A^3 = A^2 * A = A$; $B^3 = B$; $C^3 = C$.

Portanto, nenhum elemento do grupo é capaz de gerar o grupo todo. Por outro lado, vemos que:

$A*B = C$; $B*A = C$;

$A*C = B$; $C*A = B$;

$B*C = A$; $C*B = A$.

Assim, os pares {A,B} , {A,C} e {B,C} são capazes de gerar o grupo todo, pois:

$$
\begin{aligned}
G &= \{A^2 = B^2 = E ;\ A;B;\ A*B \} \\
&= \{A^2 = C^2 = E ;\ A;C;\ A*C \} \\
&= \{B^2 = C^2 = E ;\ B;C;\ B*C \} .
\end{aligned}
$$

Conclui-se, portanto, que o **grau** (**“**rank”) desse grupo vale **2**, já que bastam apenas dois elementos do grupo para gerar os demais. Por outro lado, esse grupo possui três bases, a saber:

{A, B}, {A, C} e {B, C} .

Exercício 1.3.2 Calcule os **graus** (“ranks”) e as **bases** dos grupos definidos pelas seguintes tabelas de multiplicação:

a)

*	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A

C	C	E	A	B

b)

*	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	A	E
C	C	B	E	A

Exercício 1.3.3 a) Calcule todos os períodos do grupo S_4 e determine suas ordens;

b) Mostre que as raízes **n** da unidade formam um grupo cíclico de ordem **n** em relação ao produto. Determine o gerador desse grupo;

c) Mostre que l, i, –l, –i formam um grupo cíclico.

Definição 1.3.2 Um conjunto H é dito um **subgrupo** de um grupo G, isto é, $H \subset G$, se ele satisfaz os axiomas de grupo. É claro que todo grupo tem dois subgrupos **triviais** ou **impróprios**: H = {E, G}.

Exemplo 1.3.5 Mostrar que o conjunto de permutações cíclicas do grupo S_3 é um subgrupo **próprio**.

No Exemplo 1.2.1, vimos que o grupo S_3 é formado por:

$$S_3 = \{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\} .$$

As permutações cíclicas formadas de S_3 são E, P_4 e P_5, pois:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$S_{3c} = \{E, P_4; P_5\}.$$

Vejamos, agora, se esse conjunto forma um grupo. Para isso é necessário que ele satisfaça à Definição 1.1.1. Assim, segundo a tabela do Exemplo 1.2.1, temos:

a) Condição de **Fechamento**:

$EP_4 = P_4$; $EP_5 = P_5$; $P_4P_5 = E$;

b) Condição de **Associatividade**:

$E(P_4P_5) = EE = E$; $(EP_4)\,P_5 = P_4P_5 = E$;

c) Elemento **Unidade**:

EP4 = P4E = P4;

EP5 = P5E = P5;

d) Elemento **Inverso**:

P4–1P4 = P4P4–1 = E,

P5–1P5 = P5P5–1 = E.

Exercício 1.3.4 Mostre que:

a) O conjunto dos números pares é um subgrupo do grupo dos números inteiros em relação à adição;
b) $A_3 \subset S_3$;
c) O elemento unidade de H é o mesmo de G.

Definição 1.3.3 Para qualquer subgrupo H $\subset$ G e qualquer elemento a $\in$ G, mas a $\notin$ H, aH (ou Ha) é dito uma **classe lateral**

(**"**coset") à esquerda (à direita). [Note-se que uma **classe lateral** (**"**coset") não é necessariamente um subgrupo.]

Teorema 1.3.2 - Teorema de Lagrange. Seja um grupo finito G e um subgrupo $H \subset G$. Se a, b $\in$ G, mas a, b $\notin$ H, então:

$$G = E\,H + a_2H + a_3H + ... + a_kH$$

e

$$G = H\ E + Ha_2 + Ha_3 + ... + Ha_k\ ,$$

onde k é chamado de **índice** de H.

Não faremos a demonstração desse Teorema, no entanto, vamos mostrar o seu resultado através de um exemplo (Meijer e Bauer, 1962).

Exemplo 1.3.6 Mostre o **Teorema de Lagrange** para o grupo S_3 e o seu subgrupo $H = S_{3_c}$.

Nos Exemplos 1.2.1 e 1.3.5, vimos que $G \equiv S_3 = \{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ e $H \equiv S_{3_c} = \{E, P_4, P_5\}$. Tomemos $a = \{a_1, a_2, a_3\} \equiv \{P_1, P_2, P_3\}$, então, usando a tabela do Exemplo 1.2.1, virá:

$$a_1H = \begin{cases} P_1\,E = P_1 \\ P_1\,P_4 = P_2 \\ P_1P_5 = P_3 \end{cases} ;\ a_2H = \begin{cases} P_2\,E = P_2 \\ P_2P_4 = P_3 \\ P_2P_5 = P_1 \end{cases} ;\ a_3H = \begin{cases} P_3\,E = P_3 \\ P_3P_4 = P_1 \\ P_3P_5 = P_2 \end{cases} .$$

Portanto:

$$G \equiv S_3 = H + a_1\,H = H + a_2\,H = H + a_3\,H,$$

sendo, então, 2 o índice de H.

Por outro lado, temos:

$$Ha_1 = \begin{cases} E\,P_1 = P_1 \\ P_4\,P_1 = P_3 \\ P_5\,P_1 = P_2 \end{cases} ;\ Ha_2 = \begin{cases} E\,P_2 = P_2 \\ P_4\,P_2 = P_1 \\ P_5\,P_2 = P_3 \end{cases} ;\ Ha_3 = \begin{cases} E\,P_3 = P_3 \\ P_4\,P_3 = P_2 \\ P_5\,P_3 = P_1 \end{cases} .$$

Portanto:

$$G \equiv S_3 = H + Ha_1 = H + Ha_2 = H + Ha_3 ,$$

o que confirma o índice 2 de H em S_3.

É fácil ver que aH ou Ha não forma um grupo, pois, sendo $aH = Ha = \{P_1, P_2, P_3\}$, então, $P_1\,P_2 = P_4 \notin$ aH ou Ha.

Exercício 1.3.5

a) Uma **classe lateral (“**coset”) aH (Ha) não contém nenhum elemento de H;
b) Duas **classes laterais** (“cosets) (direito ou esquerdo) ou são idênticos ou não têm elemento comum;
c) A ordem m de um subgrupo H de um grupo infinito G é divisor interno de g que é a ordem de G;
d) Mostre o **Teorema de Lagrange** para $G = S_4$ e $H = S_{4_c}$.

Definição 1.3.4 Se existe um elemento $\mu \in G$ de tal modo que se a, b $\in$ G, tivermos:

$$\mu a\ \mu^{-1} = b \quad (\text{ou } \mu^{-1}\, a\, \mu = b),$$

então **b** é chamado de **conjugado** ou **equivalente** de a, ou seja: a ~ b.

Da definição acima, facilmente, demonstra-se que:

a) a ~ a;
b) Se a ~ b, então b ~ a;
c) Se a ~ b e b ~ c, então a ~ c;

d) Se G é Abeliano, então todo elemento de G é conjugado de si próprio.

Exercício 1.3.6 Demonstre as propriedades acima.

Analisando-se a Definição 1.3.4 vê-se que se G for um grupo de transformações, então essa definição corresponde à transformação de similaridade.

Definição 1.3.5 Ao conjunto de conjugados ou equivalentes de um elemento $a \in G$, chama-se de **classe** de G.

Da definição acima, facilmente demonstra-se que:

a) O elemento **a** pertence à **classe** de G relativo a si próprio;
b) Se **a** e **b** são conjugados, então a classe de **a** é a mesma da de **b**;
c) Se **a** e **b** não são conjugados, então suas classes não têm nenhum elemento comum;
d) Se cada elemento de **G** pertence a uma classe relativa a si próprio, então podemos decompor **G** em classes;
e) Qualquer elemento de **G** que comuta com todos os elementos de **G**, forma uma própria classe. A identidade é um exemplo disso.

Exercício 1.3.7

a) Demonstre as propriedades acima;
b) Encontre as classes do grupo A_4;
c) Encontre as classes do grupo S_4.

Definição 1.3.6 Um subgrupo H de G é dito **normal** ou **invariante,** $\forall$ $a \in G$, então: $aHa^{-1} = H$.

Da definição acima, facilmente demonstra-se que:

a) As **classes laterais** (“cosets”) direito e esquerdo de **H** são iguais; portanto H, como coleção, comuta com todos os elementos de G;

b) **H** contém todos os elementos de cada classe de **G**, ou não contém nenhum deles;

c) Cada grupo **G** sempre contém os subgrupos invariantes H = G e H = E.

Exercício 1.3.8 Demonstre as propriedades acima.

Definição 1.3.7 Um grupo que não tem seus subgrupos invariantes impróprios triviais (**G** e **E**), é chamado **simples**. Se nenhum dos subgrupos invariantes próprios de um grupo é Abeliano, então o grupo é chamado **semisimples**.

Definição 1.3.8 O grupo formado pelas **classes laterais** (“cosets”) do subgrupo invariante H e pelo próprio H é chamado de **grupo fator** de G e denotado por G/H. se o grupo G for finito, a ordem do grupo fator é o quociente das ordens de G e de H, respectivamente.

Exercício 1.3.9 Mostre que:

a) O conjunto das **classes laterais** (“cosets”) de H invariante forma um grupo com relação ao produto **classe lateral** (“coset”);

b) HH = H .

Exemplo 1.3.7 Dado o grupo S_3, obtenha suas classes, seus grupos invariantes, e seus grupos fatores.

O grupo S_3 tem os seguintes elementos: $\{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$. Os inversos desses elementos são:

$E^{-1} = E$; $P_1^{-1} = P_1$; $P_2^{-1} = P_2$; $P_3^{-1} = P_3$; $P_4^{-1} = P_5$ e $P_5^{-1} = P_4$, conforme se pode ver usando-se a Definição 1.2.2.

a) **Formemos as classes de S_3**. Para isso, usemos a Definição 1.3.5 e a tabela do Exemplo 1.2.1.

a.1) C_E

Como $E \sim E$, então $C_E = \{E\}$.

a.2) C_{P_1}

$EP_1E^{-1} = P_1$; $P_1P_1P_1^{-1} = P_1$; $P_2P_1P_2^{-1} = P_3$; $P_3P_1P_3^{-1} = P_2$;

$P_4P_1P_4^{-1} = P_2$; $P_5P_1P_5^{-1} = P_3$.

Portanto:

$C_{P_1} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

a.3) C_{P_2}

De maneira análoga ao caso anterior, é fácil ver que:

$C_{P_2} = C_{P_1} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

a.4) C_{P_3}

De maneira análoga ao caso de C_{P_1} , é fácil ver que:

$C_{P_3} = C_{P_2} = C_{P_1} = \{P_1, P_2, P_3)$.

a.5) C_{P_4}

$EP_4E^{-1} = P_4$; $P_1P_4P_1^{-1} = P_5$; $P_2P_4P_5^{-1} = P_4$;

$P_5P_4P_5^{-1} = P_4$.

Portanto:

$C_{P_4} = \{P_4, P_5\}$.

a.6) C_{P_5}

De maneira análoga ao caso anterior, é fácil ver que:

$$C_{P_5} = C_{P_4} = \{P_4, P_5\} \ .$$

Esses resultados, mostram que:

$$G \equiv S_3 = E + C_{P_1} + C_{P_4} = E + C_{P_2} + C_{P_4} = E + C_{P_3} + C_{P_4} =$$

$$= E + C_{P_1} + C_{P_5} = E + C_{P_2} + C_{P_5} = E + C_{P_3} + C_{P_5} \ .$$

b) **Formemos, agora, os grupos invariantes de S_3.** Para isso, usemos a Definição 1.3.6 e a tabela do Exemplo 1.2.1.

b.1) Seja $H \equiv S_{3C} = \{E, P_4, P_5\} \subset G$.

Segundo a Definição 1.3.6, H será invariante se $\forall$ a $\in$ G, então $a\,H a^{-1} = H$. Assim:

$$EHE^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} EEE^{-1} = E \\ EP_4E^{-1} = P_4 \\ EP_5E^{-1} = P_5 \end{array} \right\} \rightarrow EHE^{-1} \neq H$$

$$P_1HP_1^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} P_1EP_1^{-1} \ = E \\ P_1P_1P_4^{-1} = P_5 \\ P_1P_5P_4^{-1} = P_4 \end{array} \right\} \rightarrow \ P_1HP_1^{-1} = H$$

De maneira análoga demonstra-se que:

$$P_2HP_2^{-1} = H; \ P_3HP_3^{-1} = H \ ; \ P_4HP_4^{-1} = H \ \text{ e } \ P_5HP_5^{-1} = H \ .$$

Portanto S_{3C} é um **invariante.**

b.2) Seja o conjunto $S'_3 = \{E, P_1, P_2, P_3\}$. Como $P_1P_2 = P_4 \notin S'_3$, então esse conjunto não é subgrupo de E e, portanto, não podemos nem testar a definição de invariância.

b.3) Seja o conjunto $H_i = \{E, P_i \ (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}$

É fácil ver que:

$P_iH_iP_i^{-1} \neq H_i$, portanto, H_i não é invariante.

c) **Obtenção do grupo fator de G.** Para isso, usemos a Definição 1.3.8 e a tabela do Exemplo 1.2.1.

Vimos no item b.1, que o subgrupo S_{3C} é um invariante. Portanto, as **classes laterais** ("cosets") de $S_{3C} \equiv H = \{E, P_4, P_5\}$, são:

P_1H; P_2H; P_3H; P_4H e P_5H, então, o grupo fator de G será:

$G/H = \{P_1H, P_2H, P_3H, P_4H, P_5H\}$.

Tais **classes laterais** ("cosets") valem, respectivamente:

$$P_1H = \begin{cases} P_1E = P_1 \\ P_1P_4 = P_2; \quad P_2H = \{P_2, P_3, P_1\}; \quad P_3H = \{P_3, P_1, P_2\} \ ; \\ P_1P_5 = P_3 \quad P_4H = \{P_4, P_5, E\}; \quad P_5H = \{P_5, E, P_4\} \end{cases}$$

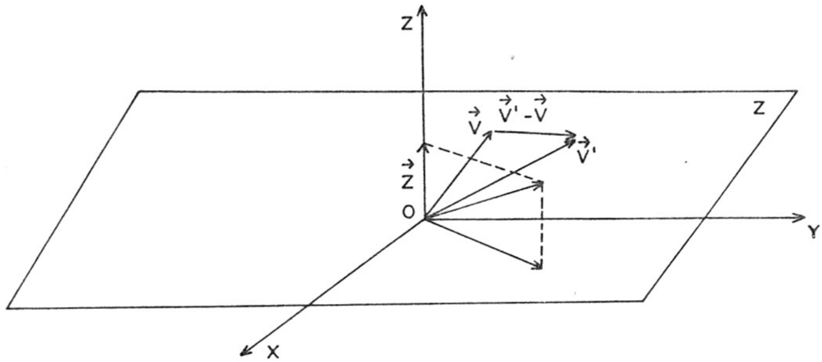
As duas últimas **classes laterais** ("cosets") (P_4H; P_5H), mostram que: HH = H. O resultado do item acima mostra que:

$$S_3 = H + P_1H = H + P_2H = H + P_3H \ .$$

Exemplo 1.3.8 Seja o grupo S_3 e tomemos o grupo alternativo $A \equiv S_{3C}$ formado pelas permutações cíclicas de S_3. Mostre que S_3 é um grupo **não simples** e **não-semisimples.**

Sendo $S_3 = \{E, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ e $A_3 = \{E, P_4, P_5\}$, então: $EP_4 = P_4$; $EP_5 = P_5$; $P_4P_5 = E$, portanto, A_3 é Abeliano. No Exemplo 1.3.7 mostramos que A_3 é invariante. Ora, como A_3 é um subgrupo invariante não-trivial de S_3 e Abeliano, logo, segundo a Definição 1.3.7, S_3 é não-simples e não-semisimples.

Exemplo 1.3.9 Seja o espaço vetorial R^3. Calcule o grupo fator desse espaço vetorial.



O sub-espaço vetorial R^2 formado pelos vetores do plano xoy é um subgrupo invariante de R^3, pois:

$$\vec{v}\, R^2\, \vec{v}^{-1} \;=\; R^2 \text{, onde } \vec{v} \in R^3 .$$

Tomemos, agora, um vetor $\vec{z}$ pertencente ao R^3 e que esteja situado no eixo dos **z**. Então, o conjunto de vetores formado pela soma vetorial de $\vec{z}$ com vetores do R^2, ou seja, $\vec{z} + R^2$ é uma **classe lateral** (“coset”) de R^3. Esse conjunto é representado por todos os vetores que têm suas extremidades situadas em um plano **z** perpendicular ao eixo dos **z** e paralelo ao plano **xoy**, conforme mostra a figura. Assim, cada um desses planos corresponde a uma **classe lateral** (“coset”) de R^3 e forma uma série contínua.

O grupo fator de R^3 é constituído pelas projeções dos vetores pertencentes às **classes laterais** (“cosets”) no eixo **oz**, ou seja, o elemento F_z do grupo fator é obtido desprezando-se os vetores diferença entre os diferentes vetores cujas extremidades encontram-se no plano **z**. Em Matemática isto é representado pelo símbolo de congruência:

$$\vec{v} \equiv \vec{v}' \equiv \vec{v}'' \equiv \ldots \left(\mathrm{mod}\, R^2\right).$$

Essa notação significa que esses vetores são iguais, se desprezarmos o vetor diferença que está situado no plano **z**. Assim, o grupo fator será R^3/R^2 = **OZ** $\equiv R^1$.

É oportuno observar que podemos generalizar o que acabamos de ver, ao aplicá-lo ao caso do espaço vetorial R^n. Assim, R^n é um grupo de dimensão **n** e, por seu lado, **H** é um subgrupo invariante de dimensão m < n, então, o grupo fator F será constituído pelos vetores $\vec{v}_i$, $\vec{v}_i'$, $\vec{v}_i''$, ..., de tal modo que:

$$\vec{v}_i \equiv \vec{v}_i' \equiv \vec{v}_i'' \equiv \ldots (\mathrm{mod}\, H),$$

e a dimensão de F ≡ G/H será **m-n**, e representa a projeção sobre um eixo, plano ou hiperplano.

1.4 Isomorfismo e Homomorfismo

Definição 1.4.1 Isomorfismo. Sejam dois grupos **G** e **G'**, tal que:

1. A cada elemento $g_i \in$ G corresponde a um e somente um elemento $g_i \in$ G', isto

   $$g_i \in G \Leftrightarrow \exists\, g_i' \in G';$$

2. Se $g_i g_j = g_k$, então $g_i' g_j' = g_k'$, para todos os elementos de G e G'.

Deste modo, G e G', são ditos **isomórficos**, ou seja: G $\approx$ G'. Portanto, eles têm a mesma tabela de multiplicação.

Exemplo 1.4.1 Mostre que o grupo S_3 é isomorfo ao grupo que mantém um triângulo eqüilátero idêntico a si próprio.

O grupo que mantém um triângulo eqüilátero idêntico a si próprio é definido por (veja as figuras a seguir).

E: Operação da identidade, a qual deixa a figura idêntica a si própria;

P_1: Reflexão em torno da linha A, isto é, troca o vértice **1** por **2**;

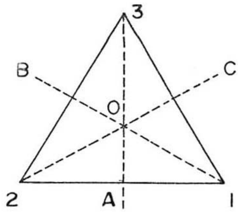
P_2: Reflexão em torno da linha B, isto é, troca o vértice **2** por **3**;

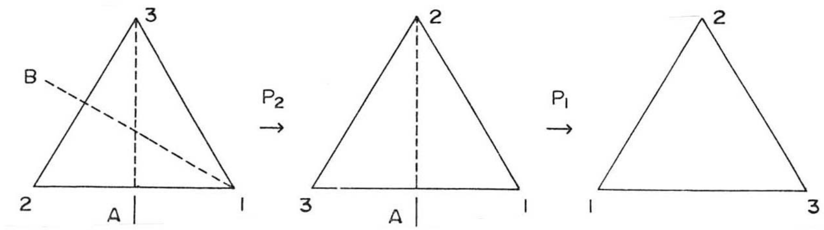
P_3: Reflexão em torno da linha C, isto é, troca o vértice **1** por **3**;

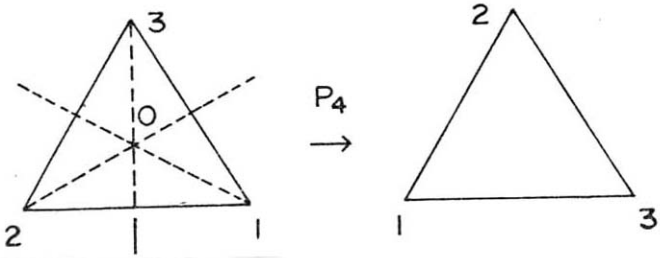
P_4: Rotação de 120º no sentido horário em torno do centro **o**, isto é, o vértice **3** vai para o lugar de **1**, este para o lugar de **2**, e este para o lugar de **1**;

P_5; Rotação de 120º no sentido anti-horário em torno do centro **o**, isto é, o vértice **3** vai para o lugar de **2**, este para o lugar de **1**, e este para o lugar de **3**.

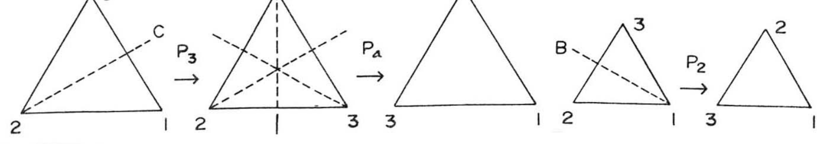
É fácil ver que esse grupo satisfaz à mesma tabela de multiplicação do grupo S_3 e que foi construída no Exemplo 1.2.1. Por exemplo $P_1P_2 = P_4$, pois:







Outro exemplo: $P_4\,P_3 = P_2$

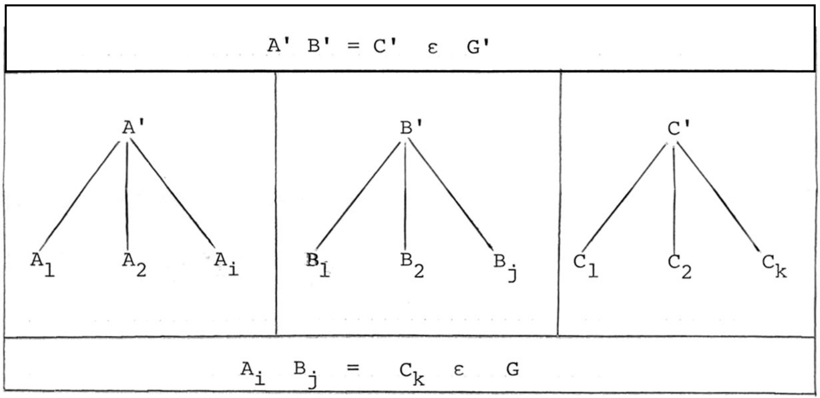


Exercício 1.4.1 a) Complete a tabela de multiplicação do Exemplo 1.4.1.

b) Mostre que o grupo S_2 é isomorfo ao grupo de reflexões espaciais.

Definição 1.4.2 Homomorfismo. Dois grupos G e G' são **homomórficos**, se os elementos de G podem ser postos em uma correspondência (não um a um) com os elementos de G' e desde que esta correspondência preserve as leis de multiplicação dos dois grupos.

O diagrama a seguir esclarece a definição dada.



Obs: O conceito de Homomorfismo é muito usado em cristalografia.

Exemplo 1.4.2 Seja S_n o grupo de permutações de **n** (> 1) objetos. Ao conjunto de permutações pares associamos o número +1, e ao de permutações ímpares, o número –1. O conjunto formado por +1 e –1 forma um grupo multiplicativo e é homomórfico do grupo S_n. O elemento +1 corresponde ao Grupo Alternativo de S_n, isto é, A_n, e –1 à sua **classe lateral** (“coset”) (Meijer e Bauer, 1962).

Teorema 1.4.1 Se um grupo G possui um subgrupo invariante H, então G é homomórfico ao grupo fator G/H.

Exercício 1.4.2 a) Se G é homomórfico a **G’**, e se E’ é o elemento de unidade de G’, mostre que:

I) O conjunto de elementos de G que corresponde a E’ forma um subgrupo invariante de **G**;

II) G’ é isomórfico ao grupo fator G/H.

b) Mostre a última afirmação do Exemplo 1.4.2.

CAPÍTULO 2

Representações de Grupo[1]

2.1 Primeiras Definições

Definição 2.1.1 Uma **representação** de um grupo é um grupo de identidades matemáticas homomórficas ao grupo abstrato original. Uma **representação linear** é uma representação em termos de operadores lineares. Assim, se fizermos uma aplicação homomórfica de um grupo arbitrário **G** num grupo de operadores D (G) $\in$ L, dizemos que D (G) é uma **representação** de **G** no espaço de representações L. Se a dimensão de **L** é **n** dizemos que a representação tem dimensão **n**. quando a representação é dada em forma de matrizes, ela é denotada por $D_{i\,j}$ (G). Como pode haver várias representações para um mesmo grupo, então denotaremos $D^{(\mu)}$ (G) [ou $D^{\mu}_{i\,j}$ (G)] para uma dada representação de dimensão μ. Os elementos de uma representação devem ter as seguintes propriedades:

a) D (RS) = D (R) D (S), $\forall$ R, S $\in$ G;

b) D (R^{-1}) = $[D (R)]^{-1}$, $\forall$ R $\in$ G;

c) D (E) = I ; E : Elemento unitário de G.

A definição acima permite tirar duas conclusões:

[1] Esta parte deste Capítulo foi ministrada pelo professor José Maria Filardo Bassalo no *Curso de Extensão*, realizado em 1985, na UFPA, sobre **Teoria de Grupo**.

I) Cada grupo tem uma representação unidimensional que é denotada pelo número 1;

II) O determinante de cada matriz representação é também uma representação, pois:

$$\det D(R) \,.\, \det D(S) = \det [D(R)\, D(S)] = \det [D(RS)].$$

Exercício 2.1.1 Usando a propriedade a) da Definição 2.1.1, demonstre as propriedades b) e c).

Definição 2.1.2 Quando a correspondência entre os elementos de **G** e os de D (G) é um isomorfismo, a representação é dita **fiel** ("faithful"). Neste caso, a ordem de D (G) é a mesma de G.

Definição 2.1.3 Duas representações D (G) e D' (G) são ditas **equivalentes**, se $\forall$ R $\in$ G, existe uma transformação de similaridade S, tal que:

$$D'(R) = S^{-1} D(R)\, S.$$

Definição 2.1.4 Uma representação matricial é dita **redutível** se, por transformações de similaridade, sua matriz pode ser posta na forma:

$$D(R) = \begin{pmatrix} D^{(i)}(R) & A(R) \\ 0 & D^{(k)}(R) \end{pmatrix},$$

onde $D^{(i)}(R)$ (i = 1,2,. . ., k) são também representações do mesmo grupo.

a) Ela é dita **completamente redutível** se A (R) = 0;

b) Quando ela não pode ser escrita nessa forma, ela é dita **irredutível**;

c) Uma representação **totalmente redutível** é a soma direta de representações irredutíveis (estas podem aparecer várias vezes), isto é:

$$D = \sum_{\nu} a_{\nu} D^{(\nu)},$$

onde $\{a_\nu\}$ são números inteiros positivos e a dimensão de D é a soma das dimensões de $D^{(\nu)}$. (É oportuno salientar que essa soma não representa soma de matrizes!)

Exercício 2.1.2 a) Demonstre que cada representação matricial D(G) de um grupo finito G é equivalente a uma representação unitária;

b) Demonstre que:

$$D_{i\,j}\ (G_n) = \begin{cases} 1, \text{se}\ G_n\ G_j = G_i \\ 0, \text{se}\ G_n\ G_j \neq G_i \end{cases},$$

onde $G_k \in$ G, é uma representação fiel de G e denominada **regular**.

Exemplo 2.1.1 Encontre um conjunto de representações irredutíveis do grupo S_3.

O grupo S_3, conforme vimos no Exemplo 1.2.1, é dado por:

E = (123) ; P_1 = (213) ; P_2 = (132) ; P_3 = (321) ; P_4 = (312) ; P_5 = (231) com a seguinte tabela de multiplicação:

	E	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
E	E	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	E	P_4	P_5	P_2	P_3
P_2	P_2	P_5	E	P_4	P_3	P_1
P_3	P_3	P_4	P_5	E	P_1	P_2
P_4	P_4	P_3	P_1	P_2	P_5	E
P_5	P_5	P_2	P_3	P_1	E	P_4

a) Primeiramente vamos encontrar as representações uni-dimensionais de S_3. A tabela de multiplicação acima nos mostra que:

$$P_1^2 = E \; ; \; P_2^2 = E \; ; \; P_3^2 = E \, ,$$

então:

$$D\,(P_1^2) = D\,(E) = 1 \rightarrow D\,(P_1)\,D\,(P_1) = D^2\,(P_1) = D\,(P_1^2) = 1 \, ,$$

então:

$$D\,(P_1) = \pm\,1.$$

Analogamente:

$$D\,(P_2) = D\,(P_3) = \pm 1.$$

Por outro lado, temos:

$$P_4^2 = P_5 \;\; ; P_4^3 = P_4^2\,P_4 = P_5 P_4 = E \, ,$$

$$P_5^2 = P_4 \;\; ; P_5^3 = P_5^2\,P_5 = P_4 P_5 = E \, ,$$

então:

$$D(P_4^3) = D\,(P_4^2\,P_4) = D\,(P_4^2)\,D\,(P_4) = D^3\,(P_4) = D\,(E) = 1 \, ,$$

logo:

$$D\,(P_4) = \sqrt[3]{1} = 1, t, t^2\text{, onde: } t = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\ \ \sqrt{3}\,.$$

Analogamente:

$$D\,(P_5) = D\,(P_4) = 1, t, t^2\,.$$

Examinando-se, ainda, a tabela de multiplicação de S_3, vê-se que:

$$P_1P_2 = P_4 \text{ e } P_1P_3 = P_5,$$

então:

$$D\,(P_1P_2) = D\,(P_1)\,D\,(P_2) = D\,(P_4) \rightarrow (\pm 1)\,(\pm 1) = 1 = D\,(P_4).$$

Analogamente:

$$D\,(P_1P_3) = D\,(P_5) = 1,$$

vê-se, então, que das três soluções de $D(P_4) = D(P_5)$, apenas a solução 1 é satisfatória. Assim, temos apenas duas representações uni-dimensionais de S_3:

$$D^{(1)}\,(g) = 1,\ \forall\ g \in\ S_3,$$

$$D^{(1)}\,(E) = D^{(1)}(P_4) = D^{(1)}(P_5) = 1,$$

$$D^{(1)}\,(P_1) = D^{(1)}(P_2) = D^{(1)}(P_3) = -1.$$

Tais representações são Homorfismos.

b) Agora, vamos encontrar uma representação bi-dimensional de S_3.

Sendo $D^{(2)}\,(E) = I$, então $D^{(2)}\ (E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Por outro lado, temos (vide tabela de multiplicação):

$$P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 = E\,,$$

então:

$$D^{(2)}(P_i^2) = D^{(2)}(E) = I; \qquad\qquad (i = 1,2,3).$$

Seja:

$$D^{(2)}\ (P_i) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,,$$

então:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} a^2 + bc = 1\,;\, ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0\,;\, bc + d^2 = 1. \end{array}$$

Tomemos a equação:

$$ab + bd = 0 \ \rightarrow\ b\,(a+d) = 0 \ \rightarrow\ b = 0 \quad (\text{ou } a = -d).$$

Tomamos, no entanto, $b = 0$. Então, sendo:

$$a^2 + bc = 1 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\,1.$$

Por outro lado, temos:

$$ac + cd = 0 \ \rightarrow\ c\,(a+d) = 0 \ \rightarrow\ c = 0 \quad (\text{ou } a = -d).$$

Tomemos, no entanto, $c = 0$. Então, sendo:

$$bc + d^2 = 1 \rightarrow\ d^2 = 1 \rightarrow\ d = \pm\,1.$$

Assim, podemos ter três possibilidades para a representação $D^{(2)}\ (P_i)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos escolher a primeira delas e supor que:

$$D^{(2)}\ (P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se, no entanto, fizermos:

$$D^{(2)}\ (P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D^{(2)}\ (P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

veremos que, sendo [vamos descarregar o índice (2)]:

$$P_1P_3 = P_5, \text{ então } D\ (P_1P_3) = D\ (P_1)\ (P_3) = D\ (P_5).$$

Ora:

$$D\ (P_1)\ D\ (P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D\ (P_2) \neq D\ (P_5).$$

Por outro lado:

$$D\ (P_2)\ D\ (P_3) = D\ (P_2P_3) = D\ (P_4), \text{ pois } P_2P_3 = P_4.$$

Ora:

$$D\ (P_2)\ D\ (P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D\ (P_1) \neq D\ (P_4).$$

Por fim:

$$D(P_2)\,D(P_1) = D(P_2P_1) = D(P_5), \text{ pois } P_2P_1 = P_5.$$

Ora:

$$D(P_2)\,D(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D(P_3) \neq D(P_5).$$

Agora, vamos escolher uma outra possibilidade para as representações $D(P_i)$ ($i = 1,2,3$), isto é:

$$D(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga ao caso anterior, demonstra-se que:

$$D(P_2)\,D(P_1) = D(P_5) \neq D(P_2P_1),$$

$$D(P_2)\,D(P_3) = D(P_4) \neq D(P_2P_3).$$

Tomemos, agora, uma outra alternativa, qual seja:

$$D(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D(P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, com esses valores, é fácil ver que:

$$D(P_2)\,D(P_1) = D(P_5) \neq D(P_2P_1),$$
$$D(P_2)\,D(P_3) = D(P_4) \neq D(P_2P_3),$$
$$D(P_1)\,D(P_3) = D(P_5) \neq D(P_1)\,D(P_3).$$

Assim, só nos resta uma de três possibilidades:

$$D\,(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } D\,(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$D\,(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Procuremos, agora, outras representações. Sendo:

$$(P_4)^3 = (P_5)^3 = E, \text{ então:}$$

$$D^3\,(P_4) = D^3\,(P_5) = D\,(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomemos, portanto:

$$D\,(P_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Existe uma infinidade de soluções. Vamos, inicialmente, escolher uma matriz real e unitária, isto é, ortogonal. Então, teremos:

$$D^{-1}\,(P_4) \equiv [D_{i\,j}\,(P4)]^T = D_{j\,i}\,(P_4) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

A inversa dessa matriz será:

$$D^{-1}_{i\,j}\,(P_4) \equiv \frac{1}{\det D}\ \mathrm{Cof}\,D_{j\,i} = \frac{1}{(ad\text{-}bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\frac{d}{ad-bc}=a\,;-\frac{b}{ad-bc}=c\,;-\frac{c}{ad-bc}=b\,;\frac{a}{ad-bc}=d\,.$$

Tomemos:

$$\frac{d}{ad-bc}=a \;\; e \;\; \frac{a}{ad-bc}=d \;\rightarrow\; \frac{d}{ad-bc}=d\,(ad-bc) \;\rightarrow\; (ad-bc)^2 =$$

$$=1+(ad-bc)=\pm 1.$$

Se:

$$ad - bc = +1 \;\rightarrow\; a = d \;\; e \;\; b = - c.$$

Ou, se:

$$ad - bc = -1 \rightarrow a = - d \;\; e \;\; b = c.$$

Assim:

$$D\,(P_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ ou } D\,(P_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Escolhendo:

$$D\,(P_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Sendo, ainda:

$$D^3\,(P_4) = I, \text{ então: } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ com } a^2 + b^2 = 1,$$

virá:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3\text{-}3b^2a & 3a^2b\text{-}b^3 \\ b^3\text{-}3a^2b & a^3\text{-}3ab^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$3a^2 - b^3 = 0,$$

$$b\,(3a^2 - b^2) = 0 \rightarrow b = 0 \text{ ou } 3a^2 = b^2.$$

A solução b = 0 é descartável, senão a representação seria redutível. Tomemos, portanto, a segunda solução:

$$3a^2 = b^2 = 1 - a^2 \rightarrow 4a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\frac{1}{2}.$$

$$3\left(\frac{1}{4}\right) = b^2 \rightarrow b = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Por outro lado, temos:

$$a^2 - 3b^2a = 1 \rightarrow a\,(a^2 - 3b^2) = 1 \rightarrow a\left(a^2\text{-}3 \times \frac{3}{4}\right)=1,$$

$$a\left(\frac{1}{4} - \frac{9}{4}\right) = 1 \rightarrow a\left(-\frac{8}{4}\right) = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Finalmente, escolhendo $b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, teremos:

$$D\,(P_4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Sendo:

$$D^3\ (P_5)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ então } D\ (P_5)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

já que tomamos $b=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Anteriormente, vimos que D (P_2) tem três possibilidades. Vamos escolher a seguinte:

$$D\ (P_2)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos determinar as outras representações restantes, isto é, D (P_1) e D (P_2). Sendo:

$$D\ (P_1)\ D\ (P_2) = D\ (P_1P_2) = D\ (P_4), \text{ teremos:}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ +\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow a=\frac{1}{2}\ ;\ b=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\ ;$$

$c=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $d=-\frac{1}{2}$, então:

$$D\ (P_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Por fim:

$$D\ (P_2)\ D\ (P_3) = D\ (P_2P_3) = D\ (P_4), \text{ então:}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad a=\frac{1}{2} \;\; ; \;\; b=\frac{1}{2}\sqrt{3} \; ;$$

$c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $d = - \frac{1}{2}$, então:

$$D\,(P_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Em resumo, uma das representações irredutíveis de S_3 terá o seguinte quadro (os índices A e B diferenciam as representações unidimensionais):

	$D_A^{(1)}$	$D_B^{(1)}$	$D^{(2)}$
E	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
P_1	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
P_2	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
P_3	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
P_4	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
P_5	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

Exercício 2.1.3 Encontre:

a) Os geradores do grupo S_3;

b) Uma outra representação irredutível e bi-dimensional de S_3;

c) Todas as representações irredutíveis do grupo dado pela seguinte tabela de multiplicação:

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

Exemplo 2.1.2 Encontre uma representação tridimensional e regular para o grupo alternativo A_3.

O grupo alternativo A_3 é formado por:

$G_1 = (123)$; $G_2 = (312)$; $G_3 = (231)$, de modo que é fácil ver que:

$G_1G_2 = G_2$; $G_1G_3 = G_3$; $G_2G_3 = G_1$; $G_1^2 = G_1$; $G_2^2 = G_3$; $G_3^2 = G_2$.

Agora, usaremos a definição de representação regular, isto é:

$$D_{ij}^{(3)}\ \{G_n\} = \begin{cases} 1, & \text{se } G_n\ G_j = G_i \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Portanto [vamos descarregar o índice (3)]:

$D_{11}(G_1) = 1$; $D_{12}(G_1) = 0$; pois $G_1G_2 \neq G_1$,

$D_{13}(G_1) = 0$; pois $G_1G_3 \neq G_1$,

$D_{21}(G_1) = 0$; pois $G_1G_1 \neq G_2$; $D_{22}(G_1)$; $= 1$; pois $G_1G_2 = G_2$,

$D_{23}(G_1) = 0$; pois $G_1G_3 \neq G_2$; $D_{31}(G_1) = 0$; pois $G_1G_1 \neq G_3$,

$D_{32}(G_1) = 0$; pois $G_1G_2 \neq G_3$; $D_{33}(G_1) = 1$; pois $G_1G_3 = G_3$.

Logo [vamos carregar o índice (3)]:

$$D^{(3)}\ (G_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$D^{(3)}\ (G_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D^{(3)}\ (G_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.1.4 a) Calcule D (G_2) e D (G_3) do Exemplo 2.1.2;

b) Encontre uma representação 6 – dimensional regular para S_3;

c) Encontre representações equivalentes da representação regular de A_3, para:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

d) Encontre a representação regular para o grupo cíclico {E, A, B, C}, onde $B = A^2$; $C = A^3$; $E = A^4$.

Exemplo 2.1.3 Mostre que o conjunto de operadores lineares $\{O_R\}$ definido por:

$$O_R \psi(\vec{x}) \equiv \psi(R\vec{x}) \quad ; \text{ onde } \vec{x} \to R\vec{x} \,,$$

forma um grupo. Calcule, então, suas representações. (Esses operadores são chamados de **Operadores de Wigner**.)

---

a) Vamos mostrar, inicialmente, que esse conjunto $\{O_R\}$ forma um grupo.

I) **Condição de fechamento**

Seja: $O_R\,[\psi(\vec{x})] \equiv \psi(R\vec{x})$, então:

$$(O_S O_R)\,\psi(\vec{x}) = O_S\,[O_R\,\psi(\vec{x})] = O_S\,\psi(R\vec{x}) = \psi[S(R\vec{x})]$$

$$(O_S O_R)\,\psi(\vec{x}) = \psi[(SR)\,\vec{x}].$$

Sendo SR = T, então:

$$(O_S O_R)\,\psi(\vec{x}) = \psi(T\vec{x}) \text{ , logo:}$$

$O_S O_R \equiv O_T \equiv O_{SR}$, é um **Operador de Wigner**!

II) **Condição de Associatividade**:

$$[(O_S O_R)\,O_T]\;\psi(\vec{x}) = O_S O_R[\,\psi(T\vec{x})\,] = O_S\,[\psi(RT\vec{x})] = \psi(SRT\vec{x}) \;.$$

Por outro lado, temos:

$$(O_S)\,[(O_R O_T)]\,\psi(\vec{x}) = O_S\,[O_R\,\psi(T\vec{x})] = O_S\,[\psi(RT\vec{x})] = \psi(SRT\vec{x}),$$

então:

$$(O_S O_R)\, O_T = O_S\, (O_R O_T).$$

III) **Elemento Unidade**:

$$O_E\, [\psi(\vec{x})] = \psi(E\vec{x}) = \psi(\vec{x}) = E\, \psi(\vec{x}),$$

$$O_E \equiv E.$$

IV) **Elemento Inverso**

$$O_{R^{-1}}\, [O_R\, \psi(\vec{x})] = O_{R^{-1}}\, [\psi(R\vec{x})] = \psi(R^{-1} R\vec{x}) = \psi(E\vec{x}) = \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}),$$

então:

$$O_{R^{-1}}\, O_R = E \rightarrow O_{R^{-1}} \equiv [O_R]^{-1}.$$

b) Agora, vamos mostrar que as matrizes definidas por:

$$O_R\, \psi_i(\vec{x}) \equiv \psi_i(R\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} D_{ji}(R)\, \psi_j(\vec{x}) \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

são representações do grupo $\{O_R\}$.

Calculemos:

$$O_S O_R\, \psi_i(\vec{x}) = O_S\, \psi_i(R\vec{x}) = O_S\, \psi \sum_{j=1}^{n} D_{ji}(R)\, \psi_j(\vec{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} D_{ji}(R)\, O_S\, \psi_j(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} D_{ji}(R) \sum_{k=1}^{n} D_{kj}(S)\, \psi_k(\vec{x}) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} D_{ji}(R)\, D_{kj}(S)\, \psi_k(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} D_{kj}(S)\, D_{ji}(R)\, \psi_k(\vec{x}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[D(S)\, D(R)\right]_{ki}\, \psi_k(\vec{x}).$$

Por outro lado, temos:

$$O_S O_R\ \psi_i\ (\vec{x}) = O_{SR}\ \psi_i\ (\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} D\,(SR)_{k\,i}\ \psi_k\ (\vec{x})\,.$$

Assim:

$$\sum_{k=1}^{n}\ [D\,(S)\,D\,(R)]_{k\,i}\ \psi_k\ (\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n}\ D\,(SR)_{k\,i}\ \psi_k\ (\vec{x})\,.$$

Então:

$$D\ (S)\ D\ (R) = D\ (SR).$$

Exemplo 2.1.4 Seja $\{R\} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ o grupo de rotações do plano (x–y) em torno do eixo dos **z**, através dos ângulos 0º, 90º, 180º e 270º, no sentido anti-horário. Seja $\{\psi_i\ (\vec{x})\}$ o conjunto dos **Operadores de Wigner** definido por:

$$O_{R_1}\ \psi\,(x,y) = \psi\,[R_1\ (x,y)] = \psi\,(x,y) = \psi_1\,,$$

$$O_{R_2}\ \psi\,(x,y) = \psi\,[R_2\ (x,y)] = \psi\,(y,-x) = \psi_2\,,$$

$$O_{R_3}\ \psi\,(x,y) = \psi\,[R_3\ (x,y)] = \psi\,(-x,-y) = \psi_3\,,$$

$$O_{R_4}\ \psi\,(x,y) = \psi\,[R_4\ (x,y)] = \psi\,(-y,x) = \psi_4\,.$$

Calcule as representações de $\{R\}$.

----

a) Tomemos o elemento R_1. Então:

$$O_{R_1}\ \psi_1 = \sum_{j=1}^{4}\ D_{j1}\,(R_1)\,\psi_j\ \rightarrow\ O_{R_1}\ \psi\,(x,y) = \psi\,(x,y) = \psi_1\,.$$

Assim:

$$\psi_1 = D_{11}(R_1)\,\psi_1 + D_{21}(R_1)\,\psi_2 + D_{31}(R_1)\,\psi_3 + D_{41}(R_1)\,\psi_4 \quad .$$

Portanto:

$$D_{11}(R_1) = 1\,;\, D_{21}(R_1) = D_{31}(R_1) = D_{41} = 0\,.$$

Por outro lado, temos:

$$O_{R_1}\ \psi_2 = \sum_{j=1}^{4} D_{j2}(R_1)\,\psi_j \rightarrow O_{R_1}\ \psi(y,\text{-}x) = \psi(y,\text{-}x) = \psi_2\,,$$

$$\psi_2 = D_{12}(R_1)\,\psi_1 + D_{22}(R_1)\,\psi_2 + D_{32}(R_1)\,\psi_3 + D_{42}(R_1)\,\psi_4\,.$$

Portanto:

$$D_{2\,2}(R_1) = 1\ ;\ D_{1\,2}(R_1) = D_{3\ 2}(R_1) = D_{4\ 2}(R_1) = 0.$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$D_{3\,3}(R_1) = 1\ ;\ D_{1\,3}(R_1) = D_{2\ 3}(R_1) = D_{4\ 3}(R_1) = 0.$$

$$D_{4\,4}(R_1) = 1\ ;\ D_{1\,4}(R_1) = D_{2\ 4}(R_1) = D_{3\ 4}(R_1) = 0.$$

Assim [carregando o índice (4)]:

$$D^{(4)}\ (R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv\ E\,.$$

b) Agora, tomemos o elemento R_2. Então:

$$O_{R_2}\ \psi_1 = \sum_{j=1}^{4} D_{ji}(R_2)\,\psi_j\ \rightarrow\ O_{R_2}\ \psi(x,y) = \psi(y,\text{-}x) = \psi_2\,.$$

Assim:

$$\psi_2 = D_{11}(R_2)\,\psi_1 + D_{21}(R_2)\,\psi_2 + D_{31}(R_2)\,\psi_3 + D_{41}(R_2)\,\psi_4\,.$$

Portanto:

$$D_{11}(R_2) = D_{31}(R_2) = D_{41}(R_2) = 0\,;\, D_{21}(R_2) = 1\,.$$

Por outro lado, temos:

$$O_{R_2}\,\psi_2 = \sum_{j=1}^{4} D_{j2}(R_2)\,\psi_j \;\rightarrow\; O_{R_2}\,\psi(y,-x) = (-x,-y) = \psi_3\,.$$

Assim:

$$\psi_3 = D_{12}(R_2)\,\psi_1 + D_{22}(R_2)\,\psi_2 + D_{32}(R_2)\,\psi_3 + D_{42}(R_2)\,\psi_4\,.$$

Portanto:

$$D_{3\,2}(R_2) = 1\ ;\ D_{1\,2}(R_2) = D_{2\,2}(R_2) = D_{4\,2}(R_2) = 0.$$

Analogamente, demonstra-se que, sendo:

$$O_{R_2}\,\psi_3 = O_{R_2}\,\psi(-x,-y) = \psi_4 = \sum_{j=1}^{4} D_{j3}(R_2)\,\psi_j$$

e

$$O_{R_2}\,\psi_4 = O_{R_2}\,\psi(-y,x) = (x,y) = \psi_1 = \sum_{j=1}^{4} D_{j4}(R_2)\,\psi_j$$

então:

$$D_{4\,3}(R_2) = 1\ ;\ D_{1\,3}(R_2) = D_{2\,3}(R_2) = D_{3\,3}(R_2) = 0,$$

$$D_{1\,4}(R_2) = 1\ ;\ D_{2\,4}(R_2) = D_{3\,4}(R_2) = D_{4\,4}(R_2) = 0.$$

Portanto [carregando o índice (4)]:

$$D^{(4)}\ (R_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.1.5 a) Encontre D (R_3) e D (R_4) do Exemplo 2.1.4;

b) Mostre que o operador **H** para um potencial Coulombiano é invariante por uma reflexão em torno da origem;

c) Mostre que $\{O_R\}$ e $\{R\}$ são Homeomórficos.

2.2 Teoremas Fundamentais Sobre Representações de Grupos

Teorema 2.2.1 Cada representação matricial D {G} de um grupo G é equivalente a uma representação unitária. (Cf. Exercício 2.1.2.a).

Teorema 2.2.2 Uma matriz A que comuta com cada matriz D{R} de uma representação irredutível de um grupo G é múltipla da matriz unidade, isto é: A = λ E.

Demonstração:

Por hipótese, temos que:

$$A\ D\ (R) = D\ (R)\ A,\ \forall\ R \in G.$$

Assim:

$$[A\ D\ (R)]^+ \ = \ [D\ (R)\ A]^+$$

$$D^+\ (R)\ A^+ = A^+\ D^+\ (R).$$

Pelo Teorema 2.2.1, D (R) é unitária, então:

$$D^+\ (R) = D^{-1}\ (R).$$

Portanto:

$$D^{-1}\ (R)\ A^+ = A^+\ D^{-1}\ (R).$$

Por outro lado, segundo a Definição 2.1.1.b, temos:

$$D^{-1}\ (R) = D\ (R^{-1}).$$

Chamando $R^{-1} = S$, virá:

$$D\ (S)\ A^+ = A^+\ D\ (S).$$

Assim, $\forall$ T $\in$ G, teremos:

$$D\ (T)\ A = A\ D\ (T),$$

$$D\ (T)\ A^+ = A^+\ D\ (T).$$

Da teoria das matrizes sabe-se que toda matriz pode ser sempre decomposta em duas matrizes Hermitianas, isto é:

$$A = A_+ + iA_- \text{, onde:}$$

$$A_+ = \frac{1}{2}\left(A + A^+\right) = A_+^+ \quad ; \quad A_- = \frac{1}{2i}\,(A - A^+) = A_-^+ .$$

Portanto:

$$D(T)\,A_{+} = D(T)\,\frac{1}{2}(A+A^{+}) = \frac{1}{2}D(T)\,A + \frac{1}{2}D(T)\,A^{+} = \frac{1}{2}A\,D(T) +$$

$$+\frac{1}{2}A^{+}\,D(T) = \frac{1}{2}(A+A^{+})\,D(T) \;\rightarrow\; D(T)\,A_{+} = A_{+}\,D(T).$$

Por outro lado:

$$D(T)\,A_{-} = D(T)\,\frac{1}{2i}(A-A^{+}) = \frac{1}{2i}D(T)\,A - \frac{1}{2i}D(T)\,A^{+} = \frac{1}{2i}AD(T) -$$

$$-\frac{1}{2i}A^{+}\,D(T) = \frac{1}{2i}(A-A^{+})\,D(T) \;\rightarrow\; D(T)\,A_{-} = A_{-}\,D(T).$$

Portanto, é suficiente considerar **A** como uma matriz Hermitiana. Seja **H** essa matriz, então:

$$D(R)\,H = H\,D(R),$$

onde:

$$D(R)\,D^{+}(R) = E; \quad H = H^{+}.$$

Se **H** é Hermitiana, pelo Teorema Espectral da Álgebra Linear, existe uma matriz unitária **U** que a diagonaliza, ou seja:

$$H_D = U\,H\,U^{-1}.$$

Façamos, então, $\overline{D}(R) \equiv UD(R)\,U^{-1}$, portanto:

$$\overline{D}(R)\,H_D = U\,D(R)\,U^{-1}\,UHU^{-1} = U\,D(R)\,H\,U^{-1} = U\,H\,D(R)^{-1} =$$

$$= U\,H\,U^{-1}\,U\,D(R)\,U^{-1} = H_D\,\overline{D}(R),$$

ou seja:

$$\overline{D}(R)\,H_D = H_D\,\overline{D}(R).$$

Tomando-se $H_D = \{\lambda_{ij}\,\delta_{ij}\}$, virá:

$$\overline{D}_{ij}(R)\,\lambda_{jj} = \lambda_{ii}\,\overline{D}_{ij}(R) \;\rightarrow\; \overline{D}_{ij}(R)\,(\lambda_{ii} - \lambda_{jj}) = 0\,.$$

Se: $\lambda_{ii} \neq \lambda_{jj}$, $\rightarrow$ $\overline{D}_{ij}(R) = 0$, $\forall\, R \in G$.

Então, $\overline{D}(R)$ é redutível o que contraria a hipótese do teorema. Assim:

$$A_+ = \lambda_+ E \quad \text{e} \quad A_- = \lambda_- E\,.$$

Portanto:

$$A = A_+ + iA_- = \lambda_+ E + i\lambda_- E = (\lambda_+ + i\lambda_-)\,E \;\rightarrow\; \boxed{A = \lambda\, E} \quad \text{C.Q.D.}$$

Teorema 2.2.3 - Lema de Schur. Se {D (R)} de dimensão **m** e {D' (R)} de dimensão **n**, são representações de um grupo **G** e **A** é uma matriz **m x n** tal que:

$$D(R)\,A = AD'(R)\,,$$

então:

a) Se m = n, logo A = 0 ou não-singular (det A ≠ 0), e neste caso $D(R)$ e $D'(R)$ são representações equivalentes;

b) Se m ≠ n, logo **A** é uma matriz nula.

Demonstração:

Por hipótese, temos que:

$$D(R)\,A = A\,D'(R)\,,$$

ou:

$$[D(R)A]^+ = [AD'(R)]^+ \;\rightarrow\; A^+\,D^+(R) = D'^+(R)\,A^+\,.$$

Sendo D^+ (R) uma matriz unitária (Teorema 2.2.1), temos:

$$D^+ (R) = D^{-1} (R) \text{, então:}$$

$$A^+ D^{-1} (R) = D'^{-1} (R) A^+ .$$

Pela Definição 2.1.1.b, temos: $D^{-1} (R) = D (R^{-1})$.

Chamando-se $D (R^{-1}) = D (S)$, virá:

$$A^+ D (S) = D' (S) A^+ .$$

Portanto, $\forall$ T $\in$ G, temos:

$$D (T) A = A D' (T)$$

e

$$A^+ D (T) = D' (T) A^+ \qquad \text{(multiplicando por A)}$$

$$A A^+ D (T) = A D' (T) A^+ = D (T) A A^+ .$$

Ora, se A A^+ comuta com D(T), pelo Teorema 2.2.2, virá:

$$A A^+ = \lambda E.$$

(a) Se m = n, então A é uma matriz quadrada, logo:

$$\det (A A^+) = \det (\lambda E) = \lambda^n,$$

$$\det A. \det A^+ = \lambda^n \rightarrow (\det A)^2 = \lambda^n.$$

a.I) Se $\lambda \neq 0$, então det A $\neq 0$, logo existe A^{-1}, portanto:

$$D (T) A = A D' (T) \rightarrow A^{-1} D (T) A = A^{-1} A D' (T) \rightarrow$$

$D' (T) = A^{-1} D (T) A$, isto é, D(T) e D′(T) são equivalentes.

a.II) Se $\lambda = 0$, então $A\,A^{+} = 0 \rightarrow \sum\limits_{k} A_{ik}\ A^{+}_{kj} = 0$,

ou $\sum\limits_{k} A_{ik}\ A^{*}_{jk} = 0$.

Tomando-se i = j, virá: $\sum\limits_{k} A_{ik}\ A^{*}_{ik} = 0 \rightarrow$

$$\sum_{k} \left|A_{ik}\right|^{2} = 0 \rightarrow A_{ik} = 0\ ,\ \forall\ i,k\ .$$

(b) Se $m \neq n$, então **A** é uma matriz retangular. Tomando-se $m < n$, então podemos construir uma outra matriz **B** (n x n), a partir de **A** e completando com (n – m) colunas de zeros. Assim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \ \text{e}\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0...0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0...0 \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0...0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que: $AA^{+} \equiv BB^{+}$. Então, sendo $AA^{+} = \lambda\,E \rightarrow \det A \det A^{+} = \det B \det B^{+} = 0$, pois $\det B = 0$, então:

$$\det A \det A^{+} = \lambda^{\alpha} = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \boxed{A = 0} \qquad \text{C.Q.D.}$$

Teorema 2.2.4 - Teorema da Ortogonalidade. Seja um grupo G que contém g elementos, e seja $D^{(\mu)}$ (R) ($\forall$ R ε G) representações unitárias e irredutíveis de G. Então:

$$\sum_{R} D_{ie}^{(\mu)}(R)\ D_{mj}^{(\nu)}(R^{-1}) = \sum_{R} D_{ie}^{(\mu)}(R)\ D^{*}{}_{jm}^{(\nu)}(R) =$$

$$= \frac{g}{n_{\mu}}\ \delta_{\mu\nu}\ \delta_{ij}\ \delta_{em}\ ,$$

onde n_μ representa a dimensionalidade da representação.

Demonstração:

Como podemos multiplicar matrizes quadradas de ordens diferentes, vamos, portanto, construir a seguinte matriz:

$$A = \sum_R D^{(\mu)}(R)\ B\ D^{+(\nu)}(R)\ ,$$

onde B é uma matriz (μ x ν) arbitrária. Multiplicando-se a matriz A definida acima, pela esquerda, por $D^{(\mu)}(S)$, virá:

$$D^{(\mu)}(S)A = \sum_R D^{(\mu)}(S)\ D^{(\mu)}(R)\ B\ D^{+(\nu)}(R)\ .$$

Por hipótese, **D** são representações unitárias, então:

$$D^{+(\nu)}(R) = D^{-1(\nu)}(R) \quad \text{e} \quad D^{+(\nu)}(S)\ D^{(\nu)}(S) = E\ .$$

Por outro lado, segundo a Definição 2.1.1.b, temos

$$D^{-1}(S) = D(S^{-1})\ ,$$

então:

$$D^{(\mu)}(S)\ A = \sum_R D^{(\mu)}(S)\ D^{(\mu)}(R)\ B\ D^{(\nu)}(R^{-1})\ .$$

sendo:

$$D^{(\nu)}(S^{-1})\ .\ D^{(\nu)}(S) = D^{(\nu)}(S^{-1}S) = D^{(\nu)}(E) = E\ ,$$

logo:

$$D^{(\mu)}(S)\ A = \sum_R D^{(\mu)}(S)\, D^{(\mu)}(R)\, B\, D^{(\nu)}(R^{-1}) D^{(\nu)}(S^{-1}) D^{(\nu)}(S)\ .$$

Usando-se a Definição 2.1.1.a, virá:

$$D^{(\mu)}(S)\ A = \sum_R D^{(\mu)}(SR)\, B\, D^{(\nu)}(R^{-1}\, S^{-1})\, D^{(\nu)}(S).$$

Ora,

$$R^{-1}\, S^{-1} = (SR)^{-1}, \text{ então:}$$

$$D^{(\mu)}(S)\;\; A = \sum_R D^{(\mu)}(SR)\, B\, D^{(\nu)}\,[(SR)^{-1}]\, D^{(\nu)}\,(S).$$

Sendo, ainda, segundo a Definição 2.1.1.b,

$$D^{-1}\,(R) = D\,(R^{-1}) \quad \text{e} \quad D^{-1}\,(R) = D^{+}\,(R), \text{ então:}$$

$$D^{(\mu)}(S)\;\; A = \sum_R D^{(\mu)}(SR)\, B\, D^{+(\mu)}\,(SR)\, D^{(\nu)}\,(S)\;.$$

Pelo Teorema do Rearranjamento (Teorema 1.3.1), temos:

$$\sum_R D^{(\mu)}(SR)\, B\, D^{+(\nu)}\,(SR) = \sum_R D^{(\mu)}(R)\, B\, D^{+(\nu)}\,(R).$$

Portanto:

$$D^{(\mu)}(S)\;\; A = \left(\sum_R D^{(\mu)}(R)\, B\, D^{+(\nu)}\,(R)\right) D^{(\nu)}\,(S).$$

Então, $D^{(\mu)}(S)\;\; A = A\;\; D^{(\mu)}(S)$, devido à definição de **A.**

Agora, para demonstrar a tese do teorema, vamos usar o **Lema de Schur** (Teorema 2.2.3).

a) Se $D^{(\mu)}(S)$ e $D^{(\nu)}(S)$ são não-equivalentes ($\mu \neq \nu$), então

A = 0, logo:

$$A_{im} = \sum_R \sum_{jl} D_{ij}{}^{(\mu)}(R)\, B_{jP}\, D_{Pm}{}^{+(\nu)}(R) = 0\;.$$

Como B é arbitrário, vamos escolher $B_{jP} = 1$, e os demais elementos nulos, então:

$$\sum_R D_{ij}^{(\mu)}(R)\ D_{\ell m}^{+(\nu)}(R) = 0 .$$

b) Se $D^{(\mu)}(R)$ e $D^{(\nu)}(R)$ são equivalentes ($\mu = \nu$), então:

$$A = \lambda\ E \rightarrow\ A_{im} = \lambda\delta_{im} = \sum_R \sum_{j,\ell} D_{ij}^{(\mu)}(R)\ B_{j\ell}\ D_{\ell m}^{+(\mu)}(R) .$$

Como **B** é arbitrário, vamos escolher $B_{jP} = 1$ e os demais elementos nulos, então:

$$\lambda\ \delta_{im} = \sum_R D_{ij}^{(\mu)}(R)\ D_{\ell m}^{+(\mu)}(R) .$$

Colocando-se i = m e somando-se os dois lados dessa equação para $i = 1,2,...,n_\mu$, virá:

$$\sum_R \sum_{i=1}^{n_\mu} D_{ij}^{(\mu)}(R)\ D_{\ell i}^{+(\mu)}(R) = \sum_{i=1}^{n_\mu} \lambda\ \delta_{ii} = n_\mu \lambda .$$

Por outro lado, temos:

$$\sum_R \sum_{i=1}^{n_\mu} D_{ij}^{(\mu)}(R)\ D_{\ell i}^{+(\mu)}(R) = \sum_R \sum_{i=1}^{n_\mu} D_{ij}^{(\mu)}(R) D_{\ell i}^{-1(\mu)}(R) =$$

$$= \sum_R \sum_{i=1}^{n_\mu} D_{ij}^{(\mu)}(R)\ D_{\ell i}^{(\mu)}(R^{-1}) = \sum_R \sum_{i=1}^{n_\mu} D_{\ell i}^{(\mu)}(R^{-1}) D_{ij}^{(\mu)}(R) =$$

$$= \sum_R [D^{(\mu)}(R^{-1})\ D^{(\mu)}(R)]_{Pj} = \sum_R [D^{(\mu)}(R^{-1}R)]_{Pj} =$$

$$= \sum_R D^{(\mu)}(E)_{Pj} = g\delta_{Pj} .$$

Assim:

$$n_\mu \lambda = g\ \delta_{Pj} \rightarrow \lambda = \frac{g}{n_\mu}\ \delta_{\ell j} ,$$

e

$$\sum_R D_{ij}^{(\mu)}(R)\ D_{\ell m}^{+(\mu)}(R) = \frac{g}{n_\mu} \delta_{\ell j}\, \delta_{im} \ .$$

Agora, juntando-se os resultados dos itens a) e b), teremos:

$$\sum_R D_{ij}^{(\mu)}(R)\ D_{\ell m}^{+(\nu)}(R) = \frac{g}{n_\mu} \delta_{\mu\nu}\ \delta_{jP}\, \delta_{im} \ . \qquad \text{C.Q.D.}$$

2.2.1 Interpretação Geométrica do Teorema da Ortogonalidade

O Teorema da Ortogonalidade (Teorema 2.2.4) nos mostra que se tomarmos as representações como "vetores" de um espaço vetorial de dimensão **g**, tais vetores são "Ortogonais" nesse espaço (espaço de elemento do grupo). Esses vetores são representados por três índices: μ, índice da dimensão da representação, e **i** e **j**, índices de linha e de coluna da representação propriamente dita. Os "eixos" desse espaço vetorial são representados pelos elementos componentes do grupo R = $\{E, A_2, ..., A_g\}$.Portanto, tais "vetores" são denotados por $\{D_{ij}^{(\mu)}(R)\}$, onde R representa o índice de "componentes" desses "vetores". Quantos desses vetores existem? Uma representação $D^{(\mu)}$ de dimensionalidade n_μ é constituída de matrizes (n_μ x n_μ), portanto, contém n_μ^2 desses "vetores". Assim, o número total deles, vale:

$$n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2} + n_3^{\ 2} + \ldots = \sum_{\mu=1}^{N} n_\mu^{\ 2} \quad ,$$

onde essa soma se estende a todas as representações irredutíveis não-equivalentes. Ora, na teoria dos espaços vetoriais demonstra-se que o número de vetores ortogonais não excede a dimensão do espaço, então:

$$\sum_{\mu=1}^{N} n_\mu^{\ 2} \ \leq \ g.$$

Exercício 2.2.1 Demonstre a **Relação de Completeza** para as representações de um dado grupo:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n_\nu} \sqrt{\frac{n_\nu}{g}}\ D_{ij}^{(\nu)}(R) \sqrt{\frac{n_\nu}{g}}\ D_{ij}^{*(\nu)}(R') \ = \ \delta_{RR'} \ \ .$$

2.3 Caráteres das Representações

Definição 2.3.1 O traço de uma representação matricial $D_{ij}^{(\mu)}$ (R) é chamado de **caráter** de **R** e denotado por:

$$X^{(\mu)}(R) \ = \ \text{tr}\ D_{ij}^{(\mu)}(R) = \sum_i \ D_{ii}^{(\mu)}(R) \quad .$$

Da definição acima, resultam as seguintes conseqüências:

a) Duas representações equivalentes do mesmo grupo têm os mesmos caráteres, já que o traço de duas matrizes equivalentes são iguais;

b) O caráter da representação do elemento unitário **E** do grupo é igual à dimensionalidade da representação, pois a matriz correspondente a **E** é a matriz unitária;

c) Todos os elementos de uma dada classe de um grupo têm o mesmo caráter, pois que se **A** é um elemento de uma classe, o outro tem a forma XAX^{-1} e as correspondentes matrizes têm traços iguais.

Exemplo 2.3.1 Calcule os caráteres do grupo S_3.

Usando-se a Definição 2.3.1 e o resultado do Exemplo 2.1.1, é fácil construir a seguinte tabela de caracteres do grupo S_3.

CLASSE	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	ELEMENTOS
C_1	1	1	2	E
$3C_2$	1	–1	0	$P_1, P_2, P_3,$
$2C_3$	1	+1	–1	P_4, P_5

Teorema 2.3.1 Os caráteres das representações irredutíveis de um grupo formam um conjunto vetores ortogonais no espaço de elemento de grupo.

Demonstração:

Vamos partir do **Teorema da Ortogonalidade** (Teorema 2.2.4):

$$\sum_R D_{ij}^{(\mu)}(R)\; D_{\ell m}^{+(\nu)}(R) \;=\; \frac{g}{n_\mu}\,\delta_{\mu\nu}\;\delta_{im}\,\delta_{jP}\,.$$

Façamos i = j e m = P e somemos sobre esses índices, assim:

$$\sum_R \sum_i \sum_\ell D_{ii}^{(\mu)}(R)\, D^{+}{}_{\ell\ell}^{(\nu)}(R) = \frac{g}{n_\mu}\,\delta_{\mu\nu}\,\sum_i \sum_\ell \delta_{\mu\nu}\delta_{i\ell}\,.$$

Usando-se a definição de caráter (Definição 2.3.1), virá

$$\sum_R X^{(\mu)}(R)\, X^{+(\nu)}(R) \;= \frac{g}{n_\mu}\,\delta_{\mu\nu}\sum_{i,\ell}(\delta_{iP})^2\,.$$

Sendo:

$$\sum_{i,\ell} (\delta_{iP})^2 = n_\mu \text{ , teremos:}$$

$$\sum_R X^{(\mu)}(R)\, X^{+(\nu)}(R) = g\delta_{\mu\nu} .$$

Porém:

$$X^{+(\nu)}(R) = X^{*(\nu)}(R) \text{ , logo:}$$

$$\sum_R X^{(\mu)}(R)\, X^{*(\nu)}(R) = g\delta_{\mu\nu} .$$

Contudo, se C_k representa o número de elementos em uma classe C_k e **S** é o número de classes, então:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{S} X^{(\mu)}(C_k)\, X^{*(\nu)}(C_k)\, c_k = g\delta_{\mu\nu} = \\ &= \sum_{k=1}^{S} \sqrt{\frac{c_k}{g}}\, X^{(\mu)}(C_k) \sqrt{\frac{c_k}{g}}\, X^{*}(\nu)\,(C_k) = \delta_{\mu\nu} \end{aligned}} \quad . \qquad \text{C.Q.D.}$$

2.3.1 Interpretação Geométrica do Teorema da Ortogonalidade dos Caráteres de um Grupo

O Teorema 2.3.1 nos mostra que se considerarmos os caráteres das representações irredutíveis de um grupo como sendo "vetores" de um espaço S-dimensional, tais vetores são "ortogonais". Pela Teoria dos Espaços Vetoriais, o número desses "vetores" não excede a dimensão do espaço, ou seja: $n \leq S$.

Teorema 2.3.2 Para um grupo finito, temos:

a) $\sum n_\mu^2 = g$,

b) N = S, isto é, o número de representações irredutíveis do grupo é igual ao número de classes.

Demonstração:

Parte a:

Segundo a Definição 2.1.4.c, temos:

$$D(R) = \sum_\nu a_\nu D^{(\nu)}(R) .$$

Usando-se a definição de caráter de um grupo (Definição 2.3.1) virá:

$$X_j(C_k) = \sum_\nu a_\nu X_j^{(\nu)}(C_k) .$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação acima por $X_j^{*(\mu)}(C_k)\, c_k$, e somando-se em **k**, teremos:

$$\sum_k X_j(C_k)\, X_j^{*(\mu)}(C_k)\, c_k = \sum_\nu \sum_k a_\nu X_j^{(\nu)}(C_k)\, X_j^{*(\mu)}(C_k)\, c_k$$

Usando-se o resultado do Teorema 2.3.1, resulta:

$$\sum_k X_j(C_k)\, X_j^{*(\mu)}(C_k)\, c_k = \sum_\nu g\, \delta_{\mu\nu}\, a_\nu = g a_\mu ,$$

$$\boxed{a_\mu = \frac{1}{g} \sum_k X_j(C_k)\, X_j^{*(\mu)}(C_k)\, c_k = \frac{1}{g} \sum_R X(R)\, X^{*(\mu)}(R)} \quad .$$

Para demonstrar o proposto no item a) do Teorema em questão, vamos considerar as representações regulares do grupo, sem, contudo, com isso, perdermos a generalidade. As representações regulares são definidas por:

$$D_{ij}^{(reg)}(G_\mu) = \begin{cases} 1, \text{ se } G\mu\ G_j = G_i \ , \\ 0, \text{ nos demais casos.} \end{cases}$$

Da definição acima, vê-se que:

$D_{ij}^{(reg)}(G_\mu) = 1$, para $G_\mu = E$, pois: $EG_i = G_i$. Então:

$X^{(reg)}(E) = g$; $X^{(reg)}(R) = 0$, para $R \neq E$.

Portanto, a expressão para a_μ deduzida anteriormente, tomará a seguinte forma:

$$a_\mu = \frac{1}{g} \sum_R X(R)\, X^{*(\mu)}(R) = \frac{1}{g} \sum_R X^{(reg)}(R)\, X^{*(\mu)}(R) =$$

$$= \frac{1}{g}\, g\, X^{*(\mu)}(E) \rightarrow a_\mu = n_\mu$$

Por outro lado, temos:

$$X_j(R) = \sum_\mu a_\mu X_j^{(\mu)}(R) \ ,$$

então:

$$X_j^{(reg)}(R) = \sum_{\mu=1}^{N} a_\mu X_j^{(\mu)}(R) \ .$$

Porém: $a_\mu = n_\mu$ e $X_j^{(reg)}(R) = g$, se R = E, logo:

$$g = \sum_{\mu=1}^{N} a_\mu X_j^{(\mu)}(E) = \sum_{\mu=1}^{N} a_\mu n_\mu ,$$

$$\boxed{g = \sum_{\mu=1}^{N} n_\mu^2} . \qquad \text{C.Q.D.}$$

Exercício 2.3.1. Demonstre:

a) O item b) do Teorema 2.3.2;

b) O **Teorema da Completeza**:

$$\sum_{\mu=1}^{N} X^{\mu}(C_P) \sqrt{c_\ell}\, X^{*(\nu)}(C_k) \sqrt{c_k} = g \ \delta_{k\ell}$$

ou:

$$\sum_{\mu} \sqrt{\frac{c_\ell}{g}}\, X^{(\mu)}(C_\ell) \sqrt{\frac{c_k}{g}}\, X^{*(\nu)}(C_k) = \delta_{k\ell} ,$$

onde **N** é o número de elementos na classe c_k de uma representação irredutível de um dado grupo;

c) $N_j X^{(\mu)}(C_j) N_k X^{(\mu)}(C_k) = \ell_i \sum_{\ell} C_{jk\ell} N_\ell X^{(\mu)}(C_\ell)$.

Exemplo 2.3.2 Estude a decomposição em representações irredutíveis do grupo S_3**.**

Os elementos do grupo S_3 são: E, P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5. Então, sendo:

$$g = \sum_{n=1}^{N} n_{\mu}^{2}, \quad \text{logo: } 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2,$$

o que significa dizer que o grupo S_3 tem apenas duas representações irredutíveis de dimensão 1 e apenas uma de dimensão 2. Portanto, qualquer representação de dimensão 3 será redutível. Calculemos uma dessas representações.

a) Elemento $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$D(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b) Elemento $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Como essa permutação troca o primeiro elemento pelo segundo e deixa o terceiro irredutível, virá:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} Aa + Bb + Cc &= b \\ Da + Eb + Fc &= a \\ Ga + Hb + Ic &= c \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} A = C = 0;\ B = D = 1 = 1; \\ \\ E = F = G = H = 0. \end{array}$$

então:

$$D\,(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Elemento $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

É fácil ver que:

$$D\,(P_2)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix},$$

então:

$$D\,(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Elemento $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

É fácil ver que:

$$D\,(P_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}, \text{ então:}$$

$$D\,(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Elemento $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

É fácil ver que:

$$D(P_4)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow D(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Elemento $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

É fácil ver que:

$$D(P_5)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \rightarrow D(P_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a tabela de caráteres dessa representação será:

CLASSE	ELEMENTOS	X
C_1	E	3
$3C_2$	P_1, P_2, P_3	1
$2C_3$	P_4, P_5	0

Essa tabela de caráteres nos permite descrever que:

$$D(R) = \sum_{\nu} a_{\nu}\, D^{(\nu)}(R)\,,$$

ou:

$$a_{\nu} = \frac{1}{g} \sum_{k} X_j(C_K) X_j^{*(\nu)}(C_k)\; c_k\,.$$

Portanto:

$$a_1 = \frac{1}{6}[X\,(C_1)X^{*(1)}(C_1)\;c_1 \;+\; X\,(C_2)X^{*(1)}(C_2)\;c_2 + X\,(C_3)X^{*(1)}(C_3)\;c_3] =$$

$$= \frac{1}{6}\;[3\times 1\times 1 \;+ 1\times 1\times 3 \;+\; 0\times 1\times 2] = 1,$$

$$a_2 = \frac{1}{6}[X\,(C_1)X^{*(2)}(C_1)\;c_1 \;+\; X\,(C_2)X^{*(2)}(C_2)\;c_2 + X\,(C_3)X^{*(2)}(C_3)\;c_3] =$$

$$= \frac{1}{6}\;[3\times 1\times 1 \;+ 1\times(-1)\times 3 \;+\; 0\times 1\times 2] = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{6}[X\,(C_1)X^{*(3)}(C_1)\;c_1 \;+\; X\,(C_2)X^{*(3)}(C_2)\;c_2 + X\,(C_3)X^{*(3)}(C_3)\;c_3] =$$

$$= \frac{1}{6}\;[3\times 2\times 1 \;+ 1\times 0\times 3 \;+\; 0\times(\text{-}1)\times 2] = 1.$$

Portanto: $\boxed{D = D_1^{(1)} \oplus D_2^{(3)}}\,.$

Exercício 2.3.2 Estude a decomposição das representações irredutíveis de uma representação 6-dimensional regular do grupo S_3.

Exemplo 2.3.3 Verifique as relações de ortogonalidade e de completeza para os caracteres das representações irredutíveis do grupo S_3.

As relações de ortogonalidade e de completeza dos caracteres de um grupo são dadas, respectivamente, por:

$$\sum_{k=1}^{S} X^{(\mu)}(C_k)\, X^{*(\nu)}(C_k)\, c_k = g\delta_{\mu\nu}\,, \qquad \text{(Teorema 2.3.1)}$$

e $$\sum_{\mu=1}^{N} \sqrt{\frac{c_\ell}{g}}\, X^{(\mu)}(C_\ell) \sqrt{\frac{c_k}{g}}\, X^{*(\mu)}(C_k) = \delta_{k\ell}\,. \qquad \text{(Exercício 2.3.1.b)}$$

A tabela dos caráteres de S_3 é dada por (cf. Exemplo 2.3.1):

CLASSE	ELEMENTOS	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$
C_1	E	1	1	2
$3C_2$	P_1, P_2, P_3	1	-1	0
$2C_3$	P_4, P_5	1	1	-1

a) **Relações de Ortogonalidade**

$$X^{(1)}(C_1)X^{*(1)}(C_1)\, c_1 + X^{(1)}(C_2)X^{*(1)}(C_2)\, c_2 + X^{(1)}(C_3)X^{*(1)}(C_3)\, c_3 =$$

$$= 1\times 1\times 1 + 1\times 1\times 3 + 1\times 1\times 2 = 6 = g\,\delta_{1\,1} = g,$$

$$X^{(1)}(C_1)X^{*(2)}(C_1)\, c_1 + X^{(1)}(C_2)X^{*(2)}(C_2)\, c_2 + X^{(1)}(C_3)X^{*(2)}(C_3)\, c_3 =$$

$$= 1\times 1\times 1 + 1\times(-1)\times 3 + 1\times 1\times 2 = 1\text{-}3 + 2 = 0 = g\,\delta_{1\,2} = 0,$$

$$X^{(1)}(C_1)X^{*(3)}(C_1)\, c_1 + X^{(1)}(C_2)X^{*(3)}(C_2)\, c_2 + X^{(1)}(C_3)X^{*(3)}(C_3)\, c_3 =$$

$$= 1\times 2\times 1 + 1\times 0\times 3 + 1\times(\text{-}1)\times 2 = 2 + 0 - 2 = 0 = g\,\delta_{1\,3} = 0.$$

Como:

$X^{(\mu)}(C_k) = X^{*(\mu)}(C_k)$, portanto, as demais relações de ortogonalidade são idênticas a essas demonstradas acima.

b) **Relações de Completeza**

$$\sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{(1)}\,(C_1)\,\sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{*(1)}(C_1) + \sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{(2)}\,(C_1)\,\sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{*(2)}(C_1) +$$

$$+\sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{(3)}\,(C_1)\,\sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{*(3)}(C_1) = \frac{1\times1\times1}{6}+\frac{1\times1\times1}{6}+\frac{2\times2\times1}{6} = 1 = \delta_{1\,1} = 1,$$

$$\sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{(1)}\,(C_1)\,\sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{*(1)}(C_2) + \sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{(2)}\,(C_1)\,\sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{*(2)}(C_2) +$$

$$+\sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{(3)}(C_1)\,\sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{*(3)}(C_2) = \sqrt{\frac{1}{6}}\times1\times\sqrt{\frac{3}{6}}\times1 + \sqrt{\frac{1}{6}}\times1\times\sqrt{\frac{3}{6}}\times(-1) +$$

$$+\sqrt{\frac{1}{6}}\times2 + \sqrt{\frac{3}{6}}\times 0 = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} = 0 = \delta_{1\,2},$$

$$\sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{(1)}\,(C_1)\sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{*(1)}(C_3) + \sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{(2)}\,(C_1)\sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{*(2)}(C_3) +$$

$$+\sqrt{\frac{c_1}{g}}\, X^{(3)}(C_1)\,\sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{*(3)}(C_3) = \sqrt{\frac{1}{6}}\times(+1)\times\sqrt{\frac{2}{6}}\times1 + \sqrt{\frac{1}{6}}\times1\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2}{6}}\times1 + \sqrt{\frac{1}{6}}\times2\times\sqrt{\frac{2}{6}}\times(-1) = \frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2\sqrt{2}}{6} = 0 = \delta_{1\,3},$$

$$\sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{(1)}\ (C_2)\ \sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{*(1)}(C_3) + \sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{(2)}\ (C_2)\ \sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{*(2)}(C_3) +$$

$$+\sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{(3)}(C_2)\ \sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{*(3)}(C_3) = \sqrt{\frac{3}{6}}\ \times(+1)\ \times\sqrt{\frac{2}{6}}\ \times(+1) + \sqrt{\frac{3}{6}}\ \times(-1)\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2}{6}}\ \times 1 + \sqrt{\frac{3}{6}}\ \times\ 0\ \times\ \sqrt{\frac{2}{6}}\ \mp(-1)= \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} + 0 = 0 = \delta_{2\,3},$$

$$\sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{(1)}\ (C_2)\ \sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{*(1)}(C_2)\ +\ \sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{(2)}\ (C_2)\ \sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{*(2)}(C_2)\ +$$

$$+\sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{(3)}(C_2)\ \sqrt{\frac{c_2}{g}}\, X^{*(3)}(C_2)\ = \sqrt{\frac{3}{6}}\ \times 1\times\ \sqrt{\frac{3}{6}}\ \times 1\ +\ \sqrt{\frac{3}{6}}\ \times(-1)\times$$

$$\times\sqrt{\frac{3}{6}}\ \times(-1)\ +\ \sqrt{\frac{3}{6}}\ \times\ 0\ \times\ \sqrt{\frac{3}{6}}\ \times\ 0 = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1 = \delta_{2\,2},$$

$$\sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{(1)}\ (C_3)\ \sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{*(1)}(C_3) + \sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{(2)}\ (C_3)\ \sqrt{\frac{c_3}{g}}\, X^{*(2)}(C_3) +$$

$$+\sqrt{\frac{c_3}{g}}\,X^{(3)}(C_3)\,\sqrt{\frac{c_3}{g}}\,X^{*(3)}(C_3) = \sqrt{\frac{2}{6}}\times 1\times\sqrt{\frac{2}{6}}\times 1 + \sqrt{\frac{2}{6}}\times 1\times\sqrt{\frac{2}{6}}\times 1 +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{6}}\times(-1)\times\sqrt{\frac{2}{6}}\times(-1) = \frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6} = 1 = \delta_{3\,3}.$$

Como:

$X^{(\mu)}(C_k) = X^{*(\mu)}(C_k)$, portanto, as demais relações de completeza são idênticas a essas demonstradas acima.

Exercício 2.3.3 Verifique as relações de ortogonalidade e de completeza para as representações irredutíveis do grupo S_3.

Exemplo 2.3.4 Construa a tabela de caráteres do grupo alternativo A_4.

Primeiro, vamos construir os elementos do grupo A_4, que é formado pelas permutações pares de 4 elementos. O número (N) de elementos desse grupo é dado por:

$$N = \frac{n!}{2} = \frac{4!}{2} = 12,$$

assim constituídos:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix};\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$F=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix};\ G=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix};\ H=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix};$$

$$J=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix};\ K=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix};\ L=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}.$$

Para calcular a tabela de caráteres desse grupo A_4 sem construir as representações do mesmo, teremos de calcular primeiramente as classes equivalentes dos elementos do grupo. Para isso, vamos seguir o que foi feito no Exemplo 2.3.3. Assim, depois de um cálculo simples, porém longo, mostra-se que:

$$C_1 = \{I\}\ ;\ C_2 = \{A,B,C\}\ ;\ C_3 = \{D,F,J,K\}\ ;\ C_4 = \{E,G,H,L\}.$$

Sendo o número de representações irredutíveis igual ao número de classes então, o grupo A_4 terá as seguintes representações:

$$D^{(1)}\ ,\ D^{(2)}\ ,\ D^{(3)} \text{ e } D^{(4)},$$

sendo $X^{(1)}$; $X^{(2)}$; $X^{(3)}$ e $X^{(4)}$, os caráteres correspondentes.

Como as dimensionalidades das representações satisfazem à condição:

$$\sum_{\mu=1}^{4} n_\mu^2 = g = 12\,,$$

então, o único conjunto de números inteiros n_μ que satisfaz à relação acima é dado por:

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12,$$

ou seja:

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1 \text{ e } n_4 = 3.$$

Portanto, existem três representações irredutíveis de dimensão 1 e uma de dimensão 3. Como $C_1 = \{I\}$, então:

$$X^{(1)}(C_1) = X^{(2)}(C_1) = X^{(3)}(C_1) = 1 \text{ e } X^{(4)} C_1 = 3.$$

Por outro lado, existe uma representação trivial representada pelo número 1 para qualquer grupo, então $X^{(1)} = 1$, para todo C_i (i = 1,2,3,4). Assim, os primeiros caráteres do grupo A_4 são apresentados na tabela abaixo:

CLASSE	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
C1	1	1	1	3
$3C_2$	1			
$4C_3$	1			
$4C_4$	1			

Determinemos, agora, os demais caráteres do grupo em questão. Para isto, usemos o conceito de ordem de um elemento de um grupo. Assim, segundo a Definição 2.3.1, dado um elemento **g** de um grupo, temos:

$$g^m = I \quad (m \equiv \text{ordem}).$$

Pela definição de representação (Definição 2.1.1) virá:

$$[D(g)]^m = \mathbf{1}, \text{ onde } \mathbf{1} \text{ é a matriz unidade.}$$

Da **Teoria dos Espaços Vetoriais**, sabe-se que existe sempre uma transformação de similaridade que diagonaliza uma dada matriz. Então:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{\ m} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2^{\ m} & & \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 & & \ldots \lambda_n^{\ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Da expressão acima, vê-se que λ_k, auto-valores de D(g), são todos m-raízes da unidade. Assim:

$$X(g) = \mathrm{Tr}\, D(g) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,.$$

Para determinarmos os caracteres que faltam na tabela anterior, precisamos conhecer a **ordem** das classes C_1, C_2, C_3 e C_4. Pela Definição 2.3.1, vê-se que:

$C_1 = \{I\} \rightarrow I^1 = 1$, logo C_1 é de ordem 1,

$C_2 = \{A,B,C\} \rightarrow A^2 =$

$$= A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I,$$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I,$$

$$C^2 = CC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I,$$

então, a ordem de C_2 é 2.

De maneira análoga, mostra-se que C_3 e C_4 são ambas de ordem 3. Tais ordens permitem que se escreva as seguintes expressões:

$$X^{(2)}(C_2) \text{ ou } X^{(3)}(C_2) = \sqrt{1} = 1 \text{ ou } -1\ ,$$

$$X^{(2)}(C_3) \text{ ou } X^{(3)}(C_2) = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ ou } \omega \text{ ou } \omega^2\ ,$$

$$X^{(2)}(C_4) \text{ ou } X^{(3)}(C_4) = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ ou } \omega \text{ ou } \omega^2\ ,$$

onde $\omega = \exp(2\pi\ i/3)$.

Para determinarmos esses caráteres, vamos usar a condição de ortogonalidade entre eles (Teorema 2.3.1):

$$\sum_{k=1}^{S} X^{(\mu)}(C_k)\ X^{*(\nu)}(C_k)\, c_k = g\delta_{\mu\nu}\ .$$

Façamos, por hipótese, $X^{(2)}(C_3) = \omega$ e $X^{(2)}(C_4) = \omega^2$, então:

$$X^{(2)}(C_1)\ X^{*(1)}(C_1)\, c_1 + X^{(2)}(C_2)\ X^{*(1)}(C_2)\, c_2 +$$

$$+ X^{(2)}(C_3)\ X^{*(1)}(C_3)\, c_3 + X^{(2)}(C_4)\ X^{*(1)}(C_4)\, c_4 = g\ \delta_{12} = 0,$$

$$1 \times 1 \times 1 + X^{(2)}(C_2) \times 1 \times 3 + \omega \times 1 \times 4 + \omega^2 \times 1 \times 4 = 0,$$

$$1 + 3\, X^{(2)}(C_2) + 4\omega + 4\omega^2 = 0.$$

Sendo:

$$\omega = \exp(2\pi i/3) = e^{i120^\circ} = \cos 120^\circ + i \text{ sen } 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

$$\omega^2 = \exp(4\pi i/3) = e^{i240^\circ} = \cos 240^\circ + i \text{ sen } 240^\circ = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Então:

$$3X^{(2)}(C_2) = -4(\omega + \omega^2) - 1 = -4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 3,$$

$$X^{(2)}(C_2) = 1 \quad \text{e} \quad X^{(2)}(C_3) = \omega;\ X^{(2)}(C_4) = \omega^2.$$

De maneira análoga, temos:

$$X^{(3)}(C_1)\ X^{*(1)}(C_1)\, c_1 + X^{(3)}(C_2)\ X^{*(1)}(C_2)\, c_2 +$$

$$+X^{(3)}(C_3) \,.\, X^{*(1)}(C_3)\, c_3 + X^{(3)}(C_4)\ X^{*(1)}(C_4)\, c_4 = g\,\delta_{31} = 0.$$

Façamos, por hipótese, $X^{(3)}(C_3) = \omega^2$ e $X^{(3)}(C_4) = \omega^2$, então:

$$1\times1\times1 + X^{(3)}(C_2)\times1\times3 + \omega\times1\times4 + \omega^2\times1\times4 = 0.$$

Então, de maneira análoga ao caso anterior, virá:

$$X^{(3)}(C_2) = 1\ ;\ X^{(3)}(C_3) = \omega^2\ ;\ X^{(3)}(C_4) = \omega.$$

Assim, em vista dos resultados obtidos, a tabela de caráteres de A_4, tomará o seguinte aspecto:

CLASSE	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
C_1	1	1	1	3
$3C_2$	1	1	1	
$4C_3$	1	ω	ω^2	
$4C_4$	1	ω^2	ω	

Resta, por fim, determinar $X^{(4)}(C_2)$, $X^{(4)}(C_3)$ e $X^{(4)}(C_4)$, os quais chamaremos, respectivamente, X, Y e Z. Assim, usando-se a condição de ortogonalidade entre os caracteres (Teorema 2.3.1), virá:

$X^{(4)}(C_1)\, X^{*(1)}(C_1)\, c_1 + X^{(4)}(C_2)\;\; X^{*(1)}(C_2)\, c_2 +$

$+ X^{(4)}(C_3)\, .\, X^{*(1)}(C_3)\, c_3 + X^{(4)}(C_4)\;\; X^{*(1)}(C_4)\, c_4 = g\, \delta_{41} = 0,$

$3\times1\times1 + X\times1\times3 + Y\times1\times4 + Z\times1\times4 = 0,$

$$3 + 3X + 4Y + 4Z = 0\ , \qquad (\alpha)$$

$X^{(4)}(C_1)\, X^{*(2)}(C_1)\, c_1 + X^{(4)}(C_2)\;\; X^{*(2)}(C_2)\, c_2 +$

$+X^{(4)}(C_3)\, .\, X^{*(2)}(C_3)\, c_3 + X^{(4)}(C_4)\;\; X^{*(2)}(C_4)\, c_4 = g\, \delta_{42} = 0,$

$3\times1\times1 + X\times1\times3 + Y\times\, \omega^* \times4 + Z\times(\omega^2)^* \times4 = 0.$

Sendo: $\omega^* = [\exp(2\pi i/3)]^* = \exp(-2\pi i/3) = \cos 120^o - i \text{ sen } 120^o =$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2\ ,$$

e

$(\omega^2)^* = [\exp(240^o i)]^* = \exp(-240^o i) = \cos 240^o - i \text{ sen } 240^o =$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega.$$

Assim:

$$3 + 3X + 4Y\;\; \omega^2 + 4Z\, \omega = 0\ . \qquad (\beta)$$

$X^{(4)}(C_1)\, X^{*(3)}(C_1)\, c_1 + X^{(4)}(C_2)\;\; X^{*(3)}(C_2)\, c_2 +$

$+ X^{(4)}(C_3)\, X^{*(3)}(C_3)\, c_3 + X^{(4)}(C_4)\;\; X^{*(3)}(C_4)\, c_{4\, = g}\, \delta^{43} = 0\ ,$

$$3\times1\times1 + X\times1\times3 + Y\times(\omega^2)^* \times4 + Z\times\omega^*\times4 = 0,$$

$$3 + 3X + 4Y\,\omega + 4\,Z\,\omega^2 = 0\,. \qquad (\gamma)$$

A solução do sistema de equações (α), (β) e (γ), fornece:

$$X = -1;\ Y = Z = 0\,.$$

Assim, a tabela final de caráteres de A_4 será:

CLASSE	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
C_1	1	1	1	3
$3C_2$	1	1	1	-1
$4C_3$	1	ω	ω^2	0
$4C_4$	1	ω^2	ω	0

Exercício 2.3.4 Encontre as classes do grupo A_4 utilizando o Exemplo 2.3.4.

2.4 Produto Direto de Representações

Definição 2.4.1 Chama-se **Produto Direto** de uma matriz $A(m_1 \times m_2)$ com uma matriz $B(n_1 \times n_2)$ a uma matriz $C(m_1 n_1 \times m_2 n_2)$, tal que (Mariot, 1962):

$$C = A \otimes B;\ C_{jp;\,kg} = A_{jk}\,B_{pq}\,.$$

Exemplo 2.4.1 Efetue o **Produto Direto** entre as matrizes A(2x3) e B(3x2).

$$A \otimes B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \ \text{x} \ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{11} & a_{13}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{21} & a_{13}b_{22} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{13}b_{31} & a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{23}b_{11} & a_{23}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{23}b_{21} & a_{23}b_{22} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{23}b_{31} & a_{23}b_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11;11} & c_{11;12} & c_{11;21} & c_{11;22} & c_{11;31} & c_{11;32} \\ c_{12;11} & c_{12;12} & c_{12;21} & c_{12;22} & c_{12;31} & c_{12;32} \\ c_{13;11} & c_{13;12} & c_{13;21} & c_{13;22} & c_{13;31} & c_{31;32} \\ c_{21;11} & c_{21;12} & c_{21;21} & c_{21;22} & c_{21;31} & c_{21;32} \\ c_{22;11} & c_{22;12} & c_{22;21} & c_{22;22} & c_{22;31} & c_{22;32} \\ c_{23;11} & c_{23;12} & c_{23;21} & c_{23;22} & c_{23;31} & c_{23;32} \end{vmatrix} .$$

Exercício 2.4.1 Demonstre que:

a) O produto direto é associativo, isto é:

$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$;

b) O produto direto não é comutativo, isto é:

$A \otimes B \neq B \otimes A$.

Teorema 2.4.1 Sejam A_1 e A_2 duas matrizes $(m\times m)$ e B_1 e B_2 duas matrizes $(n\times n)$, então:

$$(A_1 \otimes B_1) \;.\; (A_2 \otimes B_2) = (A_1 \,.\, A_2) \otimes (B_1 \,.\, B_2) \,.$$

Demonstração:

Partamos da definição de produto usual de matrizes: Assim:

$$\sum_{\alpha,\beta} (A_1 \otimes B_1)_{jp,\,\alpha\beta} \quad (A_2 \otimes B_2)_{\alpha\beta,\,kq} =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} (A_1)_{j\alpha} (B_1)_{p\beta} (A_2)_{\alpha k} (B_2)_{\beta q} = \qquad \text{(Definição2.4.1)}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} (A_1)_{j\alpha} (A_2)_{\alpha k} (B_1)_{p\beta} (B_2)_{\beta q} =$$

$$= (A_1 \,.\, A_2)_{jk} \, (B_1 \,.\, B_2)_{pq} = \left[(A_1 \,.\, A_2) \otimes (B_1 \,.\, B_2)\right]_{jp,kq} . \qquad \text{C.Q.D.}$$

Corolário 2.4.1 Se A e B são duas matrizes quadradas regulares, de dimensão **m** e **n**, respectivamente, então:

$$(A \otimes B)\left(A^{-1} \otimes B^{-1}\right) = \left(AA^{-1}\right) \otimes \left(BB^{-1}\right) = E_m \otimes E_n \equiv E_{mn}$$

$$(E \equiv \text{Matriz Unitária}).$$

Portanto, $(A \otimes B)$ é também regular e sua inversa é dada por:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Exercício 2.4.2

a) Verifique que:

$$(A \otimes B)^{+} = A^{+} \otimes B^{+};$$

b) Partindo do resultado anterior, demonstre que se **U** e **V** são matrizes unitárias, então U ⊗ V também é unitária.

Teorema 2.4.2 O produto direto de duas representações é também uma representação.

Demonstração:

Sejam $D^{(\mu)}$ (R) e $D^{(\nu)}$ R duas representações respectivas dos grupos $G^{(\mu)}$ e $G^{(\nu)}$. Pela definição de representação (Definição 2.1.1), temos:

$$D^{(\mu)}(RS) = D^{(\mu)}(R)\, D^{(\mu)}(S),$$

e

$$D^{(\nu)}(RS) = D^{(\nu)}(R)\, D^{(\nu)}(S).$$

Seja o seguinte produto direto:

$$D^{(\mu \times \nu)}(R) = D^{(\mu)}(R) \otimes D^{(\nu)}(R),$$

então:

$$D^{(\mu \times \nu)}(R) \,.\, D^{(\mu \times \nu)}(S) = \left[D^{(\mu)}(R) \otimes D^{(\nu)}(R) \right] . \left[D^{(\mu)}(S) \otimes D^{(\nu)}(S) \right] =$$

$$=\left[D^{(\mu)}(R)\, D^{(\mu)}(S)\right]\otimes\left[D^{(\nu)}(R)\otimes D^{(\nu)}(S)\right]= \quad \text{(Teorema 2.4.1)}$$

$$=\left[D^{(\mu)}(RS)\right]\otimes\left[D^{(\nu)}(RS)\right]. \qquad \text{(Definição 2.1.1)}$$

Assim:

$$D^{(\mu \times \nu)}(R).\, D^{(\mu \times \nu)}(S) = D^{(\mu \times \nu)}(RS)\,. \qquad \text{C.Q.D.}$$

Exercício 2.4.3 Demonstre que:

a) $D^{(\mu)}(R) \otimes D^{(\nu)}(R) = D^{(\nu)}(R) \otimes D^{(\mu)}(R)$;

b) Se D for uma representação (Ir) redutível, então a matriz adjunta $\overline{D} = \tilde{D}^{-1}$ e D^{*}, também serão. (Obs: o ~ significa transposta.)

Teorema 2.4.3 O caráter do produto direto de duas representações é igual ao produto simples dos caracteres de cada uma de per si.

Demonstração:

Seja:

$$D^{(\mu \times \nu)}(R) = D^{(\mu)}(R) \times D^{(\nu)}(R)\,.$$

Então :

$$\left[D^{(\mu \times \nu)}(R)\right]_{jp,kq} = \left[D^{(\mu)}(R)\right]_{jk} \left[D^{(\nu)}(R)\right]_{pq}.$$

Portanto:

$$\sum_{j,p}\left[D^{(\mu \times \nu)}(R)\right]_{jp,jp}=\left[D^{(\mu)}(R)\right]_{jj}\left[D^{(\nu)}(R)\right]_{pp},$$

$$X^{(\mu \times \nu)}(R)=X^{(\mu)}(R).X^{(\nu)}(R). \qquad \text{C.Q.D.}$$

2.5 Bases para Representações

Ao definirmos representação de um grupo, vimos que uma dado grupo G pode ter várias representações. A cada uma dessas representações podemos associar uma **base** do espaço vetorial subjacente a elas.

Seja, então, um conjunto de funções linearmente independentes e apliquemos a cada uma dessas funções todos os operadores O_R correspondentes a elementos **R** e **G**. Obteremos, assim, um conjunto de funções que pode ser expresso como combinação linear de **n** delas ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n. Aplicando a uma destas funções o operador O_R, obteremos:

$$O_R\ \psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \psi_\mu\ D_{\mu\nu}(R),$$

teremos, então, uma representação onde $D_{\mu\nu}(R)$ **representa** o elemento **R** numa **base** composta pelo conjunto $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\}$.

Definição 2.5.1

a) Uma função é dita invariante pela transformação OR, se e somente se:

$$O_R\ \psi(x)=\psi(x) \quad \text{ou} \quad \psi(x)=\psi(Rx);$$

b) Um operador H é dito invariante pela transformação O_R, se e somente se:

$$[H, OR] = 0 .$$

Teorema 2.5.1 Seja H invariante por um grupo de transformações, isto é,: $[H, O_R] = 0$. Se ε forem os auto-valores de H e ψ_ν suas auto-funções, ou seja: $H\psi_\nu = \varepsilon\ \psi_\nu$, então ψ_ν é base para a representação do grupo de simetria associado.

Demonstração:

$$[H, O_R]\psi_\nu = 0 \rightarrow [H\, O_R - O_R H]\psi_\nu = 0 \rightarrow$$

$$(H\, O_R)\psi_\nu = (O_R H)\psi_\nu \quad \rightarrow \quad H(O_R\ \psi_\nu) = O_R\,(H\,\psi_\nu) =$$

$$= O_R\,(\varepsilon\,\psi_\nu) = \varepsilon(O_R\ \psi_\nu) = \varepsilon \sum_{\mu=1}^{n} \psi_\mu\ D_{\mu\nu}(R). \qquad \text{C.Q.D.}$$

Exercício 2.5.1 Sejam $D^{(\mu)}$ (R) e $D^{(\nu)}$ (R) duas representações irredutíveis de um mesmo grupo G, de dimensão n_μ e n_ν, respectivamente. Sejam as bases das mesmas dadas por:

$$x = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_{n_\mu}) \quad \text{e} \quad y = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_{n_\nu}),$$

de tal modo que:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n_\mu} D_{ij}^{(\mu)}(R)\, x_j \quad \text{e} \quad y_k' = \sum_{\ell=1}^{n_\nu} D_{k\ell}^{(\nu)}(R)\, y_\ell\ .$$

Demonstre que:

$$x_i' \, y_k' = \sum_{j,\ell} D_{ik,j\ell}^{(\mu \times \nu)}(R)\, x_j y_\ell \, .$$

[NOTA: $D^{(\mu \times \nu)}(R)$ não será uma representação irredutível!]

Exemplo 2.5.1 Estude o Grupo da **Equação de Schrödinger**.

Seja um átomo submetido a um potencial de Coulomb:

$$V = -\frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}} \, .$$

A **Equação de Schrödinger** correspondente será:

$$H \, \psi_n = E_n \, \psi_n \, ,$$

ou

$$\left[-\frac{h^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{e^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}} \right] \psi = E\psi \ \ .$$

Vê-se, pela equação acima, que H é invariante pelo grupo de rotações O_R, em torno da origem. Então:

$$[H, O_R] = 0 \, ,$$

logo:

$$H(O_R) = E(O_R \psi) \, .$$

A expressão acima significa que as auto-funções do operador O_R são também auto-funções de H com o mesmo auto-valor.

A **Equação de Schrödinger** nos mostra que:

$$H\,\psi = E\psi\text{, onde: } H = H_1 + H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}\,.$$

Seja:

$$H_1\,\psi_1 = E_1\,\psi_1 \quad \text{e} \quad H_2\,\psi_2 = E_2\,\psi_2\text{, então:}$$

$$H\,\psi = \left(H_1 + H_2\right)\psi\,.$$

Tomando: $\psi = \psi_1\,\psi_2$, então:

$$H\,\psi = \left(H_1 + H_2\right)\psi = \left(H_1 + H_2\right)\psi_1\,\psi_2 = H_1\psi_1\,\psi_2 + H_2\psi_1\,\psi_2 =$$

$$= E_1\psi_1\,\psi_2 + E_2\psi_1\,\psi_2 = \left(E_1 + E_2\right)\psi_1\,\psi_2 = \left(H_1 + H_2\right)\psi = E\psi\,.$$

Assim:

$$\boxed{E = E_1 + E_2}\,.$$

Como $H_1 = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta \equiv -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$,

e

$$H_2 = -\frac{e^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

são invariantes por rotação em torno da origem, então:

$$\left[H_1, O_R\right] = 0 \quad \text{e} \quad \left[H_2, O_R\right] = 0\,.$$

Portanto, se o D_{j1} e D_{j2} são representações do grupo de rotação relativo à H_1 e à H_2, respectivamente, então:

$$D_j^{(1 \times 2)} = D_{j1} \otimes D_{j2},$$

é, também, uma representação de $\psi = \psi_1 \psi_2$, isto é, $D_j^{(1 \times 2)}$ é uma representação de **H** na base ψ.

2.6 Séries e Coeficientes de Clebsch-Gordan

Definição 2.6.1 Segundo a Definição 2.1.4.c, vimos que:

$$D(R) = \sum_{\sigma} a_{\sigma} D^{(\sigma)}(R),$$

onde $D^{(\sigma)}(R)$ são representações irredutíveis do grupo $G(R)$, sendo

$$a_{\sigma} = \frac{1}{g} \sum_{R} X_j(R)\; X_j^{*(\sigma)}(R). \text{ (Teorema 2.3.2.b)}$$

Ainda pelos Teoremas 2.4.2 e 2.4.3, vimos que:

$$D^{(\mu)}(R) \otimes D^{(\nu)}(R) = D^{(\mu \times \nu)}(R),$$

e

$$X^{(\mu)}(R) \otimes X^{(\nu)}(R) = X^{(\mu \times \nu)}(R).$$

Portanto:

$$D^{(\mu)}(R) \otimes D^{(\nu)}(R) = \sum_{\sigma} a_{\sigma} D^{(\sigma)}(R),$$

com:

$$a_{\sigma} \equiv (\mu\, \nu \sigma) = \frac{1}{g} \sum_{R} X^{(\mu)}(R)\, X^{(\nu)}(R)\, X^{*(\sigma)}(R),$$

série essa que se denomina **Série de Clebsch-Gordan.**

Exercício 2.6.1 Mostre que:

a) $(\mu\,\nu\,\sigma) = (\nu\,\mu\,\sigma)$;

b) Se $X(R) = X^*(R)\ \forall R$; então $(\mu\,\nu\,\sigma)$ é totalmente simétrico;

c) O produto direto de duas representações irredutíveis de dimensões n_1 e n_2 ($n_1 \geq n_2$), *não pode* conter representações de dimensão menor que n_1/n_2.

Definição 2.6.2 Dadas duas representações $D^{(\mu)}(R)$ e $D^{(\sigma)}(R)$ e suas respectivas bases $\psi_j^{(\mu)}$ $(j=1,2,..., n_\mu)$ e $\phi_\ell^{(\nu)}$ $(\ell=1,2,..., n_\nu)$. Se $\psi_s^{(\lambda)}$ $(s=1,2,..., n_\lambda)$ for uma base do produto direto das duas representações indicadas acima, isto é: $D^{(\mu)}(R)\otimes D^{(\nu)}(R)$, então:

$$\psi_s(\lambda\,\zeta_\lambda) = \sum_{j,\ell} \psi_\ell^{(\mu)} < \mu_j ; \nu\ell \mid \lambda\,\zeta_\lambda\, s >,$$

onde $\zeta_\lambda = 1,2,..., (\mu\ \nu\ \lambda)$. Os coeficientes $<\mu_j;\nu\ell \mid \lambda\,\zeta_\lambda\, s>$ são chamados **Coeficientes de Clebsch-Gordan**. (É oportuno observar que esses coeficientes têm várias notações.)

Exercício 2.6.2 Mostre que:

a) $\psi_j^{(\mu)}\,\phi_\ell^{(\nu)} = \sum_{\lambda,\zeta_\lambda,s} \psi_s(\lambda\zeta_\lambda) < \lambda\,\zeta_\lambda\, s \mid \mu j ; \nu\ell >$;

b) $\sum_{j,\ell} <\lambda'\zeta'_{\lambda'}\, s'|\mu_j;\nu\ell> <\mu_j;\nu\ell|\lambda\ \zeta_\lambda\ s> = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{\zeta_\lambda\zeta'_{\lambda'}}\ \delta_{ss'};$

c) $\sum_{j,\zeta_\lambda,s} <\mu_j';\nu\ell'|\lambda\ \zeta_\lambda\ s><\lambda\,\zeta_\lambda\ s|\mu j;\nu\ell> = \delta_{jj'}\,\delta_{\ell\ell'};$

d) Para representações unitárias, temos:

d.1) $<\lambda\,\zeta_\lambda\ s|\mu j;\nu\ell> = <\mu j;\nu\ell|\lambda\,\zeta_\lambda\ s>^*;$

d.2) $\sum_{j,\ell} <\mu j;\nu\ell|\lambda'\zeta'_{\lambda'}\ s'>^* <\mu j;\nu\ell|\lambda\,\zeta> \ = \ \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{\zeta_\lambda\zeta'_{\lambda'}}\ \delta_{ss'};$

d.3) $\sum_{\lambda,\zeta_\lambda,s} <\mu j';\nu\ell'|\lambda\,\zeta_\lambda\ s><\mu j;\nu\ell|\lambda\,\zeta_\lambda\ s> \ = \ \delta_{jj'}\,\delta_{\ell\ell'};$

d.4) $\sum_{\ell,j} D_{ij}{}^{(\mu)}(R)\,D_{k\ell}{}^{(\nu)}(R)<\mu j;\nu\ell|\lambda\,\zeta_\lambda\ s> \ =$

$$=\sum_{s'}<\mu i;\nu k|\lambda\,\zeta_\lambda\ s'>\ D^{(\lambda\,\zeta_\lambda)}_{s's}(R);$$

d.5) $\sum_{i,j,k,\ell} <\lambda'\zeta'_{\lambda'}\ s|\mu i;\nu k> D^{(\mu)}_{ij}(R)\,D^{(\nu)}_{k\ell}(R)\times$

$$\times<\mu j;\nu\ell|\lambda\,\zeta_\lambda\ s> = D^{(\lambda\,\zeta_\lambda)}_{s's}\ \delta_{\lambda\lambda'}\ \delta_{\zeta_\lambda\zeta'_{\lambda'}}\ \delta_{ss'};$$

d.6) $D^{(\mu)}_{ij}(R)\,D^{(\nu)}_{k\ell}(R) = \sum_{\lambda,\zeta_\lambda,s',s} <\mu i;\nu k|\lambda\,\zeta_\lambda\ s'>\times$

$$\times D_{s's}^{(\lambda\,\zeta_\lambda)} < \lambda\,\zeta_\lambda\ s\,|\,\mu j\,;\,\nu\ell > .$$

CAPÍTULO 3

Grupos e Álgebras de Lie[1]

3.1 Grupos de Lie

No Capítulo 2 vimos que um grupo cujos elementos são caracterizados por um certo número de parâmetros contínuos, chama-se de **grupo contínuo** (vide Definição 2.1.4).

Por exemplo:

$$g(a) = e^{ia} ,$$

onde **a** é um parâmetro real cujo intervalo de variação é $0 \leq a \leq 2\pi$, pois $\exp(2\pi ni) = 1$, com **n** inteiro ou nulo, é um elemento de um grupo.

Exercício 3.1.1 Mostre que o conjunto de elementos do tipo g(a) visto acima forma um grupo.

Definição 3.1.1 Um grupo é denominado de **grupo contínuo de r-parâmetros** quando todos os seus elementos dependem de um parâmetro real a_λ , onde $\lambda = 1,2,...,r$. Esse grupo é denotado por:

$$g(a_1, a_2,...,a_r) \equiv g(a).$$

Os elementos identidade e inverso desse grupo são definidos da seguinte maneira:

[1] Esta parte deste Capítulo foi ministrado pelo professor José Maria Filardo Bassalo no *Curso de Extensão*, realizado em 1985, na UFPA, sobre **Teoria de Grupo**.

I) Elemento Identidade

$$g(a^o) \equiv g(0), \text{ onde } a^o \equiv (a_1^o, a_1^o, ..., a_r^o),$$

de tal modo que:

$$g(a^o)g(a) = g(a)g(a^o) = g(a).$$

II) Elemento Inverso

$$g(\overline{a}) \equiv [g(a)]^{-1},$$

de tal modo que:

$$g(a)\,g(\overline{a}) = g(\overline{a})\,g(a) = g(a^o) = g(0).$$

Definição 3.1.2 Um grupo de r-parâmetros (r = finito) é dito um **Grupo de Lie** se:

$$c_\lambda = \phi_\lambda\,(a_1, a_2,..., a_r\,; b_1, b_2,...,b_r),$$

ou

$$c = \phi\,(a;b),$$

é uma função analítica, isto é, pode ser desenvolvida em **Série de Taylor** uniformemente convergente, dos parâmetros **a** e **b**.

Definição 3.1.3 Seja a seguinte transformação:

$$x_i' = f_i\,(x_1, x_2,..., x_n\,; a_1,a_2,...a_r)\ (i = 1,2,...,n)$$

ou

$$x_i' = f\,(x;a).$$

O grupo dessas transformações é chamado de **Grupo de Transformações de Lie**, se:

I) Dado

$$x_i' = f\,(x;a)\ ,\ \exists\ \bar{a}\ \text{tal que:}$$

$$x_i'' = f\,(\,x', \bar{a}\,) = f\,[f(x;a;\bar{a}\,)] = x,$$

ou seja, a transformação é invertível.

II) Se fizermos duas transformações sucessivas:

$$x_i' = f_i\,(x;a)\ \text{e}\ x_i'' = f_i\,(\,x';b)\ ,$$

então:

$$x_i'' = f_i\,(x;c)\ ,\ \text{com}\ c = \phi\,(a;b),$$

onde ϕ é analítica em **a** e **b**, e $\bar{\mathbf{a}}$ é também função analítica de **a**.

III) Existe a^o, tal que:

$$x_i' = f\,(x;\,a^o) = x\ .$$

Exercício 3.1.2 Mostre que:

$$f\,[f(x;a);b] = f\,[x;\,\phi\,(a;b)]\ .$$

3.2 Exemplos de Grupos de Lie

a) Grupo Ortogonal de Dimensão n: 0(n)

a.1) Consideremos, inicialmente, o grupo 0(2). Esse grupo deixa invariante a quantidade real $x^2 + y^2$ em um espaço real bi-dimensional. Então:

$$x' = 0(2)\ x.$$

Como o grupo 0(2) é ortogonal, então: $00^T = E$. Assim:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{com}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1. \end{cases}$$

Vê-se, portanto, que os 4 componentes ($n^2 = 2^2 = 4$: a,b,c,d) que caracterizam o grupo estão sujeitos a três relações algébricas, de modo que o grupo 0(2) é um grupo de **1-parâmetro:** $2^2 - 3 = 1$.

Se, contudo, nesse grupo só há rotações, sem reflexões espaciais, então:

$$\det 0(2) = +1 \ ,$$

ele passa, então, a ser denotado por $0^+(2) \equiv R(2)$ e caracterizado pela matriz:

$$0^2(2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

a.2) Consideremos, agora, o grupo 0(3). Esse grupo deixa invariante a quantidade real $x^2 + y^3 + z^2$ em um espaço real tridimensional então:

$$x' = 0(3)\, x \ .$$

A condição de ortogonalidade $0(3)0(3)^T = E$ fornece 6 condições impostas aos seus 9 componentes ($n^2 = 3^2 = 9$), de modo que o grupo 0(3) será um grupo de 3-parâmetros, pois 9-6 = 3.

Se, contudo, esse grupo só contém rotações, sem reflexões espaciais, ele é denotado por $0^+(3) \equiv R(3)$.

a.3) De um modo geral, o grupo 0(n) deixa invariante a quantidade real $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. A condição de ortogonalidade do grupo, isto é, $0(3)0(3)^T = E$ impõe: $n + \frac{n(n-1)}{2}$ condições aos n^2 componentes do grupo, e este ficará apenas com $n^2 - \left[n + \frac{n(n-1)}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{2}$ parâmetros essenciais.

Exercício 3.2.1 Encontre:

I. A forma do grupo $0^+(3)$ para rotações em torno dos eixos x,y,z respectivamente;

II. As seis (6) condições impostas aos seus elementos, devido a sua condição de ortogonalidade.

---

b) Grupo Unitário de Dimensão n : U(n)

b.1) Consideremos, inicialmente, o grupo U(2). Esse grupo deixa invariante o produto escalar (x, x) em um espaço complexo bi-dimensional. Então:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{com}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o que fornece as seguintes equações:

$a\, a^* + b\, b^* = 1$; $a\, c^* + b\, d^* = 0$; $a^*c + b^*d = 0$; $c\, c^* + d\, d^* = 1$.

Vê-se, portanto, que os oito elementos do grupo [(a,b,c,d) são complexos do tipo: R + i I, logo 4x2 = 8], estão sujeitos a quatro relações algébricas, de modo que o grupo U(2) é um grupo de 4-parâmetros reais (8 – 4 = 4).

b.2) Consideremos o grupo U(n). Tal grupo deixa invariante o produto escalar (x,x) em um espaço complexo **n**-dimensional. Com a condição de unitariamente desse grupo fornece $\mathbf{n}^2$ relações algébricas aos $\mathbf{2n}^2$ elementos do mesmo, então o grupo U(n) é um grupo de n^2-parâmetros reais ($2n^2 - n^2 = n^2$).

c) Grupo Unitário Especial ou Unimodular de Dimensão n: SU(n)

Esse grupo tem, além da condição de unitariedade, a condição adicional de que o seu determinante vale +1, ou seja:

$$UU^+ = E;\ \det U = +1.$$

Assim, o grupo S U(n) tem $n^2 - 1$ parâmetros reais.

d) Grupo Linear de Dimensão n: GL(n)

Esse grupo é caracterizado por:

$$x_i' = \sum_j a_{ij} x_j\ ;\ i, j = 1,2,...,n; \quad \det a_{ij} \neq 0.$$

Tal grupo tem n^2-parâmetros, que podem variar de $-\infty$ até $+\infty$.

e) Grupo Linear Especial ou Unimodular de Dimensão n: SL(n)

Esse grupo é idêntico ao grupo GL(n), com a condição adicional de que o seu determinante vale +1, condição essa que faz com que o tal grupo seja caracterizado por n^2-1 parâmetros.

f) Grupo Ortogonal Complexo de 4 Dimensões: M(4)

As matrizes complexas 4x4 desse grupo têm 32 (16x2) elementos reais, e a condição de ortogonalidade $M\ M^T = E$, impõe aos mesmos 20 (2x10) relações algébricas, de modo que esse grupo passa a ter 12-parâmetros reais.

Vejamos alguns casos particulares desse grupo:

f.1) O grupo $M^+(4)$ é aquele para o qual as matrizes do grupo M(4) têm determinante +1;

f.2) O grupo M(4) caracterizado pela matriz $\{\alpha_{ij}\}$, de tal modo que se tem:

$$\begin{cases} \alpha_{ij} \text{ (real), para } i, j = 1,2,3 \\ \alpha_{i4}\ , \alpha_{4i} \text{ (imaginário), para } i = 1,2,3 \\ \alpha_{44} \text{ (real),} \end{cases}$$

é chamado o **Grupo Homogêneo de Lorentz** L(v). Tal grupo tem 6-parâmetros reais [16 elementos (4x4), menos 10 restrições].

O Grupo de Lorentz caracterizado por:

$$\det L(v) = +1\ ;\ \alpha_{44} \geq 1,$$

é chamado de **Transformação Própria de Lorentz**: $\mathbf{L_p(v)}$.

Exercício 3.2.2

I. Encontre as 20 relações algébricas satisfeitas pelos elementos de M(4).

II. Escreva a transformação própria de Lorentz da Relatividade.

----

g) Grupo Complexo Especial ou Unimodular de 2 Dimensões: C(2)

As matrizes 2x2 complexas desse grupo C(2) satisfazem à relação:

$$\det C(2) = +1,$$

portanto, esse grupo terá 6-parâmetros reais [(8–2×1) = 6].

Observação: Entre os grupos que acabamos de relacionar, existem os seguintes Homeomorfismos:

$O^+(3) \sim SU(2)$;

$O^+(4) \sim SU(2) \times SU'(2)$;

$M^+(4) \sim C(2) \times C'(2)$;

$L_p(v) \sim C(2)$.

A importância de tais Homeomorfismos reside no fato de que; encontradas as representações irredutíveis de S U(2) e C (2), podemos construir as representações dos demais grupos.

3.3 Transformações Infinitesimais e Parâmetros de Grupos

Definição 3.3.1 Seja a transformação:

$$x_i' = f_i\,(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_r) \qquad (i = 1,2,...,n)$$

Se:

$$x_i' = x_i' + d\,x_i'$$

$$x_i' = f_i\,(x_1', x_2', ..., x_n'; \delta a_1, \delta a_2, ..., \delta a_r)\,,$$

onde:

$$dx_i' = \sum_{k=1}^{r} M_{ik}\,(x')\,\delta a_k$$

e

$$M_{ik}\,(x') = \left.\frac{\partial f_i\,(x_i';a)}{\partial a_k}\right|_{a=0},$$

então:

f_i é dita **infinitesimal.**

Além disso, temos:

$$a_P + da_P = \phi_P\,(a_1, a_2, ..., a_r; \delta a_1, \delta a_2, ..., \delta a_r),$$

então:

$$da_\ell = \sum_{m=1}^{r} \theta_{\ell m}\,(a)\,\delta a_m\,,$$

onde:

$$\theta_{\ell m} = \left.\frac{\partial \phi_\ell (a,b)}{\partial b_m}\right|_{b=0} .$$

Por outro lado, temos:

$$\delta a_k = \sum_{\ell=1}^{r} \psi_{k\ell} (a)\, da_\ell, \text{ onde: } \psi\theta = I,$$

então:

$$dx_i' = \sum_{k,\ell=1}^{r} M_{ik} (x')\, \psi_{k\ell}\ (a)\, da_\ell ,$$

ou:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_i} = \sum_{k=1}^{r} M_{ik} (x')\, \psi_{kl}\ (a).$$

Definição 3.3.2 Se F(x) sofre uma transformação infinitesimal, então:

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\ dx_i .$$

Usando-se a Definição 3.3.1, virá:

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \left(\sum_{\ell=1}^{n} M_{i\ell} (x)\, \delta a_\ell \right) = \sum_{\ell=1}^{r} \delta a_\ell \left(\sum_{x=1}^{n} M_{i\ell} (x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) F,$$

ou:

$$dF = \sum_{\ell=1}^{r} \delta a_\ell\ x_\ell\ \ F,$$

onde:

$$x_\ell = \sum_{i=1}^{n} M_{i\ell}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, r),$$

são chamados **Geradores Infinitesimais** do grupo.
Assim:

$$F' = F + dF = F + \sum_{\ell=1}^{r} \delta a_\ell \, x_\ell \, F,$$

$$\boxed{F' = \left[1 + \sum_{\ell=1}^{r} x_\ell \, \delta a_\ell\right] F} \; .$$

Vê-se, portanto, que o número (r) de parâmetros do grupo é igual ao número de geradores infinitesimais do grupo.

Exemplo 3.3.1 Calcule os geradores infinitesimais do grupo $0^+(2)$.

Para uma rotação θ em torno do eixo dos **z**, temos:

$$x' = x \cos\theta + y \,\text{sen}\theta,$$

$$y' = -x \,\text{sen}\theta + y \cos\theta \,.$$

Para uma transformação infinitesimal, temos:

$$\cos\theta \approx 1 \; ; \; \text{sen}\theta \approx \delta\theta,$$

Portanto:

$$x' = x + y \,\delta\theta,$$

$$y' = -x \,\delta\theta + y \,.$$

Assim:

$$x' = x + y \,\delta\theta = f_1 (x,y;\delta\theta),$$

$$y' = -x\ \delta\theta + y = f_2\,(x,y;\delta\theta)\ .$$

Portanto:

$$M_{i\ell}(x,y) = \frac{\partial f_i\,(x,y;\delta\theta)}{\delta\theta}\,.$$

Como o grupo 0^+ (2) é de um parâmetro, então $\ell = 1$, e teremos:

$$M_{11}\,(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial\theta} = y\ ,\ M_{21}\,(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial\theta} = -x\ .$$

Portanto:

$$X_1 = \sum_{i=1}^{2} M_{i1}\,(x,y)\frac{\partial}{\delta x_i}\,,$$

$$X_1 = M_{11}\frac{\partial}{\delta x_1} + M_{12}\frac{\partial}{\delta x_2},$$

$$\boxed{X_1 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}}\ .$$

Sendo:

$$dF = \sum_{\ell=1}^{r} X_P\ \delta a_P\ F\ , \text{ portanto:}$$

$$dx = (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y})\ x\delta\theta = y\delta\theta\ ,$$

$$dy = (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y})\ y\delta\theta = -x\delta\theta\ .$$

Ora:

$$dx = x' - x = y\delta\theta$$

$$dy = y' - y = -x\delta\theta\ ,$$

o que concorda com o resultado anterior.

3.4 Constantes de Estrutura

Teorema 3.4.1 Os geradores infinitesimais $\{X_P\}$ de qualquer **Grupo de Lie**, satisfazem às relações:

$$[X_\alpha, X_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}\ X_\gamma\ , \quad (\alpha, \beta = 1,2,...,r),$$

onde $C^\gamma_{\alpha\beta}$ são chamadas as **Constantes de Estrutura** do **Grupo de Lie**.

Demonstração:

Segundo a Definição 3.3.1, temos:

$$x_i = f_i\ (x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_r),$$

e

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_\ell} = \sum_{k=1}^{r} M_{ik}\ (x)\ \psi_{kP}\ (a) \equiv M_{ik}\ \ \psi_{kP}\ .$$

(A partir daqui, vamos usar a **Convenção de Einstein**!)

onde:

$$M_{ik}\ (x) = \left.\frac{\partial f_i\ (x_i\,; a)}{\partial a_k}\right|_{a=0}\ ,$$

$$\delta a_k = \psi_{kP}\ (a)\ \delta a_P\ ,$$

$$da_P = \theta_{Pm}\ (a)\ \delta a_m\ ,$$

com:

$\psi\theta = I$, ou seja: $\psi_{\lambda\mu}(a)\,\theta_{\mu\nu}(a) = \delta_{\lambda\nu}$; $\forall a$ e $\lambda,\nu = 1,2,\ldots.$

.

As condições de continuidade da função f_i requerem que:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\ell\, \partial a_m} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_m\, \partial a_\ell}\,. \qquad (\alpha)$$

Seja:

$$\frac{\partial x_r}{\partial a_s} = y_{rs}\,(a_1,a_2,\ldots,a_m\,;\, x_1,x_2,\ldots,x_n), \qquad (\beta)$$

onde:

$$r = 1,2,\ldots,n\ ;\ s = 1,2,\ldots,m\,.$$

Assim:

$$dY_{rs} = \frac{\partial Y_{rs}}{\partial a_\alpha}\, da_\alpha + \frac{\partial Y_{rs}}{\partial x_\beta}\, dx_\beta\,.$$

Portanto:

$$\alpha\ \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\ell \partial a_m} = \frac{\partial}{\partial a_\ell}\ \frac{\partial x_i}{\partial a_m} = \frac{\partial}{\partial a_\ell} Y_{im} = \frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\alpha}\ \frac{\partial a_\alpha}{\partial a_\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta}\ \frac{\partial x_\beta}{\partial a_\ell}\,.$$

Ora:

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial a_\ell} = \delta_{\alpha\ell}\ ,\ \text{então:}$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\ell \partial a_m} = \frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\alpha}\,\delta_{\alpha\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta}\ \frac{\partial x_\beta}{\partial a_\ell} = \frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta}\ \frac{\partial x_\beta}{\partial a_\ell},$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\ell \partial a_m} = \frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta}\ Y_{\beta\ell} \quad \text{[Usando-se } (\beta)\text{]} \qquad (\gamma)$$

Por outro lado, temos:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_m \partial a_\ell} = \frac{\partial}{\partial a_m}\ \frac{\partial x_i}{\partial a_\ell} = \frac{\partial}{\partial a_m} Y_{i\ell} = \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial a_\alpha}\ \frac{\partial a_\alpha}{\partial a_m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta}\ \frac{\partial x_\beta}{\partial a_m} =$$

$$= \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\alpha}\ \delta_{\alpha m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta}\ \frac{\partial x_\beta}{\partial a_m} = \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial a_m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta}\ Y_{\beta m}\ ,$$

isto é:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_m \partial a_\ell} = \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial a_m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta}\ Y_{\beta m}\ . \tag{δ}$$

Levando-se, agora, (γ) e (δ) em (α), virá:

$$\frac{\partial Y_{im}}{\partial a_\ell} + \frac{\partial Y_{im}}{\partial x_\beta} Y_{\beta\ell} = \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial a_m} + \frac{\partial Y_{i\ell}}{\partial x_\beta} Y_{\beta m}\ .\ (m \neq \ell) \tag{ε}$$

Sendo:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_m} \equiv Y_{im} = M_{ik}(x)\,\psi_{km}(a)\,.$$

Então, a Equação (ε), ficará:

$$\frac{\partial}{\partial a_\ell}(M_{ik}\psi_{km}) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(M_{ik}\psi_{km}) M_{\beta r}\psi_{r\ell} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_m}(M_{i\alpha}\psi_{\alpha\ell}) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(M_{i\alpha}\psi_{\alpha\ell}) M_{\beta s}\psi_{sm}\ ,$$

$$M_{ik}\frac{\partial}{\partial a_\ell}\psi_{km}+(\psi_{km}\frac{\partial}{\partial x_\beta}M_{ik})M_{\beta r}\psi_{r\ell}=$$

$$=M_{i\alpha}\frac{\partial\psi_{\alpha\ell}}{\partial a_m}+(\psi_{\alpha\ell}\frac{\partial}{\partial x_\beta}M_{i\alpha})M_{\beta s}\psi_{sm},$$

ou:

$$M_{ik}\frac{\partial\psi_{km}}{\partial a_\ell}-M_{i\alpha}\frac{\partial\psi_{\alpha\ell}}{\partial a_m}+M_{\beta r}\psi_{r\ell}\psi_{km}\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta}-M_{\beta s}\psi_{sm}\psi_{\alpha\ell}\frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial x_\beta}=0.$$

Troquemos, inicialmente, o índice mudo $\boldsymbol{\alpha}$ por **k**. Então:

$$M_{ik}(\frac{\partial\psi_{km}}{\partial a_\ell}-\frac{\partial\psi_{k\ell}}{\partial a_m})+M_{\beta r}\psi_{r\ell}\psi_{km}\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta}-M_{\beta s}\psi_{sm}\psi_{k\ell}\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta}=0.$$

Agora, no terceiro termo da expressão acima, troquemos **k** por **r** e **s** por **k**. Então:

$$M_{ik}\left(\frac{\partial\psi_{km}}{\partial a_\ell}-\frac{\partial\psi_{k\ell}}{\partial a_m}\right)+M_{\beta r}\psi_{r\ell}\psi_{km}\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta}-M_{\beta k}\psi_{km}\psi_{r\ell}\frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial x_\beta}=0,$$

ou:

$$M_{ik}\left(\frac{\partial\psi_{km}}{\partial a\ell}-\frac{\partial\psi_{k\ell}}{\partial a_m}\right)+\psi_{r\ell}\psi_{km}\left(M_{\beta r}\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_\beta}-M_{\beta k}\frac{\partial M_{ir}}{\partial x_\beta}\right)=0. \qquad (\Delta)$$

Agora, vamos usar a seguinte definição:

$$C^k_{\zeta\Gamma}(a)\equiv(\frac{\partial\psi_{km}}{\partial a_\ell}-\frac{\partial\psi_{k\ell}}{\partial a_m})\,\phi_{m\zeta}\,\phi_{\ell\Gamma}. \qquad (\kappa)$$

Em seguida, tomemos a expressão (Δ) e multipliquemos por $\phi_{m\zeta}\,\phi_{P\Gamma}$. Então:

$$M_{ik}\left(\frac{\partial\psi_{km}}{\partial a_{\ell}}-\frac{\partial\psi_{k\ell}}{\partial a_m}\right)\phi_{m\zeta}\phi_{\ell\Gamma}+\phi_{m\zeta}\phi_{\Gamma}\psi_{r\ell}\psi_{km}\left(M_{\beta r}\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_{\beta}}-\right.$$

$$\left.-M_{\beta k}\frac{\partial M_{ir}}{\partial x_{\beta}}\right)=0\ .$$

Sendo:

$$\psi_{r\ell}\,\phi_{\ell\Gamma}=\delta_{r\Gamma}\ \text{ e }\ \psi_{km}\,\phi_{m\zeta}=\delta_{k\zeta}\ ,$$

teremos:

$$M_{ik}\ C^{k}_{\zeta\Gamma}+\delta_{r\Gamma}\delta_{k\zeta}(M_{\beta r}\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_{\beta}}-M_{\beta k}\frac{\partial M_{ir}}{\partial x_{\beta}})=0,$$

$$M_{\beta\zeta}\ \frac{\partial M_{i\Gamma}}{\partial x_{\beta}}-M_{\beta\Gamma}\frac{\partial M_{i\zeta}}{\partial x_{\beta}}=C^{k}_{\zeta\Gamma}(a)\,M_{ik}(x)\,. \qquad (\lambda)$$

Derivemos a expressão acima em relação à $\mathbf{a}_{\rho}$, lembrando que os **M** só dependem de **x,** então:

$$\frac{\partial C^{k}_{\zeta\Gamma}(a)}{\partial a_{\rho}}\,M_{ik}=0\,. \qquad (k,\zeta,\Gamma,\rho=1,2,...,r)$$

Como os M_{ik} são linearmente independentes, virá:

$$\frac{\partial}{\partial\,a_{\rho}}C^{k}_{\zeta\Gamma}\,(a)=0\ \rightarrow\ C^{k}_{\zeta\Gamma}\,(a)\equiv\text{CONSTANTES!!}$$

Essas constantes $C^{k}_{\zeta\Gamma}$ (a) são chamadas de **Constantes de Estrutura** do Grupo de Lie.

Na Definição 3.3.2, vimos que:

$$X_\ell = M_{i\ell}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad (\ell = 1, 2, ..., r).$$

Calculemos, agora, o comutador entre esses geradores. Assim:

$$[X_\ell\ , X_m] = X_\ell\ X_m - \ X_m\, X_\ell\ =$$

$$= M_{i\ell}\frac{\partial}{\partial x_i}(M_{jm}\frac{\partial}{\partial x_j}) - M_{jm}\frac{\partial}{\partial x_j}(M_{i\ell}\frac{\partial}{\partial x_i}) =$$

$$= M_{i\ell}\frac{\partial M_{jm}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - M_{jm}\frac{\partial M_{i\ell}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\ .$$

No segundo termo da expressão acima, troquemos **i** por **j,** então, virá:

$$[X_\ell\ , X_m] = M_{i\ell}\frac{\partial M_{jm}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - M_{im}\frac{\partial M_{j\ell}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} =$$

$$= \left[M_{i\ell}\frac{\partial M_{jm}}{\partial x_i} - M_{im}\frac{\partial M_{j\ell}}{\partial x_i}\right]\frac{\partial}{\partial x_j} = C^k_{\ell m}\, M_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

ou:

$$\boxed{[X_\ell\, , X_m] = C^k_{\ell m}\, X_k}\ . \qquad \text{C.Q.D.}$$

Teorema 3.4.2 As constantes de estrutura de um grupo satisfazem à seguinte relação:

$$C^{\mu}_{\rho\sigma}\, C^{\nu}_{\mu\zeta} + C^{\mu}_{\sigma\zeta}\, C^{\nu}_{\mu\rho} + C^{\mu}_{\zeta\rho}\, C^{\nu}_{\mu\sigma} = 0,$$

com: ρ , σ , ν , ζ = 1, 2, ..., r.

Demonstração:

Sejam X_ζ , X_ρ, X_σ os geradores de um grupo. Pela **Identidade de Jacobi**, temos:

$$[X_\zeta , [X_\rho, X_\sigma]] + [X_\sigma , [X_\zeta , X_\rho]] + [X_\rho , [X_\sigma, X_\zeta]] = 0.$$

Usando-se o resultado do Teorema 3.4.1, virá:

$$\left[X_\zeta,\, C^k_{\rho\sigma}\; X_k\right] + \left[X_\sigma, C^k_{\zeta\rho}\; X_k\right] + \left[X_\rho,\, C^k_{\sigma\zeta}\; X_k\right] = 0,$$

$$C^k_{\rho\sigma}\left[X_\zeta, X_k\right] + C^k_{\zeta\rho}\left[X_\sigma,\; X_k\right] + C^k_{\sigma\zeta}\left[X_\rho,\; X_k\right] = 0,$$

$$C^k_{\rho\sigma}\; C^\ell_{\zeta k}\; X_\ell + C^k_{\zeta\rho}\; C^m_{\sigma k}\; X_m + C^k_{\sigma\zeta}\; C^n_{\rho k}\; X_n = 0\,.$$

Trocando-se **m** e **n**, por ℓ , virá:

$$(C^k_{\rho\sigma}\, C^\ell_{\zeta k} + C^k_{\zeta\rho}\, C^\ell_{\sigma k} + C^k_{\sigma\zeta}\, C^\ell_{\rho k})\, X_\ell = 0\,.$$

Como X_ℓ são linearmente independentes, então:

$$C^k_{\rho\sigma}\, C^\ell_{\zeta k} + C^k_{\zeta\rho}\, C^\ell_{\sigma k} + C^k_{\sigma\zeta}\, C^\ell_{\rho k} = 0\,.$$

Sendo: $C^a_{bc} = -\, C^a_{cb}$ (cf. Exercício 3.4.1), virá:

$$-C^k_{\rho\sigma}\, C^\ell_{k\zeta} - C^k_{\zeta\rho}\, C^\ell_{k\sigma} - C^k_{\sigma\zeta}\, C^\ell_{k\rho} = 0,$$

$$\boxed{C^{k}_{\rho\sigma}\, C^{\ell}_{k\zeta} + C^{k}_{\zeta\rho}\, C^{\ell}_{k\sigma} + C^{k}_{\sigma\zeta}\, C^{\ell}_{k\rho} = 0.}$$ C.Q.D

Exercício 3.4.1. Demonstre que:

$$C^{a}_{bc} = -C^{a}_{cb}\ .$$

Exemplo 3.4.1 Calcule as constantes de estrutura do grupo de rotações em três dimensões.

Para sucessivas rotações infinitesimais em torno dos eixos x, y e z, respectivamente, o grupo de rotações é dado por:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha_3 & -\delta\alpha_2 \\ -\delta\alpha_3 & 1 & \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha_3 & -\delta\alpha_2 \\ -\delta\alpha_3 & 1 & \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x + y\ \delta\alpha_3 - z\ \delta\alpha_2 \\ -x\ \delta\alpha_3 + y + z\ \delta\alpha_1 \\ x\ \delta\alpha_2 - y\ \delta\alpha_1 + z \end{pmatrix},$$

ou:

$$x' = x + y\ \delta\alpha_3 - z\ \delta\alpha_2,$$

$$y' = -x\ \delta\alpha_3 + y + z\ \delta\alpha_1,$$

$$z' = x\ \delta\alpha_2 - y\ \delta\alpha_1 + z,$$

ou ainda:

$$\delta x = x' - x = y\ \delta\alpha_3 - z\ \delta\alpha_2,$$

$$\delta y = y' - y = -x\ \delta\alpha_3 + z\ \delta\alpha_1,$$

$$\delta z = z' - z = x\ \delta\alpha_2 - y\ \delta\alpha_1.$$

Vê-se, portanto, que o grupo de rotações **O** é um grupo de 3-parâmetros: $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, $\delta\alpha_3$.

Calculemos, agora, os geradores desse grupo. Segundo a Definição 3.2.2, temos:

$$X_\ell = M_{i\ell}\ (x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad (\ell = 1, 2, 3\,;\, i = 1, 2, 3)$$

Sendo:

$$x' = f_1\ (x,y,z;\ \delta\alpha_1\ , \delta\alpha_2\ , \delta\alpha_3) = xy\delta\alpha_3 - z\delta\alpha_2,$$

$$y' = f_2\ (x,y,z;\ \delta\alpha_1\ , \delta\alpha_2\ , \delta\alpha_3) = -x\delta\alpha_3 + y + z\delta\alpha_1,$$

$$z' = f_3\ (x,y,z;\ \delta\alpha_1\ , \delta\alpha_2\ , \delta\alpha_3) = x\delta\alpha_2 - y\delta\alpha_1 + \delta\alpha_1 + z,$$

e

$$M_{i\ell}\ (x, y, z) = \frac{\partial f_i\ (x, y, z; \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3)}{\delta\alpha_\ell},$$

virá:

$$M_{11} = \frac{\partial f_1}{\delta\alpha_1} = 0; \;\; M_{12} = \frac{\partial f_1}{\delta\alpha_2} = -z; \;\; M_{13} = \frac{\partial f_1}{\delta\alpha_3} = y,$$

$$M_{21} = \frac{\partial f_2}{\delta\alpha_1} = z; \;\; M_{22} = \frac{\partial f_2}{\delta\alpha_2} = 0; \;\; M_{23} = \frac{\partial f_2}{\delta\alpha_3} = -x,$$

$$M_{31} = \frac{\partial f_3}{\delta\alpha_1} = -y; \;\; M_{32} = \frac{\partial f_3}{\delta\alpha_2} = x; \;\; M_{33} = \frac{\partial f_3}{\delta\alpha_3} = 0.$$

Portanto, os geradores do grupo **0**(3), serão:

$$X_1 = M_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + M_{21}\frac{\partial}{\partial x_2} + M_{31}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\boxed{X_1 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}} \;,$$

$$X_2 = M_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} + M_{22}\frac{\partial}{\partial x_2} + M_{32}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\boxed{X_2 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}},$$

$$X_3 = M_{13}\frac{\partial}{\partial x_1} + M_{23}\frac{\partial}{\partial x_2} + M_{33}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\boxed{X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}}.$$

Por fim, calculemos as constantes de estrutura do grupo **0**(3). Para isso, usemos o Teorema 3.4.1., isto é:

$$[X_\ell, X_m] = C^n_{\ell m}\, X_n\,.$$

Então:

$$[X_1, X_2] = \left[z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} \right] =$$

$$= \left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} \right)\left(-z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(-z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} \right) = z\frac{\partial}{\partial y}\left(-z\frac{\partial}{\partial x} \right) + \left(z\frac{\partial}{\partial y} \right)\left(x\frac{\partial}{\partial z} \right) + y\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

$$\left(z\frac{\partial}{\partial x} \right) - y\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial}{\partial z} \right) + \left(z\frac{\partial}{\partial x} \right)\left(z\frac{\partial}{\partial y} \right) - z\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial}{\partial z} \right) -$$

$$-x\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(x\frac{\partial}{\partial z} \right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} \right) = -z^2\,\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + zx\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} +$$

$$+y\left(\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \right) - yx\,\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - zy\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} -$$

$$-x\left(\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right) + xy\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Sendo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\ \partial x_i}, \text{ virá:}$$

$$[X_1, X_2] = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} = X_3 .$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$[X_2, X_3] = X_1 \; ; \; [X_3, X_1] = X_2 .$$

Portanto:

$$\boxed{C^n_{\ell m} = 1, \forall\, n, \ell, m} .$$

Exercício 3.4.2

a) Obtenha a matriz **O** do Exemplo 3.4.1;
b) Demonstre que $[X_2 , X_3] = X_1$, e $[X_3 , X_1] = X_2$, conforme indicado no Exemplo 3.4.1;
c) Para o Exemplo 3.4.1**,** demonstre que:
$\delta x_i = \delta\alpha_k X_k x_i \qquad (i, k = 1, 2, 3)$;
d) Encontre os geradores do grupo **0**(4).
Sendo X_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6) tais geradores, e definindo:

$$Y_j = \frac{X_j + X_{j+3}}{2} \; ; \; Z_j = \frac{X_j - X_{j+3}}{2} ,$$

demonstre que:

$[Y_i , Y_j] = \varepsilon_{ijk} Y_k$,

$[Z_i , Z_j] = \varepsilon_{ijk} Z_k$,

$[Y_i , Z_j] = 0, \forall\, i, j = 1, 2, 3.$

Exemplo 3.4.2 Obter as representações de um grupo a partir de seus geradores.

Inicialmente, vamos tomar o grupo de rotações finitas (ϕ) em torno do eixo dos **z**. No Capítulo 1, vimos que:

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para uma rotação infinitesimal, teremos:

$$R_z(\delta\phi) \cong \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi & 0 \\ -\delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1} + i\,\delta\phi\, M_z,$$

onde:

$$\mathbb{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que:

$$iM_z = \left.\frac{dR_r(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0} = \left.\begin{pmatrix} -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi & -\text{sen}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $R_z(\phi)$ forma um grupo, teremos:

$R_z\ (\phi_1 + (\phi_2) = R_z\ (\phi_1)\ R_z\ (\phi_2)$.

Então:

$R_z\ (\delta\phi_1 + \delta\phi_2) = R_z\ (\delta\phi_1)\ R_z\ (\delta\phi_2) \cong (\mathbb{1} + i\delta\phi_1 M_z)\ (\mathbb{1} + \delta\phi_2 M_z)$.

Ora, como uma rotação finita ϕ pode ser composta de uma sucessão de rotações infinitesimais: $\delta\phi = \lim_{N\to\infty} \frac{\phi}{N}$. Portanto:

$$R_z(\phi) = \lim_{N\to\infty}\left(1 + i\frac{\phi}{N}M_z\right)^N ,$$

$$\boxed{R_z(\phi) = \exp(i\phi M_z)} \quad .$$

Vê-se, então, que M_z é o gerador do grupo $R_z(\phi)$ que é um sub-grupo de $O^+(3)$. De maneira análoga, temos:

$R_x(\phi) = \exp(i\phi M_x)$;

$R_y(\phi) = \exp(i\phi M_z)$.

Sendo: $M_x = \vec{M}.\vec{I}; M_y = \vec{M}.\vec{J}$ e $M_z = \vec{M}.\vec{K}$, então a rotação infinitesimal em torno de um eixo qualquer definido pelo vetor $\vec{\mathbf{n}}$, será:

$$R_n(\delta\phi) = \mathbb{1} + i\,(\delta\phi_x M_x + \delta\phi_y M_y + \delta\phi_z M_z),$$

$$\boxed{R_n(\delta\phi) = \mathbb{1} + i\delta\phi\ \vec{n}.\vec{M}} \quad .$$

É fácil ver que as matrizes $\mathbf{M_x}$ e $\mathbf{M_y}$ são dadas por:

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, temos:

$[M_x , M_y] = M_xM_y - M_yM_x =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= i\, M_z \,.$$

De um modo geral, é fácil ver que:

$$\boxed{[M_j\,, M_k] = i\,\varepsilon_{jk\ell}\; M_P \quad (j,k,\ell\ = 1,2,3)}\ ,$$

onde $\varepsilon_{jk\ell}$ é o **Símbolo de Levi-Civita**, e representam as constantes de estrutura do grupo de rotações.

De um modo geral, tem-se:

$$D(a) = \exp(ia_\lambda\, X_\lambda),$$

onde $\lambda = 1,2,...,r$ e X_λ são os geradores do grupo e chamados de representações fundamentais do grupo. Por sua vez, D(a) é uma **representação geral** do grupo.

Exercício 3.4.3

a) Obtenha as matrizes M_x e M_y ;

b) Complete a relação de comutação entre M_x, M_y e M_z;

c) Mostre que $D(a) = \exp(ia_\lambda X_\lambda)$ são representações de um grupo;

d) Como D(a) são matrizes unitárias (demonstre!), então X_λ são matrizes de traço nulo;

e) Mostre que as matrizes:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix};\ T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

satisfazem à seguinte relação de comutação:

$$[T_j\,,\,T_k] = i\,\varepsilon_{jk\ell}\,T_\ell\ .$$

3.5 Álgebra de Lie

Definição 3.5.1 Um **Grupo de Lie** dotado da operação de comutação entre seus geradores infinitesimais é chamado de **Álgebra de Lie,** operação essa que satisfaz às seguintes propriedades:

a) $[X_\alpha\,,X_\beta] = -\,[X_\beta\,,X_\alpha] = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\,X_\gamma$;

b) $[(\lambda\,X_\alpha), X_\beta] = \lambda\,[X_\alpha\,,X_\beta]$, $\lambda\ \varepsilon\ R$;

c) $[X_\alpha\,,(X_\beta + X_\gamma)] = [X_\alpha\,,X_\beta] + [X_\alpha\,,X_\gamma]$;

d) $[(A + iB)\,,C] = [A, C] + i[B, C]$, onde A,B,C são do tipo $a_\rho X_\rho$.

Exercício 3.5.1 Mostre que o conjunto de vetores do R^3 dotado do produto vetorial, forma uma **Álgebra de Lie**.

Definição 3.5.2 Diz-se que:

a) Uma **Álgebra de Lie A** de r-parâmetros é Abeliana, se:

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \text{ , } \forall\ \alpha, \beta, \gamma = 1,2,...,r;$$

b) Uma **Álgebra de Lie B** é uma sub-álgebra de **A**, se:

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \text{ , } \alpha, \beta = 1,2,...,p \text{ ; } \gamma = p + 1, p + 2,...,r;$$

c) Uma **Álgebra de Lie A** é **invariante,** se:

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \text{ , } \alpha = 1,2,...,p \text{ ; } \gamma = p+1, p+2,...,r;$$

d) Um sub-conjunto de uma **Álgebra de Lie** tem a propriedade de que o comutador de qualquer de seus membros com qualquer membro da Álgebra produz um membro desse sub-conjunto; este, então, é chamado de **ideal I**. Para um **ideal I**, tem-se:

$$[X_\alpha , X_\beta] = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\, X_\gamma, \text{onde:}$$

$$X_\alpha \in I \text{ ; } Y_\beta \in A.$$

(Se a Álgebra contém membros que não estão no Ideal, então este é chamado de **ideal próprio**.)

e) Uma **Álgebra de Lie A** é denominada **simples** se não existe nenhuma sub-álgebra **B** $\subset$ **A** invariante; e **A** é denominada **semi-simples** se não existe nenhuma sub-álgebra **B** $\subset$ **A** abeliana invariante. (Uma **Álgebra de Lie Simples** é aquela que não tem Ideais Próprios.)

Teorema 3.5.1 - Teorema de Casimir. Se um conjunto de operadores $\{C_i\}$ comuta com todos os geradores de um grupo, isto é: $[X_\lambda , C_i] = 0$, então eles são múltiplos do operador identidade (E), ou seja: $C_i = c_i E$. Tais operadores são chamados **operadores de Casimir**.

Demonstração:

No Exemplo 3.4.2, vimos que:

$D(a) = \exp (ia_\lambda X_\lambda)$, então:

$$[D(a) , C_i] = [\exp (ia_\lambda X_\lambda) , C_i].$$

Assim, expandindo-se a exponencial, usando-se as propriedades do comutador e a hipótese do Teorema 3.5.1 é fácil ver que:

$$[D(a), C_i] = 0 .$$

Então, pelo Teorema 2.2.2, teremos:

$$\boxed{C_i = c_i E}. \qquad \text{C.Q.D.}$$

É oportuno observar que o conjunto $\{C_i\}$ caracteriza a representação irredutível do grupo considerado, isto é, esse conjunto pode variar de uma representação irredutível para uma outra, mas ele permanece fixado para todos os membros de uma dada representação irredutível. Isto permite-nos usar tal conjunto como índices para as representações irredutíveis. O número de **operadores de Casimir** necessários para caracterizar cada representação de um **Grupo de Lie** é dito a **ordem da álgebra**. Em geral, é muito difícil encontrar todos os **operadores de Casimir** para um **Grupo de Lie** arbitrário.

Exemplo 3.5.1 Mostre que $C = \sum_{\lambda=1}^{3} X_\lambda{}^2$ é um **operador de Casimir** para o grupo O(3).

Segundo o Teorema 3.5.1, um **operador de Casimir** satisfaz à seguinte expressão:

$$[X_\lambda , C] = 0$$

Então, é fácil ver que:

$$\left[X_\lambda , \sum_{\lambda=1}^{3} X_\lambda{}^2 \right] = 0, \text{ pois: } [X_\lambda , X_\lambda] = 0 .$$

Exercício 3.5.2 Mostre que:

a) $C_1 = \sum_{\lambda=1}^{3} Y_\lambda{}^2$ e $C_2 = \sum_{\lambda=1}^{3} Z_\lambda{}^2$ são dois **operadores de Casimir** para O(4);

b) $T^2 = T_1^{\,2} + T_2^{\,2} + T_3^{\,2}$, onde $T_1 + T_2 + T_3$ foram definidos no Exercício 3.4.3**,** é um **operador de Casimir**.

Definição 3.5.3

a) Seja a seguinte equação de auto-valores:

$$[A\,,X] = s\,X,$$

onde **X** são geradores infinitesimais de um dado **Grupo de Lie** de **r**-parâmetros e **A** é uma combinação linear desses geradores. As **r** raízes dessa equação de auto-valores são chamadas **raízes da Álgebra de Lie** associada ao grupo. Denota-se Σ ao conjunto dessas raízes.

Vejamos como encontrar essas raízes. Sendo:

$$A = \alpha^{\lambda} X_{\lambda}\,,\ \text{e}\ \ X = x^{\rho}\, X_{\rho}\,,\ \text{virá:}$$

$$\left[A\,,X\right] = \left[\alpha^{\lambda} X_{\lambda}\ ,\, x^{\rho}\ X_{\rho}\right] = s\, x^{\zeta}\ X_{\zeta}\,.$$

Pelo Teorema 3.4.1, vimos que:

$$\left[X_{\lambda}\,, X_{\rho}\right] = C^{\zeta}_{\lambda\rho}\ X_{\zeta}\,.$$

Portanto:

$$\alpha^{\lambda}\ x^{\rho}\ C^{\zeta}_{\lambda\rho}\ X_{\zeta} = s\, x^{\zeta}\ X_{\zeta}\,,$$

$$\left(\alpha^{\lambda}\, x^{\rho}\, C^{\zeta}_{\lambda\rho} - s\, x^{\zeta}\right) X_{\zeta} = 0\,.$$

Como X_{ζ} são vetores linearmente independentes, virá:

$$\left(\alpha^{\lambda}\, x^{\rho}\, C^{\zeta}_{\lambda\rho} - s\, x^{\zeta}\right) = 0\,.$$

Sendo:

$$x^{\zeta} = x^{\rho}\, \delta^{\zeta}_{\rho}\,,$$

teremos:

$$x^{\rho}\left(\alpha^{\lambda}\, C^{\zeta}_{\lambda\rho} - s\, \delta^{\zeta}_{\rho}\right) = 0\,.$$

A equação acima só terá solução diferente da trivial, se:

$$\det\left(\alpha^{\lambda}\, C^{\zeta}_{\lambda\rho} - s\ \delta^{\zeta}_{\rho}\right) = 0\,,$$

o que mostra que tal equação é uma equação algébrica de **r**-raízes reais ou complexas, degeneradas ou não, nulas ou não. Pode-se demonstrar que se α é raiz, então **–** α também é raiz, mas **k**α, com **k** $\neq \pm 1$, não é raiz;

b) Dado o conjunto de raízes de uma **Álgebra de Lie**, existe um sub-conjunto delas que gera um sub-espaço, portanto tal sub-conjunto é linearmente independente. Esse conjunto é denominado de **raízes simples** e é denotado por π. De um modo geral esses vetores não são ortogonais;

c) Chama-se **grau** ("rank") de uma **Álgebra de Lie** ao número de raízes simples da mesma, isto é, elas são obtidas quando se faz s = 0 na expressão do item a).

Vejamos como calcular o **grau** ("rank") de uma **Álgebra de Lie**. Inicialmente, toma-se um operador fixo **A** dado por $A = \alpha^{\lambda} X_{\lambda}$ e, em seguida, procuramos todas as soluções da equação: [A, X] = 0, com $X = x^{\nu} X_{\nu}$. Depois, faz-se **A** variar e calcula-se novamente $[A', X]$ para todos os **X** que são soluções da equação [A, X] = 0, e mantemos somente os **X** para os quais $[A', X]$ = 0. Continuamos com esse processo até obter todos os operadores lineares do **Grupo de Lie** associado à álgebra considerada e que sejam mutuamente independentes. Este número será o **grau** ("rank") procurado.

As raízes simples de uma **Álgebra de Lie** são fundamentais, pois, por intermédio de seus comprimentos e do ângulo formado entre elas, pode-se obter os comprimentos e as direções das demais raízes. Todas as propriedades da álgebra dependem de suas raízes. Em geral, qualquer conjunto de vetores linearmente independentes não se constitui num conjunto de raízes simples.

De um modo geral, uma **Álgebra de Lie** é um espaço vetorial que pode ser dividido em sub-espaços vetoriais da seguinte maneira:

$$R = H + \sum_{\alpha\, \varepsilon\, \Sigma} R^{\alpha} ,$$

onde $\mathbf{R^{\alpha}}$ são sub-espaços unidimensionais correspondentes a cada raiz, e **H** é um sub-espaço gerado pelas raízes simples. Os operadores definidos no sub-espaço **H** são denotados por $\mathbf{F_{\mu}}$ e os definidos em $\mathbf{R^{\alpha}}$ são denotados por E_{α}.

Exemplo 3.5.2 Calcular o **grau** ("rank") do grupo $O^{+}(3)$.

Seja $A = \alpha_\mu X_\mu$ e $X = x_\nu X_\nu$, então:

$$[A,X] = [\alpha_\mu X_\mu , x_\nu X_\nu] = \alpha_\nu x_\nu [X_\mu , X_\nu].$$

Para o grupo $O^+(3)$, tem-se:

$$[X_\mu , X_\nu] = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} X_\lambda .$$

Portanto:

$$[A,X] = \alpha_\mu x_\nu \varepsilon_{\mu\nu\lambda} X_\lambda .$$

Pela Definição 3.5.2.c, para se calcular o **grau** ("rank") de um grupo, temos que fazer $[A,X] = 0$. Assim:

$$\alpha_\mu x_\nu \varepsilon_{\mu\nu\lambda} X_\lambda = 0 .$$

Como X_λ são linearmente independentes, então:

$\alpha_\mu x_\nu \varepsilon_{\mu\nu\lambda} = 0$, com $\mu,\nu,\lambda = 1,2,3$.

Para $\lambda = 1$, virá:

$$\alpha_1 x_1 \varepsilon_{111} + \alpha_1 x_2 \varepsilon_{121} + \alpha_1 x_3 \varepsilon_{131} + \alpha_2 x_1 \varepsilon_{211} + \alpha_2 x_2 \varepsilon_{221} +$$
$$+ \alpha_2 x_3 \varepsilon_{231} + \alpha_3 x_1 \varepsilon_{311} + \alpha_3 x_2 \varepsilon_{321} + \alpha_3 x_3 \varepsilon_{331} = 0.$$

Agora, usando-se a definição do **símbolo de Levi-Civita**, (ε_{ijk}) virá:

$$\boxed{\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2 = 0}$$

$$. \qquad \text{(I)}$$

Por raciocínio, análogo, é fácil ver que, para λ = 2 e λ = 3, temos, respectivamente:

$$\boxed{-\alpha_1 \, x_3 + \alpha_3 x_1 = 0}\,, \qquad \text{(II)}$$

$$\boxed{\alpha_1 \, x_2 - \alpha_2 x_1 = 0}\,. \qquad \text{(III)}$$

A solução deste sistema de três equações (I, II, III), é dada por:

$$\alpha_i = x_i \;, \; \forall \; i = 1,2,3.$$

Logo:

$$A = X \,.$$

Como:

$$[X_\mu \,, X_\nu] = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \, X_\lambda \,,$$

então:

$$[A,X] = [X_\mu \,, X_\mu] = 0 \,,$$

logo o **grau** ("rank") de O^+ é UM, pois cada operador formado pela combinação linear dos geradores do grupo, só comuta consigo mesmo.

Exemplo 3.5.3. Calcular os geradores, a álgebra e o **grau** ("rank") do grupo SU(2).

Inicialmente, vamos estudar o grupo SU(2). Este, é definido como o conjunto de matrizes complexas 2x2, tal que:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \; UU^{+} = E \; ; \; \det U = +1.$$

O grupo SU(2) é o grupo que deixa invariante a quantidade $|\mu|^2 + |\nu|^2$, onde μ e ν são componentes de um vetor complexo a duas dimensões. Assim:

$$\begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mu + b\nu \\ c\mu + d\nu \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\mu' = a\mu + b\nu \,,$$
$$\nu' = c\mu + d\nu \,.$$

Ora:

$$|\mu'|^2 = (a\mu + b\nu)\;(a\mu + b\nu)^* =$$
$$= (a\mu + b\nu)\;(a^*\mu^* + b^*\nu^*) =$$
$$= aa^*\,\mu\mu^* + ab^*\,\mu\nu^* + a^*b\nu\mu^* + bb^*\nu\nu^* \quad \rightarrow$$

$$|\mu'|^2 = |a|^2\,|\mu|^2 + |b|^2\,|\nu|^2 + ab^*\mu\nu^* + ba^*\nu\,\mu^* \,.$$

Analogamente:

$$|\nu'|^2 = |c|^2\,|\mu|^2 + |d|^2\,|\nu|^2 + cd^*\mu\nu^* + c^*d\,\mu^*\nu \,.$$

Para que tenhamos:

$$|\mu'|^2 + |\nu'|^2 = |\mu|^2 + |\nu|^2 ,$$

é necessário que:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1\,;\ |b|^2 + |d|^2 = 1\,,$$

$$ab^* + cd^* = 0\,;\ a^*b + c^*d = 0\,.$$

Por outro lado, temos:

$$UU^+ = E \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1\ ;\ |c|^2 + |d|^2 = 1\,;$$

$$ac^* + bd^* = 0\ ;\ a^*c + b^*d = 0\,.$$

Sendo:

$$\det U = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \rightarrow ad - bc = 1\,.$$

Do conjunto de equações obtidas acima ligando **a,b,c,d** e seus respectivos complexos, é fácil ver que:

$$a = d^*\ ;\ b = -c^* \quad \text{ou} \quad d = a^*\ ;\ c = -b^*.$$

Assim:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Agora, determinemos os **geradores de SU(2)**. Eles são em número de três (3), pois: $n^2 - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.

Para uma transformação infinitesimal, segundo a Definição 3.3.2, virá:

$$F' = \left(1 + \sum_{\ell=1}^{r} X_\ell\ \delta a_\ell\right) F\,,$$

ou seja;

$$\begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = \left(1 + \sum_{\ell=1}^{3} X_\ell\ \delta a_\ell\right) \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Sendo:

$$\begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + \delta\mu \\ \nu + \delta\nu \end{pmatrix},$$

vê-se que:

$$\begin{pmatrix} \mu + \delta\mu \\ \nu + \delta\nu \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta a & \delta b \\ -\delta b^* & \delta a^* \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$U = \begin{pmatrix} 1 + \delta a & \delta b \\ -\delta b^* & 1 + \delta a^* \end{pmatrix}.$$

Agora, estamos em condições de determinar os parâmetros infinitesimais $(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3)$ e os respectivos geradores (X_1, X_2, X_3), do grupo em estudo.

Assim, sendo:

$$UU^{+} = E,$$

então:

$$\begin{pmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ -\delta b^* & 1+\delta a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\delta a^* & -\delta b \\ \delta b^* & 1+\delta a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas infinitésimos de 1ª ordem, virá:

$$\begin{pmatrix} 1+\delta a+\delta a^* & -\delta b+\delta b \\ -\delta b^*+\delta b^* & 1+\delta a+\delta a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$1+\delta a+\delta a^* = 1 \quad \rightarrow \quad \delta a = -\delta a^* .$$

Consideremos:

$$\delta a = \frac{i}{2}\ \delta a_3 \text{, com } \delta a_3 \equiv \text{real} .$$

Por outro lado, temos:

$$\det U = 1 \ \rightarrow \begin{vmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ -\delta b^* & 1+\delta a^* \end{vmatrix} \approx 1+\delta a+\delta a^* = 1 ,$$

o que reproduz o resultado anterior.

Como não existe nenhuma restrição para δb, vamos escolhê-lo com a forma:

$$\delta b = \frac{1}{2}\ \delta a_2 + \frac{i}{2}\delta a_1 \text{, com } \delta a_2, \delta a_1 \equiv \text{reais .}$$

Então:

$$U = \begin{pmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ -\delta b^* & 1+\delta a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2}\ \delta a_3 & \frac{1}{2}\delta a_2 + \frac{i}{2}\delta a_1 \\ -\frac{1}{2}\delta a_2 + \frac{i}{2}\delta a_1 & 1 - \frac{i}{2}\delta a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\,\delta a_3 & \delta a_2 + i\,\delta a_1 \\ \delta a_2 - i\,\delta a_1 & -i\,\delta a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\delta a_3 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\delta a_2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\delta a_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\delta a_1 + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\delta a_2 + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\delta a_3 .$$

Portanto:

$$U = E + i\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2}\sigma_j\ \delta a_j \text{ ,}$$

onde $\{\sigma_j\}$ são as **matrizes de Pauli**, e que são, portanto, os **geradores de SU(2)**.

A álgebra dos geradores do grupo SU(2) é facilmente calculada, pois basta usar a regra de matrizes. Assim:

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Então:

$$\left[\sigma_1, \sigma_2\right] = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left[\sigma_1, \sigma_2\right] = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\,\sigma_3.$$

Portanto, é fácil ver que:

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\,\varepsilon_{ijk}\left(\frac{1}{2}\sigma_k\right).$$

Vê-se, desse modo, que o grupo SU(2) tem a mesma álgebra do grupo O^+ (3), portanto o **grau** (“rank”) de SU(2) é o mesmo de O^+ (3), isto é: **UM**.

Exercício 3.5.3

a) Dado o conjunto de equações ligando os elementos de SU(2), demonstre que: a = d* e b = –c*;

b) Complete o cálculo da álgebra do SU(2).

Teorema 3.5.2 Os grupos $O^{+}(3)$ e SU(2) são Homeomórficos. A cada elemento de $O^{+}(3)$ corresponde 2 elementos de SU(2).

Demonstração:

Seja **M** uma matriz Hermitiana de traço nulo e definida por:

$$M = \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{j=1}^{3} x_j \, \sigma_j = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 =$$

$$= x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iy \\ iy & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iy \\ iy & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}.$$

O determinante de **M** é dado por:

$$\det M = -z^2 - (x-iy)(x+iy) = -z^2 - x^2 - y^2 = -(x^2 + y^2 + z^2).$$

Agora, consideremos uma transformação de similaridade, ou seja:

$$M' = U\,M\,U^{+}.$$

Sendo $UU^{+} = E$, então $Tr\,M' = Tr\,M$ e $\det M' = \det M$. Portanto, sendo:

$$M = \vec{x}'.\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} z' & x'-iy \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix},$$

teremos:

$$\det M' = -\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 \right).$$

Portanto:

$$\det M' = \det M \to -\left(x^2 + y^2 z^2\right) = -\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right),$$

o que significa dizer que o produto escalar $(\vec{x}, \vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2$, é invariante sob essa transformação de SU(2), justamente como o grupo de rotações $O^+(3)$.

No Exemplo 3.5.3 vimos que para o grupo SU(2), temos:

$$U \cong E + i \sum_{j=1}^{3} \delta\, \beta_j\, \sigma_j .$$

Então:

$$\delta M = M' - M = UMU^+ - M = \sum_{j=1}^{3} \delta x_j\, \sigma_j =$$

$$\cong \left(E + i \sum_{j=1}^{3} \delta\beta_j\, \sigma_j \right) \left(\sum_{j=1}^{3} x_j\, \sigma_j \right) \left(E - i \sum_{k=1}^{3} \delta\beta_k\, \sigma_k \right) - M =$$

$$\cong\left(\sum_{j=1}^{3} x_j\,\sigma_j - i\sum_{j,\,k=1}^{3} x_j\delta\beta_k\,\sigma_j\,\sigma_k + i\sum_{\ell,\,j=1}^{3}\delta\beta_\ell\,\sigma_\ell\,x_j\,\sigma_j\right)=$$

$$=\left(M - i\sum_{j,\,k=1}^{3} x_j\,\delta\beta_k\left(\sigma_j\ \sigma_k - \sigma_k\ \sigma_j\right)\right) - M =$$

$$= - i\sum_{j,\,i=1}^{3} x_j\,\delta\beta_k\left[\sigma_j\,,\sigma_k\right].$$

Usando o resultado do Exemplo 3.5.3, virá:

$$\delta M = -i\,2\sum_{j,k,\ell=1}^{3} i\,x_j\ \delta\beta_k\ \varepsilon_{jkl}\ \sigma_\ell\ \rightarrow\ \delta M = 2\sum_{j,k,\ell=1}^{3} x_j\ \delta\beta_k\ \varepsilon_{jkl}\ \sigma_\ell\,.$$

Sendo:

$$\delta M = \sum_{\ell=1}^{3}\delta x_\ell\ \sigma_\ell\ ,$$

teremos:

$$\delta x_\ell = 2\sum_{j,k=1}^{3} x_j\ \delta\beta_k\ \varepsilon_{jkl}\,.$$

Assim:

$$\delta x_1 \equiv \delta x = 2\sum_{k=1}^{3}\left[x_1\ \delta\beta_k\ \varepsilon_{1k1} + x_2\ \delta\beta_k\ \varepsilon_{2k1} + x_3\ \delta\beta_k\ \varepsilon_{3k1}\right] = 2\,(x_1\ \delta\beta_2\ \varepsilon_{121} +$$

$$+ x_1\ \delta\beta_3\ \varepsilon_{131} + x_2\ \delta\beta_1\ \varepsilon_{211} + x_2\ \delta\beta_3\ \varepsilon_{231} + x_3\ \delta\beta_1\ \varepsilon_{311} + x_3\ \delta\beta_2\ \varepsilon_{321}).$$

Usando-se a definição de ε_{jkl}, virá:

$$\delta x_1 \equiv \delta x = 2y\delta\beta_3 - 2z\delta\beta_2 .$$

Analogamente, teremos:

$$\delta x_2 \equiv \delta y = -2x\,\delta\beta_3 + 2z\,\delta\beta_1 ,$$

$$\delta x_3 \equiv \delta z = 2x\delta\beta_3 - 2y\delta\beta_1 .$$

No Exemplo 3.4.1, vimos que para o grupo $O^+(3)$, temos:

$$\delta x = y\delta\alpha_3 - z\delta\alpha_2 ,$$

$$\delta y = -x\delta\alpha_3 + z\delta\alpha_1 ,$$

$$\delta z = x\delta\alpha_2 - y\delta\alpha_1 , \qquad \text{então:} \qquad \boxed{\delta\alpha_j = 2\delta\beta_j} .$$

Vê-se, portanto, que o grupo SU(2) também descreve uma "rotação" como o $O^+(3)$. Isto sugere, portanto, que esses dois grupos sejam Homeomórficos. Calculemos então esse Homeomorfismo.

Para uma rotação finita $\boldsymbol{\alpha}$ em torno do eixo dos **z**, o grupo $O^+(3)$ é dado por:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; 0 < \alpha < 2\pi .$$

Sendo:

$\delta\beta_j = \frac{1}{2}\delta\alpha_j$, então o elemento correspondente do SU(2) será:

$$U_z\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \exp\left(i\, a_j\, \sigma_j\right) = \exp\left(ia_3\, \sigma_3\right) = \exp\left(i\,\frac{\alpha}{2}\sigma_3\right) \rightarrow$$

$$U_z\left(\alpha/2\right) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}.$$

Sendo:

$$R_z\left(\alpha + 2\pi\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 2\pi) & \text{sen}(\alpha + 2\pi) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha + 2\pi) & \cos(\alpha + 2\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então:

$$R_z\left(\alpha + 2\pi\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\alpha),$$

e

$$U_z\left(\frac{1}{2}(\alpha + 2\pi)\right) = \begin{pmatrix} e^{i/2\,(\alpha+2\pi)} & 0 \\ 0 & e^{-i/2\,(\alpha+2\pi)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2}\, e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2}\, e^{-i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} =$$

$$=-\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = -U_z(\alpha).$$

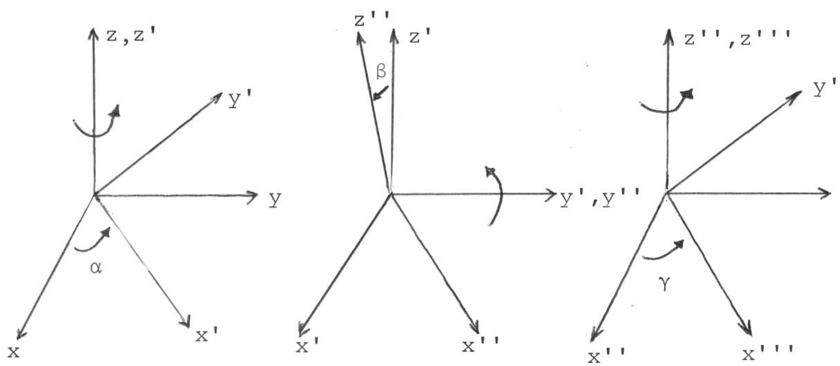
Portanto:

$$\left.\begin{matrix} +U(\alpha/2) \\ -U(\alpha/2) \end{matrix}\right\rangle \longrightarrow R(\alpha).$$

Logo, o Homeomorfismo entre SU(2) e o $O^+(3)$ é de 2 para 1. Assim, conhecidas as representações de SU(2), automaticamente teremos as do grupo $O^+(3)$. C.Q.D.

Exemplo 3.5.4 Encontre a representação geral do SU(2) em termos dos **ângulos de Euler**, tendo em vista o Homeomorfismo entre SU(2) e $O^+(3)$.

Se α, β, γ forem rotações sucessivas, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio em torno dos z, y' e z'', isto é:



então:

$$R(\alpha\,\beta\,\gamma) = R_{z''}(\gamma)\,R_{y'}(\beta)\,R_z(\alpha)\,.$$

Segundo o Teorema 3.5.2, temos:

$$R_z(\gamma) \leftrightarrow U_z(\gamma/2) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, sendo:

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\mathrm{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha \\ 0 & -\mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

teremos:

$$R_y(\alpha) \leftrightarrow U_y(\alpha/2) = \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_y\right),$$

e

$$R_x(\alpha) \leftrightarrow U_x(\alpha/2) = \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\right).$$

Sendo:

$$U_j(\alpha/2) = \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_j\right),$$

então:

$$U_j(\alpha/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_j\right)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_j\right)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_j\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad .$$

Sendo:

$$(\sigma_j)^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,; \ (\sigma_j)^{2n+1} = \sigma_j\,.$$

E, ainda:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ ; \ \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$

teremos:

$$U_j\left(\frac{\alpha}{2}\right) = I\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\,\sigma_j \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Portanto:

$$U_x\left(\frac{\alpha}{2}\right) = I\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\,\sigma_x \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$U_x\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

De modo análogo, teremos:

$$U_y\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$U_z\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}.$$

Assim, para o caso de nosso exemplo, teremos:

$$R\ (\alpha\ \beta\gamma) = R_{z''}\ (\gamma)\ R_{y'}\ (\beta) R_z\ (\alpha) \leftrightarrow U_z\ (\gamma/2)\ U_y\ (\beta/2)\ U_z\ (\alpha/2).$$

$$R(\alpha\beta\gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & \operatorname{sen}(\beta/2) \\ -\operatorname{sen}(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2}\cos(\beta/2) & e^{-i\alpha/2}\text{sen}(\beta/2) \\ -e^{i\alpha/2}\text{sen}(\beta/2) & e^{-i\alpha/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix},$$

$R\,(\alpha\ \ \beta\,\gamma) \leftrightarrow$

$$U(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} e^{i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}}\cos(\beta/2) & e^{i\frac{(\gamma-\alpha)}{2}}\text{sen}(\beta/2) \\ -e^{i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}}\text{sen}(\beta/2) & e^{-i\frac{(\gamma+\alpha)}{2}}\cos(\beta/2) \end{pmatrix}.$$

Exercício 3.5.4 Demonstre que:

a) $\exp\left(i\dfrac{\alpha}{2}\vec{\sigma}.\vec{n}\right)=\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)+i\,(\vec{\sigma}.\vec{n})\,\text{sen}\,(\alpha/2)\,;$

b) $(\sigma_j)^{2n} = I\ ;\ (\sigma_j)^{2n+1} = \sigma_j\,;$

c) $R(\alpha\,\beta\,\gamma)=R_{z''}(\gamma)\,R_{y'}(\beta)\,R_z(\alpha)\,.$

3.6 Teoremas Gerais sobre as Álgebras de Lie

A seguir, enunciaremos apenas alguns teoremas gerais sobre as raízes das **Álgebras de Lie**, sem contudo, apresentarmos suas demonstrações. No entanto, daremos alguns exemplos para fixarmos o conteúdo dos mesmos.

Teorema 3.6.1 Um conjunto de vetores linearmente independentes é um conjunto de raízes simples de uma **Álgebra de Lie**, se o produto escalar de quaisquer dois daqueles vetores é zero, ou é igual a menos a metade de um número inteiro do comprimento de um dos vetores, isto é:

H : α e β são raízes simples de uma álgebra **A**

$$T : (\alpha, \beta) = -N\frac{(\alpha,\alpha)}{2} = -\frac{M}{2}(\beta,\beta),$$

onde N, M são inteiros positivos ou nulos.

Exemplo 3.6.1 Um conjunto de vetores se constituem nas raízes simples de uma **Álgebra de Lie**, se os ângulos entre eles forem de 90º ou 120º ou 135º ou 150º.

Seja:

$$(\alpha, \alpha) = \lambda \;;\; (\beta, \beta) = c\lambda,$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ e **c** são números reais e α e β são raízes simples de uma dada **Álgebra de Lie** (cf. Definição 3.5.3). Então:

$$(\alpha,\beta) = \sqrt{c}\ \lambda\ \cos\theta .$$

Segundo o Teorema 3.6.1, virá:

$$(\alpha,\ \beta)=\sqrt{c}\ \lambda\ \cos\ \theta= -\frac{N}{2}\ \lambda\ =-\frac{cM}{2}\ \lambda.$$

Sendo:

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1,$$

e como

$\cos\theta = 1$, se $= \beta$,

$\cos\theta = -1$, se $\alpha = -\beta$,

e já que $k\alpha$ $(k \neq \pm 1)$ não é raiz da álgebra considerada (vide Definição 3.5.3a), então:

$$-1 \leq -\frac{N}{2\sqrt{c}} \leq 1,$$

$$-1 \leq -\frac{M\sqrt{c}}{2} \leq 1,$$

ou

$$\left|\frac{N}{\sqrt{c}}\right| \leq 2 \ ; \ \left|M\sqrt{c}\right| \leq 2 \,.$$

Então:

$$|MN| \leq 4.$$

Excluindo-se o caso em que $\alpha = \pm\,\beta$, retira-se a condição de igualdade da desigualdade acima, então, teremos:

$$|MN| < 4.$$

Portanto:

a) Se M = 1, então: N = 1,2,3;

b) Se M = 2, então: N = 1;

c) Se M = 3, então: N = 1.

Sendo:

$$(\alpha,\ \beta) = \sqrt{c}\ \lambda\ \cos\ \theta = -\frac{N}{2}\ \lambda\ = \frac{Mc\lambda}{2}\ ,$$

então: $\lambda = \dfrac{N}{M}$. Assim, teremos:

$$\cos\theta = -\frac{N}{2\sqrt{c}} = -\frac{1}{2}\ N\frac{1}{\sqrt{N/M}} = -\frac{1}{2}\sqrt{MN}\ ,$$

e:

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, \text{ ou } -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

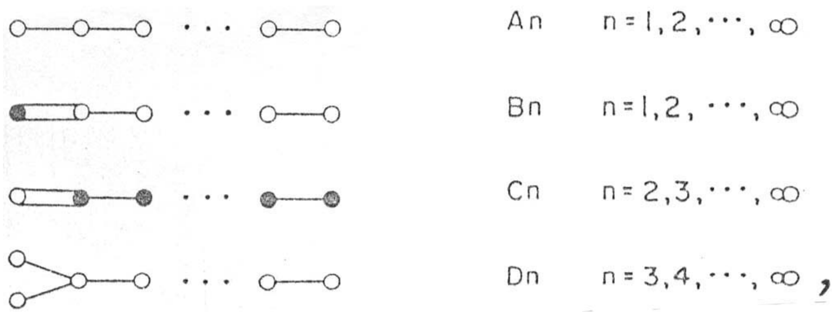
ou seja:

$$\theta = 120º \text{ ou } 135º \text{ ou } 150º.$$

Por outro lado, se o produto escalar é zero, isto é:

$$N = M = 0, \text{ então } \cos\theta = 0 \rightarrow \theta = 90º\,.$$

Em vista do resultado do Exemplo 3.6.1 e considerando ainda o Teorema 3.6.1, as **Álgebras de Lie** têm a seguinte classificação, cujos diagramas são devidos a Jan Arnoldus Schouten (Rowlatt, 1966). Assim:



onde o círculo branco (○) representa uma raiz simples longa e o círculo achuriado ⊘), uma raiz curta. O ângulo entre as raízes é representado por uma linha simples (120º), ou por uma linha dupla (135º), ou por uma linha tripla (150°). Quando os círculos não são ligados, o ângulo entre eles é de 90º.

As álgebras **An** correspondem aos grupos SU (n+1); as álgebras B_n correspondem aos grupos **0** (2n+1); as álgebras D_n correspondem aos grupos **0** (2n); por fim, as álgebras C_n são chamadas de **simpléticas,** e correspondem aos grupos U (2n).

Teorema 3.6.2 Se α é uma raiz simples de uma **Álgebra de Lie**, então $\beta + \alpha$ ($\beta \in \Sigma_+$) também será uma raiz ($\in \Sigma_+$), se, e somente se:

$$\frac{2\,(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} - P\,(\beta,\alpha) < 0,$$

onde $P(\beta , \alpha)$ é um inteiro definido por:

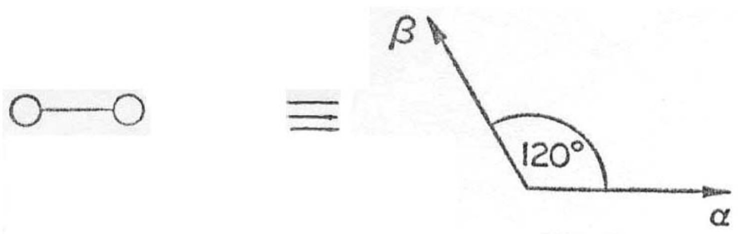
$$[\beta - P\,(\beta , \alpha)\,\alpha] \in \Sigma_+,$$

e

$$(\beta - [P\,(\beta , \alpha) + 1]\,\alpha) \notin \Sigma_+ .$$

Exemplo 3.6.2 Dadas duas raízes simples da álgebra $A_2 \equiv SU(3)$, encontre as demais raízes da mesma.

A álgebra $A_2 \equiv SU(3)$ tem o seguinte **Diagrama de Schouten**:



Sendo:

$(\alpha , \alpha) = (\alpha , \beta) = \lambda$, então:

$$(\alpha , \beta) = \lambda \cos\theta = -\frac{\lambda}{2} .$$

Agora, vejamos se $\alpha + \beta \, \varepsilon \, \Sigma_+$. Segundo o Teorema 3.6.2**,** temos:

$$\frac{2\,(\beta,\alpha)}{(\alpha\,,\alpha)} - P\,(\beta,\alpha) < 0\,,\ \text{com}\ [\beta - P\,(\beta\,,\,\alpha)\,\alpha] \in \Sigma_+\,.$$

Como:

$$\beta - \alpha \notin \Sigma_+\,,\ \text{então}\ P\,(\beta\,,\,\alpha) = 0\,.$$

Logo, devemos ter:

$$\frac{2\,(\beta,\alpha)}{(\alpha\,,\alpha)} < 0\,.$$

Por outro lado, sendo $(\beta\,,\,\alpha) = -\,\dfrac{\lambda}{2}$ e $(\alpha\,,\,\alpha) = \lambda$, virá:

$$\frac{2\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)}{\lambda} = -1 < 0\,.$$

Portanto $\alpha + \beta \in \Sigma_+$

Vejamos, agora, se $\alpha + 2\beta \in \Sigma_+$. Para que isto ocorra é necessário que:

$$\frac{2\,(\alpha+\beta,\beta)}{(\alpha\,,\alpha)} - P\,(\alpha+\beta,\beta) < 0\,.$$

Ora:

$$\alpha + \beta - \beta = \alpha \in \Sigma_+$$

Então:

$$\alpha + \beta - 2\beta = \alpha - \beta \notin \Sigma_{i+}\,.$$

Ora, sendo:

$$[\beta - P\,(\alpha + \beta\,,\,\beta)\ (\alpha + \beta\,)] \in \Sigma_+,$$

e $\quad P(\alpha + \beta , \beta) = 1$, então:

$$\frac{2(\alpha+\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)} - 1 < 0 .$$

Por outro lado, temos:

$$2(\alpha + \beta , \beta) = 2(\alpha, \beta) + 2(\beta , \beta) = -2x\frac{\lambda}{2} + 2\lambda = -\lambda + 2\lambda = \lambda$$

.

Assim:

$$\frac{2(\alpha+\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)} - 1 = \frac{\lambda}{\lambda} - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 .$$

Então:

$$\alpha + 2\beta \notin \Sigma_+ .$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$2\alpha + \beta \notin \Sigma_+ .$$

Assim:

$$\Sigma_+ \equiv (\alpha, \beta, \alpha+\beta),$$

$$\Sigma \equiv [\alpha,-\alpha,\beta,-\beta,(\alpha+\beta),-(\alpha,\beta)] .$$

Por fim, calculemos o ângulo entre α e $(\alpha + \beta)$.

Portanto:

$$(\alpha, \alpha+\beta) = (\alpha,\alpha) + (\alpha, \beta) = \lambda - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} .$$

Por outro lado, temos:

$$(\alpha,\ \alpha+\beta) = \sqrt{(\alpha,\alpha)}\ .\ \sqrt{(\alpha+\beta)\ ,\ (\alpha+\beta)}\ .\ \cos\theta\ =\ \frac{\lambda}{2}.$$

Sendo:

$$[(\alpha+\beta)\ ,\ (\alpha+\beta)] = [\mu,(\alpha+\beta)] =$$

$$= (\mu,\alpha) + (\mu,\beta) = (\alpha+\beta\ ,\ \alpha) + (\alpha+\beta,\ \beta) =$$

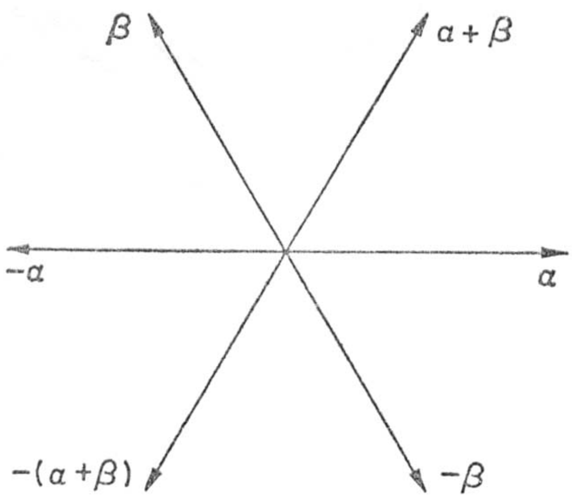
$$= (\alpha,\alpha) + (\beta,\alpha) + (\alpha,\beta) + (\beta,\ \beta) =$$

$$= \lambda - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + \lambda = 2\lambda - \lambda = \lambda\ .$$

$$(\alpha,\ \alpha+\beta) = \sqrt{\lambda}\,\sqrt{\lambda}\ \cos\theta\ =\ \lambda\ \cos\theta\ =\ \frac{\lambda}{2} \rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \rightarrow\ \boxed{\theta = 60^{o}}\ .$$

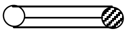
Em resumo, temos:



Exercício 3.6.1

a) Encontre as raízes da álgebra $A_1 \equiv SU(2)$;

b) Encontre as raízes da álgebra G_2 cujo **Diagrama de Schouten** é:



Teorema 3.6.3 As relações de comutação entre os operadores que geram uma **Álgebra de Lie** simples, satisfazem às seguintes expressões:

a) $\left[E_\alpha, E_\beta\right]_{\alpha,\beta\in\Sigma} = \begin{cases} N_{\alpha,\beta}\, E_{\alpha+\beta} & ,\ \alpha+\beta \in \Sigma \\ 0 & \alpha+\beta \notin \Sigma \end{cases}$;

b) $\left[E_\rho,\ E_{-\rho}\right] = F_{\rho,} = \sum_{\mu\in\pi} a_\rho^\mu\ F_\mu$;

c) $\left[F_\mu, F_\nu\right] = 0,\ \mu, \nu \in \pi$;

d) $\left[F_\mu, E_\nu\right] = -(\mu, \nu)\ E_\nu$,

onde:

$$N^2_{\alpha,\beta} = \frac{[P(\alpha,\beta)+1]}{2}\, Q(\alpha,\beta)\ (\beta,\beta),$$

$$N^2_{\alpha,\beta} = N^2_{\beta,\alpha} = N^2_{-\beta,-\alpha} = \ldots\ldots.,$$

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha} = N_{-\alpha,-\beta} = -N_{-\beta,-\alpha},$$

e

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = P(\alpha,\beta) - Q(\alpha,\beta).$$

Sendo:

$$[\alpha - P(\alpha,\beta)\,\beta] \in \Sigma \quad \text{e} \quad \{\alpha - [P\,(\alpha,\beta) + 1]\,\beta\,\} \notin \Sigma,$$

$$[\alpha + Q(\alpha,\beta)\,\beta] \in \Sigma \quad \text{e} \quad \{\alpha + [Q\,(\alpha,\beta) + 1]\,\beta\,\} \notin \Sigma.$$

Exercício 3.6.2 Usando o resultado do Teorema 3.6.3,

a) Mostre que se:

$U_\alpha = E_\alpha + E_{-\alpha}$, $\alpha \in \Sigma$,

$V_\alpha = i\,(E_\alpha - E_{-\alpha})$, $\alpha \in \Sigma$,

$H_\rho = i\,F_\rho$, $\rho \in \Gamma$,

onde Γ é um conjunto de vetores ortogonais tais que:

$$\alpha = \sum_{\sigma\in\Gamma} \frac{(\alpha,\sigma)}{(\sigma,\sigma)}\,\sigma, \quad \alpha \in \Sigma\ ; \quad (\sigma,\rho) = 0,\ \forall\,\rho,\ \sigma \in \Gamma.$$

Então:

$$[U_\alpha, U_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, U_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta}\, U_{\alpha-\beta},$$

$$[U_\alpha, V_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, V_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,-\beta}\, V_{\alpha-\beta},$$

$$[V_\alpha, V_\beta] = -N_{\alpha,\beta}\, U_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta}\, U_{\alpha-\beta},$$

$$[U_\alpha, V_\alpha] = -2 \sum_{\rho \in \Gamma} a_\alpha^\rho \; H_\rho \;,$$

$$[H_\rho\, , U_\alpha] = -\,(\rho,\alpha)\, V_\alpha,$$

$$[H_\rho\, V_\alpha] = (\rho,\alpha)\, U_\alpha,$$

$$[H_\sigma\, , H_\rho] = 0,$$

onde:

$$\alpha = \sum_{\rho \in \Gamma} a_\alpha^\rho\, \rho \;;\;\; a_\alpha^\rho = \frac{(\alpha,\beta)}{(\rho,\rho)} \;;\;\; (\rho,\rho) = 2 \;;$$

b) Encontre as constantes de estrutura dos grupos B_1 e A_2.

Definição 3.6.1 Dado um grupo **G** com **r** geradores (dentre eles P que comutam entre si), chamam-se **vetores pesos** do grupo dado ao conjunto de **p-uplas** formadas pelos auto-valores dos geradores que comutam. Esses vetores pesos são representados em um espaço R^P, e é chamado de **diagrama de pesos**. Cada ponto desse espaço representa um auto-vetor dos geradores que comutam.

Exemplo 3.6.3 Dentre as oito matrizes geradoras do grupo SU(3), as duas que comutam são representadas por:

$$G_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G_8 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encontrar o diagrama de pesos correspondentes.

É fácil ver que os vetores colunas:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

são auto-estados de G_3 e G_8, pois:

$$G_3 u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\, u_1,$$

$$G_8 u_1 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\, u_1.$$

Assim, o **vetor peso** correspondente ao auto-vetor u_1, será:

$$\left(+\frac{1}{2}\,,\, +\frac{1}{3}\right).$$

Para o auto-vetor u_2, temos:

$$G_3u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}u_2,$$

$$G_8u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}u_2.$$

Portanto, o **vetor peso** de u_2 será:

$$\left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\right).$$

Para o auto-vetor u_3, temos:

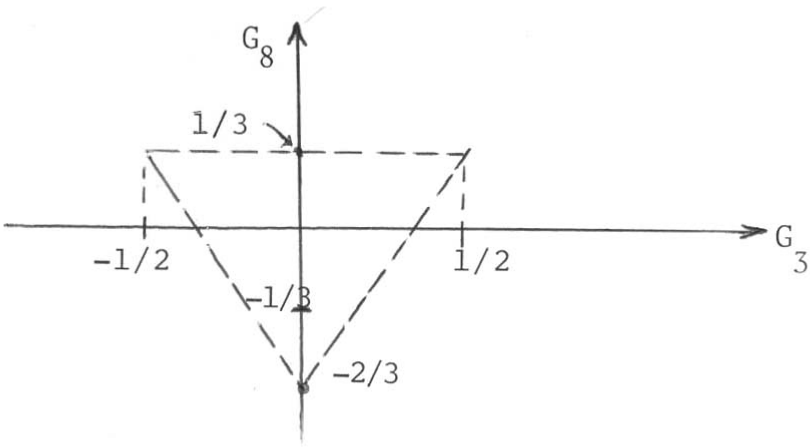
$$G_3u_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0\,u_3,$$

$$G_8u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}u_3.$$

Portanto, o **vetor peso** de u_3, será:

$$\left(0,\ -\frac{2}{3}\right).$$

O **diagrama de pesos** correspondente será:



Teorema 3.6.4 A dimensão de uma representação irredutível é dada por:

$$N = \underset{\alpha \in \pi}{\pi} (\lambda_\alpha + 1) \underset{\substack{\beta \in \Sigma^+ \\ \beta \notin \pi}}{\pi} \left[\frac{(\lambda, \beta)}{(g, \beta)} + 1 \right],$$

onde:

$$\lambda_{\substack{\alpha \\ \alpha \in \pi}} = 2\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}; \qquad g = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha .$$

Exercício 3.6.3 Mostre que o número de representações do grupo SU(3) é dado por:

$$N = \frac{1}{2}(n+1)(m+1)(n+m+2) \; ; \quad n = 0,1,2,....; \quad m = 0,1,2,.... \quad .$$

CAPÍTULO 4

Teoria do Momento Angular[1]

4.1 Representações Irredutíveis do Grupo SU(2)

4.1.1 Representações Spinoriais

O Grupo SU(2) é dado (Cf. 3.2) por:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \text{ com } aa^* + bb^* = 1.$$

Tal grupo descreve uma transformação de um vetor coluna complexo de duas componentes (**spinor**), ou seja:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & + & bv \\ -b^*u & + & a^*v \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$u' = a\,u + b\,v \equiv U_{11}\,u + U_{12}\,v\,, \qquad (1)$$

$$v' = -b^*\,u + a^*\,v \equiv U_{21}\,u + U_{22}\,v\,. \qquad (2)$$

Para estudar as representações irredutíveis de SU (2) em um espaço **(n+1)** dimensional, necessita-se de um conjunto de **(n+1)** funções (vetores) bases linearmente independentes, ou seja:

$$u^n, u^{n-1}\,v, u^{n-2}\,v^2, \ldots u\,v^{n-1}, v^n\,.$$

---

[1] Esta parte deste Capítulo foi ministrado pelo professor José Maria Filardo Bassalo no *Curso de Extensão*, realizado em 1985, na UFPA, sobre **Teoria de Grupos**.

Para concordar com os resultados da Mecânica Quântica, Wigner escolheu n = 2j $\left(j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ...\right)$ e definiu a seguinte função monomial:

$$f_m^j(u;v) = \frac{u^{j+m} v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}, \text{ onde } m = j, j-1, ... 0, ..., -j.$$

Assim, para um valor fixado de j, há (2j+1) polinômios linearmente independentes. Agora, tomemos a ação de U sobre $f_m(u;v)$, isto é:

$$f_m^j(u';v') = Uf_m^j(u;v) = \sum_{m'=-j}^{j} U_{mm'} f_{m'}^j(u;v) = \qquad (3)$$

$$= \frac{(au+bv)^{j+m}(-b^*u+a^*v)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \quad , \quad \text{[usando-se (1) e (2)].}$$

Sendo:

$$(au+bv)^{j+m} = \sum_{k=0}^{j+m} \frac{(j+m)!}{k!(j+m-k)!} a^{j+m-k} u^{j+m-k} b^k v^k,$$

e

$$(-b^*u+a^*v)^{j-m} = \sum_{\ell=0}^{j-m} \frac{(j-m)!}{\ell!(j-m-\ell)!} (-1)^{j-m-\ell} (b^*)^{j+m-\ell} u^{j-m-\ell} (a^*)^{\ell} v^{\ell}.$$

Então:

$$Uf^{f}_{m}(u;v)=\sum_{k=0}^{j+m}\sum_{\ell=0}^{j-m}(-1)^{j-m-\ell}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!\ell!(j+m-k)!(j-m-\ell)!}\times$$

$$\times\, a^{j+m-k}(a^*)^{\ell}(b^*)^{j-m-\ell}b^k u^{2j-k-\ell}v^{k+\ell}.$$

Fazendo-se: $j-k-\ell=m'$, virá: $u^{2j-k-\ell}\,v^{k+\ell}=u^{j+m'}\,v^{j-m'}$,

então:

$$Uf^{f}_{m}(u;v)=\sum_{k=0}^{j+m}\sum_{m'=-j}^{j}(-1)^{m'-m+k}\cdot\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}\times$$

$$\times\, a^{j+m-k}(a^*)^{j-m'-k}(b^*)^{k+m'-m}b^k\frac{u^{j+m'}\,v^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}\;.$$

Para o índice ℓ, temos:

$$m'=j-k-\ell\,.$$

Se $k=0$ e $\ell=0$, então: $m'=j$.

Se $k=j+m$ e $\ell=j-m$, então:

$m'=j-j-m-j+m=-j$.

Portanto:

$$U\,f^{j}_{m}(u;v)=\sum_{k=0}^{j+m}\sum_{m'=-j}^{j}(-1)^{m'-m+k}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k+m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}\times$$

$$\times a^{j+m-k}(a^*)^{j-m'-k}(b^*)^{k+m'-m}b^k\, f^{j}_{m'}(u;v).$$

Usando-se a expressão (3), virá:

$$U_{mm'} = \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^{m'+k-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!} \times$$
$$\times\, a^{j+m-k} (a^*)^{j-m'+k}\, b^k (b^*)^{k+m'-m} \tag{4}$$

Na expressão (4) acima, o índice **k** varia de **0** até **j+m**. Porém, como $(-n)! = \pm\infty \; (n = 1,2,\ldots)$ então o $U_{mm'}$ se anulará toda vez que o expoente de **a**, **a*** ou de **b***, atingir o valor negativo. É importante ainda observar que como **m** e **m'** variam de **–j** até **+j** em passos inteiros, então $U_{mm'}$ é uma matriz $(2j+1)(2j+1)$.

Exemplo 4.1.1.1 Encontrar a forma da matriz $U_{mm'}$ para j = 1/2.

Se j = 1/2, então: $m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ e $m' = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Portanto:

$$\begin{array}{cccc} & & m' = \frac{1}{2} & m' = -\frac{1}{2} \\ & & \downarrow & \downarrow \\ U = & \begin{array}{r} m = 1/2 \rightarrow \\ m = -1/2 \rightarrow \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.} \end{array}$$

Assim [lembrando que $(-1)! = \pm\infty$ e $0! = 1$], virá:

$$A=U_{1/2\,,\,1/2}=\sum_{k=0}^{1}\left(-1\right)^{k}\frac{\sqrt{1!0!1!0!}}{k!\left(-k\right)!\left(1-k\right)!k!}\,a^{1-k}\left(a*\right)^{k}\,b^{k}\left(b*\right)^{k}=\mathbf{a,}$$

$$B=U_{1/2\,,\,-1/2}=\sum_{k=0}^{1}\left(-1\right)^{-1+k}\frac{\sqrt{1!0!0!1!}}{k!\left(1-k\right)!\left(1-k\right)!\left(k-1\right)!}\,a^{1-k}\left(a*\right)^{1+k}\,b_{k}\times$$

$$\times\left(b*\right)^{-1+k}=\mathbf{b,}$$

$$C=U_{-1/2\,,\,1/2}=\sum_{k=0}^{0}\left(-1\right)^{1+k}\frac{\sqrt{0!1!1!0!}}{k!\left(-k\right)!\left(-k\right)!\left(k+1\right)!}\,a^{-k}\left(a*\right)^{k}\,b_{k}\times$$

$$\times\left(b*\right)^{k+1}=\mathbf{b*,}$$

$$D=U_{-1/2\,,\,-1/2}=\sum_{k=0}^{0}\left(-1\right)^{k}\frac{\sqrt{0!1!0!1!}}{k!\left(1-k\right)!\left(-k\right)!k!}\,a^{-k}\left(a*\right)^{1+k}\,b^{k}\times$$

$$\times\left(b*\right)^{k}=a\mathbf{*.}$$

Portanto:

$$\boxed{U_{m,m'}\equiv U_{1/2,1/2}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b* & a* \end{pmatrix}}\,.$$

Exemplo 4.1.1.2 Mostrar que a matriz $U_{mm'}$ é unitária.

Vamos a partir de:

$$A=\sum_{m=-j}^{j}f_{m}^{*j}\left(u',v'\right)f_{m}^{j}\left(u';v'\right)=\sum_{m=-j}^{j}\frac{\left(u'*\right)^{j+m}\left(v'*\right)^{j-m}(m')^{j+m}\left(u'\right)^{j+m}\left(v'\right)^{j-m}}{\sqrt{\left(j+m\right)!\left(j-m\right)!\left(j+m\right)!\left(j-m\right)!}}=$$

$$= \sum_{m=-j}^{j} \frac{\left(u'^{*}u'\right)^{j+m}\left(v'^{*}v'\right)^{j-m}}{(j+m)!\,(j-m)!} = \sum_{m=-j}^{j} \frac{\left[\left|u'\right|^{2}\right]^{j+m}\left[\left|v'\right|^{2}\right]^{j-m}}{(j+m)!\,(j-m)!} =$$

$$= \sum_{m=-j}^{j} \frac{\left[\left|au+bv\right|^{2}\right]^{j+m}\left[\left|-b^{*}a+a^{*}v\right|^{2}\right]^{j-m}}{(j+m)!\,(j-m)!}.$$

Agora, façamos: $j+m = s$. Então:

$$A = \sum_{s=0}^{2j} \frac{\left[\left|au + bv\right|^{2}\right]^{s}\left[\left|- b * a + a * v\right|^{2}\right]^{2j-s}}{s!\ (2j - s)!} \times \frac{(2j)!}{(2j)!} =$$

$$= \sum_{s=0}^{2j} \frac{\left[\left|u'\right|^{2}\right]^{s}\left[\left|v'\right|^{2}\right]^{2j-s}}{s!\ (2j - s)!}.$$

Sendo:

$$\left[\left|u'\right|^{2} + \left|v'\right|^{2}\right]^{2j} = \sum_{s=0}^{2j} \frac{(2j)!}{s!(2j-s)!} \times \left[\left|u'\right|^{2}\right]^{s}\left[\left|v'\right|^{2}\right]^{2j-s}.$$

Então:

$$A = \frac{\left[\left|u'\right|^{2} + \left|v'\right|^{2}\right]^{2j}}{(2j)!}.$$

Porém, para o SU (2) temos: $\left|u'\right|^{2} + \left|v'\right|^{2} = \left|u\right|^{2} + \left|v\right|^{2}$, então:

$$A=\frac{\left[|u'|^2+|v'|^2\right]^{2j}}{(2j)!}=\frac{\left[|u|^2+|v|^2\right]^{2j}}{(2j)!}=\sum_{s=0}^{2j}\frac{(2j)!\left[|u|^2\right]^s\left[|v|^2\right]^{2j}}{(2j)!\,s!\,(2j-s)!}\,.$$

Fazendo: j + m = s, virá:

$$A=\sum_{m=-j}^{j}\frac{\left[|u|^2\right]^{j+m}\left[|v|^2\right]^{j-m}}{(j+m)!\,(j-m)!}=\sum_{m=-j}^{j}\frac{[uu^*]^{j+m}[vv^*]^{j-m}}{(j+m)!\,(j-m)!}=$$

$$=\sum_{m=-j}^{j}\frac{u^{j+m}\;v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\cdot\frac{(u^*)^{j+m}(v^*)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}=\sum_{m=-j}^{j} f_m^{*j}(u;v)f_m^{j}(u;v)\,.$$

Ora, sendo:

$$Uf_m^j(u,v)=f_m^j(u',v')=\sum_{m'=-j}^{j}U_{mm'}\,f_{m'}^j(u,v)\ ,$$

então:

$$\sum_{m'=-j}^{j} f_m^{*j}(u',v')f_m^j(u,v)=\sum_{m'=-j}^{j} f_{m'}^{*j}(u;v)f_m^j(u;v)\,,$$

e

$$\sum_{m=-j}^{j}\left(\sum_{m'=-j}^{j}U^*_{mm'}\;f_m^{*j}(u;v)\right)\left(\sum_{m''=-j}^{j}U^*_{mm''}\;f_{m''}^{*j}(u;v)\right)=$$

$$=\sum_{m=-j}^{j} f_m^{*j}(u;v)\,f_m^{j}(u;v)\ ,$$

ou

$$\sum_{m'=-j}^{j}\left(\sum_{m=-j}^{j}\ \sum_{m''=-j}^{j} U^{*}_{mm'}\ U^{*}_{mm''}\right)\sum_{m''=-j}^{j} f^{*j}_{m'}(u;v)\, f^{j}_{m''}(u;v) =$$

$$= \sum_{m=-j}^{j} f^{*j}_{m}(u;v)\, f^{j}_{m}(u;v)\ .$$

Se U for unitária, isto é:

$$U^{+}U = I \rightarrow \sum_{m=-j}^{j} U^{*}_{mm'}\ U^{*}_{mm''} = \delta_{m'm''}\ ,$$

então:

$$\sum_{m'=-j}^{j}\ \sum_{m''=-j}^{j} \delta_{m'm''} f^{*j}_{m'}(u;v) f^{j}_{m''}(u;v) =$$

$$= \sum_{m''=-j}^{j} f^{*j}_{m''}(u;v)\, f^{j}_{m''}(u;v) = \sum_{m=-j}^{j} f^{*j}_{m}(u;v)\, f^{j}_{m}(u;v)\ .$$

Exercício 4.1.1 Demonstre que a matriz $U_{mm'}$ é uma representação de SU(2).

4.1.2 Representação por Matrizes Rotação.

A representação geral do SU(2) em termos dos ângulos de Euler é dada por (Cf. Exemplo 3.5.4)

$$U(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) & e^{i(\alpha-\gamma)/2}\mathrm{sen}(\beta/2) \\ -e^{i(\alpha-\gamma)/2}\mathrm{sen}(\beta/2) & e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$a \;=\; e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \quad e \quad b=e^{i(\alpha-\gamma)/2}\mathrm{sen}(\beta/2)\,,$$

então:

$$U_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{k=0}^{j+m}(-1)^{m'+k-m}.\frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!\,(j+m')!\,(j-m')!}}{k!\,(j-m'-k)!\,(j+m-k)!\,(m'-m+k)!}\times$$

$$\times\left[e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2)\right]^{j+m-k}\left[e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2)\right]^{j-m'-k}\times$$

$$\times\left[e^{i(\alpha-\gamma)/2}\mathrm{sen}(\beta/2)\right]^{k}\left[e^{-i(\gamma-\alpha)/2}.\mathrm{sen}(\beta/2)\right]^{k+m'-m}\quad .$$

Sendo:

$$e^{i\frac{\gamma}{2}(j+m-k-j+m'+k+k-k-m'+m)}=e^{i\gamma m}\,,$$

$$e^{i\frac{\alpha}{2}(j+m-k-j+m'+k-k+k+m'-m)}=e^{im'\alpha}\,,$$

$$\left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{j+m-k+j-m'-k}=\left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{2j+m-m'-2k}\,,$$

e

$$\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{k+k+m'-m}=\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{2k+m'-m}\,,$$

teremos:

$$\boxed{\begin{aligned}U_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{k=0}^{j+m}(-1)^k.\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!}\times\\ \times e^{im\gamma}\left[\cos(\beta/2\right]^{2j+m-m'-2k}\left[-\mathrm{sen}(\beta/2)\right]^{m'-m+2k}e^{im'\alpha}\end{aligned}}\ , \quad (7)$$

pois:

$$(-1)^{m'-m} = (-1)^{m'-m+2k} \ .$$

Em Mecânica Quântica é costume usar-se a seguinte matriz:

$$D^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) = U^*_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) \equiv e^{-im\gamma}\, d^j_{m'm}(\beta) e^{-im'\alpha}, \qquad (8)$$

onde:

$$\boxed{\begin{aligned}d^j_{m'm}(\beta)=\sum_{k=0}^{j+m}(-1)^k.\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!}\times\\ \times\left[\cos(\beta/2\right]^{2j+m-m'-2k}\left[-\mathrm{sen}(\beta/2)\right]^{m'-m+2k}\end{aligned}}\ . \qquad (9)$$

Teorema 4.1.2 As matrizes rotação $D^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)$ são representações irredutíveis.

Demonstração:

Seja uma matriz A independente de (α,β,γ), tal que:

$$(A\, D^j)_{mm'} = (D^j A)_{mm'} \ , \ \forall\ \alpha,\beta,\gamma$$

ou

$$\sum_k A_{mk} D^j_{km'} = \sum_k D^j_{mk} A_{km'} \ .$$

Usando-se a expressão (8), virá:

$$\sum_k A_{mk} e^{-im'\gamma} d^j_{km'} e^{-ik\alpha} = \sum_k e^{-ik\gamma} d^j_{mk} e^{-im\alpha} A_{km'} \ . \qquad (10)$$

Inicialmente, vejamos quanto vale $d^j_{km'}(\beta)$. Usando-se a expressão (9), virá:

$$d^j_{km'}(\beta) = \frac{\sqrt{(j+k)!(j-k)!(j+m')!(j-m')!}}{0!(j-k)!(j+m)!(k-m')!} \times \left[\cos(\beta/2\right]^{2j+m'-k} \times$$

$$\times\left[-\mathrm{sen}(\beta/2)\ \right]^{k-m'} + \sum_{s\neq 0}^{j+m'} \frac{(-1)^s \sqrt{(j+k)!(j-k)!(j+m')!(j-m')!}}{s!(j-k-s)!(j+k-s)!(k-m'+s)!} \times$$

$$\times\left[\cos\ (\beta/2\right]^{2j+m'-k-2s} \left[-\mathrm{sen}(\beta/2)\ \right]^{k-m'+2s} \ .$$

Para $\beta = 0$, virá:

$$d^j_{km'}(0) = \frac{\sqrt{(j+k)!(j-k)!(j+m')!(j-m')!}}{(j-k)!(j+k)!(k-m')!} \times (\cos\ 0^0)^{2j+m'-k} \times$$

$$\times(-\mathrm{sen} 0^0)^{k-m'} \ .$$

Agora, se $k \neq m'$, então:

$$d^j_{km'}(0) = 0 \, .$$

Se $k = m'$, teremos:

$$d^j_{kk}(0) = \frac{\sqrt{(j+k)!(j-k)!(j+k)!(j-k)!}}{(j-k)!(j+k)!(k-k)!} (1)^{2j}.(0)^0 = 1.$$

Portanto:

$$d^{j}_{km'}(0) = \delta_{km'} \ .$$

Fazendo-se $\beta = \gamma = 0$ na equação (10), virá:

$$\sum_{k} A_{mk}\, \delta_{km'}\, e^{-ik\alpha} = \sum_{k} \delta_{mk}\, e^{-im\alpha} A_{km'} \ ,$$

$$A_{mm'}\, e^{-im'\alpha} = e^{-im\alpha} A_{mm'} \ ,$$

ou:

$$e^{-im'\alpha} = e^{-im\alpha} \ ,$$

igualdade essa que só subsistirá se m = m', o que indica, portanto que $A_{mm'}$ é diagonal!

Agora, retomemos a expressão (10) e façamos $\alpha = \gamma = 0$, então:

$$\sum_{k} A_{mk}\, d^{j}_{km'}(\beta) = \sum_{k} d^{j}_{km}(\beta)\, A_{mk'} \ .$$

Quando k = m no 1º membro, e k = m' no 2º membro da expressão acima, teremos:

$$A_{mm}\, d^{j}_{mm'}(\beta) = d^{j}_{mm'}(\beta)\, A_{m'm'} \ .$$

Por fim, tomando-se m' = j, virá:

$$A_{mm}\, d^{j}_{mj}(\beta) = d^{j}_{mj}(\beta)\, A_{jj} \ .$$

Sendo $d^{j}_{mj}(\beta) \neq 0, \forall \beta$, então: $A_{mm} = A_{jj}, \forall_{m}$.

Portanto, a matriz A é múltipla da unidade e pelo **lema de Schur**, $D^{j}_{mm'}, (\alpha, \beta, \gamma)$ é **irredutível.**

Exercício 4.1.2 Demonstre que $d^j_{mj}(\beta) \neq 0, \forall\beta$.

4.1.3 Representações por Harmônicos Esféricos

Tomemos as expressões (8,9) e façamos j = 1, Então:

$$D^1_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-im\gamma} d^1_{m'm}(\beta) e^{-im'\alpha} \quad .$$

Agora, sendo m, m' = –1, 0, 1, os elementos da matriz acima serão:

$$D^1_{11} = e^{-i\gamma}\, d^1_{11}\,(\beta)\, e^{-i\alpha} \quad ,$$

$$d^1_{11}(\beta) = \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k \sqrt{2!0!2!0!}}{k!(-k)!(2-k)!k!} \left[\cos(\beta/2)\right]^{2-2k} . \left[-\,\text{sen}(\beta/2)\right]^{2k} .$$

Como (–n)! = ± ∞ (n = 1, 2,...), então:

$$d^1_{11}(\beta) = \frac{2!}{0!\,0!\,2!\,0!} \cos^2(\beta/2) = \frac{1+\cos\beta}{2} \quad .$$

Portanto:

$$D^1_{11} = e^{-i\gamma} \left(\frac{1+\cos\beta}{2} \right) e^{-i\alpha} \quad .$$

De maneira análoga, obtém-se os demais elementos da matriz $D^1_{mm'}$ cuja forma é:

$$D^{1}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \overset{m=1}{\downarrow} & \overset{m=0}{\downarrow} & \overset{m=-1}{\downarrow} \end{array} \\ \begin{array}{r} m'=1\rightarrow \\ m'=0\rightarrow \\ m'=-1\rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\dfrac{1+\cos\beta}{2}e^{-i\gamma} & -e^{-i\alpha\frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{2}}} & e^{-i\alpha}\dfrac{1-\cos\beta}{2}e^{i\gamma} \\ \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{2}}e^{-i\gamma} & \cos\beta & -\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{2}}e^{i\gamma} \\ e^{i\alpha}\dfrac{1-\cos\beta}{2}e^{-i\gamma} & e^{i\alpha\frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{2}}} & e^{i\alpha}\dfrac{1+\cos\beta}{2}e^{i\gamma} \end{pmatrix} \end{array} \quad (11)$$

Exercício 4.1.3.1 Encontre os demais elementos da matriz $D^{1}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Dada a matriz $D^{1}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)$, demonstra-se (Rose, 1967) que a mesma é ligada à matriz rotação R (α,β,γ) através de uma transformação de similaridade, isto é (T ≡ transposta):

$$D^{1}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = (U\,R\,U^{-1})^{T} = (U^{-1})^{T}\,(R)^{T}\,(U)^{T}\,, \qquad (12)$$

onde:

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma-\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\gamma & \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma+\cos\alpha\,\operatorname{sen}\gamma & -\operatorname{sen}\beta\,\cos\gamma \\ -\cos\alpha\,\cos\beta\,\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\,\cos\gamma & -\operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta\,\operatorname{sen}\gamma+\cos\alpha\,\cos\gamma & \operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\gamma \\ \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

e

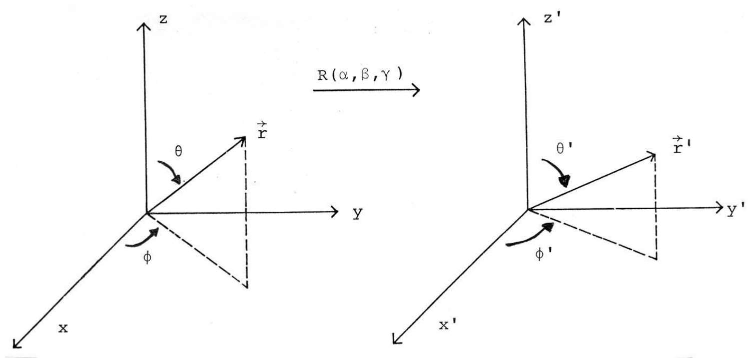
$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix};\ U^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 4.1.3.2 Verifique a expressão (12).

Seja $\vec{r}$ um vetor unitário caracterizado pelas seguintes coordenadas esféricas (θ,ϕ). Aplicando-se a matriz rotação $R(\alpha,\beta,\gamma)$ a esse vetor, obtém-se o vetor $\vec{r}\,'$ caracterizado, no novo sistema de coordenadas girando segundo os **ângulos de Euler** (α,β,γ), pelas coordenadas (θ',ϕ'), isto é:

$$\vec{r}\,' = R(\alpha,\beta,\gamma)\,\vec{r}\ . \qquad (14)$$

Geometricamente, temos



A figura acima nos mostra que:

$$\vec{r} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\ \vec{I}\ + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\ \vec{J}\ + \cos\theta\ \vec{K} \equiv \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\ \cos\phi \\ \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

e

$$\vec{r}\,' = \operatorname{sen}\theta'\cos\phi'\ \vec{I}\ + \operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\phi'\ \vec{J}\ + \cos\theta'\ \vec{K} \equiv \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta'\ \cos\phi' \\ \operatorname{sen}\theta'\ \operatorname{sen}\phi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix}.$$

Usando-se as expressões (13) e (14), virá:

$$\begin{pmatrix} \text{sen}\theta'\cos\phi' \\ \text{sen}\theta'\text{sen}\phi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\gamma & \text{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\,\text{sen}\gamma & -\text{sen}\beta\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta\,\text{sen}\gamma - \text{sen}\alpha\cos\gamma & -\text{sen}\alpha\cos\beta\,\text{sen}\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma \\ \cos\alpha\,\text{sen}\beta & \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \text{sen}\theta\cos\phi \\ \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo-se esse produto matricial, mostra-se que:

$$\cos\theta' = \text{sen}\beta\ \text{sen}\theta\ \cos(\phi - \alpha) + \cos\beta\ \cos\theta\ . \qquad (15)$$

A expressão (15) pode ser obtida da seguinte maneira:

$$Y_1^0(\theta', \phi') = \sum_{m'=-1}^{1} D^1_{m'0}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_1^{m'}(\theta, \phi), \qquad (16)$$

onde $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ é chamado de **Harmônico Esférico** e definido por (Jackson, 1992):

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, p_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \ , \qquad (17)$$

com:

$$Y_1^{-m}(\theta,\phi) = (-1)^m \left(Y_1^m\right)^* (\theta,\phi) \ , \qquad (18)$$

e

$$P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^m}{2^\ell.\ell!}(1-\cos^2\theta)^{m/2}\frac{d^{\ell+m}}{d(\cos\theta)^{\ell+m}}(\cos^2\theta - 1)^\ell\ . \quad (19)$$

Desenvolvendo-se a expressão (16), virá:

$$Y_1^0 = D^1_{-10}\, Y_1^{-1} + D^1_{00}\, Y_1^0 + D^1_{10}\, Y_1^1 \quad .$$

Usando-se as expressões (11), (17), (18) e (19), é fácil ver que:

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta' = e^{i\alpha}\frac{\mathrm{sen}\beta}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\mathrm{sen}\theta \;\; e^{-i\phi} + \cos\beta\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta +$$

$$+ e^{-i\alpha}\frac{\mathrm{sen}\beta}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\mathrm{sen}\theta \;\; e^{i\phi},$$

e

$$\cos\theta' = \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\beta\ \cos\,(\phi - \alpha) + \cos\beta\ \ \cos\theta,$$

que é idêntica à expressão (15),

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$Y_1^m\,(\theta', \phi') = \sum_{m'=-1}^{1} D^1_{m'm}\,(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_1^{m'}(\theta, \phi) \quad . \tag{20}$$

Exercício 4.1.3.3 Demonstre a expressão (20).

De um modo geral, pode-se demonstrar que (Cushing, 1975):

$$Y_\ell^m(\theta', \phi') \equiv O_R\ Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D^\ell_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)\ Y_\ell^m(\theta, \phi)\,. \tag{21}$$

Exercício 4.1.3.4 Mostre que:

a) $D^{\ell}_{m0}(\alpha,\beta,0)=\sqrt{\dfrac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y^{*m}_{\ell}(\beta,\alpha)$;

b) $D^{\ell}_{0k}\left(0,\beta,\gamma\right)=\sqrt{\dfrac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y^{k}_{\ell}\left(\beta,\gamma\right)$

c) $D^{\ell}_{00}\left(0,\beta,0\right)=P_{\ell}\,(\cos\beta)$.

4.2 Operador de Momento Angular

4.2.1 Momento Angular Orbital: Conceito Clássico

Na Mecânica Clássica, o momento angular orbital é definido por:

$$\vec{L}_C=\vec{r}\times\vec{p}\ ,$$

onde: $\vec{p}=m\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, é o momento linear.

4.2.2 Momento Angular Orbital: Conceito Quântico

Segundo a representação de Schrödinger da Mecânica Quântica, o momento linear clássico $\vec{p}$ é substituído por:

$$\widehat{p}=-i\hbar\nabla\,.$$

Portanto, em Mecânica Quântica, o momento angular é definido por (daqui em diante, faremos $\hbar\equiv 1$).

$$\widehat{L}_{OM}\equiv\widehat{L}=-i\vec{r}\times\nabla\ .$$

4.2.3 A Álgebra dos Operadores de Momento Angular

Inicialmente, calculemos o operador $\hat{L}$ em coordenadas cartesianas. Assim sendo:

$$\vec{r}\times\nabla = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} = \vec{I}\,(y\partial_z - z\partial_y) + \vec{J}\,(z\partial_x - x\partial_z) + \vec{K}\,(x\partial_y - y\partial_x) \ ,$$

onde $\quad \partial_x \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}$, etc.,

então:

$$\hat{L}_x = -i(y\partial_z - z\partial_y);\ \hat{L}_y = -i(z\partial_x - x\partial_z);\ \hat{L}_z = -i(x\partial_y - y\partial_x) \ . \tag{22a,b,c}$$

Obtidas as expressões para os componentes cartesianos do operador $\hat{L}$, calculemos o comutador entre os mesmos. Assim:

$$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right] = \hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x = -(y\partial_z - z\partial_y)(z\partial_x - x\partial_z) +$$

$$+ (z\partial_x - x\partial_z)(y\partial_z - z\partial_y) =$$

$$= -y\partial_z(z\partial_x) + y\partial_z(x\partial_z) + z\partial_y(z\partial_x) - z\partial_x(x\partial_z) + z\partial_x(y\partial_z) - z\partial_x(z\partial_y) -$$

$$- x\partial_z(y\partial_z) + x\partial_z(z\partial_y) = -y(\partial_x + z\partial^2_{zx} + yx\partial^2_{zz} + z^2\partial^2_{yx} - zx\partial^2_{yz} + yz\partial^2_{xz} +$$

$$- z^2\partial^2_{xy} - yx\partial^2_{zz} + x(\partial_y + z\partial^2_{zy}) \ .$$

Sendo $\quad \partial^2_{\alpha\beta} = \partial^2_{\beta\alpha}\,(\alpha,\beta = x,y,z)$, virá:

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = -y\partial_x + x\partial_y = +i\left[-i\left(x\partial_y - y\partial_x\right)\right] \rightarrow$$

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hat{L}_z \ .$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = i\hat{L}_y \quad \text{e} \quad \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = i\hat{L}_x \ .$$

Assim, podemos escrever que:

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \ . \tag{23}$$

ou, simbolicamente:

$$\left[\hat{L} \times \hat{L}\right] = i\hat{L} \ .$$

Exercício 4.2.3 Complete a demonstração da expressão (23).

[É oportuno observar que comparando-se a expressão (23) com a regra de comutação dos geradores do grupo **O**(3) (Cf. **3.2.a**), vê-se que os componentes cartesianos do operador de momento angular e aqueles geradores satisfazem a mesma álgebra, a menos do fator $i\hbar$ (estamos considerando $\hbar = 1$).]

4.2.4 Auto-Funções e Auto-Valores dos Operadores $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$

Inicialmente, vamos escrever os operadores $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$ em coordenadas esféricas. Para isso, tomemos as expressões (22a,b,c), ou seja:

$$\hat{L}_x = -i(y\partial_z - z\partial_y); \hat{L}_y = -i(z\partial_x - x\partial_z); \hat{L}_z = -i(x\partial_y - y\partial_x).$$

As relações entre coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) e cartesianas (x,y,z), são dadas por:

$$x = r\,\text{sen}\theta\cos\phi \;;\; y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi \;;\; z = r\cos\theta \;; \qquad \text{(24a,b,c)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \;; \cos\theta = \frac{z}{r} \;; \text{tg}\theta = \frac{y}{x}\;. \qquad \text{(24d,e,f)}$$

Derivando-se r^2 em relação a x,y,z, respectivamente, teremos:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \text{sen}\theta\cos\phi \;; \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi \;; \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\theta\,.$$

(25a,b,c)

Por outro lado, derivando-se $\cos\theta = \frac{z}{r}$ em relação a x,y,z, respectivamente, teremos:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} \;; \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\,\text{sen}\phi}{r} \;; \frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\text{sen}\theta}{r}\,. \qquad \text{(26a,b,c)}$$

Por fim, derivando-se $\text{tg}\phi = \frac{y}{x}$ em relação a x,y,z, respectivamente, virá:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\text{sen}\phi}{r\,\text{sen}\theta} \;; \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\cos\phi}{r\,\text{sen}\theta} \;; \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0\,. \qquad \text{(27 a,b,c)}$$

Exercício 4.2.4.1 Demonstre o grupo de equações (25), (26) e (27).

Tomemos o operador $\hat{L}_z$ e vamos escrevê-lo em coordenadas esféricas. Então, segundo (22 c), tem-se:

$$\hat{L}_Z = -i(x\partial_y - y\partial_x)\ .$$

Agora, passemos de (x,y,z) → (r,θ,φ). Ora:

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\times\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\times\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\times\frac{\partial}{\partial \phi}\ ;$$

$\left[\text{Lembrar que: } f(r,\theta)\text{, então: } df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi.\right]$

$$\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\times\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\times\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\times\frac{\partial}{\partial \phi}\ ;$$

$$\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\times\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\times\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\times\frac{\partial}{\partial \phi}\ .$$

Portanto, usando-se o grupo de equações (24) e as equações acima, teremos:

$$\hat{L}_Z = -i\left[r\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) - r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\right].$$

Agora, usando-se os grupos de equações (25), (26) e (27), teremos:

$$\hat{L}_Z = -i\frac{\partial}{\partial \phi} \equiv -1\partial_\phi\ . \qquad (28a)$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$\hat{L}_x = i\left(\mathrm{sen}\phi\,\partial_\theta + \mathrm{cotg}\theta\cos\phi\,\partial_\phi\right); \qquad (28b)$$

$$\hat{L}_Y = i\left(\cos\phi\,\partial_\theta + \mathrm{cotg}\theta\,\mathrm{sen}\phi\,\partial_\phi\right); \qquad (28c)$$

Exercício 4.2.4.2 Complete a demonstração do grupo das equações (28).

Obtidos os operadores $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ e $\hat{L}_z$ em coordenadas esféricas, vamos obter o operador $\hat{L}^2$ nesse tipo de coordenadas. Assim,

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 .$$

Usando-se o grupo de equações (28), virá:

$$\hat{L}^2 = -(\text{sen}\phi\partial_\theta + \cot g\theta \cos\phi\partial_\phi)^2 - (\cos\phi\partial_\theta - \cot g\text{sen}\phi\partial_\theta)^2 - \partial^2_{\phi\phi} \ .$$

Inicialmente, calculemos:

$(\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi)^2 = (\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi)\ (\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi) =$

$= \text{sen}\phi\partial_\theta\ (\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi) + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi\ (\text{sen}\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\partial_\phi) =$

$= \text{sen}^2\phi\, \partial^2_{\theta\theta} + \text{sen}\phi\cos\phi\ (-\text{cosec}^2\theta\partial_\phi + \text{cotg}\theta\ \partial^2_{\theta\phi}) + \text{cotg}\theta\cos\phi\ [\cos\phi\partial_\theta +$

$+ \text{sen}\phi\, \partial^2_{\phi\theta} + \text{cotg}\theta\ (-\ \text{sen}\phi\partial_\theta + \cos\phi\, \partial^2_{\phi\phi})] =$

$= \text{sen}^2\phi\, \partial^2_{\theta\theta} - \text{sen}\phi\cos\phi\text{cosec}^2\theta\partial_\phi + \text{sen}\phi\cos\phi\text{cotg}\theta\, \partial^2_{\theta\phi}\ +$

$+ \text{cotg}\theta\ \cos\phi\partial_\theta + \text{cotg}\theta\cos\phi\text{sen}\phi\, \partial^2_{\phi\theta}\ - \text{cotg}^2\theta\cos\phi\text{sen}\phi\partial_\phi +$

$+ \text{cotg}^2\theta\cos^2\phi\, \partial^2_{\phi\phi}\ \ .$

De maneira análoga, temos:

$(\cos\phi\partial_\theta - \text{cotg}\theta\text{sen}\phi\partial_\phi\ )^2 = \cos^2\phi\, \partial^2_{\theta\theta} + \text{sen}\phi\cos\phi\ \text{cosec}^2\theta\partial_\phi +$

$-\ \text{sen}\phi\cos\phi\text{cotg}\theta\, \partial^2_{\theta\phi}\ + \text{cotg}\theta\text{sen}^2\phi\partial_\theta\ - \text{cotg}\theta\text{sen}\phi\cos\phi\, \partial^2_{\phi\theta}\ +$

$+ \text{cotg}^2\theta\ \text{sen}\phi\cos\phi\partial_\phi + \text{cotg}^2\theta\ \text{sen}^2\phi\,\partial^2_{\phi\phi}$.

Portanto:

$$\hat{L}^2 = -\left[\frac{1}{\text{sen}\theta}\partial_\theta\left(\text{sen}\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\partial^2_{\phi\phi}\right]. \quad (29)$$

Exercício 4.2.4.3 Complete a demonstração da equação (29).

Sendo os operadores $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$ funções de (θ,ϕ), suas equações de auto-valores serão, respectivamente:

$$\hat{L}^2 f(\theta,\phi) = L^2 f(\theta,\phi)\ , \quad (30)$$

$$\hat{L}_z g(\theta,\phi) = L_z g(\theta,\phi)\ , \quad (31)$$

Agora, calculemos os auto-valores L^2 e L_z . Para isso, usaremos as equações (29) e (28a). Inicialmente, resolvamos a equação (30):

$$-\left[\frac{1}{\text{sen}\theta}\partial_\theta(\text{sen}\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\partial^2_{\phi\phi}\right]f(\theta,\phi) = L^2 f(\theta,\phi)\ ,$$

$$\left[\frac{1}{\text{sen}\theta}\partial_\theta(\text{sen}\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\partial^2_{\phi\phi} + L^2\right]f(\theta,\phi) = 0\ .$$

Para resolver a equação diferencial acima, usaremos a técnica da separação de variáveis (Arfken, 1970; Bassalo, 1989; Mathews e Walker, 1965). Assim, fazendo-se $f(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$, virá:

$$\left(\partial^2{}_\theta + \cot g\theta\partial_\theta + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\partial^2{}_\phi + L^2\right)\Theta(\theta)\Phi(\phi) = 0\ .$$

Separando-se as variáveis θ e ϕ, a equação acima se transformará em:

$$\mathrm{sen}^2\theta\,\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\theta\frac{\dot{\Theta}}{\Theta} + L^2\mathrm{sen}\theta = -\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi}, \qquad (32)$$

ou

$$h(\theta) = j(\phi) \;\rightarrow\; \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = \text{constante.}$$

Razões físicas, impõem que: $\Phi\,(\phi+2\pi) = \phi$, então:

$$\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = -\,m^2\;;\;(m = 0, \pm1, \pm2,...),$$

portanto: $$\boxed{\Phi = \exp\,(im\phi)}\;. \qquad (33)$$

Obtido $\Phi(\phi)$, voltemos à equação (32). Então:

$$\mathrm{sen}^2\theta\,\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\theta\frac{\dot{\Theta}}{\Theta} + L^2\mathrm{sen}\theta - m^2 = 0\,.$$

Fazendo-se $\cos\theta = x$, teremos (Cf. Bassalo, op. cit.):

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left(L^2 - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta(x) = 0\;,$$

cuja solução é:

$$\Theta(x) = P_\ell^m(\cos\theta)\,,\quad \text{se: } L^2 = P\,(P+1)\,,$$

onde:

$$m = -P,\,(-P+1),...,\,0,...,\,(P-1),\,P\,.$$

Assim, a auto-função do operador $\widehat{L}^2$ será:

$$f(\theta,\phi) = A_{\ell,m}\, e^{im\phi} P_\ell^m(\cos\theta).$$

Escolhendo-se a constante $A_{\ell,m} = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi} \cdot \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}$ obteremos o harmônico esférico [vide equação (17)]. Desse modo, a equação de autovalores para o operador $\widehat{L}^2$ tomará a forma:

$$\widehat{L}^2\, Y_\ell^m\,(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)\, Y_\ell^m\,(\theta,\phi). \quad (\hbar \equiv 1) \tag{34}$$

Resolvida a equação (30), passemos a resolver a equação (31), isto é:

$$\widehat{L}_Z g(\theta,\phi) = L_Z g(\theta,\phi)\ .$$

Sendo $\widehat{L}_Z = -i\partial_\phi$, então:

$$-\, i\partial_\phi g(\theta,\phi) = L_z g(\theta,\phi)$$

$$-\, i\frac{\partial g}{\partial \phi} = L_z g \ \rightarrow\ \frac{\partial g}{g} = iL_z \partial\phi\ .$$

Integrando-se a equação acima, virá:

$$\ln g = iL_z\phi \quad \rightarrow \qquad g = \exp\,(iL_z\phi)\ .$$

Razões físicas impõem que g $(\phi+2\pi)$ = g (ϕ), então:

$$\boxed{L_z = m}\quad , (m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)\ .$$

Assim, a auto-função do operador $\widehat{L}_Z$ será:

$$g(\phi) = \exp(im\phi)\ .$$

Ora sendo:

$$\widehat{L}_Z g = L_Z g = mg\ \ ,$$

então:

$$-\,i\frac{\partial}{\partial\phi}e^{im\phi} = me^{im\phi}.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação acima por

$\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\cdot\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)$, vê-se que:

$$\boxed{\widehat{L}_z\, Y_\ell^m(\theta,\phi) = m\, Y_\ell^m(\theta,\phi)}\ . \qquad (35)$$

É oportuno observar que os operadores $\widehat{L}^2$ e $\widehat{L}_z$ têm a mesma auto-função $Y_\ell^m(\theta,\phi)$. Tal situação decorre do fato de que esses operadores são comutáveis, isto é:

$$\left[\widehat{L}^2, \widehat{L}_z\right] = 0\ .$$

Exercício 4.2.4.4 Demonstre que:

$$\left[\widehat{L}^2, \widehat{L}_i\right] = 0\ , \qquad (i = x,y,z)\ .$$

4.2.5 Operador de Momento Angular Total

A introdução do conceito de spin do elétron em Mecânica Quântica por Uhlenbeck e Goudsmit (1925) como sendo um momento angular intrínseco dessa partícula, isto é:

$$\widehat{S}^2\phi = S(S+1)\phi\ , \qquad (\hbar \equiv 1)$$
$$\widehat{S}_z\phi = S_z\phi$$

onde S_z = –S, –S+1,...,0,...,S–1, S, com (S=1/2), levou à generalização desse conceito às demais partículas. Assim, as partículas que têm spin inteiro são chamadas de **bosônicas**, e as que têm spin fracionário são chamadas de **fermiônicas.** Por outro lado, como uma partícula possui também momento angular orbital, há necessidade portanto de definir um momento angular total, ou seja:

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S} \ .$$

Em analogia com os operadores de momento angular orbital $\hat{L}$ e de spin $\hat{S}$, o operador $\hat{J}$ satisfaz à seguinte regra de comutação:

$$\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k \ , \tag{36}$$

ou, simbolicamente:

$$\left[\hat{J} \times \hat{J}\right] = i\hat{J} \ .$$

Sendo ainda $\hat{J}$ um operador de momento angular, então:

$$\hat{J}^2 Y_j^m(\theta,\phi) = j(j+1)\ Y_j^m(\theta,\phi) \ , \tag{37a}$$

$$\hat{J}_z Y_j^m(\theta,\phi) = m Y_j^m(\theta,\phi) \ , \tag{37b}$$

onde m = –j, –j+1,...,0,...,j–1, j.

$$j = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},...$$

e

$$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_i\right] = 0,\ \forall_i = x,y,z \ . \tag{37c}$$

Exercício 4.2.5 Demonstre a equação (37c).

4.2.6 Operadores "ladder" (escada)

Os operadores **"ladder"** são definidos por:

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}y \quad , \tag{38a}$$

$$\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y \quad . \tag{38b}$$

Da definição acima, é fácil ver que:

$$\hat{J}_+^{\perp} = \hat{J}_- \quad \text{e} \quad \hat{J}_-^{\perp} = \hat{J}_+ \ ,$$

onde (⊥) significa operador Hermitiano conjugado.

Agora, vamos escrever o operador $\hat{J}^2$ em termos desses operadores **"ladder".** Assim, sendo:

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$$

e

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \left(\hat{J}_x + i\hat{J}_y\right)\left(\hat{J}_x - i\hat{J}_y\right) = \hat{J}_x^2 - i\hat{J}_x\hat{J}_y + i\hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y^2 \ ,$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \left(\hat{J}_x - i\hat{J}_y\right)\left(\hat{J}_x + i\hat{J}_y\right) = \hat{J}_x^2 + i\hat{J}_x\hat{J}_y - i\hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y^2 \ ,$$

então:

$$\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+ = 2\hat{J}_x^2 + 2\hat{J}_y^2 \ .$$

Portanto:

$$\boxed{\hat{J}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+\right) + \hat{J}_z^2} \ . \tag{39}$$

Usando-se as equações (36) e (38,a,b) vamos calcular alguns comutadores envolvendo os operadores $\widehat{J}^2, \widehat{J}_z, \widehat{J}_+,$ e $\widehat{J}_-$. Assim:

$$\left[\widehat{J}_z, \widehat{J}_+\right] = \left[\widehat{J}_z, \widehat{J}_x + i\widehat{J}_y\right] = \left[\widehat{J}_z, \widehat{J}_x\right] + i\left[\widehat{J}_z, \widehat{J}_y\right] =$$

$$= i\widehat{J}_y + i\left(-i\widehat{J}_x\right) = \widehat{J}_x + i\widehat{J}_y = \widehat{J}_+ \ ,$$

$$\left[\widehat{J}_z, \widehat{J}_+\right] = \widehat{J}_+ \ . \tag{40a}$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$\left[\widehat{J}_z, \widehat{J}_-\right] = -\widehat{J}_- \ , \tag{40b}$$

$$\left[\widehat{J}_+, \widehat{J}_-\right] = 2\widehat{J}_z \ . \tag{40c}$$

Exercício 4.2.6.1 Demonstre as equações (40 b,c).

Por outro lado, usando-se as equações (39) e (40 a, b,c), virá:

$$\left[\widehat{J}^2, \widehat{J}_+\right] = \left[\left\{\frac{1}{2}\left(\widehat{J}_+\widehat{J}_- + \widehat{J}_-\widehat{J}_+\right) + \widehat{J}_z^2\right\}, \widehat{J}_+\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\widehat{J}_+\widehat{J}_- + \widehat{J}_-\widehat{J}_+\right), \widehat{J}_+\right] + \left[\widehat{J}_z^2, \widehat{J}_+\right] \ .$$

Sendo, [AB,C] = A[B,C] + [A,C] B, então:

$$\left[\widehat{J}^2, \widehat{J}_+\right] = \frac{1}{2}\widehat{J}_+\left[\widehat{J}_-, \widehat{J}_+\right] + \frac{1}{2}\left[\widehat{J}_+, \widehat{J}_+\right]\widehat{J}_- + \frac{1}{2}\widehat{J}_-\left[\widehat{J}_+, \widehat{J}_+\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\widehat{J}_-, \widehat{J}_+\right]\widehat{J}_+ + \widehat{J}_z\left[\widehat{J}_z, \widehat{J}_+\right] + \left[\widehat{J}_z, \widehat{J}_+\right]\widehat{J}_z =$$

$$\left[\hat{J}^2,\hat{J}_+\right]=\frac{1}{2}\hat{J}_+\left[\hat{J}_-,\hat{J}_+\right]+\frac{1}{2}\left[\hat{J}_+,\hat{J}_+\right]\hat{J}_-+\frac{1}{2}\hat{J}_-\left[\hat{J}_+,\hat{J}_+\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\hat{J}_-,\hat{J}_+\right]\hat{J}_+ +\hat{J}_z\left[\hat{J}_z,\hat{J}_+\right]+\left[\hat{J}_z,\hat{J}_+\right]\hat{J}_z =$$

$$=\frac{1}{2}\hat{J}_+\left(-2\hat{J}_z\right)+\frac{1}{2}\left(-2\hat{J}_z\right)\hat{J}_+ +\hat{J}_z\hat{J}_+ +\hat{J}_+\hat{J}_z =$$

$$=-\hat{J}_+\hat{J}_z-\hat{J}_z\hat{J}_+ +\hat{J}_z\hat{J}_+ +\hat{J}_+\hat{J}_z \;,$$

$$\left[\hat{J}^2,\hat{J}_+\right]=0 \;. \tag{41a}$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$\left[\hat{J}^2,\hat{J}_-\right]=0 \;. \tag{41b}$$

Exercício 4.2.6.2 Demonstre a equação (41b).

De posse dessa álgebra de comutadores envolvendo os operadores $\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{J}_+,$ e $\hat{J}_-$, vamos calcular as auto-funções e os auto-valores dos operadores **"ladder"**. Seja $\psi_{jm} \equiv \left| jm > \right.$ (esta última, é a notação de Dirac) uma auto-função de $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$, com os respectivos auto-valores j (j+1) e m (lembrar que $\hbar \equiv 1$), isto é:

$$\hat{J}^2\psi_{jm} = j(j+1)\psi_{jm} \;,$$

$$\hat{J}_z\psi_{jm} = m\psi_{jm} \;.$$

Como $\hat{J}^2$ comuta com $\hat{J}_+$, [equação (41a)], então:

$$\hat{J}^2\left(\hat{J}_+\psi_{jm}\right)=\hat{J}_+\left(\hat{J}^2\psi_{jm}\right)=\hat{J}_+\left[j(j+1)\,\psi_{jm}\right]=j(j+1)\left(\hat{J}_+\psi_{jm}\right).$$

Portanto, $\left(\hat{J}_{+}\psi_{jm}\right)$ é ainda auto-função de $\hat{J}^2$ com o mesmo auto-valor j (j+1). O mesmo ocorre para $\left(\hat{J}_{-}\ \psi_{jm}\right)$. Porém, em virtude a equação (40a), tem-se:

$$\hat{J}_z\hat{J}_+ = \hat{J}_+ + \hat{J}_+\hat{J}_z \quad ,$$

então:

$$\hat{J}_z\left(\hat{J}_+\psi_{jm}\right)=\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_+\hat{J}_z\right)\psi_{jm} = \hat{J}_+\psi_{jm} + \hat{J}_+\left(\hat{J}_z\psi_{jm}\right)=$$

$$=\hat{J}_+\psi_{jm} + m\hat{J}_+\psi_{jm} = (m+1)\left(\hat{J}_+\psi_{jm}\right) \ ,$$

o que mostra que $\left(\hat{J}_+\psi_{jm}\right)$ é também auto-função de $\hat{J}_z$, porém com auto-valor (m+1). Assim, $\hat{J}_+$ ***levanta*** o auto-valor de $\hat{J}_z$ de uma unidade, ou seja:

$$\hat{J}_+\psi_{j,m} = N_+\psi_{jm+1} \ . \tag{42a}$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$\hat{J}_z\left(\hat{J}_-\psi_{jm}\right)=(m-1)\left(\hat{J}_-\psi_{jm}\right), \tag{42b}$$

o que mostra que $\left(\hat{J}_-\psi_{jm}\right)$ é também auto-função de $\hat{J}_z$, porém com auto-valor (m–1). Assim, $\hat{J}_-$ ***abaixa*** o auto-valor de $\hat{J}_z$ de uma unidade, ou seja:

$$\hat{J}_-\psi_{j,m} = N_-\psi_{jm-1} \ . \tag{42c}$$

[É oportuno observar que as expressões (42a,c) justificam o nome de **"ladder"** (escada) para os operadores $\hat{J}_+$ e $\hat{J}_-$. $\hat{J}_+$ é chamado de operador ***levantador*** e $\hat{J}_-$ de ***abaixador***.]

Exercício 4.2.6.3 Demonstre a equação (42b).

Agora, calculemos os valores de N_+ e N_- . Sendo as funções ψ_{jm} e $\psi_{jm\pm1}$ normalizadas, isto é:

$$(\psi_{jm}, \psi_{jm}) = 1 \qquad \text{e} \qquad (\psi_{jm_{\pm1}}, \psi_{jm_{\pm1}}) = 1 ,$$

então:

$$(\hat{J}_+\psi_{jm}, \hat{J}_+\psi_{j,m}) = (N_+\psi_{jm+1}, N_+\psi_{jm+1}) = |N_2|^2 \ .$$

Por outro lado, desenvolvendo-se o 1º membro da equação acima, virá:

$$(\hat{J}_+\psi_{jm}, \hat{J}_+\psi_{jm}) = (\psi_{jm}, \hat{J}_+^{\perp}\psi_{jm}) = (\psi_{jm}, \hat{J}_-\hat{J}_+\psi_{jm}) \ .$$

Porém:

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) = \hat{J}_x^2 + i\hat{J}_x\hat{J}_y - i\hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y^2 =$$

$$= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + i[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + ii\hat{J}_z = \hat{J}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z + 1) \ .$$

Então:

$$(\hat{J}_+\psi_{jm}, \hat{J}_+\psi_{jm}) = (\psi_{jm}, [\hat{J}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z + 1)]\psi_{jm}) =$$

$$= (\psi_{jm}, \hat{J}^2\psi_{jm}) - (\psi_{jm}, \hat{J}_z[\hat{J}_z + 1]\psi_{jm}) =$$

$$= j(j+1)(\psi_{jm}, \psi_{jm}) - (\psi_{jm}, \hat{J}_z[m+1]\,\psi_{jm}) =$$

$$= j(j+1) - m(m+1) = j^2 + j - m^2 - m + mj - mj =$$

$$= j(j-m) + (j-m) + m(j-m) = (j-m)(j+m+1) \quad .$$

Portanto:

$$|N_+|^2 = (j-m)(j+m+1) \ .$$

Escolhendo-se o fator de fase igual a 1, virá:

$$N_+ = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \ . \tag{43a}$$

De maneira análoga demonstra-se que:

$$N_- = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \ . \tag{43b}$$

Exercício 4.2.6.4 Demonstre a equação (43b).

4.2.7 Adição de Dois Momentos Angulares

Até agora, vimos como obter as auto-funções (ψ_{jm}) que diagonalizam os operadores $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$, bem como determinamos seus auto-valores [j (j+1) e m] respectivos. Em vista disso, pode-se agora pensar no problema de como encontrar a função de onda de um sistema composto de dois ou mais momentos angulares. A necessidade para compor momentos angulares surge quando tratamos de partículas simples cujo momento angular total é a soma de duas partes: orbital e spin; e quando tratamos processos entre estados de momento angular bem definidos como, por exemplo, espalhamento entre partículas. Aqui, trataremos apenas da adição de dois momentos angulares.

Sejam $\psi_{j_1 m_1}$ e $\psi_{j_2 m_2}$ auto-funções dos operadores de momento angular $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$, isto é:

$$\hat{J}_1^2\psi_{j1m1}=j_1(j_1+1)\psi_{j1m1}\ ;\hat{J}_{1z}\psi_{j1m1}=m_1\psi_{j1m1}\ , \tag{44a,b}$$

$$\hat{J}_2^2\psi_{j2m2}=j_2(j_2+1)\psi_{j2m2}\ ;\hat{J}_{2z}\psi_{j2m2}=m_2\psi_{j2m2}\ , \tag{45a,b}$$

$$\left[\hat{J}_{1i},\hat{J}_{1j}\right]=i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_{1k}\ ;\ \left[\hat{J}_{2i},\hat{J}_{2j}\right]=i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_{2k}\quad . \tag{46a,b}$$

Como os operadores $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$ atuam em espaços vetoriais distintos, então:

$$\left[\hat{J}_{1i},\hat{J}_{2j}\right]=0\quad ,\quad \forall\ i, j. \tag{47}$$

Definidos os operadores $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$, vamos construir um operador $(\hat{J})$, soma entre eles, isto é:

$$\hat{J}=\hat{J}_1+\hat{J}_2\ ;\ \hat{J}_i=\hat{J}_{1i}+\hat{J}_{2i}\ ;\ (i = x, y, z). \tag{48a,b}$$

As relações de comutação entre os componentes desse operador $\hat{J}$ podem ser obtidas através das equações (46a,b), (47) e (48a,b). Assim:

$$\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]=\left[\left(\hat{J}_{1x}+\hat{J}_{2x}\right),\left(\hat{J}_{1y}+\hat{J}_{2y}\right)\right]=$$

$$=\left[\hat{J}_{1x}+\hat{J}_{1y}\right]+\left[\hat{J}_{1x}+\hat{J}_{2y}\right]+\left[\hat{J}_{2x}+\hat{J}_{1y}\right]+\left[\hat{J}_{2x}+\hat{J}_{2y}\right]=$$

$$=i\hat{J}_{1z}+i\hat{J}_{2z}=i\left(\hat{J}_{1z}+\hat{J}_{2z}\right)=i\hat{J}_z\ ,$$

$$\boxed{\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]=i\hat{J}_z}\ .$$

De maneira análoga, demonstra-se que:

$$\boxed{\left[\hat{J}_i , \hat{J}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k} \quad , \ (i,j,k = x,y,z) \ . \qquad (49)$$

Exercício 4.2.7.1 Complete a demonstração da equação (49).

A equação (49) nos mostra que o operador $\hat{J}$ é também um operador de momento angular e, portanto, podemos escrever:

$$\hat{J}^2\psi_{jm} = j(j+1)\psi_{jm} \ , \qquad (50a)$$

$$\hat{J}_z\psi_{jm} = m\psi_{jm} \ , \qquad (50b)$$

$$\hat{J}_{\pm}\psi_{jm} = \sqrt{(j\mp m)\ (j\pm m+1)}\ \psi_{jm\pm 1} \ , \qquad (50c)$$

onde ψ_{jm} é uma representação acoplada, e que é conectada às representações desacopladas $\psi_{j_1 m_1}$ e $\psi_{j_2 m_2}$ através de uma transformação unitária, isto é:

$$\psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)\psi_{j_1 m_1}\ \psi_{j_2 m_2} \ . \qquad (51)$$

Na expressão acima, os elementos C $(j_1\ j_2\ j;\ m_1\ m_2\ m)$ são chamados de **Coeficientes de Clebsch-Gordan** – CG – da transformação unitária e $\psi_{j_1 m_1}\ \psi_{j_2 m_2} \left(\equiv \psi_{j_1 m_1} \otimes \psi_{j_2 m_2}\right)$ representa o produto direto ou tensorial entre as representações desacopladas. [Os coeficientes C.G. têm várias notações; adotaremos a notação do Rose (op. cit.).]

Teorema 4.2.7.1 Os números quânticos de projeção (m, m_1 e m_2) não são independentes**;** eles são relacionados através de $m = m_1 + m_2$.

Demonstração:

Tomemos a equação (51) e apliquemos à mesma o operador $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$, isto é:

$$\hat{J}_z \psi_{jm} = \left(\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}\right) \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)\, \psi_{j_1 m_1}\ \psi_{j_2 m_2}\,.$$

Sendo $\psi_{j_1 m_1}$ e $\psi_{j_2 m_2}$ representações em espaços distintos, então:

$$\hat{J}_{1z}\left(\psi_{j_1 m_1}\ \psi_{j_2 m_2}\right) = \left(\hat{J}_{1z}\psi_{j_1 m_1}\right)\left(\psi_{j_2 m_2}\right) = m_1\left(\psi_{j_1 m_1}\psi_{j_2 m_2}\right),$$

$$\hat{J}_{2z}\left(\psi_{j_1 m_1}\ \psi_{j_2 m_2}\right) = \psi_{j_1 m_1}\left(\hat{J}_{2z}\psi_{j_2 m_2}\right) = m_2\left(\psi_{j_1 m_1}\psi_{j_2 m_2}\right),$$

e

$$\hat{J}_z \psi_{jm} = m\psi_{jm}\,,$$

virá:

$$m\psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} \left(m_1 + m_2\right) C\left(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m\right)\psi_{j_1 m_1}\ \psi_{j_2 m_2}\,.$$

Usando-se ainda a equação (51), teremos:

$$\sum_{m_1, m_2} \left(m - m_1 - m_2\right) C\left(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m\right)\psi_{j_1 m_1}\psi_{j_2 m_2} = 0.$$

Como $\psi_{j_1m_1}$ $\psi_{j_2m_2}$ são linearmente independentes, virá

$(m-m_1-m_2)\, C(j_1j_2j;m_1m_2m) = 0$,

o que mostra que os coeficientes C.G. são nulos, a menos que:

$$\boxed{m = m_1 + m_2} \qquad \text{C.Q.D} \qquad (52)$$

Quanto aos **alcances** ("ranges") de **j** e **m**, demonstra-se que (Rose, op. cit.):

$$j = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1,\ ...,\ |\, j_1 - j_2| \qquad (53a)$$

ou

$\Delta\,(j_1\, j_2\, j) \equiv$ Relação triangular,

onde

$j_1 \geq |\, m_1|$; $j_2 \geq |\, m_2|$; $j \geq |\, m|$,

e

$m = \pm\, j,\ \pm\,(j-1),\ ...,$

e mais ainda:

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)\,(2j_2+1) \quad . \qquad (53b)$$

Exercício 4.2.7.2 Demonstre as equações (53a,b).

Teorema 4.2.7.2 Os **Coeficientes de Clebsch-Gordan** satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade:

$$\sum_{m_1} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)\, C(j_1 j_2 j'; m_1 m_2 m) = \delta_{jj'}.$$

Demonstração:

Apliquemos a equação (51) às funções ψ_{jm} e $\psi_{j'm'}$, e efetuemos o seu produto escalar. Como tais funções são ortogonais, esse produto escalar valerá:

$$C(j_1 j_2 j_3\,; m_1 m_2 m_3) = (-1)^{j_2+m_2}\left(\frac{2j_3+1}{2j_1+1}\right)^{1/2} C(j_3 j_2 j_1\,; -m_3 m_2 -m_1)\,, \tag{56a}$$

$$C(j_1 j_2 j_3\,; m_1 m_2 m_3) = (-1)^{j_1-m_1}\left(\frac{2j_3+1}{2j_2+1}\right)^{1/2} C(j_3 j_1 j_2\,; m_3 -m_1 m_2)\,, \tag{56b}$$

$$C(j_1 j_2 j_3\,; m_1 m_2 m_3) = (-1)^{j_2+m_2}\left(\frac{2j_3+1}{2j_1+1}\right)^{1/2} C(j_2 j_3 j_1\,; -m_2 m_3 m_1)\,, \tag{56c}$$

Tais propriedades podem ser demonstradas através da fórmula deduzida por E. Racah, em 1942 (Cf. Rose, op. cit.):

$$C(j_1 j_2 j_3); m_1 m_2 m_3) = \delta_{m_3, m_1+m_2}\Bigg[(2j_3+1)\frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_3+j_1-j_2)!(j_3+j_2-j_1)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!}\times$$

$$\times (j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!\Bigg]^{1/2}\times$$

$$\times \sum_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\big[(j_1+j_2-j_3+\nu)!(j_1-m_1-\nu)!(j_2+m_2-\nu)!\times$$

$$\times (j_3-j_2+m_1+\nu)!(j_3-j_1-m_2+\nu)!\big]^{-1}. \tag{57}$$

Exercício 4.2.7.3 Usando a **Fórmula de Racah**, [equação (57)], demonstre as equações (56,a,b,c).

Exemplo 4.2.7 Uma partícula de spin 1/2 move-se numa órbita com P = 1. Obter explicitamente as auto-funções $\psi_{3/2,\,3/2}$; $\psi_{3/2,\,1/2}$ e $\psi_{1/2,\,1/2}$.

Para calcularmos as auto-funções $\psi_{3/2,\,3/2}$; $\psi_{3/2,\,1/2}$ e $\psi_{1/2,\,1/2}$, vamos usar a equação (51), isto é:

$$\psi_{jm} = \sum_{m_1,\,m_2} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)\ \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \quad ,$$

onde: $j_1 = 1$, $j_2 = 1/2$, $m_1 = -j_1 ... + j_1$ e $m_2 = -j_2 ... + j_2$.

Assim:

$$\psi_{3/2,3/2} = \sum_{m_1,\,m_2} C\left(1 \frac{1}{2} \frac{2}{3} ; m_1 m_2 \frac{3}{2}\right) \psi_{1m_1} \psi_{1/2\,m_2} \quad .$$

Sendo:

$m_1 + m_2 = m$ e $m_1 = -1, 0, 1,$

virá:

$$\psi_{3/2,3/2} = C_1\left(1 \frac{1}{2} \frac{3}{2} ; 1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}\right) \psi_{1,1}\, \psi_{1/2,1/2} \ +$$

$$+ C_0\left(1 \frac{1}{2} \frac{3}{2} ; 0 \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right) \psi_{1,0}\, \psi_{1/2,3/2} \ +$$

$$+ C_{-1}\left(1 \frac{1}{2} \frac{3}{2} ; -1 \frac{5}{2} \frac{3}{2}\right) \psi_{1,-1}\, \psi_{1/2,5/2} \ .$$

Ora, como $m_2 \leq j_2$ (=1/2), então $C_0 = C_{-1} = 0$. Portanto:

$\psi_{3/2,3/2} = C_1\ \psi_{1,1}\ \psi_{1/2,1/2}$.

Para calcular o coeficiente C.G. C_1, usaremos a condição de ortogonalidade das auto-funções, isto é:

$$(\psi_{3/2,3/2}\ ,\ \psi_{3/2,3/2}) = 1; \quad (\psi_{1,1}\ ,\ \psi_{1/1}) = 1;$$

$$(\psi_{1/2,1/2}\ ,\ \psi_{1/2,1/2}) = 1\ .$$

Por outro lado, em virtude as auto-funções $\psi_{j_1 m_1}$ e $\psi_{j_2 m_2}$ situarem-se em espaços vetoriais distintos, teremos:

$$\left(\psi_{j_1 m_1}\ ,\ \psi_{j_2 m_2}\right) = 0,$$

então:

$$(\psi_{3/2,3/2}\ ,\ \psi_{3/2,3/2}) = (C_1\ \psi_{1,1}\ \psi_{1/2,1/2}\ ,\ C_1\ \psi_{1,1}\ \psi_{1/2,1/2}) =$$

$$= C_1^2 (\psi_{1,1}, \psi_{1,1})\ (\psi_{1/2,1/2}, \psi_{1/2,1/2}) = C_1^2 = 1 \Rightarrow C_1 = 1\ .$$

Portanto: $$\boxed{\psi_{3/2,3/2} = \psi_{1,1}\ \psi_{1/2,1/2}}\ . \qquad \text{(A)}$$

Agora determinemos a auto-função $\psi_{3/2,1/2}$. Para isso, vamos usar o operador abaixador $\hat{J}_-$, pois, como sabemos [Eqs. (42c) e (43b)]:

$$\hat{J}_- \psi_{jm} = N_- \psi_{jm-1} = \sqrt{(j+m)\ (j-m+1)}\ \psi_{jm-1}\ .$$

Assim:

$$\hat{J}_{-}\psi_{3/2,3/2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+1\right)}\psi_{3/2,1/2}=\sqrt{3}\psi_{3/2,1/2}.$$

Por outro lado, temos:

$$\hat{J}_{-}\,\psi_{3/2,3/2} = (\,\hat{J}_{-\,(1)} + \,\hat{J}_{-\,(2)}\,)\,\psi_{3/2,3/2} =$$

$$= (\,\hat{J}_{-\,(1)} + \,\hat{J}_{-\,(2)}\,)\,\psi_{1,1}\psi_{1/2,\,1/2} \,=$$

$$= (\,\hat{J}_{-\,(1)}\,\psi_{1,1})\,\psi_{1/2,\,1/2} + \psi_{1,1}\,\hat{J}_{-\,(2)}\,\psi_{1/2,\,1/2}\,.$$

Ora:

$$\hat{J}_{-(1)}\psi_{1,1}=\sqrt{(1+1)\,(1-1+1)}\,\psi_{1,0}=\sqrt{2}\,\psi_{1,0}\,,$$

$$\hat{J}_{-(2)}\psi_{1/2,1/2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}\psi_{1/2,-1/2}=$$

$$=\psi_{1/2,-1/2}.$$

Portanto:

$$\sqrt{3}\psi_{3/2,1/2}=\sqrt{2}\psi_{1,0}\;\psi_{1/2,-1/2}+\psi_{1,1}\psi_{1/2,-1/2}\,,$$

$$\boxed{\psi_{3/2,1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}\psi_{1,0}\psi_{1/2,1/2}\;+\;\psi_{1,1}\psi_{1/2,-1/2}\right]}\,. \qquad \text{(B)}$$

Por fim, para calcularmos a auto-função $\psi_{1/2,1/2}$, usaremos novamente a equação (51). Assim:

$$\psi_{1/2,1/2} = \sum_{m_1, m_2} C\left(1\frac{1}{2}\frac{3}{2};m_1 m_2 \frac{1}{2}\right)\psi_{1m_1}\psi_{1/2}m_2.$$

Sendo $m_1 + m_2 = m$ e $m_1 = 1, 0, -1$, virá:

$$\psi_{1/2,1/2} = C_1\left(1\frac{1}{2}\frac{3}{2};1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\psi_{1,1}\psi_{1/2,-1/2} +$$

$$+ C_0\left(1\frac{1}{2}\frac{3}{2};0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\psi_{1,0}\psi_{1/2,1/2} \quad +$$

$$+ \ C_{-1}\left(1\frac{1}{2}\frac{3}{2};-1\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right)\psi_{1,-1}\psi_{1/2,3/2}.$$

Ora, como $m_2 \leq j_2$ (=1/2), então $C_{-1} = 0$, portanto:

$$\psi_{1/2,1/2} = C_1\ \psi_{1,1}\ \psi_{1/2,-1/2} + C_0\ \psi_{1,0}\ \psi_{1/2,1/2}. \qquad \text{(C)}$$

Para calcular os coeficientes C_1 e C_0, vamos usar a condição de ortogonalidade das auto-funções. Assim:

$$(\psi_{1/2,1/2}\ ,\ \psi_{1/2,1/2}) = 1 =$$

$$= [(C_1\ \psi_{1,1}\ \psi_{1/2,-1/2} + C_0\ \psi_{1,0}\ \psi_{1/2,1/2}),$$

$$(C_1\ \psi_{1,1}\ \psi_{1/2,-1/2} + C_0\ \psi_{1,0}\ \psi_{1/2,1/2})],$$

$$= \ C_1^2(\psi_{1,1},\psi_{1,1})(\psi_{1/2,-1/2},\psi_{1/2,-1/2}) +$$

$$+ \ C_0^2(\psi_{1,0},\psi_{1,0})(\psi_{1/2,1/2},\psi_{1/2,1/2}) = C_1^2 + C_0^2 \quad \rightarrow$$

$$\boxed{C_1^2 + C_0^2 = 1}\ . \qquad \text{(D)}$$

Por outro lado, temos: $(\psi_{3/2,1/2}\,,\,\psi_{1/2,1/2}) = 0$.

Então, usando-se as expressões (B) e (C), virá:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,\psi_{1,0}\psi_{1/2,1/2}+\psi_{1,1}\psi_{1/2,-1/2}\right),\left(C_1\psi_{1,1}\psi_{1/2,-1/2}+C_0\psi_{1,0}\psi_{1/2,1/2}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}C_0\left(\psi_{1,0},\psi_{1,0}\right)\left(\psi_{1/2,1/2},\psi_{1/2,1/2}\right)+\frac{C_1}{\sqrt{3}}\left(\psi_{1,1},\psi_{1,1}\right)\left(\psi_{1/2,-1/2},\psi_{1/2,-1/2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}C_0+\frac{C_1}{\sqrt{3}}=0}\quad . \qquad\qquad (E)$$

Resolvendo-se as equações (D) e (E), virá:

$$C_1=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ ;\ C_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,$$

então:

$$\boxed{\psi_{1/2,1/2}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\psi_{1,1}\psi_{1/2,-1/2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{1,0}\psi_{1/2,1/2}} \qquad\qquad (F)$$

Exercício 4.2.7.4 Encontre:

a) As demais auto-funções do Exemplo 4.2.7;
b) As auto-funções do acoplamento entre os momentos angulares $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$.

4.2.8 Operadores Tensoriais e o Teorema de Wigner-Eckart.

Definição 4.2.8.1 Um **Operador Tensor Esférico Irredutível de grau (“rank”) L** é um conjunto de 2L+1 funções

$$\hat{T}_L^M (M=-L,-L+1,...+L)$$

que se transforma sob a representação (2L+1) do grupo de rotações da seguinte maneira:

$$\hat{R}\hat{T}_L^M\,\hat{R}^{-1} = \sum_{M'=-L}^{L} D^L_{MM'}(\alpha\beta\gamma)\hat{T}_L^{M'}, \qquad (58)$$

onde $\hat{R}=\exp\left(-i\theta\vec{n}.\hat{J}\right)$ é o operador rotação, tal que:

$$\psi' = \hat{R}\,\psi\,,$$

e

$$\hat{O}' = \hat{R}\hat{O}\hat{R}^{-1}\,, \quad (\hat{O} \equiv \text{operador qualquer}).$$

Ao estudar esses tipos de tensores, Racah, em 1942, deu uma outra definição equivalente a essa dada acima, porém, em termos de regras de comutação envolvendo os operadores **“ladder”.** Então:

Definição 4.2.8.2 Um **Operador Tensor Esférico Irredutível de grau (“rank”) L** é um conjunto de 2L+1 funções

$$\hat{T}_L^M (M=-L,-L+1,...+L),$$

tal que:

$$\left[\hat{J}_{\pm}, \hat{T}_L^M\right] = \left[(L \mp M)\,(L \pm M + 1\right]^{1/2}\ \hat{T}_L^{M \pm 1}\ , \qquad (59a)$$

$$\left[\hat{J}_z, \hat{T}_L^M\right] = \hat{T}_L^M\ . \qquad (59b)$$

[É oportuno observar que a demonstração da equivalência entre essas duas definições pode ser vista em Rose (op. cit.).]

A Álgebra dos **Tensores Esféricos Irredutíveis** tem certas analogias com os **Tensores Cartesianos** $T_{ijk...}$ definidos por:

$$T'_{ijk...} = \sum_{\ell mn...} a_{i\ell}\ a_{jm}\ a_{kn...} T_{\ell mn...},$$

onde os a_{rs} são elementos de uma matriz ortogonal 3×3. Para esses tensores (Bassalo, 1973), a soma de dois deles de mesmo **grau** ("rank"), é um tensor de igual **grau**. Por outro lado, o produto de dois tensores cartesianos é um tensor cujo **grau** é a soma dos graus dos tensores fatores. Finalmente, um tensor cartesiano pode ser reduzido de um número par em seu **grau**, fazendo-se pares de índices iguais e somando-se sobre eles.

No entanto, na Álgebra dos tensores esféricos irredutíveis, enquanto a soma de dois deles de um mesmo **grau**, é um tensor de igual **grau**, o seu produto é diferente. Assim, um tensor de **grau** L pode ser construído de dois tensores de **grau**, L_1 e L_2, respectivamente, desde que (L_1,L_2,L) satisfaça à regra do triângulo da adição de momentos angulares e os números quânticos de projeção correspondentes (M_1,M_2,M) se somem algebricamente, ou seja:

$$\hat{T}_L^M\left(A_1, A_2\right) = \sum_{M_1, M_2} C\left(L_1, L_2 L\, ; M_1, M_2 M\right) \hat{T}_{L_2}^{M_2}\left(A_1\right) \hat{T}_{L_2}^{M_2}\left(A_2\right), \quad (60)$$

com $\Delta(L_1,L_2,L)$ e $M = M_1 + M_2$. (Os símbolos A_1 e A_2 representam outras variáveis das quais os tensores dependem além de L e M. Por exemplo, para os harmônicos esféricos, $A_{1,2}$ representam as coordenadas angulares de um ponto no espaço.)

Teorema 4.2.8 – Teorema de Wigner-Eckart. A dependência do elemento de matriz $\left\langle j'm' \middle| \hat{T}_L^M \middle| jm \right\rangle$ sobre os números quânticos de projeção (m,m'), está inteiramente contida no **Coeficiente de Clebsch-Gordan** através da relação:

$$\left\langle j'm' \middle| \hat{T}_L^M \middle| jm \right\rangle = C(jj'L; mm'M) \left\langle j' \middle\| \hat{T}_L \middle\| j \right\rangle , \qquad (61)$$

onde $\left\langle j' \middle\| \hat{T}_L \middle\| j \right\rangle$ é chamado de **Elemento de Matriz Reduzido** do tensor $\hat{T}_L^M$, e j, m, j', m' são números quânticos de momento angular.

Demonstração:

Tomemos a equação (59b) e calculemos o seu produto escalar entre os estados $| j'm' \rangle$ e $| jm \rangle$. Assim:

$$\left\langle j'm' \middle| \left[\hat{J}_z , \hat{T}_L^M \right] \middle| jm \right\rangle = \left\langle j'm' \middle| M \hat{T}_L^M \middle| jm \right\rangle .$$

Desenvolvendo-se o comutador e aplicando a equação (50b), virá:

$$\left\langle j'm'\right|\left[\hat{J}_z,\hat{T}_L^M-\hat{T}_L^M\hat{J}_z\right]\left|jm\right\rangle = m'\left\langle j'm'\right|M\hat{T}_L^M\left|jm\right\rangle - m\left\langle j'm'\right|\hat{T}_L^M\left|jm\right\rangle =$$

$$= M\left\langle j'm'\right|\hat{T}_L^M\left|jm\right\rangle \rightarrow$$

$$(m'\text{-}m\text{-}M)\left\langle j'm'\right|\hat{T}_L^M\left|jm\right\rangle = 0\ . \qquad (62)$$

A expressão (62) nos mostra que $\left\langle j'm'\right|\hat{T}_L^M\left|jm\right\rangle = 0$, a menos que m' = m+M.

Agora, tomemos a equação (59a) e calculemos o seu produto escalar entre os estados $|j'm'\rangle$ e $|jm\rangle$. Assim:

$$\left\langle j'm'\right|\left[\hat{J}_\pm,\hat{T}_L^M\right]\left|jm\right\rangle\left\langle j'm'\right|\left[(L\mp M)(L\pm M+1)\right]^{1/2}\hat{T}_L^{M\pm 1}\left|jm\right\rangle\ .$$

Desenvolvendo-se o comutador do 1º membro, virá:

$$\left\langle j'm'\right|\hat{J}_\pm,\hat{T}_L^M-\hat{T}_L^M\hat{J}_\pm\left|jm\right\rangle=\left[(L\mp M)(L\pm M+1)\right]^{1/2}\left\langle j'm'\right|\hat{T}_L^{M\pm 1}\left|jm\right\rangle\ .$$

Sendo:

$$\left\langle j'm'\right|\hat{J}_\pm=\hat{J}_\pm^{+}\left|j'm'\right\rangle=\hat{J}_\mp\left|j'm'\right\rangle\ ,$$

e usando-se a equação (50c), virá:

$$\left[(j'\pm m')(j'\mp m'+1)\right]^{1/2}\left\langle j'm'_{\mp1}\left|\hat{T}_L^M\right|jm\right\rangle +$$

$$-\left[(j\mp m)(j\pm m+1)\right]^{1/2}\left\langle j'm'\left|\hat{T}_L^M\right|jm\pm1\right\rangle =$$

$$=\left[(L\mp M)(L\pm M+1)\right]^{1/2}\left\langle j'm'\left|\hat{T}_L^{M\pm1}\right|jm\right\rangle. \qquad (63)$$

Por outro lado, sendo:

$$\hat{J}'=\hat{J}+\hat{L}\,; \qquad \left(J'_{\mp}=\hat{J}_{\mp}+\hat{L}_{\mp}\right), \qquad (64a,b)$$

então, usando-se a equação (51), virá:

$$\psi_{j'm'}=\sum_{\mu\,,\,\lambda} C(\,jLj',\mu\lambda m')\,\psi_{j\mu}\,\psi_{L\lambda}\,. \qquad (51)$$

Aplicando-se a essa equação, a equação (64b), virá:

$$\hat{J}'_{\mp}\psi_{j'm'}=\left(\hat{J}_{\mp}+\hat{L}_{\mp}\right)\sum_{m\,,\,M} C(jLj',mMm')\psi_{jm}\psi_{LM}\ .$$

Usando-se as equações (50c) e (51), teremos:

$$\left[(j'\pm m')(j'\mp m'+1)\right]^{1/2}\psi_{j'm'\mp1}=\sum_{m,M}\left[(j\pm m)(j\mp m+1)\right]^{1/2}\times$$

$$\times C(jLj',mMm')\psi_{j'm'\mp1}\psi_{LM}+\sum_{m,M}\left[(L\pm M)(L\mp M+1)\right]^{1/2}\times$$

$$\times C(jLj',mMm')\psi_{jm}\psi_{LM\mp1}\,,$$

então:

$$\sum_{\mu,\lambda}\left[\left(j'\pm m'\right)\left(j'\mp m'+1\right)\right]^{1/2} C\left(jLj',\mu\lambda m'\mp 1\right)\psi_{j\mu}\psi_{L\lambda} =$$

$$= \sum_{m,M}\left[\left(j\pm m\right)\left(j\mp m+1\right)\right]^{1/2} C\left(jLj',mMm'\right)\psi_{j'm'\mp 1}\psi_{LM} +$$

$$+ \sum_{m,M}\left[\left(L\pm M\right)\left(L\mp M+1\right)\right]^{1/2}\times C\left(jLj',mMm'\right)\psi_{jm}\psi_{LM\mp 1}\,.$$

Fazendo-se no 2º membro da equação acima mK1= μ e M = λ, no 1º termo, m=μ e MK1=λ, no 2º termo virá:

$$\sum_{\mu,\lambda}\left[\left(j'\pm m'\right)\left(j'\mp m'+1\right)\right]^{1/2} C\left(jLj',\mu\lambda m'\mp 1\right)\psi_{j\mu}\psi_{L\lambda} =$$

$$= \sum_{\mu,\lambda}\left[\left(j\mp \mu\right)\left(j\pm \mu+1\right)\right]^{1/2} C\left(jLj',\mu\pm 1\lambda m'\right)\psi_{j\mu}\psi_{L\lambda} +$$

$$+ \sum_{\mu,\lambda}\left[\left(L\mp \lambda\right)\left(L\pm \lambda+1\right)\right]^{1/2}\times C\left(jLj',\mu\lambda\pm 1m'\right)\psi_{j\mu}\psi_{L\lambda}\,.$$

Igualando-se os coeficientes de ambos os lados da equação acima em que μ=m e λ=M, e transformando-se o 1º termo do 2º membro para o 1º membro, virá:

$$\left[\left(j'\pm m'\right)\left(j'\mp m'+1\right)\right]^{1/2} C\left(jLj',mMm'\mp 1\right)+$$

$$-\left[\left(j\mp m\right)\left(j\pm m+1\right)\right]^{1/2} C\left(jLj',m\pm 1Mm'\right)=$$

$$=\left[\left(L\mp M\right)\left(L\pm M+1\right)\right]^{1/2}\times C\left(jLj',mM\pm 1m'\right). \qquad (65)$$

Por fim, comparando-se as equações (63) e (65) vê-se que $\left\langle j'm' \middle| \hat{T}_L^M \middle| jm \right\rangle$ é proporcional ao **Coeficiente de Clebsch-Gordan** C(jLj',mMm'), então:

$$\boxed{\left\langle j'm' \middle| \hat{T}_L^M \middle| jm \right\rangle = C\left(jLj',mMm'\right)\ \left\langle j' \middle\| \hat{T}_L \middle\| j \right\rangle} \quad . \qquad \text{C.Q.D.}$$

Demonstrado o **Teorema de Wigner-Eckart** (**TWE**), é oportuno fazermos alguns comentários sobre o mesmo.

1) O **TWE** separa as propriedades geométricas (de simetria) representadas pelo **Coeficiente de Clebsch-Gordan** de um processo físico das propriedades físicas desse mesmo processo, representadas pelo fator $\left\langle j' \middle\| \hat{T}_L \middle\| j \right\rangle$, que é denominado de **Elemento de Matriz Reduzido.** Portanto, esse TWE é de grande utilidade prática pois os **Coeficientes de Clebsch-Gordan** acham-se tabelados em muitos livros, como por exemplo o de Condon e Shortley, 1935;

2) Como o **TWE** envolve **Coeficientes de Clebsch-Gordan** e sendo que, para estes, temos Δ(jLj') e m'=M+m, então oTWE traduz a **Lei da Conservação do Momento Angular**;

3) Como os componentes do tensor esférico irredutível $\hat{T}_L^M$ podem representar os múltiplos (2^L – pólos) de um **Campo de Maxwell**, então L representa o momentum anular da radiação emitida ou absorvida. Portanto, através do **TWE**, pode-se deduzir algumas regras de seleção da interação entre partículas carregadas e um campo de radiação.

Exercício 4.2.8.1 Mostre que um tensor esférico irredutível de **grau** (“rank”) 1 é relacionado a um operador vetor (V_x,V_y,V_z), através das expressões:

$$T_1^1 = -\frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}}; \quad T_1^0 = A_z; \quad T_1^{-1} = \frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}} \quad .$$

Exercício 4.2.8.2 Mostre a equivalência entre as definições 4.2.8.a e 4.2.8.b.

Exercício 4.2.8.3 Obtenha as condições que j e j' e m e m' devem satisfazer para que:

I. $<jm\left|\widehat{P}_x\right|j'm'> \neq 0;$

II. $<jm\left|\widehat{P}_y\right|j'm'> \neq 0;$

III. $<jm\left|\widehat{P}_z\right|j'm'> \neq 0;$

IV. $<jm\left|\widehat{P}^2\right|j'm'> \neq 0;$

onde $\left|\widehat{P}\right|$ é o operador de momento linear.

(**Sugestão:** Defina os operadores $\widehat{P}_+ = \widehat{P}_x + i\widehat{P}_y$ e $\widehat{P}_- = \widehat{P}_x - i\widehat{P}_y$, e use o resultado do Exercício 4.2.8.1)

PARTE II

CÁLCULO EXTERIOR

Capítulo 1

1.1 Espaços Vetoriais

1.1.1 Definições e Propriedades

Definição 1.1.1.1. Um **espaço vetorial E** é um conjunto de elementos, chamados **vetores**, com uma operação de *adição (+)*, a qual para cada par de vetores **x** e **y** faz corresponder um vetor **x + y**, e uma operação de **multiplicação escalar**, a qual para cada vetor **x** e um número **a** faz corresponder um vetor **ax**. Essas operações devem satisfazer as seguintes propriedades:

1. x + y = y + x (comutatividade);
2. x + (y + z) = (x + y) + z (associatividade na adição);
3. x + 0 = 0 + x = x (elemento neutro da adição);
4. x + (- x) = 0 (elemento inverso da adição);
5. a (x + y) = a x + a y (distributividade por vetores);
6. (a + b) x = a x + b x (distributividade por números);
7. a (b x) = (a b) x (associatividade na multiplicação);
8. 1x = x (elemento neutro da multiplicação),

para quaisquer vetores **x**, **y** e **z** e os números **a** e **b**. Esses números são chamados de **escalares** e pertencem a um **corpo K**, que pode ser real (R) ou complexo (C).

Exemplos

Relacionamos abaixo, e sem fazer a demonstração, alguns exemplos de espaços vetoriais.

E1. Conjunto de números complexos ($a + bi$), com as operações de adição complexa e do produto por um número real;

E2. Conjunto de polinômios em uma variável $[P(x)]$, com coeficientes constituídos de números com as operações de adição ordinária de polinômios e a multiplicação de um polinômio por um escalar;

E3. Conjunto de todas as **n-uplas** [$x = (x_i)$, $y = (y_i)$, $z = (z_i)$, ... (i = 1, 2, ..., n)] de números com a adição entre elas definida por:

$$x + y = (x_1 + y_1, \; x_2 + y_2, \; ... \; x_n + y_n) \; ,$$

e a multiplicação por um escalar **a** definida por:

$$a \, x = (a \, x_1, \; a \, x_2, \; ... \; a \, x_n) \; .$$

Definição 1.1.1.2. Um conjunto de vetores $\{e_i\}$ é dito:

a. Linearmente Dependente $(L.D.)$ se há um conjunto de escalares a_i, pertencente a um corpo **K**, não todos nulos, tal que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \; e_i \;=\; 0 \; ;$$

b. Linearmente Independente $(L.I.)$ se:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \; e_i \;=\; 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{a_i} \;=\; 0, \qquad \forall \; i \; .$$

A partir daqui, a fim de facilitar a manipulação da notação indicial, usaremos a **Notação de Einstein**:

Se num monômio aparecer repetido um índice, ficará subentendida uma soma relativa a esse índice: $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \; e_i \;=\; a_i \; e_i \; .$

Definição 1.1.1.3. Um conjunto de vetores $\{e_i\}$ é chamado um **gerador** de um espaço vetorial **E**, se cada vetor **x** desse espaço pode ser escrito na forma:

$$x \;=\; x^i \; e_i \; . \qquad (1.1.1.1a)$$

Definição 1.1.1.4 - Base. Um conjunto de vetores $\{e_i\}$ é chamado uma **base** de um espaço vetorial **E**, se ele é um conjunto de vetores *linearmente independentes* e *gera* o espaço **E**. O número desses vetores é chamado de **dimensão** de **E**.

Assim, em vista das definições acima, se **x** é um vetor de um espaço vetorial **E**, ele é representado pela equação (1.1.1.1a), na qual os $\mathbf{x}^i$ representam os **componentes** daquele vetor na base $\{e_i\}$. Demonstra-se que um espaço vetorial **E** tem uma infinidade de bases.

Mudança de Base. Seja um espaço vetorial **E** e sejam $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$ duas bases do mesmo, onde i = j = 1, 2, ..., n. Usando-se a expressão (1.1.1.1a), os vetores de uma dessas bases podem ser escritos em termos dos vetores da outra, da seguinte maneira:

$$\bar{e}_{\bar{j}} \;=\; s^i_{\bar{j}} \; e_i \; , \qquad (1.1.1.2a)$$

onde os coeficientes $s^i_{\bar{j}}$ são escalares. Analogamente, para a transformação inversa, vale:

$$e_i \;=\; s^{\bar{j}}_i \; \bar{e}_{\bar{j}} \; , \qquad (1.1.1.2b)$$

Entre os coeficientes $s^i_{\bar{j}}$ e $s^{\bar{j}}_i$ existem relações bem determinadas. Antes de obtermos essas relações, vamos introduzir o **símbolo de Kronecker**, que é assim definido:

$$\delta_n^m \;=\; \delta^{mn} \;=\; \delta_{mn} \;=\; 1, \qquad se \quad m \;=\; n,$$

$$\delta_n^m \;=\; \delta^{mn} \;=\; \delta_{mn} \;=\; 0, \qquad se \quad m \neq n \;. \qquad (1.1.1.3a)$$

Observe-se que esse símbolo apresenta a propriedade de trocar índices toda vez que o mesmo atuar sobre quantidades indiciadas. Por exemplo:

$$\delta_n^m \; a_r^m \;=\; a_r^n \qquad ou \qquad \delta_n^m \; a_m^r \;=\; a_n^r \;. \qquad (1.1.1.3b)$$

Agora, calculemos as relações referidas acima. Aplicando-se a expressão (1.1.1.2b) na (1.1.1.2a) e usando-se (1.1.1.3a,b), teremos:

$$\bar{e}_{\bar{j}} \;=\; s_{\bar{j}}^i \; (s_i^{\bar{k}} \; \bar{e}_{\bar{k}}) \;=\; (s_{\bar{j}}^i \; s_i^{\bar{k}}) \; \bar{e}_{\bar{k}} \;,$$

$$\delta_{\bar{j}}^{\bar{k}} \; \bar{e}_{\bar{k}} \;=\; (s_{\bar{j}}^i \; s_i^{\bar{k}}) \; \bar{e}_k \qquad \rightarrow \qquad (\delta_{\bar{j}}^{\bar{k}} \;-\; s_{\bar{j}}^i \; s_i^{\bar{k}}) \; \bar{e}_{\bar{k}} \;=\; 0 \;.$$

Como os vetores $\bar{e}_{\bar{k}}$ são $L.I.$, a Definição 1.1.1.2a nos permite escrever que:

$$\delta_{\bar{j}}^{\bar{k}} \;-\; s_{\bar{j}}^i \; s_i^{\bar{k}} \;=\; 0 \qquad \rightarrow \qquad \delta_{\bar{j}}^{\bar{k}} \;=\; s_{\bar{j}}^i \; s_i^{\bar{k}} \;. \qquad (1.1.1.4a)$$

Componentes de um Vetor. Se x^i e $\bar{x}^{\bar{j}}$ forem, respectivamente, os componentes de um vetor $\mathbf{x}$ nas bases $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$, então, de acordo com a expressão (1.1.1.1a), teremos:

$$x \;=\; x^i \; e_i \;=\; \bar{x}^{\bar{j}} \; \bar{e}_{\bar{j}} \;. \qquad (1.1.1.1b)$$

Agora, usando-se as expressões (1.1.1.2a,b), virá:

$$x^i \; e_i \;=\; \bar{x}^{\bar{j}} \; s_{\bar{j}}^i \; e_i \qquad \rightarrow \qquad (x^i \;-\; \bar{x}^{\bar{j}} \; s_{\bar{j}}^i) \; e_i \;=\; 0 \;,$$

e:

$$x^i \; s_i^{\bar{j}} \; \bar{e}_{\bar{j}} \;=\; \bar{x}^{\bar{j}} \; \bar{e}_{\bar{j}} \qquad \rightarrow \qquad (\bar{x}^{\bar{j}} \;-\; x^i \; s_i^{\bar{j}}) \; \bar{e}_{\bar{j}} \;=\; 0 \;.$$

Como os vetores $\bar{e}_{\bar{j}}$ são $L.I.$, então, usando-se a Definição 1.1.1.2b, virá:

$$x^i \;=\; s_{\bar{j}}^i \; \bar{x}^{\bar{j}}, \qquad \bar{x}^{\bar{j}} \;=\; s_i^{\bar{j}} \; x^i \;. \qquad (1.1.1.5a,b)$$

Comparando-se as expressões (1.1.1.2a,b) e (1.1.1.5a,b) verifica-se que os componentes (x^i, $\bar{x}^{\bar{j}}$) se transformam **contravariantemente** aos vetores da base ($\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$). Em vista disso, esses componentes se denominam **componentes contravariantes**.

Exercícios (1.1.1)

EX.1.1.1.1 Encontre a relação entre os coeficientes $s_{\bar{j}}^{i}$ e $s_{i}^{\bar{j}}$, partindo da expressão (1.1.1.2b) e usando a expressão (1.1.1.2a).

Solução

Aplicando-se a expressão (1.1.1.2a) na (1.1.1.2b) e usando-se (1.1.1.3a,b), teremos:

$$e_i \;=\; s_i^{\bar{j}}\; s_{\bar{j}}^{k}\; e_k \quad \rightarrow \quad \delta_i^k\; e_k \;=\; s_i^{\bar{j}}\; s_{\bar{j}}^{k}\; e_k \quad \rightarrow \quad (\delta_i^k \;-\; s_i^{\bar{j}}\; s_{\bar{j}}^{k})\; e_k \;=\; 0\;.$$

Como os vetores e_k são $L.I.$, a Definição 1.1.1.2a nos permite escrever que:

$$\delta_i^k \;=\; s_i^{\bar{j}}\; s_{\bar{j}}^{k}\;. \qquad (1.1.1.4b)$$

1.1.2 Espaços Duais

Definição 1.1.2.1. Sejam (**x, y, z, ...**) e (**a, b, c, ...**), respectivamente, vetores de um espaço vetorial **E** (de base $\{e_i\}$), e elementos de um corpo **K**, sobre o qual **E** é definido. Consideremos as funções (**f, g, h, ...**), denominadas de **funções lineares**, de modo que tenhamos:

1. $f\;(x) \;=\; a, \qquad f\;(e_i) \;=\; a_i\;, \qquad (1.1.2.1a)$
2. $f\;(x \;+\; y) \;=\; f\;(x) \;+\; f\;(y)\;, \qquad (1.1.2.1b)$
3. $f\;(b\;x) \;=\; b\;[f\;(x)]\;, \qquad (1.1.2.1c)$
4. $(f \;+\; g)\;(x) \;=\; f\;(x) \;+\; g\;(x)\;, \qquad (1.1.2.1d)$
5. $(c\;f)\;(x) \;=\; c\;[f\;(x)]\;. \qquad (1.1.2.1e)$

Nestas condições, as funções lineares (**f, g, h, ...**) formam um espaço vetorial E^*, chamado o **dual** de **E** (que tem a mesma dimensão **n** de **E**), e os seus elementos são denominados de **formas lineares** ou **covetores**.

Definição 1.1.2.2 - Base Dual. Consideremos uma base $\{e_i\}$ do espaço vetorial **E**. Portanto, segundo a expressão (1.1.1.1a), se $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, então:

$$x \;=\; x^i\; e_i\;.$$

Seja, ainda, um conjunto de formas lineares $\{\varepsilon^i\;(x)\} \in \mathbf{E}^*$, tal que:

$$\varepsilon^i\;(x)\;(e_j) \;=\; \delta_j^i\;. \qquad (1.1.2.2)$$

Nessas condições, o conjunto $\{\varepsilon^i\;(x)\}$ é definido como a **base dual** de E^*.

Mudança de Base Dual. Consideremos no espaço **E** duas bases $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$ e, no espaço dual E^*, as duas bases duais correspondentes: $\{\varepsilon^i\ (x)\}$ e $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$. Conforme vimos anteriormente, a mudança de base dada pelas expressões (1.1.1.2a,b):

$$\bar{e}_{\bar{j}} \ = \ s^i_{\bar{j}}\ e_i\ , \qquad e_i \ = \ s^{\bar{j}}_i\ \bar{e}_{\bar{j}}\ ,$$

induz as seguintes transformações nos componentes $\mathbf{x}^i$ do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, dadas pelas expressões (1.1.1.5a,b):

$$x^i \ = \ s^i_{\bar{j}}\ \bar{x}^{\bar{j}}\ , \qquad \bar{x}^{\bar{j}} \ = \ s^{\bar{j}}_i\ x^i\ .$$

Agora, vejamos como se transformam as bases duais $\{\varepsilon^i\ (x)\}$ e $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, então, segundo a expressão (1.1.1.1b), teremos:

$$x \ = \ x^i\ e_i \ = \ \bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{e}_{\bar{j}}\ .$$

Multiplicando-se à esquerda as expressões por $\{\varepsilon^i\ (x)\}$ ($\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$) e usando-se a expressão (1.1.2.2), virá:

$$\varepsilon^j\ (x)\ x \ = \ \varepsilon^j\ (x)\ (x^i\ e_i) \ = \ x^i\ \varepsilon^j\ (x)\ (e_i) \ = \ x^i\ \delta^j_i \ = x^j\ , \qquad (1.1.2.3a)$$

$$\bar{\varepsilon}^{\bar{k}}\ (x)\ x \ = \ \bar{\varepsilon}^{\bar{k}}\ (x)\ (\bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{e}_{\bar{j}}) \ = \ \bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{\epsilon}^{\bar{k}}\ (x)\ (\bar{e}_{\bar{j}}) \ = \ \bar{x}^{\bar{j}}\ \delta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \ = \bar{x}^{\bar{k}}\ . \qquad (1.1.2.3b)$$

Substituindo-se esses dois resultados nas expressões (1.1.1.5a,b), teremos:

$$\varepsilon^i\ (x) = \ s^i_{\bar{j}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ , \qquad \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x) \ = \ s^{\bar{j}}_i\ \varepsilon^i\ (x)\ . \qquad (1.1.2.4a,b)$$

Comparando-se as expressões (1.1.1.2a,b) e (1.1.2.4a,b), verifica-se que as bases duais ($\{\varepsilon^i\ (x)\}$, $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$) se transformam **contravariantemente** em relação às bases ($\{e_i\}$, $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$).

Componentes de um Covetor. Se x^i e $\bar{x}^{\bar{j}}$ forem, respectivamente, os componentes de um vetor **x** nas bases $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_{\bar{j}}\}$, então, de acordo com a expressão (1.1.1.1b), teremos:

$$x \ = \ x^i\ e_i \ = \ \bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{e}_{\bar{j}}\ .$$

Seja **f (x)** uma forma genérica de E^*. Assim, usando-se a Definição 1.1.2.1 e as expressões (1.1.2.1a,c) e (1.1.2.3a) nas expressões acima, resultará:

$$f\ (x) \ = \ f\ (x^i\ e_i) \ = \ x^i\ f\ (e_i) \ = \ f_i\ \varepsilon^i\ (x)\ , \qquad (1.1.2.5a)$$

$$f\ (x) \ = \ f\ (\bar{x}^{\bar{j}}\ \bar{e}_{\bar{j}}) \ = \bar{x}^{\bar{j}}\ f\ (\bar{e}_{\bar{j}}) \ = \ \bar{f}_{\bar{j}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ , \qquad (1.1.2.5b),$$

$$f\ (x)\ =\ f_i\ \varepsilon^i\ (x)\ =\ \bar{f}_{\bar{j}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ , \qquad (1.1.2.5c),$$

onde f_i e $\bar{f}_{\bar{j}}$ representam, respectivamente, os componentes de **f** nas bases duais $\{\varepsilon^i\ (x)\}$ e $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\}$.

Agora, vejamos a relação entre esses componentes. Substituindo-se na expressão (1.1.2.5c) as expressões (1.1.2.4a,b), teremos:

$$f_i\ \varepsilon^i\ (x)\ =\ \bar{f}_{\bar{j}}\ s_i^{\bar{j}}\ \varepsilon^i\ (x) \quad \rightarrow \quad (f_i\ -\ \bar{f}_{\bar{j}}\ s_i^{\bar{j}})\ \varepsilon^i\ (x)\ =\ 0\ ,$$

$$f_i\ s_{\bar{j}}^i\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ =\ \bar{f}_{\bar{j}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x) \quad \rightarrow \quad (\bar{f}_{\bar{j}}\ -\ f_i\ s_{\bar{j}}^i)\ \bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)\ =\ 0\ .$$

Como os vetores $\varepsilon^i\ (x)$ e $\bar{\varepsilon}^{\bar{j}}\ (x)$ são $L.I.$ (Exercício 1.1.2.1), as expressões acima resultam em:

$$f_i\ =\ s_i^{\bar{j}}\ \bar{f}_{\bar{j}}\ , \qquad \bar{f}_{\bar{j}}\ =\ s_{\bar{j}}^i\ f_i\ . \qquad (1.1.2.6a,b)$$

Comparando-se as equações (1.1.1.2a,b) e (1.1.2.6a,b), vê-se que os componentes do covetor **f** e os vetores da base de **E** seguem a mesma **lei de covariança**. E, em vista disso, esses componentes denominam-se de **componentes covariantes**.

Exercícios (1.1.2)

EX.1.1.2.1 Demonstre que os vetores $\varepsilon^i\ (x)$, que formam a base do espaço vetorial dual E^*, são $L.I.$

Solução

Consideremos a seguinte igualdade:

$$a_i\ \varepsilon^i\ (x)\ (x)\ =\ 0\ ,$$

onde $a_i \in \mathbf{K}$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Ora, a igualdade acima permanece válida também para os vetores e_j, que formam uma base qualquer de **E**. Ou seja:

$$a_i\ \varepsilon^i\ (x)\ (e_j)\ =\ 0\ .$$

Usando-se a expressão (1.1.2.2), virá:

$$a_i\ \delta_j^i\ =\ a_j\ =\ 0, \qquad \forall\ j\ .$$

Usando-se a Definição 1.1.1.2b, o resultado acima demonstra que os vetores $\varepsilon^i\ (x)$ são $L.I.$

1.1.3 Espaços Vetoriais Euclidianos

Definição 1.1.3.1 - Produto Escalar. Seja **E** um espaço vetorial n-dimensional sobre um corpo **K**. Entre os vetores (**x, y, z, ...**) de **E** definimos uma lei de composição interna, denominada **produto escalar** denotada por (,), com as seguintes propriedades:

1. $(x,\ y)\ =\ (y,\ x)^*$, [(*) indica complexo conjugado]
2. $(x,\ y\ +\ z)\ =\ (x,\ y)\ +\ (x,\ z)$,
3. $(x, ay)\ =\ a\ (x,\ y)$,

3'. $(ax,\ y)\ =\ a^*\ (x,\ y)$,

4. $\forall x, (x,\ y)\ =\ 0 \quad \rightarrow y\ =\ 0$,
5. $(x,\ x) \geq 0$, com a igualdade conservando-se somente para x = 0.

Todo espaço vetorial com produto escalar definido acima é dito **propriamente euclidiano**. Se (5) for estritamente positivo $[(x,\ x)\ >\ 0]$, então esse espaço é chamado **estritamente euclidiano**.

Produto Escalar de Vetores da Base. Consideremos dois vetores **x** e **y** e uma base $\{e_i\}$ de um espaço vetorial real **E**. Usando-se a expressão (1.1.1.1a) e a Definição 1.1.3.1, teremos:

$$(x,\ y)\ =\ (x^i\ e_i, y^j\ e_j)\ = x^i\ y^j\ (e_i,\ e_j)\ .$$

Definindo-se:

$$g_{ij}\ =\ (e_i,\ e_j)\ , \qquad (1.1.3.1)$$

o produto escalar dos vetores **x** e **y** será dado por:

$$(x,\ y)\ =\ g_{ij}\ x^i\ y^j\ . \qquad (1.1.3.2)$$

A expressão (1.1.3.1) e a Definição 1.1.3.1 mostram que:

1. $g_{ij}\ =\ g_{ji}$,
2. $det\ |\ g_{ij}\ | \neq 0$.

Definição 1.1.3.2. Dois vetores não nulos (**x**, **y**) de um espaço vetorial **E** são ditos **ortogonais**, se:

$$(x,\ y)\ =\ 0, com x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\ .$$

Definição 1.1.3.3. Chama-se **norma** de um vetor **x** ao seguinte produto escalar:

$$(x, x)\ = (x)^2\ =\ N(x)\ =\ g_{ij}\ x^i\ x^j\ . \qquad (1.1.3.3)$$

Definição 1.1.3.4. Chama-se de **módulo** ou **comprimento** de um vetor **x** a expressão:

$$mod\ (x)\ =\ \mid\ x\ \mid\ =\ \sqrt{(x,\ x)}\ =\ \sqrt{g_{ij}\ x^i\ x^j}\ . \qquad (1.1.3.4)$$

Definição 1.1.3.5. Chama-se de **vetor unitário** o vetor cujo módulo ou comprimento é unitário:

$$\mid\ x\ \mid\ =\ 1\ . \qquad (1.1.3.5)$$

Base Ortonormada. Quando os vetores de uma base $\{e_i\}$ de um espaço vetorial real **E** são **unitários** e **ortogonais**, essa base é dita **ortonormada**, e é dada por:

$$(e_i, e_j)\ =\ \delta_{ij}\ . \qquad (1.1.3.6)$$

Desigualdade de Schwarz. Sejam dois vetores **x** e **y** pertencentes a um espaço vetorial propriamente euclidiano. Seja um terceiro vetor **z** $= \mathbf{x} + \lambda\ \mathbf{y}$ desse espaço, sendo λ um escalar não nulo. A norma desse vetor será:

$$(z, z)\ =\ (x\ +\ \lambda\ y, x\ +\ \lambda\ y) = (x)^2\ +\ 2\ \lambda\ (x,\ y)\ +\ \lambda^2\ y^2 \geq 0\ .$$

Como essa desigualdade se verifica para quaisquer que sejam os vetores, então, pela teoria das equações algébricas, o trinômio em λ terá o seguinte discriminante:

$$\Delta\ = 4\ (x,\ y)^2\ -\ 4.x^2\ y^2 \leq 0 \rightarrow (x,\ y)^2 \leq x^2\ .\ y^2\ .$$

Da relação acima, segue a famosa **Desigualdade de Schwarz**:

$$\mid (x,\ y)\ \mid \leq \mid\ x\ \mid . \mid\ y\ \mid . \qquad (1.1.3.7).$$

Ângulo entre dois vetores. Sejam **x** e **y** dois vetores de um espaço vetorial propriamente euclidiano. Usando-se a **Desigualdade de Schwarz**, teremos:

$$\frac{\mid (x,\ y)\ \mid}{\mid\ x\ \mid\ .\ \mid\ y\ \mid} \leq 1 \qquad \rightarrow \mid \frac{(x,\ y)}{\mid\ x\ \mid\ .\ \mid\ y\ \mid}\ \mid \leq 1\ .$$

Como o cosseno de um ângulo varia entre +1 e -1, então a desigualdade acima permite escrever que:

$$\frac{(x,\ y)}{|x\ |\ .\ |y\ |}\ =\ cos\ \theta\ , \qquad (1.1.3.8)$$

onde θ é, por definição, o ângulo entre os vetores **x** e **y**.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. Sabe-se que um espaço vetorial tem uma infinidade de bases. Assim, se tivermos uma base não ortonormada é possível, a partir dela, construir uma que seja ortonormada, da seguinte maneira. Se $\{e'_i\}$ for uma base não ortonormada, o **processo de Gram-Schmidt** constrói, inicialmente, uma base ortogonal, subtraindo de cada vetor e'_k seu componente na direção do vetor anteriormente ortogonalizado. Então, se fizermos:

$$e_1 \; = \; e'_1 \; ,$$

e:

$$e_2 \; = \; e'_2 \; + \; a_1 \, e_1, \qquad (a_1 \; = \; - \; \tfrac{(e_1, \; e'_2)}{(e_1, \; e_1)}) \qquad \to (e_1, \; e_2) \; = \; 0 \; .$$

Continuamos com esse mesmo processo até esgotar os vetores da base dada. Por fim, para normalizar esses novos vetores e torná-los ortonormados, basta dividir cada um deles por seu comprimento.

Componentes Contravariantes e Covariantes de um Vetor numa Base. Seja $\{e_i\}$ a base de um espaço vetorial $\mathbf{E}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, então, segundo a expressão (1.1.1.1a), teremos:

$$x \; = \; x^i \; e_i \; , \qquad (1.1.3.9a)$$

onde x^i representa o **componente contravariante** de $\mathbf{x}$ na base $\{e_i\}$, conforme já vimos. Nessa mesma base, o **componente covariante** x_i de $\mathbf{x}$ é *definido* da seguinte maneira:

$$x_j \; = \; (x, \; e_j) \; . \qquad (1.1.3.9b)$$

Para determinarmos a relação entre esses dois tipos de componentes, vamos usar as expressões (1.1.3.1), (1.1.3.9a,b) e a Definição 1.1.3.1. Assim, teremos:

$$x_j \; = \; (x^i e_i, \; e_j) \; = \; x^i \; (e_i, \; e_j) \; ,$$

$$x_j \; = \; g_{ij} \; x^i \; , \qquad (1.1.3.9c)$$

expressão que mostra ser g_{ij} um abaixador de índice.

Definição de g^{ij}. Considerando-se a equação (1.1.3.9c) como um sistema de equações lineares, a **Regra de Cramer** permite escrever que:

$$x^i \; = \; \tfrac{G^{ij}}{\mid \, g_{ij} \, \mid} \; x_j \; , \qquad (1.1.3.10a)$$

onde G^{ij} é o cofator de g_{ij}, que é obtido multiplicando-se o termo $(-1)^{i \, + \, j}$ pelo determinante (n-1) $\times$ (n-1), este formado pela eliminação, na matriz (G), da linha e coluna que se cruzam em g_{ij}.

Definindo-se:

$$g^{ij} \ = \ \frac{G^{ij}}{\mid g_{ij} \mid} \ ,$$

a expressão (1.1.3.10a) ficará:

$$x^i \ = g^{ij} \ x_j \ , \qquad (1.1.3.10b)$$

expressão que mostra ser g^{ij} um levantador de índice.

Agora, determinemos a relação entre g^{ij} e g_{ij}. Usando-se as expressões (1.1.3.9c) e (1.1.3.10b), podemos escrever que:

$$x^i \ = \ g^{ij}(g_{jk} \ x^k) \rightarrow \delta^i_k \ x^k \ = \ g^{ij} \ g_{jk} \ x^k \rightarrow (\delta^i_k \ - \ g^{ij} \ g_{jk}) \ x^k \ = \ 0 \ .$$

Como a terceira expressão acima se verifica para qualquer que seja x^k, teremos:

$$g^{ij} \ g_{jk} \ = \ \delta^i_k \ , \qquad (1.1.3.11)$$

expressão essa que indica que os **g** são recíprocos.

Produto Escalar em Termos de Componentes Co- e Contravariantes. Seja $\{e_i\}$ a base de um espaço vetorial **E** e **x**, **y** $\in$ **E**. Usando-se a Definição 1.1.3.1 e os resultados anteriores, o produto escalar (x, y) será dado por:

$$(x, \ y) \ = \ (x^i e_i, \ y^j e_j) \ = \ x^i \ y^j \ (e_i, \ e_j) \ = g_{ij} x^i \ y^j \ , \qquad (1.1.3.12a)$$

$$(x, \ y) \ = \ x_i \ y^j \ = \ x^i \ y_j \ . \qquad (1.1.3.12b)$$

Produto Interno e Dualidade. O produto escalar de dois vetores **x** e **y**, pertencentes a um espaço vetorial **E**, apresentado na Definição 1.1.3.1, define uma **função bilinear (x, y)**. Assim, para um fixado vetor **x**, essa função bilinear define uma função linear de **y**, pertencente ao espaço dual E^*, função essa que denotaremos por $\tilde{\mathbf{x}}$. Portanto, a transformação $\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ representa a aplicação **G**: $\mathbf{E} \rightarrow E^*$, isto é: $\tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{G(x)}$. Usando-se essa transformação, o produto escalar (x, y) também é expresso pelo **produto interno x . y** ("dot product"), definido por:

$$(\mathrm{x, \ y}) = \mathrm{x \ . \ y} = \tilde{\mathrm{x}} \ \mathrm{y} \ . \qquad (1.1.3.13)$$

Vejamos como esse produto interno é representado em termos de componentes. Sejam $\{e_i\}$ e $\{\varepsilon^i \ (x)\}$ as bases respectivas de **E** e $\mathbf{E}^*$. Sendo $\tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{G(x)}$ e considerando-se essas bases, podemos representar essa aplicação **G** por uma matriz g_{ij}:

$$\tilde{\mathrm{x}}_i \ = \ g_{ij} \ x^j \ . \qquad (1.1.3.14a)$$

Assumindo-se a expressão acima como um sistema de equações lineares, a **Regra de Cramer** permite escrever que:

$$x^j \ = \ \frac{G^{ij}}{\mid g_{ij} \mid} \, \tilde{x}_i \ , \qquad (1.1.3.14b)$$

onde G^{ij} é o cofator de g_{ij}. (Veja-se a definição de cofator dada anteriormente.)

Definindo-se:

$$g^{ij} \ = \ \frac{G^{ij}}{\mid g_{ij} \mid} \ ,$$

a expressão (1.1.3.14b) ficará:

$$x^i \ = g^{ij} \, \tilde{x}_j \ . \qquad (1.1.3.14c)$$

Observe-se que essas matrizes g_{ij} (abaixadora de índice) e g^{ij} (levantadora de índice), conforme vimos, e que são recíprocas, podem ser reduzidas, por uma mudança de bases, a uma forma diagonal onde os elementos g_{ii} e g^{ii} (aqui, não vale a *convenção de Einstein*) são + 1 ou - 1. Neste caso, a base é denominada de **semi-ortonormada**, e, para a mesma, define-se o conceito de **assinatura - s** que é dado pela diferença entre o número (P) de termos positivos e o número (N) de termos negativos, ou seja:

$$s \ = \ P \ - \ N \ = \ (n \ - \ N) \ - \ N \ = \ n \ - \ 2N \qquad \rightarrow N \ = \ \frac{(n-s)}{2} \ ,$$

onde **n** = P + N, é a dimensão do espaço vetorial. Ainda para esse tipo de base, e considerando-se que g g' = 1 ($\mid g' \mid \mid g \mid \ = \ 1$) , teremos:

$$\frac{\mid g \mid}{g} \ = \ \frac{\mid g' \mid}{g'} \ = \ (-1)^N \ = \ (-1)^{\frac{(n-s)}{2}} \ , \qquad (1.1.3.15)$$

onde **g** = $det \ (g_{ij})$ e **g'** = $det \ (g^{ij})$. É oportuno observar que **s** não depende da base na qual a redução é feita, conforme demonstrou o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897).

Agora, depois dessa digressão sobre g_{ij} (g^{ij}), voltemos ao produto interno. Usando-se as expressões (1.1.1.1a), (1.1.2.2), (1.1.2.3) e (1.1.3.14a), a expressão (1.1.3.13) ficará:

$$x \ . \ y \ = \tilde{x} \ y \ = \tilde{x}_i \ \varepsilon^i \ (x) \ y^j \ e_j = \tilde{x}_i \ y^j \ \delta_i^j = \tilde{x}_i \ y^i \ = \ g_{ij} \ x^j \ y^i \ . \qquad (1.1.3.16)$$

Comparando-se as expressões (1.1.3.12a,b) e (1.1.3.14a,c) verifica-se que x^i e $\tilde{\mathbf{x}}_i$ representam, respectivamente, os componentes contra- e covariante de **x**.

Exercícios (1.1.3)

EX.1.1.3.1 Demonstre a **Desigualdade Triangular**:

$$mod(x \ + \ y) \leq mod \ (x) \ + \ mod \ (y) \ .$$

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Usando-se a Definição 1.1.3.1 e considerando-se **K** = **R**, virá:

$$(x\ +\ y)^2\ =\ [(x\ +\ y),\ (x\ +\ y)]\ =\ (x,\ x)\ +\ 2\ (x,\ y)\ +\ (y,\ y)\ .$$

Majorando-se o segundo membro da expressão acima com (x, y) $\leq$ mod (x) . mod (y) e considerando-se a Definição 1.1.3.4, teremos:

$$(x\ +\ y)^2\ =\ [mod\ (x\ +\ y)]^2 \leq [mod\ (x)]^2\ +\ 2\ mod\ (x)\ .\ mod\ (y)\ +\ [mod\ (y)]^2\ ,$$

$$[mod\ (x\ +\ y)]^2 \leq [mod\ (x)\ +\ mod(y)]^2 \qquad \rightarrow \qquad mod\ (x\ +\ y) \leq mod\ (x)\ +\ mod\ (y)\ ,$$

o que demonstra a **Desigualdade Triangular**.

1.1.4 Transformações ou Operadores Lineares

Definição 1.1.4.1. Uma aplicação **T** de um espaço vetorial n-dimensional **E** em si próprio (T: E $\rightarrow$ E) é dita uma **transformação (operador) linear** se faz corresponder cada vetor **x** de **E** no vetor **Tx**, tal que:

1. $T(x + y)\ =\ Tx\ +\ Ty\ ,$ (1.1.4.1a)
2. $T(a\ x)\ =\ a\ Tx\ ,$ (1.1.4.1b)

para **x, y** $\in$ **E** e **a** $\in$ **K**.

Exemplos

E1. **Operador Identidade I** - $Ix\ =\ x, \forall\ x\ ;$

E2. **Operador Projeção** - $P_i x\ =\ (e_i,\ x)\ e_i\ = x_i\ e_i\ .$

Representação de um Operador. Seja **T** um operador linear que atua em um espaço vetorial **E**. Esse operador poderá ser **representado** nesse espaço através de seu efeito sobre a base $\{e_i\}$ do mesmo. Assim, segundo (1.1.1.1a), temos:

$$T\ e_i\ =\ e_j\ t_i^j\ , \qquad (i, j\ =\ 1, 2, 3, ..., n) \qquad (1.1.4.2)$$

onde $\mathbf{t}_i^j$ representam os elementos de uma matriz $n\ \times\ n$. A partir daqui, o índice superior representa o índice de linha, e o inferior o de coluna, para estar de acordo com a definição de produto de matrizes, que daremos mais adiante. Esses elementos matriciais são calculados da seguinte maneira (numa base ortonormada):

$$(e_j,\ T\ e_i)\ =\ (e_j,\ e_k\ t_i^k)\ =\ t_i^k\ (e_j,\ e_k)\ =\ t_i^k\ \delta_k^j\ ,$$

$$t^j_i \;=\; (e_j,\; T\; e_i)\;. \qquad (1.1.4.3)$$

Álgebra de Operadores

1. SOMA - Dados dois operadores **T** e **U**, a **soma** entre eles é definida por:

$$(T\;+\;U)(x)\;=\;T(x)\;+\;U(x)\;.$$

Em termos matriciais, usando-se (1.1.4.2) e (1.1.4.3), teremos:

$$(T\;+\;U)^j_i\;=\;(e_j,\;(T\;+\;U)\;e_i)\;=\;(e_j,\;T\;e_i\;+\;U\;e_i)\;=\;(e_j,\;T\;e_i)\;+\;(e_j,\;U\;e_i)\;,$$

$$(T\;+\;U)^j_i\;=\;t^j_i\;+\;u^j_i\;. \qquad (1.1.4.4)$$

2. PRODUTO - Dados dois operadores **T** e **U**, o **produto** entre eles é definido por:

$$(TU)(x)\;=\;T\;[U(x)], \qquad (UT)(x)\;=\;U\;[T(x)] \qquad \rightarrow \qquad U\;T \neq T\;U\;.$$

Em termos matriciais, usando-se (1.1.4.2) e (1.1.4.3), teremos:

$$(TU)^j_i\;=\;(e_j,\;(TU)\;e_i)\;=\;(e_j,\;T(U\;e_i))\;=\;(e_j, T\;(e_k\;u^k_i))\;=\;(e_j,\;T\;e_k)\;u^k_i\;,$$

$$(TU)^j_i\;=\;t^j_k\;u^k_i\;. \qquad (1.1.4.5)$$

3. TRAÇO - Dado um operador **T**, representado na forma matricial t^j_i, chama-se de **traço** a soma dos elementos da diagonal principal:

$$tr(T)\;=\;t^i_i\;. \qquad (1.1.4.6)$$

4. TRANSPOSTA - Dado um operador **T**, representado na forma matricial t^j_i, chama-se de **transposta** a matriz obtida trocando-se a linha por coluna:

$$(t^j_i)^t\;=\;t^i_j\;. \qquad (1.1.4.7)$$

4.1. SIMETRIA (ANTISSIMETRIA) - Um operador **T** é denominado **simétrico** (**antissimétrico**) se, respectivamente:

$$T^t\;=\;T, \qquad T^t\;=\;-\,T\;. \qquad (1.1.4.8a,b)$$

5. ADJUNTO - Dado um operador **A**, chama-se de **adjunto** $\mathbf{A}^\dagger$ o operador definido por:

$$(A\;x,\;y)\;=\;(x,\;A^\dagger\;y)\;. \qquad (1.1.4.9a)$$

Em termos matriciais, usando-se a Definição 1.1.3.1 (propriedade 1) e a expressão (1.1.4.3), teremos:

$$(A\ e_i,\ e_j)\ =\ (e_j,\ A\ e_i)^*\ =\ (e_i,\ A^\dagger\ e_j)\ ,$$

$$(a_i^j)^*\ =\ (a^\dagger)_j^i\ . \qquad (1.1.4.9b)$$

6. NORMAL - Um operador **N** é denominado de **normal** se ele comuta com seu adjunto:

$$N\ N^\dagger\ =\ N^\dagger\ N\ . \qquad (1.1.4.10)$$

7. HERMITIANO - Quando um operador **H** é igual ao seu adjunto, ele é denominado **hermitiano** ou **auto-adjunto**:

$$H^\dagger\ =\ H\ . \qquad (1.1.4.11)$$

8. UNITÁRIO - Quando um operador adjunto $U^\dagger$ é igual ao seu inverso, ele é denominado de **unitário**:

$$U^\dagger\ =\ U^{-\ 1}\ . \qquad (1.1.4.12)$$

9. ORTOGONAL - Um operador **O** num espaço vetorial real é denominado **ortogonal**, se:

$$o_j^i\ o_k^i\ =\ \delta_{jk} \qquad ou \qquad o_j^i\ o_j^k\ =\ \delta_{ik}\ . \qquad (1.1.4.13a,b)$$

10. DETERMINANTE - Dado um operador **T**, representado na forma matricial t_i^j, o seu **determinante** é dado por:

$$det\ (T)\ =\ |\ t_i^j\ |\ =\ t_i^j\ T_i^j\ , \qquad (1.1.4.14a)$$

onde T_i^j é o cofator de t_i^j. (Veja-se a definição de cofator dada anteriormente.) Conforme veremos no Capítulo 2, se (A) e (B) são duas matrizes, então:

$$det\ (A\ B)\ =\ det\ (A)\ .\ det\ (B)\ . \qquad (1.1.4.14b)$$

Transformação de Similaridade. Seja **T** um operador linear definido num espaço vetorial **E** e sejam $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_j\}$ duas bases do mesmo, relacionadas pela expressão (1.1.1.2a). Sendo t_i^j a representação de **T** na base **e**, determinemos sua representação na base $\bar{e}$. Aplicando-se o operador **T** na expressão (1.1.1.2a) e usando-se a expressão (1.1.4.2), teremos:

$$T\ \bar{e}_j\ =\ T\ e_i\ s_j^i\ =\ (T\ e_i)\ s_j^i\ ,$$

$$\bar{e}_k \; \bar{t}^k_j = \; e_m \; t^m_i \; s^i_j \quad \rightarrow \quad \bar{t}^k_j \; e_m \; s^m_k = \; e_m \; t^m_i \; s^i_j \quad \rightarrow \quad e_m \; (\bar{t}^k_j \; s^m_k \; - \; t^m_i \; s^i_j) \; = \; 0 \; .$$

Como e_m são vetores $L.I.$, a terceira expressão anterior permite escrever que:

$$s^m_k \; \bar{t}^k_j \; = \; t^m_i \; s^i_j \; .$$

Usando-se a expressão (1.1.4.5), teremos:

$$(S \; \bar{T})^m_j \; = \; (TS)^m_j \; .$$

Em notação compacta matricial, teremos:

$$(S) \; (\bar{T}) \; = \; (T) \; (S) \quad \rightarrow \quad (S)^{-\,1} \; (S) \; (\bar{T}) \; = \; (S)^{-\,1} \; (T) \; (S) \; ,$$

$$(\bar{T}) \; = \; (S)^{-\,1} \; (T) \; (S) \; . \qquad (1.1.4.15)$$

Diagonalização de Operadores: Autovetores e Autovalores. Seja **T** um operador linear. Se **x** é um vetor não nulo e **t** é um escalar, tal que:

$$T \; x \; = \; t \; x, \qquad (1.1.4.16a)$$

então dizemos que **x** é um **autovetor** (“eigenvector”) e **t** um **autovalor** (“eigenvalue”) do operador **T**.

Cálculo de Autovetores e Autovalores. Em termos de componentes, a expressão (1.1.4.16a) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$(T^i_j \; - \; t \; \delta^i_j) \; x^j \; = \; 0, \qquad (1.1.4.16b)$$

onde δ^i_j é a matriz identidade **I**. Essa equação (1.1.4.16b) só tem solução não nula para **x** se, e somente se:

$$det(T \; - \; t \; I) \; = \; 0 \; . \qquad (1.1.4.16c)$$

A equação (1.1.4.16c) é uma equação algébrica de grau **n** na incógnita **t** e é denominada de **equação característica** ou **equação secular**. As raízes dessa equação são os **autovalores t** de **T**. Se essas raízes (autovalores) forem todas distintas, então a expressão (1.1.4.16b) dará **n** autovetores linearmente independentes. Se existirem **j** ($j \; < \; n$) raízes iguais ($t_1 \; = \; t_2 \; = \; ... \; = \; t_j$), então existirão **j** autovetores distintos para esse mesmo autovalor. Nesse caso, diz-se que há **degenerescência**. Com relação às **n** raízes ($t_1, \; t_2, \; ... \; t_n$) (distintas ou não), podemos demonstrar que:

$$\text{(autovalores de } T^t) = \text{(autovalores de T)}, \qquad (1.1.4.17a)$$

$$det\ (T)\ =\ t_1 .\ t_2 .\ ...\ t_n\ , \qquad (1.1.4.17b)$$

$$tr\ (T)\ =\ t_1\ +\ t_2\ +\ ...\ +\ t_n\ . \qquad (1.1.4.17c)$$

Exercícios 1.1.4

EX.1.1.4.1 Se **S** é um operador que transforma uma base ortonormada em uma outra também ortonormada de um espaço vetorial real (**E**), demonstre que:

a) A matriz (S) é ortogonal; b) $(S)^t\ =\ (S)^{-\ 1}$; c) Não existe diferença entre índices contra- e covariante.

Solução

a) Consideremos as bases ortonormadas de **E**, isto é:

$$(\bar{e}_{\bar{i}},\ \bar{e}_{\bar{j}})\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}, \qquad (e_k,\ e_r)\ =\ \delta_{kr}\ .$$

Usando-se a expressão (1.1.1.2a), na primeira equação acima, e usando-se a segunda, teremos:

$$(\bar{e}_{\bar{i}},\ \bar{e}_{\bar{j}})\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}\ =\ (s_{\bar{i}}^k\ e_k,\ s_{\bar{j}}^r\ e_r)\ =\ s_{\bar{i}}^k\ s_{\bar{j}}^r\ (e_k,\ e_r)\ = s_{\bar{i}}^k\ s_{\bar{j}}^r\ \delta_{kr}\ =\ s_{\bar{i}}^k\ s_{\bar{j}}^k\ ,$$

$$s_{\bar{i}}^k\ s_{\bar{j}}^k\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}\ ,$$

que mostra que (S) é ortogonal, conforme a expressão (1.1.4.13a).

b) Partindo-se da expressão anterior, virá:

$$s_{\bar{i}}^k\ s_{\bar{j}}^k\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}, \quad \rightarrow \quad s_{\bar{i}}^k\ s_{\bar{j}}^k\ =\ (s_{\bar{k}}^i)^t\ s_{\bar{j}}^k\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}} \quad \rightarrow \quad (SS^t)_j^i\ =\ \delta_{\bar{i}\bar{j}}\ .$$

Em notação matricial compacta, teremos:

$$S\ S^t\ =\ I \quad \rightarrow \quad S^{-\ 1}\ S\ S^t\ = S^{-\ 1}\ I \quad \rightarrow \quad S^t\ =\ S^{-\ 1}\ .$$

c) Usando-se a expressão (1.1.1.1a) em (1.1.3.9b), resultará:

$$(x,\ e_j)\ =\ x_j\ =\ (x^i\ e_i,\ e_j)\ =\ x^i\ (e_i,\ e_j)\ =\ x^i\ \delta_{ij}\ =\ x^j\ .$$

EX.1.1.4.2 Seja **H** um operador hermitiano e **U** um operador unitário. Demonstre que:

a) Os autovalores de **H** são reais e seus autovetores correspondentes são ortogonais;

b) O operador **U** preserva o produto escalar, é ortogonal (se $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) e é também normal.

Solução

a1) Para **H**, a equação de autovetores (autovalores) é dada pela expressão (1.1.4.16a):

$$H\ x \ = \ h\ x\ , \qquad (\mathrm{x = autovetor}, \qquad \mathrm{h = autovalor}).$$

Sendo **H** um operador hermitiano, as expressões (1.1.4.9a) e (1.1.4.11) permitem escrever que:

$$(H\ x,\ x) \ = \ (x,\ H^\dagger\ x) \ = \ (x, H\ x)\ .$$

Usando-se as propriedades 3 e 3' da Definição 1.1.3.1 e a expressão (1.1.4.16a) nas equações acima, virá:

$$(h\ x,\ x) \ = \ (x,\ h\ x) \quad \rightarrow \quad h^*\ (x,\ x) \ = \ h\ (x,\ x) \quad \rightarrow \quad (h^* \ - \ h)\ (x,\ x) \ = \ 0\ .$$

Se $x \neq 0$, então $(x,\ x) \neq 0$, logo: $h^* \ = \ h$, resultado esse que mostra que os autovalores de **H** são reais.

a2) Se **x** e **y** são autovetores de **H** e h_1 e $\mathbf{h}_2$ os correspondentes autovalores distintos, isto é:

$$H\ x \ = \ h_1\ x \qquad e \qquad H\ y \ = \ h_1\ y\ ,$$

então, de acordo com o item anterior, temos:

$$(H\ x,\ y) \ = \ (h_1\ x,\ y) \ = \ h_1\ (x,\ y)\ ,$$

$$(x,\ H\ y) \ = \ (x,\ h_2\ y) \ = \ h_2\ (x,\ y)\ .$$

Sendo **H** hermitiano, as expressões anteriores nos mostram que:

$$(H\ x,\ y) \ = \ (x,\ H\ y) \quad \rightarrow \quad h_1\ (x,\ y) \ = \ h_2\ (x,\ y) \quad \rightarrow \quad (h_1 \ - \ h_2)\ (x, y) \ = \ 0\ .$$

Como $\mathrm{h}_1 \neq h_2$, então $(x,\ y) \ = \ 0$, resultado esse que indica que os autovetores correspondentes a autovalores distintos de um operador hermitiano são ortogonais.

b1) Usando-se as expressões (1.1.4.9a) e (1.1.4.12), teremos:

$$(U\ x,\ U\ y) \ = \ (x,\ U^\dagger\ U\ y) \ = \ (x,\ U^{-\ 1}\ U\ y) \ = \ (x, y)\ .$$

b2) Consideremos as seguintes expressões:

$$U\ x\ =\ v, \qquad e \qquad U\ y\ =\ z\ .$$

Considerando-se, sem perda de generalidades, uma base ortonormada ($g_{ij}\ =\ \delta_{ij}$), as expressões acima são escritas da seguinte maneira:

$$v_i\ =\ x_j\ u_{ji}, \qquad z_i\ =\ y_k\ u_{ki}\ .$$

Usando-se as expressões (1.1.3.9c), (1.1.3.12b) e o fato de considerarmos ser a base ortonormada, efetuemos o seguinte produto escalar:

$$(U\ x,\ U\ y)\ =\ (v,\ z)\ =\ v_i\ z_i\ =\ x_j\ u_{ji}\ y_k\ u_{ki}\ = u_{ji}\ u_{ki}\ x_j\ y_k\ .$$

Usando-se o resultado do item anterior nas expressões acima, virá:

$$(U\ x,\ U\ y)\ =\ (x, y)\ \ \rightarrow\ \ u_{ji}\ u_{ki}\ x_j\ y_k\ =\ \delta_{jk}\ x_j\ y_k\ \ \rightarrow\ \ (u_{ji}\ u_{ki}\ -\ \delta_{jk})\ x_j\ y_k\ =\ 0\ .$$

Como **x** e **y** são vetores quaisquer, da expressão acima podemos escrever que:

$$(u_{ji}\ u_{ki}\ -\ \delta_{jk})\ =\ 0 \qquad \rightarrow \qquad u_{ji}\ u_{ki}\ =\ \delta_{jk}\ .$$

Usando-se a expressão (1.1.4.13b), o resultado acima indica que a matriz (U) é ortogonal.

b3) Consideremos a seguinte equação:

$$U\ U^{-\ 1}\ =\ U^{-\ 1}\ U\ =\ I\ .$$

Usando-se a definição de operador unitário (expressão (1.1.4.12)), na equação acima, virá:

$$U\ U^{\dagger}\ =\ U^{\dagger}\ U\ .$$

Esse resultado mostra, segundo a expressão (1.1.4.10), que **U** é um operador normal.

$\boxed{\text{EX.1.1.4.3}}$ Se A e B são dois operadores, demonstre que: $(AB)^t\ =\ B^tA^t$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$.

Usando-se as expressões (1.1.4.5) e (1.1.4.7), teremos:

$$(AB)^i_j\ =\ a^i_k\ b^k_j\ =\ (a^k_i)^t\ (b^j_k)^t\ =\ (b^j_k)^t\ (a^k_i)^t\ = (B^tA^t)^j_i\ ,$$

$$(AB)^i_j\ =\ [(AB)^j_i]^t \qquad \rightarrow \qquad [(AB)^j_i]^t\ =\ (B^tA^t)^j_i\ .$$

Portanto, usando-se a linguagem matricial compacta, teremos:

$$(AB)^t\ =\ B^tA^t\ .$$

$\boxed{\textbf{Problemas (1.1)}}$

1.1.1 Dadas as matrizes (A), (B) e (C), demonstre que:

a) $tr\ (A\ B\ C)\ =\ tr\ (B\ C\ A)\ =\ tr\ (C\ A\ B)$;

b) $(A\ B\ C)^{\dagger}\ =\ C^{\dagger}\ B^{\dagger}\ A^{\dagger}$.

1.1.2 Se (S) e (A) são, respectivamente, matrizes simétrica e antissimétrica, demonstre que:

a) Qualquer matriz (M) pode ser escrita na forma: $(M)\ =\ (S)\ +\ (A)$;

b) $tr\ (A)\ =\ 0$;

c) $(A)^2\ =\ (S)$.

1.1.3 Demonstre que o produto de duas matrizes unitárias é também unitário.

1.1.4 Encontre uma base ortonormada para o espaço R^4 gerado pelos vetores:

$$(1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 1), (-1, 0, 2, 1)\ .$$

1.1.5 Demonstre as expressões (1.2.4.17a,b,c).

Capítulo 2

2.1 Tensores

2.1.1 Produto Tensorial de Espaços Vetoriais

Definição 2.1.1.1 - Produto Tensorial de 2 Espaços Vetoriais. Sejam **E** e **F** dois espaços vetoriais, definidos sobre o mesmo corpo **K** e tendo, respectivamente, as dimensões **n** e **m**. Denomina-se **produto tensorial** entre esses dois espaços vetoriais o espaço vetorial de dimensão **n** $\times$ **m**, denotado por:

$$E \otimes F,$$

formado por elementos do tipo:

$$t \; = \; x \otimes y, \qquad (x \in E \quad e \quad y \in F) \; ,$$

e denominado de **tensor**.

Componentes de um Tensor. Sejam $\{e_i\}$ e $\{f_j\}$ as bases respectivas de **E** e **F**. Usando-se a expressão (1.1.1.1a), teremos:

$$t \; = \; x \otimes y \; = \; (x^i \; e_i) \otimes (y^j \; f_j) \; = \; x^i \; y^j \; e_i \otimes f_j \; , \qquad (2.1.1.1a)$$

ou:

$$t \; = \; t^{ij} \; e_i \otimes f_j \; . \qquad (2.1.1.1b)$$

Nessa expressão, os elementos:

$$\{e_i \otimes f_j\} \; , \qquad (2.1.1.1c)$$

formam a base do espaço vetorial $E \otimes F$, e

$$t^{ij} \; = \; x^i \; y^j \; , \qquad (2.1.1.1d)$$

são os componentes do tensor **t**, composto de $m \times n$ números.

O espaço vetorial $E \otimes F$ definido acima é o **dual** do produto cartesiano $E^* \times F^*$ e, algumas vezes, esse produto é considerado como a definição de $E \otimes F$. (Registre-se que se denomina **produto cartesiano** entre dois conjuntos A e B o conjunto de pares ordenados $(\alpha, \; \beta)$, com $\alpha \in A$ e $\beta \in B$.)

Definição 2.1.1.2 - Potência Tensorial de Espaços Vetoriais. Seja **E** um espaço vetorial de dimensão **n** e E^* o respectivo espaço dual, ambos definidos sobre o corpo **K**. Denomina-se **potência tensorial** entre p réplicas de **E** e q réplicas de E^* o seguinte produto tensorial:

$$E \otimes E \otimes E \otimes ... \otimes E \otimes E^* \otimes E^* \otimes ... \otimes E^* \ = \ \otimes^p E \otimes^q E^* \ .$$

Cada elemento desse espaço é um **tensor misto** do tipo (**p, q**), definido por:

$$t \ = \ x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes ... \otimes x_{(p)} \otimes u^{(1)} \otimes u^{(2)} ... \otimes u^{(q)} \ ,$$

com:

$$(x_{(1)}, \ x_{(2)}, \ ..., \ x_{(p)}) \in E \quad e \quad (u^{(1)}, \ u^{(2)}, \ ..., \ u^{(q)}) \in E^* \ .$$

Componentes de um Tensor Misto. Sejam $\{e_i\}$ e $\{\varepsilon^j \ (x)\}$ as bases respectivas de **E** e E^*. Usando-se as expressões (1.1.1.1a) e (1.1.2.5a), teremos:

$$t \ = \ x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes ... \otimes x_{(p)} \otimes u^{(1)} \otimes u^{(2)} ... \otimes u^{(q)} \ =$$

$$= \ x^{i_1}_{(1)} \ e_{i_1} \otimes x^{i_2}_{(2)} \ e_{i_2} \otimes ... \otimes x^{i_p}_{(p)} \ e_{i_p} \otimes u^{(1)}_{j_1} \ \varepsilon^{j_1} \ (x) \otimes u^{(2)}_{j_2} \ \varepsilon^{j_2} \ (x) \otimes ... \otimes u^{(q)}_{j_q} \ \varepsilon^{j_q} \ (x) \ ,$$

ou:

$$t \ = \ x^{i_1}_{(1)} \ x^{i_2}_{(2)} \ ... \ x^{i_p}_{(p)} \ u^{(1)}_{j_1} \ u^{(2)}_{j_2} \ u^{(q)}_{j_q} \ e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \ (x) \otimes \varepsilon^{j_2} \ (x) \otimes ... \otimes \varepsilon^{j_q} \ (x) \ ,$$

ou:

$$t \ = \ t^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q} \ e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \ (x) \otimes \varepsilon^{j_2} \ (x) \otimes ... \otimes \varepsilon^{j_q} \ (x) \ . \qquad (2.1.1.2a)$$

Nessa expressão (2.1.1.2a), os elementos:

$$\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \ (x) \otimes \varepsilon^{j_2} \ (x) \otimes ... \otimes \varepsilon^{j_q} \ (x)\} \ , \qquad (2.1.1.2b)$$

formam a base do espaço vetorial $E \otimes E \otimes E \otimes ... \otimes E \otimes E^* \otimes E^* \otimes ... \otimes E^*$, e:

$$t^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q} \ = \ x^{i_1}_{(1)} \ x^{i_2}_{(2)} \ ... \ x^{i_p}_{(p)} \ u^{(1)}_{j_1} \ u^{(2)}_{j_2} \ u^{(q)}_{j_q} \ , \qquad (2.1.1.2c)$$

são os componentes do tensor misto **t**, composto de $n^{p \ + \ q}$ números.

Propriedades do Produto Tensorial. Considerando-se as operações (+) e ($\otimes$) entre os tensores de todos os tipos, observa-se que eles formam uma **álgebra**: fechada com relação a essas duas operações e a segunda delas ($\otimes$) é associativa e distributiva com relação à primeira (+). Por exemplo, se (**x, y, ...**) $\in$ **E**, (**u, v, ...**) $\in E^*$ e (α, β**, ...**) $\in$ **K**, então:

1. a) $x \otimes y \in E \otimes E$; *b)* $u \otimes v \in E^* \otimes E^*$; *c)* $x \otimes u \in E \otimes E^*$; *d)* $u \otimes x \in E^* \otimes E$;

2. a) $(x \ + \ y) \otimes u \ = \ x \otimes u \ + \ y \otimes u$; *b)* $(u \ + \ v) \otimes x \ = \ u \otimes x \ + \ v \otimes x$;

3. a) $x \otimes (u + v) = x \otimes u + x \otimes v; \quad u \otimes (x + y) = u \otimes x + u \otimes y$;

4. a) $(\alpha\, x) \otimes u = \alpha\, (x \otimes u) = x \otimes (\alpha\, u)$; $\quad b)$ $(\beta\, u) \otimes x = \beta\, (u \otimes x) = u \otimes (\beta\, x)$.

Mudança de Base. Sejam $\{e_i\}$ e $\{\varepsilon^j\ (x)\}$ as bases respectivas de $\mathbf{E}$ e E^*. Sejam, ainda, $\{\bar{e}_{\bar{k}}\}$ e $\{\bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\}$ aquelas bases transformadas segundo as expressões (1.1.1.2a,b) e (1.1.2.4a,b), isto é:

$$\bar{e}_{\bar{p}} = s^i_{\bar{p}}\, e_i\ , \qquad e_i = s^{\bar{p}}_i\, \bar{e}_{\bar{p}}\ , \qquad (1.1.1.2\text{a,b})$$

$$\varepsilon^k\ (x) = s^k_{\bar{m}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\ , \qquad \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x) = s^{\bar{m}}_k\ \varepsilon^k\ (x)\ . \qquad (1.1.2.4\text{a,b})$$

Tomemos o seguinte tensor:

$$t = t^{ij}_k\ e_i \otimes e_j \otimes \varepsilon^k\ (x) = \bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}}\ e_{\bar{p}} \otimes e_{\bar{n}} \otimes \varepsilon^{\bar{m}}\ (x)\ . \qquad (2.1.1.3)$$

Usando-se as expressões (1.1.1.2b) e (1.1.2.4a) na expressão (2.1.1.3), virá:

$$t^{ij}_k\ s^{\bar{p}}_i\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes s^{\bar{n}}_j\ \bar{e}_{\bar{n}} \otimes s^k_{\bar{m}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x) = \bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}}\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\ ,$$

$$t^{ij}_k\ s^{\bar{p}}_i\ s^{\bar{n}}_j\ s^k_{\bar{m}}\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}}\ \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x) = \bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}}\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\ ,$$

$$(t^{ij}_k\ s^{\bar{p}}_i\ s^{\bar{n}}_j\ s^k_{\bar{m}} - \bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}})\ \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x) = 0\ .$$

Como os vetores do conjunto $\{\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}}\ (x)\}$ são $L.I.$ (vide Exercício (2.1.1)), teremos:

$$\bar{t}^{\bar{p}\bar{n}}_{\bar{m}} = s^{\bar{p}}_i\ s^{\bar{n}}_j\ s^k_{\bar{m}}\ t^{ij}_k\ . \qquad (2.1.1.4)$$

Tipos Especiais de Tensores

1. **Contravariante**: $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ [Tipo (p, 0)];
2. **Covariante**: $t_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ [Tipo (0, q)];
3. **Vetor**: t^i [Tipo (1, 0)];
4. **Forma Linear**: t_j [Tipo (0, 1)];
5. **Escalar**: t [Tipo (0, 0)].
6. **Euclidiano** - Não há distinção entre índice co- e contravariante: $t^{ij} = t_{ij} = t^i_j$.
7. **Relativos** ou **Pseudo-tensores** - Quando, numa mudança de base, eles se transformam segundo a relação:

$$\bar{t}^{\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_p}_{\bar{b}_1 \bar{b}_2 ... \bar{b}_q} = S^\omega \; s^{\bar{a}_1}_{c_1} \; s^{\bar{a}_2}_{c_2} \; ... \; s^{\bar{a}_p}_{c_p} \; s^{d_1}_{\bar{b}_1} \; s^{d_2}_{\bar{b}_2} \; ... \; s^{d_q}_{\bar{b}_q} \; t^{c_1 c_2 ... c_p}_{d_1 d_2 ... d_q} \,, \qquad (2.1.1.5)$$

onde **S** é o determinante da transformação definida pela expressão (1.1.1.2a), isto é:

$$S = | \, s^\alpha_{\bar{\beta}} \, | \,,$$

e ω é um número inteiro relativo, denominado **grau** do pseudo-tensor.

7a. **Densidade Tensorial**: $\omega = 1$;

7b. **Capacidade Tensorial**: $\omega = -1$.

Exercícios (2.1.1)

EX.2.1.1.1 Demonstre que os vetores do conjunto $\{\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \, (x)\}$ são $L.I.$

Solução

Suponhamos que o tensor $t \in E \otimes E \otimes E^*$ seja nulo, quaisquer que sejam os vetores $\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \, (x)$, isto é:

$$s^{\bar{p}}_i \; s^{\bar{n}}_j \; s^k_{\bar{m}} \; t^{ij}_k \; \bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \, (x) = 0 \,.$$

Como $\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \, (x)$ são quaisquer, essa igualdade só se verifica se:

$$s^{\bar{p}}_i \; s^{\bar{n}}_j \; s^k_{\bar{m}} \; t^{ij}_k = 0 \,.$$

Usando-se a Definição 1.1.1.2b, a expressão acima demonstra que os vetores do conjunto $\{\bar{e}_{\bar{p}} \otimes \bar{e}_{\bar{n}} \otimes \bar{\varepsilon}^{\bar{m}} \, (x)\}$ são $L.I.$

2.1.2 Álgebra Tensorial

Definição 2.1.2.1 - SOMA. Sejam **t** e **r** dois tensores de mesmo tipo (**p, q**) e os escalares **a** e **b**. Chama-se de **soma tensorial** entre **t** e **r** ao tensor **s**, também de mesmo tipo (**p, q**), definido por:

$$s^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q} = a \; t^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q} + b \; r^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q} \,. \qquad (2.1.2.1)$$

Definição 2.1.2.2 - PRODUTO EXTERNO (TENSORIAL). Sejam **t** e **r** dois tensores de tipo (**p, q**) e (**m, n**), respectivamente. Chama-se de **produto externo (tensorial)** entre **t** e **r** ao tensor **p**, de tipo (**p + m, q + n**), definido por:

$$p^{i_1 i_2 ... i_p i_1 i_2 ... i_m}_{j_1 j_2 ... j_q j_1 j_2 ... j_n} = t^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q} \; r^{i_1 i_2 ... i_m}_{j_1 j_2 ... j_n} \,. \qquad (2.1.2.2)$$

Definição 2.1.2.3 - CONTRAÇÃO. Seja **t** um tensor de tipo (**p, q**). Chama-se de **tensor contraído** de **t** ao tensor **c**, de tipo (**p - 1, q - 1**), obtido quando se iguala um determinado índice contravariante a um índice covariante, e soma-se sobre esse índice. Assim:

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} \;=\; t^{i_1 i_2 \dots i_r \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots i_r \dots j_q} \;=\; c^{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}_{j_1 j_2 \dots j_{q-1}} \,. \qquad (2.1.2.3)$$

Definição 2.1.2.4 - PRODUTO INTERNO (CONTRAÍDO). Sejam **t** e **r** dois tensores de tipo (**p, q**) e (**m, n**), respectivamente. Chama-se de **produto interno (contraído)** entre **t** e **r** ao tensor **i**, de tipo (**p + m - 1, q + n - 1**), obtido quando se iguala um determinado índice contravariante (covariante) de um deles a um certo índice covariante (contravariante) do outro, e soma-se sobre esse índice. Assim:

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}\, r^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} \;=\; t^{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}\, r^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_n} \;=\; i^{\,i_1 i_2 \dots i_{p-1+m}}_{j_1 j_2 \dots j_{q+n-1}} \,, \qquad (2.1.2.4a)$$

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}\, r^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} \;=\; t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_q}\, r^{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} \;=\; i^{\,i_1 i_2 \dots i_{p+m-1}}_{j_1 j_2 \dots j_{q-1+n}} \,. \qquad (2.1.2.4b)$$

Definição 2.1.2.5 - CRITÉRIO DE TENSORIALIDADE. Seja **q** um tensor cujo tipo se quer determinar e **t** um tensor de tipo (**p, q**). Para se determinar o tipo do tensor **q** multiplica-se o mesmo por **t** e realiza-se **m** contrações. Se o resultado obtido for um tensor **s** do tipo (**k, n**), então **q** é um tensor do tipo (**k + m - p, n + m - q**).

Definição 2.1.2.6 - SIMETRIA. Seja um tensor **s** contravariante (covariante). Se dois índices contravariantes (covariantes) podem ser trocados sem alterar o valor do mesmo, ele é dito **simétrico** com relação a esses índices.

$$s^{\dots ij \dots} \;=\; s^{\dots ji \dots} \qquad ou \qquad s_{\dots ij \dots} \;=\; s_{\dots ji \dots} \,. \qquad (2.1.2.5a)$$

Quando *todos* os índices de **s** podem ser trocados aos pares sem alterar o seu valor, ele é dito **completamente simétrico**.

$$s^{\dots i \dots j \dots} \;=\; s^{\dots j \dots i \dots} \qquad ou \qquad s_{\dots i \dots j \dots} \;=\; s_{\dots j \dots i \dots} \,. \qquad (2.1.2.5b)$$

Definição 2.1.2.7 - ANTISSIMETRIA. Seja um tensor **a** contravariante (covariante). Se dois índices contravariantes (covariantes) podem ser trocados alterando o sinal do mesmo, ele é dito **antissimétrico** com relação a esses índices.

$$a^{\dots ij \dots} \;=\; -\, a^{\dots ji \dots} \qquad ou \qquad a_{\dots ij \dots} \;=\; -\, a_{\dots ji \dots} \,. \qquad (2.1.2.6a)$$

Quando *todos* os índices de **a** podem ser trocados aos pares alterando o seu sinal, ele é dito **completamente antissimétrico**.

$$a^{\dots i \dots j \dots} \;=\; -\, a^{\dots j \dots i \dots} \qquad ou \qquad a_{\dots i \dots j \dots} \;=\; -\, a_{\dots j \dots i \dots} \,. \qquad (2.1.2.6b)$$

Observe que para um tensor completamente antissimétrico, o sinal de seu componente dependerá do número de permutações. Assim, para um número *par* de permutações, o componente conservará o sinal; para um número *impar*, trocará de sinal. Isto é facilmente visto tomando-se uma permutação fundamental, por exemplo: 1, 2, 3, ..., p, fazendo-se as permutações e usando-se a definição de antissimetria completa. Observe-se, ainda, que, se o componente de um tensor antissimétrico tiver pelo menos dois índices repetidos, esse componente é nulo. Por exemplo:

$$t^{iij} \;=\; -\; t^{iij} \;=\; 0 \;.$$

Exercícios (2.1.2)

EX.2.1.2.1 Demonstre que a simetria (antissimetria) com relação a dois índices é invariante por uma mudança de bases.

Solução

Essa demonstração poderá ser feita com um tensor de segunda ordem, sem perdas de generalidades. Assim, usando-se a expressão (2.1.1.4) e considerando-se que os **s** são escalares, teremos:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; s_i^{\bar{m}}\; s_j^{\bar{n}}\; t^{ij} \;=\; s_j^{\bar{n}}\; s_i^{\bar{m}}\; t^{ij} \;.$$

Se o tensor considerado for simétrico ($t^{ij} \;=\; t^{ji}$) ou antissimétrico ($t^{ij} \;=\; -\; t^{ji}$), a expressão (2.1.1.4) nos garante que:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; s_j^{\bar{n}}\; s_i^{\bar{m}}\;\; t^{ij} \;=\; s_j^{\bar{n}}\; s_i^{\bar{m}}\;\; t^{ji} \;=\; \bar{t}^{\bar{n}\bar{m}} \;,$$

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; s_j^{\bar{n}}\; s_i^{\bar{m}}\;\; t^{ij} \;=\; -\; s_j^{\bar{n}}\; s_i^{\bar{m}}\;\; t^{ji} \;=\; -\; \bar{t}^{\bar{n}\bar{m}} \;,$$

A resolução desse exercício mostra que não podemos definir simetria (antissimetria) com relação a dois índices, um contravariante e o outro covariante, pois essa propriedade não será preservada depois de uma mudança de bases.

EX.2.1.2.2 Calcule o número de componentes independentes de um tensor completamente simétrico (antissimétrico). Estude o caso particular de um de segunda ordem.

Solução

De um modo geral um tensor **p** vezes contravariante (covariante) tem $\mathbf{n}^p$ componentes, onde **n** é dimensão do espaço vetorial. Contudo, se o tensor for completamente simétrico (antissimétrico), o número de componentes independentes será menor.

a) Se o tensor (**a**) for completamente antissimétrico seus componentes independentes deverão ter todos os índices distintos e na ordem natural e o seu número (N_{ind}^{ca}) será obtido agrupando-se **n** elementos **p** a **p** e que se distingam apenas pela natureza, tratando-se portanto de uma combinação:

$$N_{ind}^{ca} = C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\ p!} .$$

Esses componentes independentes serão denotados por:

$$a^{(a_1 a_2 \ldots a_p)} \qquad ou \qquad a_{(a_1 a_2 \ldots a_p)} \qquad (a_1 < a_2 < \ldots < a_p) .$$

a1) No caso de um tensor de segunda ordem, teremos:

$$N_{ind}^{ca} = C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!\ 2!} = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)!}{(n-2)!\ 2} = \frac{n\ (n-1)}{2} .$$

b) Se o tensor (**s**) for completamente simétrico, o número de componentes independentes será C_n^p acrescido do número de elementos diagonais, isto é, aqueles que têm o mesmo índice.

b1) No caso de um tensor de segunda ordem, teremos:

$$N_{ind}^{cs} = C_n^2 + n = \frac{n\ (n-1)!}{2} + n = \frac{n\ (n+1)}{2} .$$

2.1.3 Símbolos de Kronecker e de Levi-Civita, Determinante

Definição 2.1.3.1 - Delta Generalizado de Kronecker. No item 1.1.1., definimos o **símbolo delta de Kronecker** da seguinte maneira:

$$\delta_n^m = \delta^{mn} = \delta_{mn} = 1, \qquad (m = n) \qquad e \qquad \delta_n^m = \delta^{mn} = \delta_{mn} = 0. \qquad (m \neq n) .$$

Agora, vamos definir o **Delta Generalizado de Kronecker** $\delta_{j_1 j_2 \ldots j_m}^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ da seguinte maneira: os índices superiores e os inferiores podem ter qualquer valor de 1 a **n**. Se pelo menos dois índices superiores ou dois inferiores têm o mesmo valor, ou se os índices superiores não são o mesmo conjunto dos índices inferiores, esse símbolo será *nulo*. Se todos os índices superiores e inferiores são separadamente distintos e os índices superiores são o mesmo conjunto dos números inferiores, esse símbolo terá o valor $\pm$ 1. Será + 1 se entre o conjunto dos índices superiores e o dos inferiores houver um número *par* de permutações; será - 1 se o número de permutações for *ímpar*.
Exemplos:

$$\delta_{123}^{123} = \delta_{312}^{123} = 1, \quad \delta_{213}^{123} = \delta_{321}^{123} = -1, \quad \delta_{123}^{113} = \delta_{456}^{123} = 0 .$$

Definição 2.1.3.2 - Símbolo de Levi-Civita. O **símbolo de antissimetria completa de Levi-Civita** $\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}$ ou $\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p}$ é definido da seguinte maneira:

$$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p} = \delta^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{12 \ldots p} \qquad e \qquad \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p} = \delta^{12 \ldots p}_{a_1 a_2 \ldots a_p} \ .$$

Usando-se a Definição 2.1.3.1, o **símbolo de Levi-Civita** pode ser definido da seguinte maneira:

$$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}(\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p}) = 0 \text{ , se pelo menos dois índices forem iguais;} \qquad (2.1.3.1a)$$

$$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}(\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p}) = +\ 1 \text{ , se os índices formarem um número } \textit{par} \text{ de permutações a partir da permutação fundamental } 1, 2, \ldots, p; \qquad (2.1.3.1b)$$

$$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}(\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_p}) = -\ 1 \text{ , se os índices formarem um número } \textit{ímpar} \text{ de permutações a partir da permutação fundamental } 1, 2, \ldots, p; \qquad (2.1.3.1c)$$

Exemplos

$$\varepsilon^{11}\ (\varepsilon_{11}) = \varepsilon^{22}\ (\varepsilon_{22}) = \ldots = \varepsilon^{nn}\ (\varepsilon_{nn}) = 0, \quad \varepsilon^{12}\ (\varepsilon_{12}) = -\ \varepsilon^{21}\ (\varepsilon_{21}) = +\ 1\ ;$$

$$\varepsilon^{122}\ (\varepsilon_{122}) = \varepsilon^{121}\ (\varepsilon_{121}) = 0, \quad \varepsilon^{123}\ (\varepsilon_{123}) = \varepsilon^{312}\ (\varepsilon_{312}) = -\ \varepsilon^{213}\ (\varepsilon_{213}) = +\ 1\ ;$$

$$\varepsilon^{1233}\ (\varepsilon_{1233}) = 0, \quad \varepsilon^{1234}\ (\varepsilon_{1234}) = \varepsilon^{2143}\ (\varepsilon_{2143}) = \varepsilon^{3412}\ (\varepsilon_{3412}) = -\ \varepsilon^{2134}\ (\varepsilon_{2134}) = +\ 1\ ;$$

Definição 2.1.3.3 - Determinante. Por definição chama-se **determinante** $|d^j_i|$, com i = j = 1, 2, ..., n, à seguinte equação:

$$|\ d^j_i\ | = d = \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n}\ d^1_{a_1}\ d^2_{a_2}\ \ldots\ d^n_{a_n}\ , \qquad (2.1.3.2a)$$

ou:

$$|\ d^j_i\ | = d = \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n}\ d^{a_1}_1\ d^{a_2}_2\ \ldots\ d^{a_n}_n\ . \qquad (2.1.3.2b)$$

As expressões (2.1.3.2a,b) tomarão um novo aspecto, considerando-se que a quantidade:

$$d\ \varepsilon^{b_1 b_2 \ldots b_n}\ ,$$

será igual ao determinante **d**, a menos de sinal, se a permutação $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ for ímpar, e igual a **d**, se a permutação for par. Por outro lado, segundo a Definição 2.1.3.2, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$d\ \varepsilon^{b_1 b_2 \ldots b_n} = \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n}\ d^{b_1}_{a_1}\ d^{b_2}_{a_2}\ \ldots\ d^{b_n}_{a_n}\ .$$

Multiplicando-se a expressão acima por $\varepsilon_{b_1 b_2 \ldots b_n}$, obteremos o seguinte resultado:

$$\varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} \; d \; \varepsilon^{b_1 b_2 \dots b_n} \; = \; \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} \; \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} \; d^{b_1}_{a_1} \; d^{b_2}_{a_2} \; \dots \; d^{b_n}_{a_n} \; .$$

Usando-se o Exercício 2.1.3.1d, que será resolvido mais adiante, isto é:

$$\varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} \; \varepsilon^{b_1 b_2 \dots b_n} \; = \; n! \; ,$$

podemos escrever que:

$$d \; = \; \frac{1}{n!} \; \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} \; \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} \; d^{b_1}_{a_1} \; d^{b_2}_{a_2} \; \dots \; d^{b_n}_{a_n} \; = \; \frac{1}{n!} \; \varepsilon^{b_1 b_2 \dots b_n} \; \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} \; d^{a_1}_{b_1} \; d^{a_2}_{b_2} \; \dots \; d^{a_n}_{b_n} \; . \qquad (2.1.3.2c,d)$$

É oportuno destacar que o determinante **d** pode ainda ser representado pela seguinte notação:

$$| \; d^{ji} \; | \; = \; d \; = \; \frac{1}{n!} \; \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} \; \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} \; d^{b_1 a_1} \; d^{b_2 a_2} \; \dots \; d^{b_n a_n} \; , \qquad (2.1.3.2e)$$

e:

$$| \; d_{ji} \; | \; = \; d \; = \; \frac{1}{n!} \; \varepsilon^{b_1 b_2 \dots b_n} \; \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} \; d_{b_1 a_1} \; d_{b_2 a_2} \; \dots \; d_{b_n a_n} \; , \qquad (2.1.3.2f)$$

onde **j** é o índice de linha e **i** o índice de coluna.

Definição 2.1.3.4 - Cofator. Tomemos a definição de **determinante** dada pela expressão (2.1.3.2). Então:

$$|d^j_i| \; = \; d \; = \; \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} \; d^1_{a_1} \; d^2_{a_2} \; \dots \; d^n_{a_n} \; = \; d^1_{a_1} \; \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} \; d^2_{a_2} \; \dots \; d^n_{a_n} \; = \; d^1_{a_1} \; D^{a_1}_1 \; , \qquad (2.1.3.3a)$$

onde:

$$D^{a_1}_1 \; = \; \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} \; d^2_{a_2} \; \dots \; d^n_{a_n} \; , \qquad (2.1.3.3b)$$

é denominado o **cofator** do elemento $d^{a_1}_1$. É claro que se pode escrever expressões análogas para cada um dos elementos do determinante **d**. Portanto, de um modo genérico, podemos escrever que:

$$d \; = \; d^m_i \; D^i_m \; . \quad \text{(i = índice mudo, m = índice livre)} \qquad (2.1.3.3c)$$

Multiplicando-se à direita a expressão acima por δ^m_n e usando-se a expressão 1.1.1.3b, virá:

$$d \; \delta^m_n \; = \; d^m_i \; D^i_m \; \delta^m_n \qquad \to \qquad d \; \delta^m_n \; = \; d^m_i \; D^i_n \; . \qquad (2.1.3.3d)$$

É oportuno observar que quando se faz na expressão (2.1.3.3d) **m** = **n**, e realiza-se a soma nesse índice, teremos:

$$d \; \delta^m_m \; = \; d^m_i \; D^i_m \qquad \to \qquad d^m_i \; D^i_m \; = \; d \; n \; . \qquad (2.1.3.3e)$$

2.1.4 Tensor de Levi-Civita

Definição 2.1.4.1 - Tensor de Levi-Civita. O **tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita** $\eta_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ ($\eta^{a_1 a_2 \ldots a_n}$) é definido da seguinte maneira:

$$\eta_{a_1 a_2 \ldots a_n} \; = \; \sqrt{\mid g \mid}\, \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n} \; = \; \frac{1}{\sqrt{\mid g' \mid}}\, \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n} \; , \qquad (2.1.4.1a)$$

e:

$$\eta^{a_1 a_2 \ldots a_n} \; = \; \sqrt{\mid g' \mid}\, \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n} \; = \; \frac{1}{\sqrt{\mid g \mid}}\, \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n} \; , \qquad (2.1.4.1b)$$

onde:

$$\mid g \mid = \text{módulo de det } (\mathrm{g}_{ij}) \qquad \text{e} \qquad \mid g' \mid = \text{módulo de det } (g^{ij}) \; .$$

Observe-se que podemos usar o tensor métrico $\mathbf{g}_{ij}$ ($\mathbf{g}^{ij}$) para definir uma **forma mixta do tensor de Levi-Civita**, da seguinte maneira:

$$\eta^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_{p+1} \ldots b_n} \; = \; g^{a_1 c_1}\, g^{a_2 c_2} \, \ldots \, g^{a_p c_p}\, \eta_{c_1 c_2 \ldots c_p b_{p+1} \ldots b_n} \; , \qquad (2.1.4.1c)$$

e:

$$\eta_{a_1 a_2 \ldots a_p}^{b_{p+1} \ldots b_n} \; = \; g_{a_1 c_1}\, g_{a_2 c_2} \, \ldots \, g_{a_p c_p}\, \eta^{c_1 c_2 \ldots c_p b_{p+1} \ldots b_n} \; . \qquad (2.1.4.1d)$$

Exercícios (2.1.3)

EX.2.1.3.1 Mostre que, para i, j, k, r, s, t, = 1, 2, 3, teremos:

a) $\varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{rst} \; = \; \delta^i_r\, \delta^j_s\, \delta^k_t \; + \; \delta^i_t\, \delta^j_r\, \delta^k_s \; + \; \delta^i_s\, \delta^j_t\, \delta^k_r \; - \; \delta^i_s\, \delta^j_r\, \delta^k_t \; - \; \delta^i_r\, \delta^j_t\, \delta^k_s \; - \; \delta^i_t\, \delta^j_s\, \delta^k_r$;

b) $\varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{ist} \; = \; \delta^j_s\, \delta^k_t \; - \; \delta^j_t\, \delta^k_s$;

c) $\varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{ijt} \; = \; 2\, \delta^k_t$;

d) $\varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{ijk} \; = \; 6$.

Solução

1a) Usando-se a Definição 2.1.3.2, teremos:

$$\varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{rst} \; = \; \delta^{ijk}_{123}\, \delta^{123}_{rst} \; = \; \delta^{ijk}_{rst} \; .$$

Agora, usando-se a Definição 2.1.3.1, resultará:

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{rst} \;=\; \delta^{ijk}_{123}\,\delta^{123}_{rst} \;=\; \delta^{ijk}_{rst} \;=\; \delta^i_r\,\delta^j_s\,\delta^k_t + \delta^i_t\,\delta^j_r\,\delta^k_s + \delta^i_s\,\delta^j_t\,\delta^k_r - \delta^i_s\,\delta^j_r\,\delta^k_t - \delta^i_r\,\delta^j_t\,\delta^k_s - \delta^i_t\,\delta^j_s\,\delta^k_r\;.$$

1b) Partindo-se do resultado anterior e fazendo-se $\mathbf{r} = \mathbf{i}$, resultará: (Lembrar que: $\delta^m_m \;=\; 3 \; e \; \delta^m_n\,\delta^m_p \;=\; \delta^p_n$.)

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{ist} \;=\; \delta^i_i\,\delta^j_s\,\delta^k_t \;+\; \delta^i_t\,\delta^j_i\,\delta^k_s \;+\; \delta^i_s\,\delta^j_t\,\delta^k_i \;-\; \delta^i_s\,\delta^j_i\,\delta^k_t \;-\; \delta^i_i\,\delta^j_t\,\delta^k_s \;-\; \delta^i_t\,\delta^j_s\,\delta^k_i \;=$$

$$=\; 3\,\delta^j_s\,\delta^k_t \;+\; \delta^j_t\,\delta^k_s \;+\; \delta^k_s\,\delta^j_t \;-\; \delta^j_s\,\delta^k_t \;-\; 3\,\delta^j_t\,\delta^k_s \;-\; \delta^k_t\,\delta^j_s \;=\; \delta^j_s\,\delta^k_t \;-\; \delta^j_t\,\delta^k_s\;.$$

1c) Partindo-se do resultado anterior e fazendo-se $\mathbf{s} = \mathbf{j}$, virá:

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{ijt} \;=\; \delta^j_j\,\delta^k_t \;-\; \delta^j_t\,\delta^k_j \;=\; 3\,\delta^k_t \;-\; \delta^k_t \;=\; 2\,\delta^k_t\;.$$

1d) Partindo-se do resultado anterior e fazendo-se $\mathbf{t} = \mathbf{k}$, virá:

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{ijk} \;=\; 2\,\delta^k_k \;=\; 6 \;=\; 3!\;.$$

É oportuno registrar que para um espaço vetorial de dimensão **n**, pode-se demonstrar que:

$$\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n}\,\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n} \;=\; n!\;.$$

EX.2.1.3.2 Use a Definição 2.1.3.3 para calcular um determinante de segunda ordem.

Solução

Segundo a expressão (2.1.3.2), para um determinante de segunda ordem, isto é, com i, j = 1, 2, tem-se:

$$d \;=\; |d^j_i| \;=\; \varepsilon^{ij}\,d^1_i\,d^2_j \;=\; \varepsilon^{1j}\,d^1_1\,d^2_j \;+\; \varepsilon^{2j}\,d^1_2\,d^2_j \;=$$

$$=\; \varepsilon^{11}\,d^1_1\,d^2_1 \;+\; \varepsilon^{12}\,d^1_1\,d^2_2 \;+\; \varepsilon^{21}\,d^1_2\,d^2_1 \;+\; \varepsilon^{22}\,d^1_2\,d^2_2\;.$$

Sendo $\varepsilon^{11} \;=\; \varepsilon^{22} \;=\; 0 \; e \; \varepsilon^{12} \;=\; -\,\varepsilon^{21} \;=\; 1$, teremos:

$$d \;=\; |d^j_i| \;=\; d^1_1\,d^2_2 \;-\; d^1_2\,d^2_1\;,$$

o que coincide com o cálculo tradicional, isto é:

$$d \;=\; |d^j_i| \;=\; \begin{bmatrix} d^1_1 & d^1_2 \\ d^2_1 & d^2_2 \end{bmatrix} \;=\; d^1_1\,d^2_2 \;-\; d^1_2\,d^2_1\;.$$

$\boxed{\text{EX.2.1.3.3}}$ Demonstre que:

$$det\ (AB)\ =\ det\ (A)\ .\ det\ (B)\ .$$

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Inicialmente, façamos $A\ .\ B\ =\ C$. Assim, usando-se a expressão (1.1.4.5), virá:

$$c_i^j\ =\ a_k^j\ b_i^k\ .$$

Usando-se a expressão acima e a expressão (2.1.3.2), teremos:

$$|c_i^j|\ =\ \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}\ c_{\alpha_1}^1\ c_{\alpha_2}^2\ ...\ c_{\alpha_n}^n\ =\ \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}\ a_{\beta_1}^1\ b_{\alpha_1}^{\beta_1}\ a_{\beta_2}^2\ b_{\alpha_2}^{\beta_2}\ ...\ a_{\beta_n}^n\ b_{\alpha_n}^{\beta_n} \qquad \to$$

$$|c_i^j|\ =\ \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}\ a_{\beta_1}^1\ a_{\beta_2}^2\ ...\ a_{\beta_n}^n\ b_{\alpha_1}^{\beta_1}\ b_{\alpha_2}^{\beta_2}\ ...\ b_{\alpha_n}^{\beta_n}\ =\ \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}\ a_{\beta_1}^1\ a_{\beta_2}^2 ... a_{\beta_n}^n\ \varepsilon_{\beta_1 \beta_2 ... \beta_n} b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} ... b_n^{\beta_n}\ .$$

Por fim, usando-se novamente a expressão (2.1.3.2), teremos:

$$det(C)\ =\ det\ (AB)\ =\ det\ (A)\ .\ det\ (B)\ .$$

$\boxed{\text{EX.2.1.3.4}}$ Demonstre a **Regra de Cramer**.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Dado o sistema de equações lineares, não-homogêneas:

$$y^i\ =\ d_j^i\ x^j, \qquad (d_j^i\ =\ matriz\ (n \times n))\ ,$$

determinemos x^j. Multiplicando-se à esquerda a equação acima por D_i^m e usando-se as expressões (2.1.3.3d) e 1.1.1.3b, teremos:

$$D_i^m\ y^i\ =\ D_i^m\ d_j^i\ x^j\ =\ d\ \delta_j^m\ x^j\ =\ d\ x^m\ .$$

Se $d \neq 0$, a expressão acima resultará em:

$$x^m\ =\ \frac{D_i^m}{d}\ y^i\ ,$$

expressão essa que traduz a **Regra de Cramer**.

$\boxed{\text{EX.2.1.3.5}}$ Demonstre que:

a) O **símbolo de Levi-Civita** ($\varepsilon^{a_1 a_2 ... a_p}$) é uma densidade tensorial;

b) O **símbolo de Levi-Civita** ($\varepsilon_{a_1 a_2 ... a_p}$) é uma capacidade tensorial.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

a) Tomemos o seguinte determinante ($p \times p$):

$$\bar{S} \;=\; |\; s^a_{\bar{b}} \;| \;.$$

Usando-se a Definição 2.1.3.2, teremos:

$$\bar{S}\; \varepsilon^{\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_p} \;=\; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_p}\; s^{\bar{a}_1}_{b_1}\; s^{\bar{a}_2}_{b_2}\; ...\; s^{\bar{a}_p}_{b_p} \;,$$

$$\varepsilon^{\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_p} \;=\; (\bar{S})^{-\,1}\;\; s^{\bar{a}_1}_{b_1}\; s^{\bar{a}_2}_{b_2}\; ...\; s^{\bar{a}_p}_{b_p}\; \varepsilon^{b_1 b_2 ... b_p} \;.$$

Usando-se o fato de que S $\bar{S} \;=\; 1$ e a expressão (2.1.1.4), verifica-se que $\varepsilon^{\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_p}$ é uma **densidade tensorial**.

b) Tomemos o seguinte determinante $(p \times p)$:

$$S \;=\; |\; s^{\bar{b}}_a \;| \;.$$

Usando-se a Definição 2.1.3.3, teremos:

$$S\; \varepsilon_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_p} \;=\; \varepsilon_{b_1 b_2 ... b_p}\; s^{b_1}_{\bar{a}_1}\; s^{b_2}_{\bar{a}_2}\; ...\; s^{b_p}_{\bar{a}_p} \;,$$

$$\varepsilon_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_p} \;=\; (S)^{-\,1}\;\; s^{b_1}_{\bar{a}_1}\; s^{b_2}_{\bar{a}_2}\; ...\; s^{b_p}_{\bar{a}_p}\; \varepsilon_{b_1 b_2 ... b_p} \;.$$

Usando-se a expressão (2.1.1.4), verifica-se que $\varepsilon_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_p}$ é uma **capacidade tensorial**.

$\boxed{\text{EX.2.1.3.6}}$ Tomando-se a expressão (1.1.3.1), isto é:

$$g_{ij} \;=\; (e_i,\; e_j) \;,$$

demonstre que, nos espaços euclidianos $(det \mid g_{ij} \mid\, \neq 0)$, tem-se:

a) g_{ij} é um tensor covariante de segunda ordem, conhecido como **tensor métrico**;

b) $det \mid g_{ij} \mid \;=\; g$ é um pseudo-escalar de peso 2;

c) $\sqrt{-\,g}$ é uma densidade escalar;

d) $\left(\; \sqrt{-\,g}\; \right)^{-\,1}$ é uma capacidade escalar.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

a) Consideremos a mudança de base definida pela expressão (1.1.1.2a):

$$\bar{e}_{\bar{j}} \;=\; s^i_{\bar{j}}\; e_i \;.$$

Usando-se a expressão (1.1.3.1) para essa nova base, e considerando-se a expressão (1.1.1.2a), teremos:

$$\bar{g}_{\bar{i}\bar{j}} = (\bar{e}_{\bar{i}},\ \bar{e}_{\bar{j}}) = (s_{\bar{i}}^{m}\ e_m,\ s_{\bar{j}}^{n}\ e_n) = s_{\bar{i}}^{m}\ s_{\bar{j}}^{n}\ (e_m,\ e_n)\ .$$

Usando-se novamente a expressão (1.1.3.1), resultará:

$$\bar{g}_{\bar{i}\bar{j}} = s_{\bar{i}}^{m}\ s_{\bar{j}}^{n}\ g_{mn}\ ,$$

o que demonstra que o tensor métrico é um tensor covariante de segunda ordem.

b) Expressando-se o resultado obtido no item anterior sob a forma de determinante, virá:

$$det \mid \bar{g}_{\bar{i}\bar{j}} \mid = det \mid s_{\bar{i}}^{m}\ s_{\bar{j}}^{n}\ g_{mn} \mid .$$

Considerando-se o resultado dos Exercícios (1.1.4.1) e (2.1.3.3), teremos:

$$\bar{g} = S^2\ g\ ,$$

o que demonstra que **g** é um pseudo-escalar de peso 2.

c) Multiplicando-se o resultado anterior por (-) e extraindo-se a raiz quadrada, teremos:

$$\sqrt{-\ \bar{g}} = S\ \sqrt{-\ g}\ ,$$

o que demonstra que $\sqrt{-\ g}$ é uma densidade escalar. Observe-se que, quando o espaço for estritamente ou propriamente euclidiano ($g\ >\ 0$), teremos:

$$\sqrt{\bar{g}} = S\ \sqrt{g}\ ,$$

d) Tomando-se o inverso do resultado anterior, teremos:

$$\left(\ \sqrt{-\ \bar{g}}\ \right)^{-\ 1} = S^{-\ 1} \left(\ \sqrt{-\ g}\ \right)^{-\ 1}\ ,$$

o que demonstra que $\left(\ \sqrt{-\ g}\ \right)^{-\ 1}$ é uma capacidade escalar. Observe-se que, quando o espaço for estritamente ou propriamente euclidiano ($g\ >\ 0$), teremos:

$$\left(\ \sqrt{\bar{g}}\ \right)^{-\ 1} = S^{-\ 1} \left(\ \sqrt{g}\ \right)^{-\ 1}\ ,$$

$\boxed{\text{EX.2.1.3.7}}$ Demonstre que, partindo-se da expressão (2.1.4.1a), obtém-se a expressão (2.1.4.1b).

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Tomemos a expressão (2.1.4.1a):

$$\eta_{a_1 a_2 \dots a_n} \ = \ \sqrt{\mid g \mid}\ \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} \ = \frac{1}{\sqrt{\mid g' \mid}}\ \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n}\ , \qquad \text{(I)}$$

Segundo a expressão (1.1.3.10b), podemos escrever que:

$$\eta^{b_1 b_2 \dots b_n} \ = \ g^{b_1 a_1}\ g^{b_2 a_2} \dots g^{b_n a_n}\ \eta_{a_1 a_2 \dots a_n}\ . \qquad \text{(II)}$$

Por outro lado, segundo a expressão (2.1.3.2e), temos:

$$det\ (g^{ji}) \ = \ g' \ = \ \tfrac{1}{n!}\ \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n}\ \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n}\ g^{b_1 a_1}\ g^{b_2 a_2}\ \dots\ g^{b_n a_n}\ .$$

Multiplicando-se a expressão acima por $\varepsilon^{b_1 b_2 \dots b_n}$ e usando-se o Exercício 2.1.3.1d, virá:

$$g'\ \varepsilon^{b_1 b_2 \dots b_n} \ = \ \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n}\ g^{b_1 a_1}\ g^{b_2 a_2}\ \dots\ g^{b_n a_n}\ . \qquad \text{(III)}$$

Usando-se as expressões (I) e (II) em (III), resultará:

$$\eta^{b_1 b_2 \dots b_n} \ = \ g'\ \varepsilon^{b_1 b_2 \dots b_n}\ \sqrt{\mid g \mid}\ . \qquad \text{(IV)}$$

Agora, considerando-se a expressão (1.1.3.11), ou seja:

$$g^{ji}\ g_{jk} \ = \ \delta^i_k \qquad \rightarrow \qquad g'\ g \ = \ 1 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{\mid g' \mid}\ \sqrt{\mid g \mid} \ = \ 1\ ,$$

a expressão (IV) ficará:

$$\eta^{b_1 b_2 \dots b_n} \ = \ \sqrt{\mid g' \mid}\ \varepsilon^{b_1 b_2 \dots b_n} \ = \ \frac{1}{\sqrt{\mid g \mid}}\ \varepsilon^{b_1 b_2 \dots b_n}\ ,$$

que representa a expressão (2.1.4.1b).

Problemas (2.1)

2.1.1 Dê um exemplo de aplicação do critério de tensorialidade.

2.1.2 Se A_{ij} é um tensor antissimétrico, demonstre que:

$$(\delta^i_j\ \delta^k_r \ + \ \delta^i_r\ \delta^k_j)\ A_{ik} \ = \ 0\ .$$

2.1.3 Seja um tensor A_{ijk}. Mostre que o número **N** de componentes independentes desse tensor vale:

$$N \ = \ \frac{n\ (n\ +\ 1)\ (n\ +\ 2)}{3!}, \quad \text{se } A_{ijk} \text{ é completamente simétrico;}$$

$$N = \frac{n\ (n\ -\ 1)\ (n\ -\ 2)}{3!}, \quad se A_{ijk} \text{ é completamente antissimétrico;}$$

2.1.4 Demonstre que:

$$\text{I. } \delta^{jk}_{ik} = (n - 1)\ \delta^{j}_{i}; \qquad \text{(i, j, k = 1, 2, ..., n)}$$

$$\text{II. } \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p b_{p+1} \ldots b_n}\ \varepsilon_{b_1 b_2 \ldots b_p b_{p+1} \ldots b_n} = (n-p)!\ \varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_p}\ ;$$

$$\text{III. } \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = n!\ \delta^{1}_{i_1}\ \delta^{2}_{i_2}\ \ldots\ \delta^{n}_{i_n}\ ,$$

2.1.5 Se os elementos de um determinante $|d^j_i| = d$ são funções das variáveis $(x^1,\ x^2,\ ...,\ n^n)$, demonstre que:

$$\frac{\partial\ d}{\partial\ x^{\rho}} = D^{\alpha}_{\beta}\ \frac{\partial\ d^{\beta}_{\alpha}}{\partial\ x^{\rho}}. \qquad (d^{\alpha}_{i}\ D^{j}_{\alpha} = d\ \delta^{j}_{i})\ .$$

Capítulo 3

3.1 Álgebra Exterior

3.1.1 Álgebra Exterior de ordem dois

Definição 3.1.1.1 - Produto Exterior de dois vetores. Sejam **x** e **y** dois vetores do espaço vetorial **E** de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**. Denomina-se **produto exterior** desses dois vetores o tensor denotado por $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$, denominado **bivetor** ou **2-vetor**, e definido por:

$$x \wedge y \;=\; x \otimes y \;-\; y \otimes x \;, \qquad (3.1.1.1a)$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $x \wedge (y \;+\; z) \;=\; x \wedge y \;+ x \wedge z \;; \qquad (x \;+\; y) \wedge z \;=\; x \wedge z \;+ y \wedge z \;; \qquad (3.1.1.1b)$
2. $a\; (x \wedge y) \;=\; (a\; x) \wedge y \;=\; x \wedge (a\; y)\;; \qquad (3.1.1.1c)$
3. $x \wedge x \;=\; 0\;; \qquad (3.1.1.1d)$
4. $x \wedge y \;=\; -\; y \wedge x\;, \qquad (3.1.1.1e)$

onde $(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z},\ ...) \in \mathbf{E}$ e $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$.

Componentes Estritos de um 2-vetor. Seja $\{e_i\}$ a base de **E** e $(x^i,\ y^j)$ os componentes de $(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \in \mathbf{E}$ nessa base. Então, segundo a expressão (1.1.1.1a), o produto exterior dado pela expressão (3.1.1.1a) será escrito na forma:

$$x \wedge y \;=\; (x^i\; e_i) \otimes (y^j\; e_j) - \;(y^j\; e_j) \otimes (x^i\; e_i) \;=\; x^i\; y^j\; e_i \otimes e_j \;-\; x^i\; y^j\; e_j \otimes e_i\;.$$

Trocando-se, no segundo termo da expressão acima, **i** por **j**, e usando-se a expressão (3.1.1.1a), virá:

$$x \wedge y \;=\; x^i\; y^j\; e_i \otimes e_j \;-\; x^j\; y^i\; e_i \otimes e_j \;=\; (x^i\; y^j \;-\; x^j\; y^i)\; e_i \otimes e_j\;, \qquad (3.1.1.2a)$$

expressão essa que mostra que $x \wedge y$ é um tensor contravariante antissimétrico de segunda ordem.

Para obtermos os **componentes estritos** desse tensor dado pela expressão (3.1.1.2a), vamos decompor a mesma da seguinte maneira:

$$x \wedge y \;=\; (x^i\; y^j \;-\; x^j\; y^i)\; e_i \otimes e_j\;,$$

$$x \wedge y \;=\; \sum_{i\,<\,j} (x^i\; y^j \;-\; x^j\; y^i)\; e_i \otimes e_j \;+\; \sum_{i\,>\,j} (x^i\; y^j \;-\; x^j\; y^i)\; e_i \otimes e_j\;.$$

Trocando-se o **i** por **j** no segundo somatório, teremos:

$$x \wedge y \;=\; \sum_{i\,<\,j} (x^i\, y^j \;-\; x^j\, y^i)\; e_i \otimes e_j \;+\; \sum_{j\,>\,i} (x^j\, y^i \;-\; x^i\, y^j)\; e_j \otimes e_i \;=$$

$$=\; \sum_{i\,<\,j} (x^i\, y^j \;-\; x^j\, y^i)\; (e_i \otimes e_j \;-\; e_j \otimes e_i)\;.$$

Usando-se a expressão (3.1.1.1a) e lembrando-se a definição de determinante, resultará:

$$x \wedge y \;=\; \sum_{i\,<\,j} \begin{bmatrix} x^i & y^i \\ x^j & y^j \end{bmatrix} (e_i \wedge e_j)\;. \qquad (3.1.1.2b)$$

Nessa expressão, o conjunto $\{e_i \wedge e_j\}$ é linearmente independente (LI). Observe-se que se não for considerada a restrição $i \;<\; j$, a expressão (3.1.1.2b) apresentará a seguinte forma:

$$x \wedge y \;=\; \frac{1}{2!} \sum_{i,\;j} \begin{bmatrix} x^i & y^i \\ x^j & y^j \end{bmatrix} (e_i \wedge e_j)\;. \qquad (3.1.1.2c)$$

Definição 3.1.1.2 - Espaço de 2-vetores. Seja **E** um espaço vetorial de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**, e de base $\{e_i\}$. O subespaço de **E** $\otimes$ **E** ($= \otimes^2$ **E**) dos tensores contravariantes antissimétricos de segunda ordem, gerados pela base $\{e_i \wedge e_j\}$, é chamado de **espaço de 2-vetores** - $\bigwedge^2$ **E**. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$(a\; x) \wedge (b\; y)\;,$$

onde (**a, b**) $\in$ **R** e (**x, y**) $\in$ **E**, e tem a seguinte dimensão:

$$dim\; \bigwedge^2 E \;=\; C_n^2 \;=\; \frac{n\;(n-1)}{2}\;.$$

Observe-se que a Álgebra dos elementos de $\bigwedge^2$ **E** é conhecida como **Álgebra de Grassmann**, em virtude de haver sido iniciada pelo matemático alemão Hermann Günther Grassmann (1809-1877), em 1844.

Mudança de Base no Espaço $\bigwedge^2$ E. Neste item, vamos ver como se transformam os componentes estritos de um $2 - vetor$ numa mudança de base. Segundo a expressão (3.1.1.2a), todo $2 - vetor$ é um tensor contravariante antissimétrico de segunda ordem e, portanto, segundo a expressão (2.1.1.4), teremos:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; -\; \bar{t}^{\bar{n}\bar{m}} \;=\; s_i^{\bar{m}}\; s_j^{\bar{n}}\; t^{ij}\;.$$

Agora, vamos decompor essa expressão da seguinte maneira:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \;=\; \sum_{i\,<\,j} s_i^{\bar{m}}\; s_j^{\bar{n}}\; t^{ij} \;+\; \sum_{i\,>\,j} s_i^{\bar{m}}\; s_j^{\bar{n}}\; t^{ij}\;.$$

Trocando-se o **i** por **j** no segundo somatório e observando-se que o tensor **t** é antissimétrico ($t^{ij} \ = \ - \ t^{ji}$), teremos:

$$\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}} \ = \ \sum_{i \ < \ j} s_i^{\bar{m}} \ s_j^{\bar{n}} \ t^{ij} \ + \ \sum_{j \ > \ i} s_j^{\bar{m}} \ s_i^{\bar{n}} \ t^{ji} \ = \ \sum_{i \ < \ j} (s_i^{\bar{m}} \ s_j^{\bar{n}} \ - \ s_i^{\bar{n}} \ s_j^{\bar{m}}) \ t^{ij} \ .$$

Usando-se a definição de determinante, resultará:

$$[\bar{t}^{\bar{m}\bar{n}}]_{\bar{m} \ < \ \bar{n}} \ = \ \sum_{i \ < \ j} \begin{bmatrix} s_i^{\bar{m}} & s_i^{\bar{n}} \\ s_j^{\bar{m}} & s_j^{\bar{n}} \end{bmatrix} t^{ij} \ . \qquad (3.1.1.3)$$

Definição 3.1.1.3 - Produto Exterior de duas formas. Sejam **f** e **g** $2-formas$ do espaço vetorial $\mathbf{E}^*$, dual de **E**. Denomina-se **produto exterior** dessas duas formas o tensor denotado por $\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}$, denominado $2-forma$, e definido por:

$$f \wedge g \ = \ f \otimes g \ - \ g \otimes f \ , \qquad (3.1.1.4)$$

e que satisfaz as mesmas propriedades da Definição (3.1.1.1).

Componentes Estritos de uma 2-forma. Seja $\{\varepsilon^i \ (x)\}$ a base de $\mathbf{E}^*$ e ($f_i, \ g_j$) os componentes de $(\mathbf{f}, \ \mathbf{g}) \in E^*$ nessa base. Então, segundo a expressão (1.1.2.5a), o produto exterior dado pela expressão (3.1.1.4) será escrito na forma:

$$f \wedge g \ = \ (f_i \ \varepsilon^i \ (x)) \otimes (g_j \ \varepsilon^j \ (x)) - \ (g_j \ \varepsilon^j \ (x)) \otimes (f_i \ \varepsilon^i \ (x)) \ =$$

$$= \ f_i \ g_j \ \varepsilon^i \ (x) \otimes \varepsilon^j \ (x) \ - \ f_i \ g_j \ \varepsilon^j \ (x) \otimes \varepsilon^i \ (x) \ .$$

Trocando-se, no segundo termo da expressão acima, **i** por **j**, e usando-se a expressão (3.1.1.4), virá:

$$f \wedge g \ = \ f_i \ g_j \ \varepsilon^i \ (x) \otimes \varepsilon^j \ (x) \ - \ f_j \ g_i \ \varepsilon^i \ (x) \otimes \varepsilon^j \ (x) \ =$$

$$= \ (f_i \ g_j \ - \ f_j \ g_i) \ \varepsilon^i \ (x) \otimes \varepsilon^j \ (x) \ , \qquad (3.1.1.5a)$$

expressão essa que mostra que $f \wedge g$ é um tensor covariante antissimétrico de segunda ordem.

Para obtermos os **componentes estritos** desse tensor, vamos decompor essa expressão da seguinte maneira:

$$f \wedge g \ = \ (f_i \ g_j \ - \ f_j \ g_i) \ \varepsilon^i \ (x) \otimes \varepsilon^j \ (x) \ ,$$

$$f \wedge g \ = \ \sum_{i \ < \ j} (f_i \ g_j \ - \ f_j \ g_i) \ \varepsilon^i \ (x) \otimes \varepsilon^j \ (x) \ + \ \sum_{i \ > \ j} (f_i \ g_j \ - \ f_j \ g_i) \ \varepsilon^i \ (x) \otimes \varepsilon^j \ (x) \ .$$

Trocando-se o **i** por **j** no segundo somatório, teremos:

$$f \wedge g \;=\; \sum_{i\,<\,j} (f_i\, g_j \;-\; f_j\, g_i)\; \varepsilon^i\,(x) \otimes \varepsilon^j\,(x) \;+\; \sum_{j\,>\,i} (f_j\, g_i \;-\; f_i\, g_j)\; \varepsilon^j\,(x) \otimes \varepsilon^i\,(x) \;=$$

$$=\; \sum_{i\,<\,j} (f_i\, g_j \;-\; f_j\, g_i)\; (\varepsilon^i\,(x) \otimes \varepsilon^j\,(x) \;-\; \varepsilon^j\,(x) \otimes \varepsilon^i\,(x))\;.$$

Usando-se a expressão (3.1.1.1a) e lembrando-se a definição de determinante, resultará:

$$f \wedge g \;=\; \sum_{i\,<\,j} \begin{bmatrix} f_i & g_i \\ f_j & g_j \end{bmatrix} [\varepsilon^i\,(x) \wedge \varepsilon^j\,(x)]\;. \qquad (3.1.1.5b)$$

Nessa expressão, o conjunto $\{\varepsilon^i\,(x) \wedge \varepsilon^j\,(x)\}$ é linearmente independente (LI). Observe-se que, se não for considerada a restrição $i \;<\; j$, a expressão (3.1.1.5b) apresentará a seguinte forma:

$$f \wedge g \;=\; \frac{1}{2!} \sum_{i,\; j} \begin{bmatrix} f_i & g_i \\ f_j & g_j \end{bmatrix} [\varepsilon^i\,(x) \wedge \varepsilon^j\,(x)]\;. \qquad (3.1.1.5c)$$

Definição 3.1.1.4 - Espaço de 2-formas. Seja E^* um espaço vetorial dual de **E**, e de base $\{\varepsilon^i\,(x)\}$. O subespaço de $E^* \otimes E^*$ $(\,= \otimes^2\, E^*)$ dos tensores covariantes antissimétricos de segunda ordem gerados pela base $\{\varepsilon^i\,(x) \wedge \varepsilon^j\,(x)\}$, é chamado de **espaço de 2-formas** - $\bigwedge^2\, E^*$. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$(a\; f) \wedge (b\; g)\;,$$

onde $(\mathbf{a},\; \mathbf{b}) \in \mathbf{R}$ e $(\mathbf{f},\; \mathbf{g}) \in E^*$, e tem a seguinte dimensão:

$$dim \bigwedge^2\, E^* \;=\; C_n^2 \;=\; \frac{n\;(n-1)}{2}\;.$$

Observe-se que no espaço definido acima é possível construir uma Álgebra Exterior de ordem dois, que é o dual daquela do $\bigwedge^2\, E$.

Mudança de Base no Espaço $\bigwedge^2\, E^*$. Neste item, vamos ver como se transformam os componentes estritos de uma $2 - forma$ numa mudança de base. Segundo a expressão (3.1.1.5b), toda $2 - forma$ é um tensor covariante antissimétrico de segunda ordem e, portanto, segundo a expressão (2.1.1.4), teremos:

$$\bar{f}_{\bar{m}\bar{n}} \;=\; -\; \bar{f}_{\bar{n}\bar{m}} \;=\; s^i_{\bar{m}}\; s^j_{\bar{n}}\; f_{ij}\;.$$

Agora, vamos decompor essa expressão da seguinte maneira:

$$\bar{f}_{\bar{m}\bar{n}} \;=\; \sum_{i\,<\,j} s^i_{\bar{m}}\; s^j_{\bar{n}}\; f_{ij} \;+\; \sum_{i\,>\,j} s^i_{\bar{m}}\; s^j_{\bar{n}}\; f_{ij}\;.$$

Trocando-se o **i** por **j** no segundo somatório e observando-se que o tensor **f** é antissimétrico $(f_{ij} \;=\; -\; f_{ji})$, teremos:

$$\bar{f}_{\bar{m}\bar{n}} \ = \ \sum_{i\ <\ j} s^i_{\bar{m}}\ s^j_{\bar{n}}\ f_{ij} \ + \ \sum_{j\ >\ i} s^j_{\bar{m}}\ s^i_{\bar{n}}\ f_{ji} \ = \ \sum_{i\ <\ j} (s^i_{\bar{m}}\ s^j_{\bar{n}} \ - \ s^i_{\bar{n}}\ s^j_{\bar{m}})\ f_{ij}\ .$$

Usando-se a Definição (2.1.3.3), resultará:

$$[\bar{f}_{\bar{m}\bar{n}}]_{\bar{m}\ <\ \bar{n}} \ = \ \sum_{i\ <\ j} \begin{bmatrix} s^i_{\bar{m}} & s^i_{\bar{n}} \\ s^j_{\bar{m}} & s^j_{\bar{n}} \end{bmatrix} f_{ij}\ . \qquad (3.1.1.6)$$

Exercícios (3.1.1)

EX.3.1.1.1 Encontre a **identidade de Jacobi** envolvendo $2 - vetores$.

Solução

Consideremos o seguinte determinante:

$$\Delta \ = \ \begin{bmatrix} t^{ij} & t^{ik} & t^{im} \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix} ,$$

onde a segunda e terceira linhas são formadas pelos componentes de vetores arbitrários (x, y) e na primeira linha estão os componentes de um $2 - vetor$ $t^{ij} \ = \ x^i\ y^j \ - \ x^j\ y^i$. Desse modo, o determinante acima é escrito na forma:

$$\Delta \ = \ \begin{bmatrix} x^i y^j - x^j y^i & x^i y^k - x^k y^i & x^i y^m - x^m y^i \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix} ,$$

ou:

$$\Delta \ = \ \begin{bmatrix} x^i y^j & x^i y^k & x^i y^m \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix} \ - \ \begin{bmatrix} x^j y^i & x^k y^i & x^m y^i \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix} .$$

Como as duas primeiras linhas desses determinantes são múltiplas, eles são nulos. Portanto:

$$\Delta \ = \ \begin{bmatrix} t^{ij} & t^{ik} & t^{im} \\ x^j & x^k & x^m \\ y^j & y^k & y^m \end{bmatrix} \ = \ 0\ .$$

Desenvolvendo-se esse determinante pela **regra de Laplace**, teremos:

$$\Delta \ = \ t^{ij} \begin{bmatrix} x^k & x^m \\ y^k & y^m \end{bmatrix} \ + \ t^{ik} \begin{bmatrix} x^m & x^j \\ y^m & y^j \end{bmatrix} \ + t^{im} \begin{bmatrix} x^j & x^k \\ y^j & y^k \end{bmatrix} \ = \ 0\ .$$

Usando-se a expressão (3.1.1.2b), teremos:

$$\Delta \; = \; t^{ik} \, t^{km} \; + \; t^{ik} \, t^{mj} \; + \; t^{im} \, t^{jk} \; = \; 0 \; ,$$

expressão essa que representa a **identidade de Jacobi**. Esse exercício nos mostra que a condição necessária para que um tensor antissimétrico de segunda ordem seja um $2-vetor$ é que seus componentes satisfaçam a **identidade de Jacobi**.

3.1.2 Álgebra Exterior de ordem p

Definição 3.1.2.1 - Produto Exterior de p vetores. Sejam **p** vetores $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, ..., $x_{(p)}$ pertencentes ao espaço vetorial **E** de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**. Denomina-se **produto exterior** desses **p** vetores o tensor (**P**) contravariante de ordem **p** completamente antissimétrico denotado por $x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)}$ denominado $p-vetor$, e definido por:

$$P \; = \; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \; \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p} \; x_{(a_1)} \otimes x_{(a_2)} \otimes ... \otimes x_{(a_p)} \; =$$

$$= \; \varepsilon^{a_1 a_2 ... a_p} \; x_{(a_1)} \otimes x_{(a_2)} \otimes ... \otimes x_{(a_p)} \; , \qquad (3.1.2.1a)$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$1. \; (ax_{(1)} + bx_{(2)}) \wedge x_{(3)} \wedge ... \wedge x_{(p)} \; =$$

$$= \; a(x_{(1)} \wedge x_{(3)} \wedge ... \wedge x_{(p)}) \; + \; b(x_{(2)} \wedge x_{(3)} \wedge ... \wedge x_{(p)}) \; ; \qquad (3.1.2.1b)$$

2. $x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = 0$, se para qualquer par i $\neq j$, $x_{(i)} \; = \; x_{(j)}$; (3.1.2.1c)

3. $x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)}$, troca de sinal se qualquer $x_{(i)}$ trocar de sinal, (3.1.2.1d)

onde $(x_{(1)}, x_{(2)}, ... x_{(p)}) \in$ **E** e (**a**, **b**) $\in$ **R**.

Exemplo. Consideremos o caso do $3-vetor$. Então, segundo a expressão (3.1.2.1a), teremos:

$$x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge x_{(3)} = \; \varepsilon^{ijk} \; x_{(i)} \otimes x_{(j)} \otimes x_{(k)} \; , \qquad \text{com i, j, k} = 1, 2, 3.$$

Efetuando-se o somatório indicado pelos índices repetidos e usando-se as expressões (2.1.3.1a,b,c), obteremos:

$$x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge x_{(3)} = \; \varepsilon^{1jk} \; x_{(1)} \otimes x_{(j)} \otimes x_{(k)} \; + \; \varepsilon^{2jk} \; x_{(2)} \otimes x_{(j)} \otimes x_{(k)} \; + \varepsilon^{3jk} \; x_{(3)} \otimes x_{(j)} \otimes x_{(k)} \; =$$

$$= \varepsilon^{12k}\ x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(k)}\ +\ \varepsilon^{13k}\ x_{(1)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(k)}\ +$$

$$+\ \varepsilon^{21k}\ x_{(2)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(k)}\ +\ \varepsilon^{23k}\ x_{(2)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(k)}\ +$$

$$+\ \varepsilon^{32k}\ x_{(3)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(k)}\ +\ \varepsilon^{31k}\ x_{(3)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(k)}\ =$$

$$= \varepsilon^{123}\ x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}\ +\ \varepsilon^{132}\ x_{(1)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(2)}\ +\ \varepsilon^{213}\ x_{(2)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(3)}\ +$$

$$+\ \varepsilon^{231}\ x_{(2)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(1)}\ +\ \varepsilon^{321}\ x_{(3)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(1)}\ +\ \varepsilon^{312}\ x_{(3)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)}\ =$$

$$= x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}\ -\ x_{(1)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(2)}\ -\ x_{(2)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(3)}\ +$$

$$+\ x_{(2)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(1)}\ -\ x_{(3)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(1)}\ +\ x_{(3)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)}\ ,$$

ou:

$$x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge x_{(3)}\ =\ x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}\ +\ x_{(3)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)}\ +\ x_{(2)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(1)}\ -$$

$$-\ x_{(2)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(3)}\ -\ x_{(1)} \otimes x_{(3)} \otimes x_{(2)}\ -\ x_{(3)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(1)}\ .$$

Componentes Gerais e Estritos de um p-vetor. Seja $\{e_{b_i}\}$ a base de **E** e $(x^{b_j}_{(a_j)})$ os componentes de $(x_{(a_k)})$ nessa base, com **i**, **j**, **k** = 1, 2, ... , p. Então, segundo a expressão (1.1.1.1a), o produto exterior dado pela expressão (3.1.2.1a) será escrito na forma:

$$P\ =\ x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} =\ \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p}\ (x^{b_1}_{(a_1)}\ e_{b_1}) \otimes (x^{b_2}_{(a_2)}\ e_{b_2}) \otimes ... \otimes (x^{b_p}_{(a_p)}\ e_{b_p})\ =$$

$$=\ \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p}\ x^{b_1}_{(a_1)}\ x^{b_2}_{(a_2)}\ ...\ x^{b_p}_{(a_p)}\ e_{b_1} \otimes e_{b_2} \otimes ... \otimes e_{b_p}\ ,$$

$$P\ =\ x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)}\ =\ P^{b_1 b_2 ... b_p}\ e_{b_1} \otimes e_{b_2} \otimes ... \otimes e_{b_p}\ , \qquad (3.1.2.2a)$$

onde:

$$P^{b_1 b_2 ... b_p}\ =\ \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p}\ x^{b_1}_{(a_1)}\ x^{b_2}_{(a_2)}\ ...\ x^{b_p}_{(a_p)}\ , \qquad (3.1.2.2b)$$

são os **componentes gerais** de **P**. Porém, de acordo com a Definição (2.1.3.1) de $\delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p}$, podemos escrever que:

$$x^{b_1}_{(a_1)}\ x^{b_2}_{(a_2)}\ ...\ x^{b_p}_{(a_p)}\ =\ \delta^{b_1 b_2 ... b_p}_{i_1 i_2 ... i_p}\ x^{i_1}_{(a_1)}\ x^{i_2}_{(a_2)}\ ...\ x^{i_p}_{(a_p)}. \qquad (i_1\ <\ i_2\ <\ ...\ <\ i_p)\ .$$

Desse modo, a expressão (3.1.2.2b) tomará a seguinte forma:

$$P^{b_1 b_2 ... b_p} \;=\; \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p} \;\; \delta^{b_1 b_2 ... b_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \; x^{i_1}_{(a_1)} \; x^{i_2}_{(a_2)} \; ... \; x^{i_p}_{(a_p)} \;=\; \delta^{b_1 b_2 ... b_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \; (\delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p} \; x^{i_1}_{(a_1)} \; x^{i_2}_{(a_2)} \; ... \; x^{i_p}_{(a_p)}) \; ,$$

$$P^{b_1 b_2 ... b_p} \;=\; \delta^{b_1 b_2 ... b_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \; P^{i_1 i_2 ... i_p} \; , \qquad (3.1.2.2c)$$

onde:

$$P^{i_1 i_2 ... i_p} \;=\; \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{12...p} \; x^{i_1}_{(a_1)} \; x^{i_2}_{(a_2)} \; ... \; x^{i_p}_{(a_p)}, \quad (\mathrm{i}_1 \;<\; i_2 \;<\; ... \;<\; i_p) \; , \quad (3.1.2.2d)$$

são os **componentes estritos** de **P**.

Levando-se a expressão (3.1.2.2c) na expressão (3.1.2.2a), teremos:

$$P \;=\; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \; P^{i_1 i_2 ... i_p} \; \delta^{b_1 b_2 ... b_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \; e_{b_1} \otimes e_{b_2} \otimes ... \otimes e_{b_p} \; .$$

Aplicando-se a expressão (3.1.2.1a) aos vetores da base, a expressão acima tomará o seguinte aspecto:

$$P \;=\; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \; P^{i_1 i_2 ... i_p} \; e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p} \; . \qquad (3.1.2.2e)$$

Escrevendo-se os componentes estritos de **P**, dados pela expressão (3.1.4.2d), em termos de determinante (expressão (2.1.3.2)), a expressão acima resultará em:

$$P \;=\; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \begin{bmatrix} x^{i_1}_{(1)} & x^{i_2}_{(1)} & ... & x^{i_p}_{(1)} \\ x^{i_1}_{(2)} & x^{i_2}_{(2)} & ... & x^{i_p}_{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^{i_1}_{(p)} & x^{i_p}_{(p)} & ... & x^{i_p}_{(p)} \end{bmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p} \; , \qquad (3.1.2.2f)$$

com $i_1 \;<\; i_2 \;<\; ... \;<\; i_p$. Observe-se que se não for considerada esta restrição entre os índices **i**, a expressão (3.1.2.2f) apresentará a seguinte forma:

$$P \;=\; x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(p)} = \; \tfrac{1}{p!} \begin{bmatrix} x^{i_1}_{(1)} & x^{i_2}_{(1)} & ... & x^{i_p}_{(1)} \\ x^{i_1}_{(2)} & x^{i_2}_{(2)} & ... & x^{i_p}_{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^{i_1}_{(p)} & x^{i_p}_{(p)} & ... & x^{i_p}_{(p)} \end{bmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p} \; . \qquad (3.1.2.2g)$$

Definição 3.1.2.2 - Espaço de p-vetores. Seja **E** um espaço vetorial de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**, e de base $\{e_i\}$. O subespaço de **p** $(p \leq n)$ réplicas de **E** ($\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \otimes ... \otimes \mathbf{E} = \otimes^p \mathbf{E}$) dos tensores (**P**) contravariantes completamente antissimétricos de ordem **p** gerados pela base ($\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}\}$, $i_1 \;<\; i_2 \;<\; ... \;<\; i_p$) é chamado de **espaço de p-vetores** - $\bigwedge^p$ **E**. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$a_{(1)} \; x_{(1)} \wedge a_{(2)} \; x_{(2)} \wedge ... \wedge a_{(p)} \; x_{(p)} \; ,$$

onde $(\mathbf{a}_{(1)}, \mathbf{a}_{(2)}, ..., \mathbf{a}_{(p)}) \in \mathbf{R}$ e $(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, ..., \mathbf{x}_{(p)}) \in \mathbf{E}$, e tem a seguinte dimensão:

$$dim \bigwedge^p E = C_n^p = \frac{n!}{p!\ (n-p)!} .$$

Definição 3.1.2.3 - Espaço de n-vetores. Seja **E** um espaço vetorial de dimensão **n**, definido sobre o corpo **R**, e de base $\{e_i\}$. Por sua vez, o subespaço de **n** réplicas de **E** ($\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \otimes ... \otimes \mathbf{E} = \otimes^n \mathbf{E}$) dos tensores (**P**) contravariantes completamente antissimétricos de ordem **n** gerados pela base $(\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_n}\},\ i_1 < i_2 < ... < i_n)$ é chamado de **espaço de n-vetores** - $\bigwedge^n$ **E**. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$P = x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(n)} = P^{i_1 i_2 ... i_n}\ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_n} . \qquad (3.1.2.3a)$$

Para esse tipo particular de espaço, tem-se:

$$dim \bigwedge^n E = C_n^n = 1 .$$

Em vista disso, esse tipo de tensor tem apenas um componente, obtido pela expressão (3.1.2.2f), fazendo-se $p = n$:

$$P = x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(n)} = \begin{bmatrix} x_{(1)}^{i_1} & x_{(1)}^{i_2} & ... & x_{(1)}^{i_n} \\ x_{(2)}^{i_1} & x_{(2)}^{i_2} & ... & x_{(2)}^{i_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{(p)}^{i_1} & x_{(1)}^{i_p} & ... & x_{(p)}^{i_n} \end{bmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_n} , \qquad (3.1.2.3b)$$

com $i_1 < i_2 < ... < i_n$. Observe-se que, se esta restrição não for considerada, a expressão (3.1.2.3b) tomará o seguinte aspecto:

$$P = x_{(1)} \wedge x_{(2)} \wedge ... \wedge x_{(n)} = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} x_{(1)}^{i_1} & x_{(1)}^{i_2} & ... & x_{(1)}^{i_n} \\ x_{(2)}^{i_1} & x_{(2)}^{i_2} & ... & x_{(2)}^{i_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{(p)}^{i_1} & x_{(1)}^{i_p} & ... & x_{(p)}^{i_n} \end{bmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_n} , \qquad (3.1.2.3c)$$

Exemplo. No caso em que $n = 3$, tem-se:

$$x \wedge y \wedge z = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{bmatrix} i \wedge j \wedge k . \qquad (3.1.2.3d)$$

Mudança de Base no Espaço $\bigwedge^p$ E. Neste item, vamos ver como se transformam os componentes estritos de um p-vetor numa mudança de base. Segundo a expressão (3.1.2.2a), todo p-vetor é um tensor contravariante completamente antissimétrico de ordem **p** e, portanto, segundo a expresão (2.1.1.4), teremos:

$$\bar{P}^{\bar{b}_1 \bar{b}_2 ... \bar{b}_p} = s^{\bar{b}_1}_{a_1} \, s^{\bar{b}_2}_{a_2} \, ... \, s^{\bar{b}_p}_{a_p} \, P^{a_1 a_2 ... a_p} \, .$$

Usando-se os componentes estritos do tensor **P** dados pela expressão (3.1.2.2d), teremos:

$$\bar{P}^{\bar{j}_1 \bar{j}_2 ... \bar{j}_p} = s^{\bar{j}_1}_{a_1} \, s^{\bar{j}_2}_{a_2} \, ... \, s^{\bar{j}_p}_{a_p} \, \delta^{a_1 a_2 ... a_p}_{i_1 i_2 ... i_p} \, P^{a_1 a_2 ... a_p} \, , \qquad (3.1.2.4a)$$

com $\bar{j}_1 < \bar{j}_2 < ... < \bar{j}_p$ e $i_1 < i_2 < ... < i_p$.

Em termos de determinante (expressão (2.1.3.2)), a expressão acima será escrita na forma:

$$\bar{P}^{\bar{j}_1 \bar{j}_2 ... \bar{j}_p} = \begin{bmatrix} s^{\bar{j}_1}_{i_1} & s^{\bar{j}_2}_{i_1} & ... & s^{\bar{j}_p}_{i_1} \\ s^{\bar{j}_1}_{i_2} & s^{\bar{j}_2}_{i_2} & ... & s^{\bar{j}_p}_{i_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ s^{\bar{j}_1}_{i_p} & s^{\bar{j}_2}_{i_p} & ... & s^{\bar{j}_p}_{i_p} \end{bmatrix} P^{i_1 i_2 ... i_p} \, , \qquad (3.1.2.4b)$$

com $\bar{j}_1 < \bar{j}_2 < ... < \bar{j}_p$ e $i_1 < i_2 < ... < i_p$.

Definição 3.1.2.4 - Produto Exterior de q formas. Sejam **q** formas $\mathbf{f}^{(1)}$, $\mathbf{f}^{(2)}$, ..., $\mathbf{f}^{(q)}$ pertencentes ao espaço vetorial $\mathbf{E}^*$, dual de **E**. Denomina-se **produto exterior** dessas **q** formas o tensor (**Q**) covariante completamente antissimétrico de ordem **q** denotado por $\mathbf{f}^{(1)} \wedge \mathbf{f}^{(2)} \wedge ... \wedge \mathbf{f}^{(q)}$ denominado **q-forma**, e definido por:

$$Q = f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \, f^{(a_1)} \otimes f^{(a_2)} \otimes ... \otimes f^{(a_q)} =$$

$$= \varepsilon_{a_1 a_2 ... a_q} \, f^{(a_1)} \otimes f^{(a_2)} \otimes ... \otimes f^{(a_q)} \, , \qquad (3.1.2.5)$$

e que satisfaz as mesmas propriedades da Definição 3.1.2.1.

Componentes Gerais e Estritos de uma q-forma. Seja $\{\varepsilon^{b_i} \, (x)\}$ a base de E^* e $(f^{(a_j)}_{b_j})$ os componentes de $(f^{(a_k)})$ nessa base. Então, segundo a expressão (2.1.2.5a), o produto exterior dado pela expressão (3.1.2.5) será escrito na forma:

$$Q = f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} =$$

$$= \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \, (f^{(a_1)}_{b_1} \, \varepsilon^{b_1} \, (x)) \otimes (f^{(a_2)}_{b_2} \, \varepsilon^{b_2}) \, (x)) \otimes ... \otimes (f^{(a_q)}_{b_q} \, \varepsilon^{b_q} \, (x)) =$$

$$= \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \, f^{(a_1)}_{b_1} \, f^{(a_2)}_{b_2} \, ... \, f^{(a_p)}_{b_q} \, \varepsilon^{b_1} \otimes \varepsilon^{b_2} \otimes ... \otimes \varepsilon^{b_q} \, ,$$

$$Q = f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = Q_{b_1 b_2 ... b_q} \, \varepsilon^{b_1} \otimes \varepsilon^{b_2} \otimes ... \otimes \varepsilon^{b_q} \, , \qquad (3.1.2.6a)$$

onde:

$$Q_{b_1 b_2 ... b_q} \;=\; \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \; f^{(a_1)}_{b_1} \; f^{(a_2)}_{b_2} \; ... \; f^{(a_q)}_{b_q} \;, \qquad (3.1.2.6b)$$

são os **componentes gerais** de **Q**. Porém, de acordo com a Definição (2.1.3.1) de $\delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q}$, podemos escrever que:

$$f^{(a_1)}_{b_1} \; f^{(a_2)}_{b_2} \; ... \; f^{(a_q)}_{b_q} \;=\; \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \; f^{(a_1)}_{i_1} \; f^{(a_2)}_{i_2} \; ... \; f^{(a_q)}_{i_q}. \qquad (i_1 \;<\; i_2 \;<\; ... \;<\; i_q) \;.$$

Desse modo, a expressão (3.1.2.6b) tomará a seguinte forma:

$$Q_{b_1 b_2 ... b_q} \;=\; \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \; \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \; f^{(a_1)}_{i_1} \; f^{(a_2)}_{i_2} \; ... \; f^{(a_q)}_{i_q} \;=\; \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \; (\delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \; f^{(a_1)}_{i_1} \; f^{(a_2)}_{i_2} \; ... \; f^{(a_q)}_{i_q}) \;,$$

$$Q_{b_1 b_2 ... b_q} \;=\; \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \; Q_{i_1 i_2 ... i_q} \;, \qquad (3.1.2.6c)$$

onde:

$$Q_{i_1 i_2 ... i_q} \;=\; \delta^{12...q}_{a_1 a_2 ... a_q} \; f^{(a_1)}_{i_1} \; f^{(a_2)}_{i_2} \; ... \; f^{(a_q)}_{i_q}, \quad (\mathrm{i}_1 \;<\; i_2 \;<\; ... \;<\; i_q) \;, \quad (3.1.2.6d)$$

são os **componentes estritos** de **Q**.

Levando-se a expressão (3.1.2.6c) na expressão (3.1.2.6a), teremos:

$$Q \;=\; f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \; Q_{i_1 i_2 ... i_q} \; \delta^{i_1 i_2 ... i_q}_{b_1 b_2 ... b_q} \; \varepsilon^{b_1} \otimes \varepsilon^{b_2} \otimes ... \otimes \varepsilon^{b_q} \;.$$

Aplicando-se a expressão (3.1.2.5) aos vetores da base, a expressão acima tomará o seguinte aspecto:

$$Q \;=\; f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \; Q_{i_1 i_2 ... i_q} \; \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_q} \;. \qquad (3.1.2.6e)$$

Escrevendo-se os componentes estritos de **Q**, dados pela expressão (3.1.4.6d), em termos de determinante (expressão (2.1.3.2)), a expressão acima resultará em:

$$Q \;=\; f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \begin{bmatrix} f^{(1)}_{i_1} & f^{(1)}_{i_2} & ... & f^{(1)}_{i_q} \\ f^{(2)}_{i_1} & f^{(2)}_{i_2} & ... & f^{(2)}_{i_q} \\ ... & ... & ... & ... \\ f^{(q)}_{i_1} & f^{(q)}_{i_2} & ... & f^{(q)}_{i_q} \end{bmatrix} \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_q} \;, \qquad (3.1.2.6f)$$

com $i_1 \;<\; i_2 \;<\; ... \;<\; i_q$. Observe-se que, se essa restrição não for considerada, a expressão (3.1.2.6f) terá o seguinte aspecto:

$$Q \;=\; f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(q)} = \; \frac{1}{q!} \begin{bmatrix} f^{(1)}_{i_1} & f^{(1)}_{i_2} & ... & f^{(1)}_{i_q} \\ f^{(2)}_{i_1} & f^{(2)}_{i_2} & ... & f^{(2)}_{i_q} \\ ... & ... & ... & ... \\ f^{(q)}_{i_1} & f^{(q)}_{i_2} & ... & f^{(q)}_{i_q} \end{bmatrix} \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_q} \;. \qquad (3.1.2.6g)$$

Definição 3.1.2.5 - Espaço de q-formas. Seja $\mathbf{E}^*$ o espaço vetorial dual de $\mathbf{E}$, e de base $\{\varepsilon^i\ (x)\}$. O subespaço de $\mathbf{q}$ ($q \leq n$) réplicas de E^* ($\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^* \otimes ... \otimes \mathbf{E}^* = \otimes^q\ \mathbf{E}^*$) dos tensores ($\mathbf{Q}$) covariantes completamente antissimétricos de ordem $\mathbf{q}$ gerados pela base ($\{\varepsilon^{i_1}\ (x) \wedge \varepsilon^{i_2}\ (x) \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_q}\}$, $i_1\ <\ i_2\ <\ ...\ <\ i_q$) é chamado de **espaço de q-formas** - $\bigwedge^q\ E^*$. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$a^{(1)}\ f^{(1)} \wedge a^{(2)}\ f^{(2)} \wedge ... \wedge a^{(q)}\ f^{(q)}\ ,$$

onde ($\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$, ..., $\mathbf{a}^{(q)}$) $\in \mathbf{R}$ e ($\mathbf{f}^{(1)}$, $\mathbf{f}^{(2)}$, ..., $\mathbf{f}^{(q)}$) $\in \mathbf{E}^*$, e tem a seguinte dimensão:

$$dim \bigwedge^q\ E^*\ =\ C_n^q\ =\ \frac{n!}{q!\ (n-q)!}\ .$$

Definição 3.1.2.6 - Espaço de n-formas. Seja $\mathbf{E}^*$ um espaço vetorial dual de $\mathbf{E}$, e de base $\{\varepsilon^i\ (x)\}$. O subespaço de $\mathbf{n}$ de réplicas de E^* ($\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^* \otimes ... \otimes \mathbf{E}^* = \otimes^n\ \mathbf{E}^*$) dos tensores ($\mathbf{Q}$) covariantes completamente antissimétricos de ordem $\mathbf{n}$ gerados pela seguinte base, isto é: ($\{\varepsilon^{i_1}\ (x) \wedge \varepsilon^{i_2}\ (x) \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_n}\}$, $i_1\ <\ i_2\ <\ ...\ <\ i_n$), é chamado de **espaço de n-formas** - $\bigwedge^n\ E^*$. Este espaço consiste de elementos do tipo:

$$Q\ =\ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(n)} =\ Q_{i_1 i_2 ... i_n}\ \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_n}\ . \qquad (3.1.2.7a)$$

Para esse tipo particular de espaço, tem-se:

$$dim \bigwedge^n\ E^*\ =\ C_n^n\ =\ 1\ .$$

Em vista disso, esse tipo de tensor tem apenas um componente, obtido pela expressão (3.1.2.6f), fazendo-se $q\ =\ n$:

$$Q\ =\ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(n)} = \begin{bmatrix} f_{i_1}^{(1)} & f_{i_2}^{(1)} & ... & f_{i_n}^{(1)} \\ f_{i_1}^{(2)} & f_{i_2}^{(2)} & ... & f_{i_n}^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{i_1}^{(n)} & f_{i_2}^{(n)} & ... & f_{i_n}^{(n)} \end{bmatrix} \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_n}\ , \qquad (3.1.2.7b)$$

com $i_1\ <\ i_2\ <\ ...\ <\ i_n$. Registre-se que com a não consideração desta restrição entre os $\mathbf{i}$, a expressão (3.1.2.7b) tomará a seguinte forma:

$$Q\ =\ f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge ... \wedge f^{(n)} = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} f_{i_1}^{(1)} & f_{i_2}^{(1)} & ... & f_{i_n}^{(1)} \\ f_{i_1}^{(2)} & f_{i_2}^{(2)} & ... & f_{i_n}^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{i_1}^{(n)} & f_{i_2}^{(n)} & ... & f_{i_n}^{(n)} \end{bmatrix} \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_n}\ , \qquad (3.1.2.7c)$$

Mudança de Base no Espaço $\bigwedge^q\ E^*$. Neste item, vamos ver como se transformam os componentes estritos de uma q-forma numa mudança de base. Segundo a expressão (3.1.2.5), toda q-forma é um tensor covariante completamente antissimétrico de ordem $\mathbf{q}$ e, portanto, segundo a expressão (2.1.1.4), teremos:

$$\bar{Q}_{\bar{b}_1\bar{b}_2...\bar{b}_q} = s^{a_1}_{\bar{b}_1} \, s^{a_2}_{\bar{b}_2} \, ... \, s^{a_p}_{\bar{b}_p} \, Q_{a_1a_2...a_p} \; .$$

Usando-se os componentes estritos do tensor **Q** dados pela expressão (3.1.4.6d), teremos:

$$\bar{Q}_{\bar{j}_1\bar{j}_2...\bar{j}_q} = s^{a_1}_{\bar{j}_1} \, s^{a_2}_{\bar{j}_2} \, ... \, s^{a_p}_{\bar{j}_p} \, \delta^{i_1i_2...i_p}_{a_1a_2...a_q} \, Q_{a_1a_2...a_q} \; , \qquad (3.1.2.7c)$$

com $\bar{j}_1 \; < \; \bar{j}_2 \; < \; ... \; < \; \bar{j}_q \;\; e \;\; i_1 \; < \; i_2 \; < \; ... \; < \; i_q$.

Em termos de determinante (expressão (2.1.3.2)), a expressão acima será escrita na forma:

$$\bar{Q}_{\bar{j}_1\bar{j}_2...\bar{j}_q} = \begin{bmatrix} s^{i_1}_{\bar{j}_1} & s^{i_1}_{\bar{j}_2} & ... & s^{i_1}_{\bar{j}_q} \\ s^{i_2}_{\bar{j}_1} & s^{i_2}_{\bar{j}_2} & ... & s^{i_2}_{\bar{j}_q} \\ ... & ... & ... & ... \\ s^{i_q}_{\bar{j}_1} & s^{i_q}_{\bar{j}_2} & ... & s^{i_q}_{\bar{j}_q} \end{bmatrix} Q_{i_1i_2...i_q} \; , \qquad (3.1.2.7d)$$

com $\bar{j}_1 \; < \; \bar{j}_2 \; < \; ... \; < \; \bar{j}_q \;\; e \;\; i_1 \; < \; i_2 \; < \; ... \; < \; i_q$.

3.1.3 Produto Exterior entre p-vetores (formas)

Definição 3.1.3.1 - Produto Exterior de dois p-vetores (formas). Sejam $p_1 - vetor \; (forma) \; \alpha$ e $p_2 - vetor \; (forma) \; \beta$ dois $p - vetores \; (formas)$. Por definição, chama-se de **produto exterior** entre eles ao $(p_1 \; + \; p_2) - vetor$ (forma) $\alpha \wedge \beta$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\alpha \wedge \beta \; = \; 0, \qquad se : p_1 \; + \; p_2 \; > \; n$; (3.1.3.1a)
2. $\alpha \wedge (\beta \; + \; \gamma) \; = \; \alpha \wedge \beta \; + \alpha \wedge \gamma; \quad (\alpha \; + \; \beta) \wedge \gamma \; = \; \alpha \wedge \gamma \; + \beta \wedge \gamma$; (3.1.3.1b)
3. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \; = \; (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$; (3.1.3.1c)
4. $\alpha \wedge \beta \; = \; (- \, 1)^{p_1p_2} \; \beta \wedge \alpha$. (3.1.3.1d)

Ilustremos essa propriedade 4, usando-se as expressões (3.1.1.1e) e (3.1.3.1c). Com efeito:

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge \beta \; = \; - \; (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta \wedge \alpha_3) \; =$$

$$= \; (- \, 1)^2 \; (\alpha_1 \wedge \beta \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \; = \; (- \, 1)^3 \; \beta \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \; .$$

Usando-se o resultado anterior, teremos:

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge (\beta_1 \wedge \beta_2) \; = \; (- \, 1)^3 \; \beta_1 \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge \beta_2 \; =$$

$$= \; (- \, 1)^3 \; (- \, 1)^3 (\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \; = \; (- \, 1)^{3.2} \; (\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \; .$$

Definição 3.1.3.2 - Determinante. Seja **A** uma transformação linear de um espaço vetorial **E** de dimensão **n** sobre si mesmo ($A: \ E \rightarrow E$). Seja ainda o espaço vetorial $\bigwedge^n$ **E**. Define-se **Determinante de A** - $det\ A \ = \ \mid A \mid$ - a seguinte expressão:

$$A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\ \alpha_n \ = \ \mid A \mid (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \ , \qquad (3.1.3.2)$$

onde $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \in \bigwedge^n$ **E**. Observe-se que essa definição é completamente independente da representação matricial de **A**.

$\boxed{\textbf{Exercícios (3.1.3)}}$

$\boxed{\text{EX.3.1.3.1}}$ Use a expressão (3.1.3.2) para demonstrar que: $\mid AB \mid \ = \ \mid A \mid . \mid B \mid$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Partindo-se da expressão (3.1.3.2) e usando-se a definição de produto de operadores, teremos:

$$\mid AB \mid (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \ = \ ((AB)\alpha_1) \wedge ... \wedge ((AB)\ \alpha_n) \ = \ A(B\alpha_1) \wedge ... \wedge A(B\alpha_n) \ =$$

$$= \ \mid A \mid (B\ \alpha_1 \wedge ... \wedge B\ \alpha_n) \ = \ \mid A \mid . \mid B \mid (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \ ,$$

portanto:

$$\mid AB \mid \ = \ \mid A \mid . \mid B \mid .$$

$\boxed{\text{EX.3.1.3.2}}$ Relacione a expressão (3.1.3.2) com o determinante de uma matriz (a_{ij}) $n \times n$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Seja $\{e_i\}$ a base de **E**. Então, segundo a expressão (2.1.4.2), teremos:

$$A\ e_i \ = \ e_j\ a_i^j \ .$$

Por outro lado, usando-se a expressão (3.1.2.2f), virá:

$$Ae_1 \wedge ... \wedge Ae_n \ = \ \mid a_i^j \mid (e_1 \wedge ... \wedge e_n), \qquad (\mid a_i^j \mid \ = \ \mid A \mid) \ ,$$

resultado que coincide com a expressão (3.1.3.2).

3.1.4 Dualidade

Definição 3.1.4.1 - Operação Dual ($\star$) (Hodge). Sejam os espaços vetoriais $\bigwedge^p$ **E** e $\bigwedge^{n-p}$ **E**, de bases $\{ \ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p} \ \}$ e $\{ \ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n} \ \}$, respectivamente. Define-se a operação "$\star$", denominada **operação dual (Hodge)**, entre esses espaços a transformação linear:

$$\star : \bigwedge^p E \quad \rightarrow \quad \bigwedge^{n-p} E \ , \qquad (\text{p} = 0, 1, 2, ..., \text{n})$$

$$\star\, [e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}] \ = \ \frac{\sqrt{|\ g'\ |}}{(n\ -\ p)!}\ \varepsilon^{i_{p+1} i_{p+2} ... i_n}_{i_1 i_2 ... i_p}\ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n}\ , \qquad (3.1.4.1)$$

onde $|\ g'\ |$ é o módulo de g' = det(g^{ij}). Observe-se que, como $\text{C}^p_n \ = \ C^{n-p}_n$, os espaços $\bigwedge^p$ **E** e $\bigwedge^{n-p}$ **E** têm então a mesma dimensão, o que mostra que os mesmos são isomorfos. Observe-se, ainda, que, embora tenhamos escolhido uma base para definir a operação ($\star$), ela é realmente independente de qualquer escolha de base.

Componentes do Dual de um p-vetor. Seja α um $p-vetor$ dado pela expressão (3.1.2.2e,g):

$$\alpha \ = \ \frac{1}{p!}\ \alpha^{i_1 i_2 ... i_p}\ e_{i_1} \wedge e_{i_2}\ ... \wedge e_{i_p}\ .$$

Usando-se a Definição 3.1.4.1, virá:

$$\star\, \alpha \ = \ \star\,[\frac{1}{p!}\ \alpha^{i_1 i_2 ... i_p}\ e_{i_1} \wedge e_{i_2}\ ... \wedge e_{i_p}] \ = \ \frac{1}{p!}\ [\frac{\sqrt{|\ g'\ |}}{(n\ -\ p)!}\ \varepsilon^{i_{p+1} i_{p+2} ... i_n}_{i_1 i_2 ... i_p}\ \alpha^{i_1 i_2 ... i_p}\ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n}]$$
$$.$$

Usando-se as expressões (2.1.3.14c) e (2.1.4.1b), teremos:

$$\star\, \alpha \ = \ \frac{\sqrt{|\ g'\ |}}{(n\ -\ p)!\ p!}\ \varepsilon^{i_1 i_2 ... i_p i_{p+1} i_{p+2} ... i_n}\ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p}\ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n}\ ,$$

$$\star\, \alpha \ = \ \frac{1}{(n\ -\ p)!}\ [\frac{1}{p!}\ \eta^{i_1 i_2 ... i_p i_{p+1} i_{p+2} ... i_n}\ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p}]\ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n}\ . \qquad (3.1.4.2a)$$

Considerando-se que $\star\, \alpha \in \bigwedge^{n-p}$ **E**, as expressões (3.1.2.2e) e (3.1.2.2g) permitem escrever que:

$$\star\, \alpha \ = \ \frac{1}{(n\ -\ p)!}\ (\star\, \alpha)^{i_{p+1} i_{p+2} ... i_n}\ e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge ... \wedge e_{i_n}\ . \qquad (3.1.4.2b).$$

Portanto, comparando-se as expressões (3.1.4.2a,b) e usando-se a expressão (3.1.4.1b), verifica-se que os componentes de $\star\, \alpha$ são dados por:

$$(\star\, \alpha)^{i_{p+1} i_{p+2} ... i_n} \ = \ \frac{\sqrt{|\ g'\ |}}{p!}\ \varepsilon^{i_1 i_2 ... i_p i_{p+1} ... i_n}\ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p} \ = \ \frac{1}{p!}\ \eta^{i_1 i_2 ... i_p i_{p+1} ... i_n}\ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p}\ . \qquad (3.1.4.2c)$$

Observações

1. Podemos fazer um desenvolvimento equivalente ao anterior para tratar a dualidade e a operação ($\star$) para as $q-formas$. Desse modo, se ϕ for uma $q-forma$, os componentes de seu dual serão dados por:

$$(\star\, \phi)_{i_{q+1} i_{q+2} ... i_n} \ = \ \frac{\sqrt{|\ g\ |}}{q!}\ \epsilon_{i_1 i_2 ... i_q i_{q+1} ... i_n}\ \phi^{i_1 i_2 ... i_q} \ = \ \frac{1}{q!}\ \eta_{i_1 i_2 ... i_q i_{q+1} ... i_n}\ \phi^{i_1 i_2 ... i_q}\ . \qquad (3.1.4.3)$$

2. Se α e β são $p - vetores$ $(q - formas)$ e **a** e **b** são escalares, então:

$$\star\,(a\ \alpha\ +\ b\ \beta)\ =\ a\,(\star\ \alpha)\ +\ b\,(\star\ \beta)\ . \qquad (3.1.4.4)$$

Exercícios (3.1.4)

EX.3.1.4.1 Seja $e_p\ =\ e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ ...\ \wedge e_{i_p}$. Demonstre que:

$$\star\star\ e_p\ =\ (-1)^{p(n-p)\ +\ \frac{(n-s)}{2}}\ e_p\ ,$$

onde **s** é a assinatura da métrica.

Solução

Usando-se a expressão (3.1.4.1), teremos:

$$\star\star\ e_p\ =\ \frac{\sqrt{\mid g'\mid}}{(n\ -\ p)!}\ \varepsilon^{i_{p+1}i_{p+2}...i_n}_{i_1 i_2 ... i_p}\ \star\,[e_{i_{p+1}}\wedge e_{i_{p+2}}\wedge\ ...\ \wedge e_{i_n}]\ . \qquad (\mathrm{I})$$

Por outro lado, considerando-se que:

$$[e_{i_{p+1}}\wedge e_{i_{p+2}}\wedge\ ...\ \wedge e_{i_n}]\in \bigwedge\nolimits^{n-p} E\ ,$$

e usando-se novamente a expressão (3.1.4.1), verifica-se que [lembrar que: $n - (n - p)\ =\ p$]:

$$\star\,[e_{i_{p+1}}\wedge e_{i_{p+2}}\wedge\ ...\ \wedge e_{i_n}]\ =\ \frac{\sqrt{\mid g'\mid}}{p!}\ \varepsilon^{j_1 j_2 ... j_p}_{i_{p+1}i_{p+2}...i_n}\ [e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\ ...\ \wedge e_{j_p}]\ .$$

Em vista disso, a expressão (I) anterior ficará:

$$\star\star\ e_p\ =\ \frac{\mid g'\mid}{(n\ -\ p)!p!}\ \varepsilon^{i_{p+1}i_{p+2}...i_n}_{i_1 i_2 ... i_p}\ \varepsilon^{j_1 j_2 ... j_p}_{i_{p+1}i_{p+2}...i_n}\ [e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\ ...\ \wedge e_{j_p}]\ =$$

$$=\ \frac{\mid g'\mid}{(n\ -\ p)!p!}\ g_{k_1 i_1}\ g_{k_2 i_2}\ \cdots\ g_{k_p i_p}\ g_{i_{p+1}j_{p+1}}\ g_{i_{p+2}j_{p+2}}\ \cdots\ g_{i_n j_n}\ \times$$

$$\times\ \varepsilon^{i_{p+1}...i_n k_1 k_2 ... k_p}\ \varepsilon^{j_1 j_2 ... j_p j_{p+1} ... j_n}\ [e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\ ...\ \wedge e_{j_p}]\ . \qquad (\mathrm{II})$$

Considerando-se que:

$$g_{k_1 i_1}\ g_{k_2 i_2}\ \cdots\ g_{k_p i_p}\ g_{i_{p+1}j_{p+1}}\ g_{i_{p+2}j_{p+2}}\ \cdots\ g_{i_n j_n}\ \varepsilon^{i_{p+1}...i_n k_1 k_2 ... k_p}\ =\ \frac{1}{g'}\varepsilon_{j_{p+1}j_{p+2}...j_n i_1 i_2 ... i_p}\ ,$$

a expressão (II) ficará:

$$\star\star\, e_p \;=\; \frac{\mid g' \mid}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; \varepsilon^{j_1 j_2 ... j_p j_{p+1} j_{p+2} ... j_n}\; \varepsilon_{j_{p+1} j_{p+2} ... j_n i_1 i_2 ... i_p}\; [e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_p}]\; .$$

Permutando-se os índices do segundo ε, a expressão acima ficará:

$$\star\star\, e_p \;=\; \frac{\mid g' \mid}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; (-1)^{(n-p)}\; (-1)^p\; \varepsilon^{j_1 j_2 ... j_p j_{p+1} ... j_n}\; \varepsilon_{i_1 i_2 ... i_p j_{p+1} ... j_n}\; [e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_p}]\; .$$

Usando-se o resultado do Problema (2.1.4), a expressão anterior tomará a forma:

$$\star\star\, e_p \;=\; \frac{\mid g' \mid}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; (-1)^{p(n-p)}\; (n-p)!\; \varepsilon^{j_1 j_2 ... j_p}\; \varepsilon_{i_1 i_2 ... i_p}\; [e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_p}]\; .$$

Por fim, trocando-se $(j_1 j_2 ... j_p)$ por $(i_1 i_2 ... i_p)$ e usando-se ainda o resultado do Problema (2.1.4), teremos:

$$\star\star\, e_p \;=\; \frac{\mid g' \mid}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; (-1)^{p(n-p)}\; (n-p)!\; \varepsilon^{i_1 i_2 ... i_p}\; \varepsilon_{i_1 i_2 ... i_p}\; [e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}] \;=$$

$$=\; \frac{\mid g' \mid}{g'}\; \frac{1}{(n\;-\;p)!p!}\; (-1)^{p(n-p)}\; (n-p)!\; p!\; [e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}]\; .$$

Usando-se a expressão (1.1.3.15), teremos:

$$\star\star\, e_p \;=\; (-1)^{p(n-p)\;+\;\frac{(n-s)}{2}}\; e_p\; .$$

A partir dessa expressão, podemos, simbolicamente, escrever que:

$$(\star)^2 \;=\; (-1)^{p(n-p)\;+\;\frac{(n-s)}{2}} \qquad \to \qquad (\star)^{-1} \;=\; (-1)^{p(n-p)\;+\;\frac{(n-s)}{2}}\; \star\; .$$

É importante destacar que no caso do $\mathbf{R}^3$, em que $p \;=\; s \;=\; n$, temos:

$$(\star)^2 \;=\; 1 \qquad \to \qquad (\star)^{-1} \;=\; \star\; .$$

EX.3.1.4.2 Sejam (u, v, w) $1-$*vetores* pertencentes ao espaço vetorial $\mathbf{E}^3$. Demonstre que:

a. $\star\; (u \wedge v) \;=\; u \times v$;

b. $\star\; (u \wedge v \wedge w) \;=\; (u \times v)\; .\; w$,

onde $u \times v$ e $(u \times v)\; .\; w$ representam, respectivamente, o **Produto Vetorial** e o **Produto Misto** da Álgebra Vetorial.

Solução

a. Seja (e_i) uma base de E^3. Então, nessa base, podemos escrever:

$$u \; = \; u^1 \, e_1 \; + \; u^2 \, e_2 \; + \; u^3 \, e_3 \; , \qquad v \; = \; v^1 \, e_1 \; + \; v^2 \, e_2 \; + \; v^3 \, e_3 \; .$$

Usando-se as expressões (3.1.2.1b,c,d), teremos:

$$\star \, (u \wedge v) \; = \; \star \, [(u^1 \, e_1 \; + \; u^2 \, e_2 \; + \; u^3 \, e_3) \wedge \, (v^1 \, e_1 \; + \; v^2 \, e_2 \; + \; v^3 \, e_3)] \; =$$

$$= \; \star \, [(u^1 \, v^2 \; - \; u^2 \, v^1) \, e_1 \wedge e_2 \; + \; (u^1 \, v^3 \; - \; u^3 \, v^1) \, e_1 \wedge e_3 \; + \; (u^2 \, v^3 \; - \; u^3 \, v^2) \, e_2 \wedge e_3] \; =$$

$$= \; (u^1 \, v^2 \; - \; u^2 \, v^1) \star [e_1 \wedge e_2] \; + \; (u^1 \, v^3 \; - \; u^3 \, v^1) \star [e_1 \wedge e_3] \; + \; (u^2 \, v^3 \; - \; u^3 \, v^2) \star [e_2 \wedge e_3] \; .$$

Considerando-se que a base de E^3 seja ortonormada, isto é: $(e_i, \, e_j) \; = \; \delta_{ij} \; = \; \delta^{ij}$ e usando-se as expressões (3.1.4.1) e (2.1.3.1b,c), virá:

$$\star \, [e_1 \wedge e_2] \; = \; \tfrac{1}{(3-2)!} \, \varepsilon^3_{12} \, e_3 \; = \; \delta^{33} \, \varepsilon_{312} \, e_3 \; = \; \varepsilon_{312} \, e_3 \; = \; e_3 \; ,$$

$$\star \, [e_1 \wedge e_3] \; = \; \tfrac{1}{(3-2)!} \, \varepsilon^2_{13} \, e_2 \; = \; \delta^{22} \, \varepsilon_{213} \, e_2 \; = \; \varepsilon_{213} \, e_2 \; = \; - \, e_2 \; ,$$

$$\star \, [e_2 \wedge e_3] \; = \; \tfrac{1}{(3-2)!} \, \varepsilon^1_{23} \, e_1 \; = \; \delta^{11} \, \varepsilon_{123} \, e_1 \; = \; \varepsilon_{123} \, e_1 \; = \; e_1 \; .$$

De posse desses resultados, podemos escrever que:

$$\star \, (u \wedge v) \; = \; (u^2 \, v^3 \; - \; u^3 \, v^2) \, e_1 \; + \; (u^3 \, v^1 \; - \; u^1 \, v^3) \, e_2 \; + \; (u^1 \, v^2 \; - \; u^2 \, v^1) \, e_3 \; .$$

Usando-se a definição de produto vetorial entre dois vetores da Álgebra Vetorial, verifica-se que:

$$\star \, (u \wedge v) \; = \; u \times v \; .$$

b. Usando-se a expressão (3.1.2.3d), teremos:

$$\star \, [u \wedge v \wedge w] \; = \; \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{bmatrix} \star [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] \; .$$

Considerando-se que a base de E^3 seja ortonormada, isto é: $(\mathrm{e}_i, \, e_j) \; = \; \delta_{ij} \; = \; \delta^{ij}$ e usando-se as expressões (3.1.4.1) e (2.1.3.1b,c), virá:

$$\star \, [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] \; = \; \tfrac{1}{(3-3)!} \, \varepsilon_{123} \; = \; 1 \; .$$

Portanto:

$$\star \, [u \wedge v \wedge w] \;=\; \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{bmatrix} .$$

Usando-se a definição de produto misto entre três vetores da Álgebra Vetorial, verifica-se que:

$$\star \, (u \wedge v \wedge w) \;=\; (u \times v) \, . \, w \;= (uvw) \, .$$

$\boxed{\text{EX.3.1.4.3}}$ Seja o escalar 1 ($0 - vetor$). Calcule $\star$ 1.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Usando-se a expressão (3.1.4.1), virá:

$$\star \, 1 \;=\; \frac{\sqrt{\mid g' \mid}}{n!} \, \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \, .$$

Usando-se o resultado do Problema (2.1.4.III), isto é:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \;=\; n! \; \delta^1_{i_1} \; \delta^2_{i_2} \; \ldots \; \delta^n_{i_n} \; ,$$

teremos:

$$\star \, 1 \;=\; \sqrt{\mid g' \mid} \, e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \, .$$

Observe-se que se considerarmos o escalar 1 como uma $0 - forma$, então:

$$\star \, 1 \;=\; \sqrt{\mid g \mid} \, \varepsilon^1 \, (x) \wedge \varepsilon^2 \, (x) \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n \, (x) \, .$$

3.1.5 Produto Interno entre p-vetores (formas)

Definição 3.1.5.1 - Produto Interno de dois p-vetores (formas). Sejam α e β dois $p - vetores$ ($formas$) de mesma ordem. O **produto interno** $(\alpha, \; \beta)$ entre eles é definido de modo que tenhamos:

1. $\alpha \wedge (\star \, \beta) \;=\; (\alpha, \; \beta) \, (\star \, 1) \; ,$ (3.1.5.1)
2. $\alpha \wedge (\star \, \beta) \;=\; \beta \wedge (\star \, \alpha) \; .$ (3.1.5.2)

$\boxed{\textbf{Exercícios (3.1.5)}}$

$\boxed{\text{EX.3.1.5.1}}$ Sejam **u** e **v** $1 - vetores$ pertencentes ao espaço vetorial $\mathbf{E}^3$. Demonstre que:

$$u \wedge (\star\, v) \;=\; (u\;.\;v)\;(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)\;,$$

onde $(u\;.\;v)$ representa o **Produto Escalar** da Álgebra Vetorial.

Solução

Seja (e_i) uma base de E^3. Então, nessa base, podemos escrever:

$$u \;=\; u^1\,e_1 \;+\; u^2\,e_2 \;+\; u^3\,e_3\;, \qquad v \;=\; v^1\,e_1 \;+\; v^2\,e_2 \;+\; v^3\,e_3\;.$$

Usando-se a expressão (3.1.4.4), teremos:

$$u \wedge (\star\, v) \;=\; (u^1\,e_1 \;+\; u^2\,e_2 \;+\; u^3\,e_3) \wedge \star\,(v^1\,e_1 \;+\; v^2\,e_2 \;+\; v^3\,e_3) \;=$$

$$=\; (u^1\,e_1 \;+\; u^2\,e_2 \;+\; u^3\,e_3) \wedge (v^1 \star e_1 \;+\; v^2 \star e_2 \;+\; v^3 \star e_3)\;. \qquad \text{(I)}$$

Considerando-se que a base de E^3 seja ortonormada, isto é: $(e_i,\;e_j) \;=\; \delta_{ij} \;=\; \delta^{ij}$ e usando-se as expressões (3.1.4.1) e (2.1.3.1b,c), virá:

$$\star\, e_1 \;=\; \tfrac{1}{(3-1)!}\,(\varepsilon_1^{23}\,e_2 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_1^{32}\,e_3 \wedge e_2) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{231}\,e_2 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_{321}\,e_3 \wedge e_2) \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{123}\,e_2 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_{123}\,e_2 \wedge e_3) \;=\; e_2 \wedge e_3\;,$$

$$\star\, e_2 \;=\; \tfrac{1}{(3-1)!}\,(\varepsilon_2^{13}\,e_1 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_2^{31}\,e_3 \wedge e_1) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{132}\,e_1 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_{312}\,e_3 \wedge e_1) \;=$$

$$=\; -\,\tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{123}\,e_1 \wedge e_3 \;+\; \varepsilon_{123}\,e_1 \wedge e_3) \;=\; -\,e_1 \wedge e_3\;,$$

$$\star\, e_3 \;=\; \tfrac{1}{(3-1)!}\,(\varepsilon_3^{12}\,e_1 \wedge e_2 \;+\; \varepsilon_3^{21}\,e_2 \wedge e_1) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{123}\,e_1 \wedge e_2 \;+\; \varepsilon_{213}\,e_2 \wedge e_1) \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{123}\,e_1 \wedge e_2 \;+\; \varepsilon_{123}\,e_1 \wedge e_2) \;=\; e_1 \wedge e_2\;,$$

Tomando-se os resultados acima e considerando-se as expressões (3.1.1.1b,c,d,e), a expressão (I) tomará a forma:

$$u \wedge (\star\, v) \;=\; (u^1\,e_1 \;+\; u^2\,e_2 \;+\; u^3\,e_3) \wedge (v^1\,e_2 \wedge e_3 \;-\; v^2\,e_1 \wedge e_3 \;+\; v^3\,e_1 \wedge e_2) \;=$$

$$=\; u^1\,v^1\,e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \;-\; u^2\,v^2\,e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \;+\; u^3\,v^3\,e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 \;=$$

$$=\; (u^1\,v^1 \;+\; u^2\,v^2 \;+\; u^3\,v^3)\;(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)\;.$$

Usando-se a definição de produto escalar entre dois vetores da Álgebra Vetorial, verifica-se que:

$$u \wedge (\star\, v) \;=\; (u\;.\;v)\;(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)\;.$$

Considerando-se que:

$$\star\,[e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] \;=\; 1\;,$$

podemos escrever que:

$$\star\,[u \wedge (\star\, v)] \;=\; (u\;.\;v)\;.$$

Problemas (3.1)

3.1.1 Demonstre a expressão (3.1.4.4).

3.1.2 Expresse em termos de Álgebra Exterior as seguintes expressões da Álgebra Vetorial:

a. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \;=\; (\vec{A}\;.\;\vec{C})\;\vec{B} \;-\; (\vec{A}\;.\;\vec{B})\;\vec{C}\;;$

b. $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) \;=\; (\vec{A} \times \vec{B}\;.\;\vec{D})\;\vec{C} \;-\; (\vec{A} \times \vec{B}\;.\;\vec{C})\;\vec{D}\;.$

3.1.3 Demonstre a expressão (3.1.5.2).

3.1.4 Seja um espaço quadridimensional de base ortonormada: $(e_1,\; e_2,\; e_3,\; e_4)$. Calcule os seguintes produtos $(\star)$:

a. $\star\, e_i$ (i = 1, 2, 2, 4); b. $\star\,(e_i \wedge e_j),\quad i \neq j$ (i, j = 1, 2 , 3, 4);

c. $\star\,(e_i \wedge e_j \wedge e_k),\quad i \neq j \neq k$ (i, j, k = 1, 2, 3, 4);

d. $\star\,(e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_m),\quad i \neq j \neq k \neq m$ (i, j, k, m = 1, 2, 3, 4).

3.1.5 Sejam: **u** um $q - vetor$, α uma $p - forma$ e β uma $(p-q) - forma$. Se:

$$\beta\; x \;=\; \alpha\;(u \wedge x), \qquad \forall\; x\; um (p-q) - vetor,$$

demonstre que:

$$(\alpha \wedge \beta)\; u \;=\; (\alpha\; u) \wedge \beta \;+\; (-)^p\; \alpha \wedge (\beta\; u)\;.$$

Capítulo 4

4.1 Diferencição Exterior

4.1.1 Formas Diferenciais

Definição 4.1.1.1. Define-se **forma diferencial** ω **de grau p (p-forma)** a expressão:

$$\omega \ = \sum_{1 \ \leq \ i_1 \ < \ i_2 \ < \ ... \ i_p \ \leq \ n} a_{i_1 i_2 ... i_p} \ (x^1, \ x^2, \ ..., \ x^n) \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge ... \wedge dx^{i_p} \ , \qquad (4.1.1.1)$$

onde os coeficientes $\mathbf{a}_{i_1 i_2 ... i_p}$ são funções de classe C^∞ (infinitamente diferenciáveis) das variáveis $(x^1, \ x^2, \ ..., \ x^n)$ e completamente antissimétrica nos índices.

Observação

De modo geral, uma forma diferencial é definida em **variedades diferenciáveis** (*differentiable manifolds*), conforme veremos mais adiante.

Exemplos. Para o $\mathbf{R}^3$, temos:

1. **0-forma (escalar)**: $f \ = \ f(^1, \ x^2, \ x^3)$;
2. **1-forma (Pfaffiana)**: $\omega_1 \ = \ a_1 \ dx^1 + \ a_2 \ dx^2 \ + \ a_3 \ dx^3$;
3. **2-forma**: $\omega_2 \ = \ a_{12} \ dx^1 \wedge dx^2 \ + \ a_{13} \ dx^1 \wedge dx^3 \ + \ a_{23} \ dx^2 \wedge dx^3$;
4. **3-forma (volume)**: $\omega_3 \ = \ a_{123} \ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

Exercícios (4.1.1)

EX.4.1.1.1 Sejam as seguintes formas:

$$\alpha \ = \ a_1 \ dx \ + \ a_2 \ dy \ + \ a_3 \ dz \quad e \quad \beta \ = \ b_1 \ dx \wedge dy \ + \ b_2 \ dx \wedge dz \ + \ b_3 \ dy \wedge dz \ ,$$

calcule: $\alpha \wedge \beta$.

Solução

Usando-se a Definição (3.1.3.1), teremos:

$$\alpha \wedge \beta \ = \ (a_1 \ dx \ + \ a_2 \ dy \ + \ a_3 \ dz) \wedge (b_1 \ dx \wedge dy \ + \ b_2 \ dx \wedge dz \ + \ b_3 \ dy \wedge dz) \ =$$

$$= \ a_1 \ b_3 \ dx \wedge dy \wedge dz \ + \ a_2 \ b_2 \ dy \wedge dx \wedge dz \ + \ a_3 \ b_1 \ dz \wedge dx \wedge dy \ ,$$

$$\alpha \wedge \beta \ = \ (a_1 \ b_3 \ - \ a_2 \ b_2 \ + a_3 \ b_1) \ dx \wedge dy \wedge dz \ .$$

4.1.2 Diferenciação de Formas

Definição 4.1.2.1. Sejam α $(p - forma)$, β $(q - forma)$ e $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{K}$ (corpo). Define-se **diferenciação exterior d** como uma operação que transforma uma $r - forma$ numa $(r + 1) - forma$, com as seguintes propriedades:

1. $d(a\, \alpha \, + \, b\, \beta) \, = \, a\, d\alpha \, + \, b\, d\beta$; (4.1.2.1a)

2. $d(\alpha \wedge \beta) \, = \, (d\alpha) \wedge \beta \, + \, (-1)^p \, \alpha \wedge d\beta$; (4.1.2.1b)

3. **Lema de Poincaré**: $dd\alpha \, = \, d^2\alpha \equiv 0, \quad \forall \, \alpha$. (4.1.2.1c)

Observações

1. A operação **d** é completamente independente de qualquer sistema de coordenadas;

2. A operação **d** é única.

3. No caso particular em que **f** e **g** são $0 - formas$ e α e β são $1 - formas$, teremos:

a) $d(fg) \, = \, df\, g \, + \, f\, dg$, (4.1.2.1d)

b) $d(f\, \alpha) \, = \, df \wedge \alpha \, + \, f\, d\alpha$, (4.1.2.1e)

c) $d(\alpha \wedge \beta) \, = \, d\alpha \wedge \beta \, - \, \alpha \wedge d\beta$. (4.1.2.1f)

Exemplos. Para o $\mathbf{R}^3$, temos:

1. Seja a $0 - forma$ **f**: f = f(x, y, z). Então, do Cálculo Elementar podemos escrever **df** $(1 - forma)$ da seguinte maneira:

$$df \, = \, \frac{\partial\, f}{\partial\, x}\, dx \, + \, \frac{\partial\, f}{\partial\, y}\, dy \, + \, \frac{\partial\, f}{\partial\, z}\, dz \, = \, f_x\, dx \, + \, f_y\, dy \, + \, f_z\, dz \; .$$

2. Seja a $1 - forma\; \omega : \; \omega \, = \, f_1\, dx \, + \, f_2\, dy \, + \, f_3\, dz$, com f_i funções diferenciáveis de (x, y, z), então $d\omega$ é uma $2 - forma$ dada por:

$$d\omega \, = \, df_1 \wedge dx \, + \, df_2 \wedge dy \, + \, df_3 \wedge dz \; .$$

3. Seja a $2 - forma\; \alpha : \; \alpha \, = \, f_1\, d\, y \wedge d\, z \, + \, f_2\, d\, z \wedge d\, x \, + \, f_3\, d\, x \wedge d\, y$, com f_i funções diferenciáveis de (x, y, z), então $d\, \alpha$ é uma $3 - forma$ dada por:

$$d\, \alpha \, = \, d\, f_1 \wedge d\, y \wedge dz \, + \, d\, f_2 \wedge d\, z \wedge dx \, + \, d\, f_3 \wedge d\, x \wedge dy \; .$$

Propriedades de d. Vamos demonstrar as propriedades da Definição (4.1.2.1) em alguns casos particulares. Inicialmente, demonstremos a propriedade representada pela expressão (4.1.2.1.1b):

$$\boxed{d(\alpha \wedge \beta) \, = \, (d\alpha) \wedge \beta \, + \, (-1)^p \, \alpha \wedge d\beta}$$

Sejam α e β as seguintes formas:

$$\alpha \; = \; f \; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}, \qquad \beta \; = \; g \; dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p} \; .$$

Usando-se as expressões (3.1.3.1a,b,c,d) e a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$\alpha \wedge \beta \; = \; fg \; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge g \; dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p} \; ,$$

$$d\alpha \; = \; df \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2 2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}, \qquad d\beta \; = \; dg \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_q} \; ,$$

$$d(\alpha \wedge \beta) \; = \; d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2 2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge g \; dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p} \; =$$

$$= \; (f \; dg \; + \; g \; df) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge \; dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p} \; =$$

$$= \; (df \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \wedge (g \; dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p}) \; +$$

$$+ \; (-\,1)^p \; (f \; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \wedge (dg \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_p}) \; ,$$

$$d(\alpha \wedge \beta) \; = \; d\alpha \wedge \beta \; + \; (-\,1)^p \; \alpha \wedge d\beta \; .$$

Observe-se que a demonstração acima foi feita considerando que as formas eram monomiais. No caso geral, isto é, para formas polinomiais, a demonstração é feita usando-se a linearidade dada pela expressão (4.1.2.1a).

Agora, demonstremos a propriedade representada pela expressão (4.1.2.1c):

Lema de Poincaré

1. Inicialmente, façamos a demonstração para uma $0 - forma \; \omega \; = \; f(x, y, z)$, onde **y** é derivável até segunda ordem, ou seja, ela possui as seguintes derivadas:

$$f_x, \;\; f_y, \;\; f_z, \;\; f_{xx}, \;\; f_{xy} \; = \; f_{yx}, \;\; f_{xz} \; = \; f_{zx}, \;\; f_{yy}, \;\; f_{yz} \; = \; f_{zy}, \;\; f_{zz} \; .$$

Para essa forma e conforme vimos anteriormente, teremos:

$$d\omega \; = \; df \; = \; f_x \; dx \; + \; f_y \; dy \; + \; f_z \; dz \; .$$

Usando-se a Definição (4.1.2.1) e o Cálculo Elementar, virá:

$$d(d\omega) \; = \; d(df) \; = \; df_x \wedge dx \; + \; df_y \wedge dy \; + \; df_z \wedge dz \; =$$

$$= \; (f_{xx} \; dx \; + \; f_{yx} \; dy \; + \; f_{zx} \; dz) \wedge dx \; + \; (f_{xy} \; dx \; + \; f_{yy} \; dy \; + \; f_{zy} \; dz) \wedge dy \; +$$

$$+ \; (f_{xz} \; dx \; + \; f_{yz} \; dy \; + \; f_{zz} \; dz) \wedge dz \; ,$$

$$d(d\omega) \;=\; (f_{xy} \;-\; f_{yx})\; dx \wedge dy \;+\; (f_{zx} \;-\; f_{xz})\; dz \wedge dx \;+\; (f_{yz} \;-\; f_{zy})\; dy \wedge dz \;.$$

Como as derivadas cruzadas são iguais, teremos:

$$d(d\omega) \;=\; d(df) \;=\; 0 \;.$$

2. Agora, façamos a demonstração para uma p-forma monomial, ou seja:

$$\omega \;= f \; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \;.$$

Usando-se a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$d(d\omega) \;=\; d(df \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \;=$$

$$=\; d(df)\; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \;-\; df \wedge d(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \;.$$

Ora, como $d(df) \;=\; 0$, conforme demonstramos anteriormente, basta agora demonstrar que:

$$d(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \;=\; 0 \;.$$

Vamos fazer essa demonstração por indução. Se $\omega \;=\; f \;=\; x_i$, então $d(dx_i) \;=\; 0$, $\forall\, i$. Se $\omega \;=\; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}$, então, usando-se esse resultado, virá: $d(d\omega) \;=\; d(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) \;=\; d(dx_1) \wedge dx_2 \;-\; dx_1 \wedge d(dx_2) \;=\; 0$. Continuando esse raciocínio, pode-se assumir que:

$$d(dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_{p-1}}) \;=\; 0 \;.$$

Portanto, usando-se a Definição (4.1.2.1) e os resultados obtidos acima, teremos:

$$d(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \;=\; d(dx_{i_1}) \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \;-\; dx_{i_1} \wedge d(dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) = 0.$$

Isso completa a demonstração do **Lema de Poincaré** para o caso em que ω é uma $p-forma$ monomial. No caso geral, isto é, para formas polinomiais, a demonstração é feita usando a linearidade dada pela expressão (4.1.2.1a).

Observações sobre o Lema de Poincaré

1. Uma forma α, para a qual $\mathbf{d}\alpha = 0$, é dita **fechada**.

2. Uma forma β, que pode ser escrita como $\beta \;=\; d\alpha$ para algum α, é dita **exata**.

3. O **Lema de Poincaré** - $dd\alpha \;=\; 0$ - significa que uma forma exata é fechada e, portanto, pode ser enunciado da seguinte maneira:

Se ω é uma $p - forma$ para a qual existe uma $(p \;-\; 1) - forma$ α tal que $d\alpha \;=\; \omega$, então $d\omega \;=\; 0$.

4. **Inversa do Lema de Poincaré**, também conhecida como *condição de integrabilidade*:

Se ω é uma $p-forma$ $(p \geq 1)$ tal que $d\omega = 0$, então existe uma $(p-1)-forma$ α (ou $\alpha + d\phi$), tal que $\omega = d\alpha$.

4.1. A demonstração desse Lema para $p > 1$, conforme se pode ver na Bibliografia citada no fim da Parte 1, é muito complicada, porque há muitas soluções. Assim, o resultado apresentado acima é válido somente para domínios não muito complicados topologicamente. Em vista disso, afirma-se que:

Uma forma fechada é apenas localmente exata.

4.2. A **Inversa do Lema de Poincaré** é usada em Física para mostrar a existência de potenciais.

Exercícios (4.1.2)

EX.4.1.2.1 Usando o R^3 e as coordenadas cartesianas $(x,\ y,\ z)$, escreva os operadores diferenciais (gradiente, rotacional, divergência e laplaciano) em termos de formas diferenciais.

Solução

Na solução desse problema, usaremos o Cálculo Diferencial, as Definições (3.1.3.1) e (4.1.2.1), as expressões (3.1.1.1b,c,d,e) e alguns resultados do Exercício (3.1.4.2), tais como:

$$\star\, dx = dy \wedge dz; \quad \star\, dy = dz \wedge dx; \quad \star\, dz = dx \wedge dy \ ;$$

$$\star\,(dx \wedge dy) = dz; \quad \star\,(dz \wedge dx) = dy; \quad \star\,(dy \wedge dz) = dx; \quad \star\, dx \wedge dy \wedge dz = 1.$$

Gradiente(∇). Seja a $0-forma$ $f(x,\ y,\ z)$ que corresponde a uma função escalar. Calculando-se o seu diferencial, teremos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz \ .$$

Comparando-se o resultado acima com a **operação gradiente** (∇) definida na Análise Vetorial, conclui-se que:

$$\boxed{\nabla = d}$$

Rotacional $(\nabla\ \times)$. Seja a $1-forma$ ω dada por:

$$\omega = f_1(x,y,z)\ dx + f_2(x,y,z)\ dy + f_3(x,y,z)\ dz \ ,$$

que corresponde a uma função vetorial $\vec{f}$, cujos componentes no espaço vetorial de base (dx, dy, dz) são f_1, f_2 **e** f_3. Calculando-se o seu diferencial, teremos:

$$d\omega \;=\; df_1 \wedge dx \;+\; df_2 \wedge dy \;+\; df_3 \wedge dz \;=$$

$$d\omega \;=\; (\tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, x}\; dx \;+\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, y}\; dy \;+\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, z}\; dz) \wedge dx \;+\; (\tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, x}\; dx \;+\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, y}\; dy \;+\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, z}\; dz) \wedge dy \;+$$

$$+\; (\tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, x}\; dx \;+\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, y}\; dy \;+\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, z}\; dz) \wedge dz\;,$$

$$d\omega \;=\; (\tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, x} \;-\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, y})\; dx \wedge dy \;+\; (\tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, z} \;-\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, x})\; dz \wedge dx \;+\; (\tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, y} \;-\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, z})\; dy \wedge dz\;.$$

Agora, calculemos o operador ($\star$) da expressão acima:

$$\star\, \omega \;=\; (\tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, x} \;-\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, y}) \star (dx \wedge dy) \;+\; (\tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, z} \;-\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, x}) \star (dz \wedge dx) \;+$$

$$+\; (\tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, y} \;-\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, z}) \star (dy \wedge dz)\;,$$

$$\star\, \omega \;=\; (\tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, y} \;-\; \tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, z})\; dx \;+\; (\tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, z} \;-\; \tfrac{\partial\, f_3}{\partial\, x})\; dy + \; (\tfrac{\partial\, f_2}{\partial\, x} \;-\; \tfrac{\partial\, f_1}{\partial\, y})\; dz\;.$$

Comparando-se o resultado acima com a **operação rotacional** ($\nabla\, \times$) definida na Análise Vetorial, conclui-se que:

$$\boxed{\nabla\, \times \;=\; \star\, d}$$

Divergência ($\nabla\, .$) Consideremos a $1 - forma\ \omega$ dada no item anterior:

$$\omega \;=\; f_1(x, y, z)\; dx \;+\; f_2(x, y, z)\; dy \;+\; f_3(x, y, z)\; dz\;,$$

e calculemos $\star\, \omega$:

$$\star\, \omega \;=\; f_1 \star dx \;+\; f_2 \star dy \;+\; f_3 \star dz\;,$$

$$\star\, \omega \;=\; f_1\; dy \wedge dz \;+\; f_2\; dz \wedge dx \;+\; f_3\; dx \wedge dy\;.$$

Calculando-se o diferencial da expressão acima, resultará:

$$d \star \omega \;=\; d\; (f_1\; dy \wedge dz \;+\; f_2\; dz \wedge dx \;+\; f_3\; dx \wedge dy) \;=$$

$$d\; f_1 \wedge dy \wedge dz \;+\; d\; f_2 \wedge dz \wedge dx \;+\; d\; f_3 \wedge dx \wedge dy \;=$$

$$= (\frac{\partial\, f_1}{\partial\, x}\, dx \; + \; \frac{\partial\, f_1}{\partial\, y}\, dy \; + \; \frac{\partial\, f_1}{\partial\, z}\, dz) \wedge dy \wedge dz \; +$$

$$+ \, (\frac{\partial\, f_2}{\partial\, x}\, dx \; + \; \frac{\partial\, f_2}{\partial\, y}\, dy \; + \; \frac{\partial\, f_2}{\partial\, z}\, dz) \wedge dz \wedge dx \; +$$

$$+ \, (\frac{\partial\, f_3}{\partial\, x}\, dx \; + \; \frac{\partial\, f_3}{\partial\, y}\, dy \; + \; \frac{\partial\, f_3}{\partial\, z}\, dz) \wedge dx \wedge dy \; ,$$

$$d \star \omega \; = \; (\frac{\partial\, f_1}{\partial\, x} \; + \; \frac{\partial\, f_2}{\partial\, y} \; + \; \frac{\partial f_3}{\partial\, z})\; dx \wedge dy \wedge dz \; .$$

Aplicando-se a operação $\star$ ao resultado anterior, virá:

$$\star\, d \star \omega \; = \; (\frac{\partial\, f_1}{\partial\, x} \; + \; \frac{\partial\, f_2}{\partial\, y} \; + \; \frac{\partial f_3}{\partial\, z}) \star (dx \wedge dy \wedge dz) \; = \; \frac{\partial\, f_1}{\partial\, x} \; + \; \frac{\partial\, f_2}{\partial\, y} \; + \; \frac{\partial f_3}{\partial\, z} \; .$$

Comparando-se o resultado acima com a **operação divergência** ($\nabla\, .$) definida na Análise Vetorial, conclui-se que:

$$\boxed{\nabla\, . \; = \; \star\, d\, \star}$$

Observações sobre a Divergência

1. Para o caso de espaços cujas métricas têm $\mathbf{s} \neq \mathbf{n}$, define-se uma generalização da divergência - a **coderivada** δ - da seguinte maneira:

$$\delta \; = \; (-)^p \star^{-\;1} d \star . \qquad (4.1.2.1.2)$$

Essa operação transforma uma $p - forma$ em uma $(p \; - \; 1) - forma$.

2. Uma forma α, para a qual $\delta\alpha = 0$, é dita **cofechada**.

3. Uma forma β, que pode ser escrita como $\beta \; = \; \delta\alpha$ para algum α, é dita **coexata**.

Laplaciano (Δ). Seja a $0-forma$ $f(x,\; y,\; z)$ que corresponde a uma função escalar. Calculando-se o seu diferencial, teremos:

$$df \; = \; \frac{\partial\, f}{\partial\, x}\, dx \; + \; \frac{\partial\, f}{\partial\, y}\, dy \; + \; \frac{\partial\, f}{\partial\, z}\, dz \; .$$

Calculando-se o operador ($\star$) da expressão acima, virá:

$$\star\, df \; = \; \frac{\partial\, f}{\partial\, x} \star dx \; + \; \frac{\partial\, f}{\partial\, y} \star dy \; + \; \frac{\partial\, f}{\partial\, z} \star dz \; =$$

$$\star\, df \; = \; \frac{\partial\, f}{\partial\, x}\, dy \wedge dz \; + \; \frac{\partial\, f}{\partial\, y}\, dz \wedge dx \; + \; \frac{\partial\, f}{\partial\, z} \star dx \wedge dy \; .$$

Agora, calculemos o diferencial da expressão acima:

$$d \star df \;=\; d(\frac{\partial\, f}{\partial\, x}) \wedge dy \wedge dz \;+$$

$$+\; d(\frac{\partial\, f}{\partial\, y}) \wedge dz \wedge dx \;+\; d(\frac{\partial\, f}{\partial\, z}) \wedge dx \wedge dy \;,$$

$$d \star df \;=\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, x^2}\, dx \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, x\, \partial\, y}\, dy \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, x\, \partial\, z}\, dz) \wedge dy \wedge dz \;+$$

$$+\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, y\, \partial\, x}\, dx \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y^2}\, dy \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y\, \partial\, z}\, dz) \wedge dz \wedge dx \;+$$

$$+\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, z\, \partial\, x}\, dx \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z\, \partial\, y}\, dy \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z^2}\, dz) \wedge dx \wedge dy \;,$$

$$d \star df \;=\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, x^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z^2})\; dx \wedge dy \wedge dz \;.$$

Aplicando-se a operação $\star$ ao resultado anterior, virá:

$$\star\; (d \star df) \;=\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, x^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z^2}) \star (dx \wedge dy \wedge dz) \;=\; (\frac{\partial^2\, f}{\partial\, x^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y^2} \;+\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, z^2}) \;.$$

Comparando-se o resultado acima com a **operação laplaciano** (Δ) definida na Análise Vetorial, conclui-se que:

$$\boxed{\Delta = \;\star\, d \star d}$$

Observações sobre o Laplaciano

1. Para o caso de espaços cujas métricas têm $\mathbf{s} \neq \mathbf{n}$, Georges de Rham (1955) definiu o operador **Laplaciano** (Δ_R) da seguinte maneira:

$$\Delta_R \;=\; (d \;+\; \delta)^2 \;=\; d\, \delta \;+\; \delta\, d \;. \qquad (4.1.2.3)$$

Essa operação, que leva uma $p - forma$ numa $p - forma$, tem as seguintes propriedades:

$$d\, \Delta_R \;=\; \Delta_R\, d; \qquad \star\, \Delta_R \;=\; \Delta_R \star; \qquad \delta\, \Delta_R \;=\; \Delta_R\, \delta \;.$$

2. Para $0 - formas$, Δ_R reduz-se ao operador usual de Laplace-Beltrami: Δ.

3. No R^3, onde a métrica usual permite identificar 1-formas com vetores e $\star^{-\,1} \;=\; \star$, esse operador de Rham aplicado a vetores é o operador Δ de Laplace-Beltrami, com o sinal trocado. Assim:

$$\Delta\, \vec{A} \;=\; -\, \Delta_R \;=\; -\; (d\, \delta \;+\; \delta\, d)\; \vec{A} \;= -\; [d\; (-)\; (\star\, d\, \star)\; \vec{A} \;+\; (\star\, d)\; (\star\, d)\; \vec{A}] \;,$$

$$\Delta\, \vec{A} \;=\; \nabla\, \nabla \,.\, \vec{A} \;-\; \nabla \times \nabla \times \vec{A} \;. \qquad (4.1.2.4)$$

$\boxed{\text{EX.4.1.2.2}}$ Use o **Lema de Poincaré** e demonstre que:

1. $\nabla \times (\nabla f) \ = \ 0$; 2. $\nabla \ . \ (\nabla \times \vec{f}) \ = \ 0$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

1. Usando-se o resultado do Exercício anterior e o **Lema de Poincaré**, teremos:

$$\nabla \times (\nabla f) \ = \ (\star \ d) \ df \ = \ \star \ ddf \ = \ 0 \ .$$

2. Usando-se o resultado do Exercício anterior e o **Lema de Poincaré**, teremos:

$$\nabla \ . \ (\nabla \times \vec{f}) \ = \ (d \ \star) \star d\vec{f} \ = \ d \star^2 d\vec{f} \ .$$

Considerando o resultado do Exercício (3.1.4.1), ou seja:

$$(\star^2) \ = \ 1 \ ,$$

teremos:

$$\nabla \ . \ (\nabla \times \vec{f}) \ = \ dd\vec{f} \ = \ 0 \ .$$

$\boxed{\text{EX.4.1.2.3}}$ Use a Definição (4.1.2.1) e demonstre que:

1. $\nabla \ (fg) \ = \ g \ \nabla f \ + \ f \ \nabla g$;
2. $\nabla \times (f\vec{A}) \ = \ \nabla f \times \vec{A} \ + \ f \ \nabla \times \vec{A}$;
3. $\nabla \ . \ (f\vec{A}) \ = \ \nabla f \ . \ \vec{A} \ + \ f \ \nabla \ . \ \vec{A}$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

Para resolvermos esse Exercício, vamos usar os resultados obtidos no Capítulo 3 e no Exercício anterior, quais sejam:

$$\vec{A} \ . \ \vec{B} \ \leftrightarrow \ \star \ (\alpha \wedge \star \ \beta); \qquad \vec{A} \times \vec{B} \ \leftrightarrow \ \star(\alpha \wedge \beta) \ .$$

$$\nabla \ \leftrightarrow \ d; \qquad \nabla \ . \ \vec{A} \ \leftrightarrow \ \star \ [d \ (\star \ \alpha)]; \qquad \nabla \times \vec{A} \ \leftrightarrow \ \star(d\alpha) \ .$$

1. Como **f** e **g** são $0 - formas$, a expressão (4.1.2.1d) nos dará:

$$\nabla \ (fg) \ \leftrightarrow \ d \ (fg) \ = \ df \ g \ + \ f \ dg \ ,$$

$$\nabla \ (fg) \ = \ g \ \nabla f \ + \ f \ \nabla g \ ;$$

2. Usando-se a expressão (4.1.2.1e), teremos:

$$\nabla \, . \, (f\vec{A}) \;\; \leftrightarrow \;\; \star \Big(\, d[\star \, (f\alpha)] \, \Big) \; = \; \star \Big(\, df \wedge \star \, \alpha \, + \, f \, d(\star \, \alpha) \, \Big) \; = \; \star \, (df \wedge \star \, \alpha) \, + \, f \, \star[d(\star\alpha)],$$

$$\nabla \, . \, (f\vec{A}) \; = \; \nabla \, f \, . \, \vec{A} \, + \, f \, \nabla \, . \, \vec{A} \, .$$

3. Usando-se a expressão (4.1.2.1e), teremos:

$$\nabla \times (f\vec{A}) \;\; \leftrightarrow \;\; \star \, d(f\alpha) \; = \; \star \, (df \wedge \alpha \, + \, f \, d\alpha) \; = \; \star \, (df \wedge \alpha) \, + \, f \, [\star \, (d\alpha)] \, ,$$

$$\nabla \times (f\vec{A}) \; = \; \nabla \, f \times \vec{A} \, + \, f \, \nabla \times \vec{A} \, .$$

4.1.3 Aplicações e Mudança de Variáveis

Definição 4.1.3.1. Define-se uma **aplicação** (*mapping*) ψ como uma regra que assinala a cada ponto $\mathbf{x} = (x^1, \; x^2, \; ... \; x^m) \in E^m$, um ponto $\mathbf{y} = (y^1, \; y^2, \; ... \; y^n) \in E^n$, isto é:

$$\psi : \quad E^m \quad \rightarrow \quad E^n : \quad \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} \, .$$

Desse modo, podemos escrever que:

$$y^i \; = \; y^i(x^1, \; ... \; x^m) \; , \qquad \mathrm{i} = 1, \, 2, \, 3, \, ..., \, \mathrm{n}. \qquad (4.1.3.1)$$

Observações

1. Uma aplicação ψ é dita **diferenciável** se as funções coordenadas definidas por (4.1.3.1) são continuamente diferenciáveis (C^∞);

2. Uma aplicação é dita **um-a-um** se um e somente um ponto em E^m corresponde a um e somente um ponto em E^n;

3. A **aplicação inversa** $\psi^{- \, 1}$ de ψ existe se ψ é um-a-um, e é denotada por:

$$\psi^{- \, 1} : \quad E^n \quad \rightarrow \quad E^m \, .$$

4. De um modo geral, a aplicação ψ é definida entre variedades diferenciáveis, quando se estuda espaços vetoriais que não sejam euclidianos (E^n).

Definição 4.1.3.2. Dada a aplicação $\psi \; : \; E^m \; \rightarrow \; E^n$, define-se ψ^* como uma aplicação (*pullback*) que transforma cada $p - forma$ $\alpha \in \mathrm{F}^p(E^n)$ em uma $p - forma$ $\alpha^* \in F^p(E^m)$, isto é:

$$\psi^* : \quad F^p(E^n) \quad \rightarrow \quad F^p(E^m). \qquad [\mathbf{y} \; = \; \mathbf{y}(\mathbf{x})] \qquad (4.1.3.2)$$

Observação

A idéia básica da aplicação ψ^* é fazer a substituição:

$$dy^i \;=\; \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\, dx^j \;,$$

e usar as regras da Álgebra Exterior.

Exemplos. Consideremos as seguintes formas:

1. $0 - forma: \; f$. Então:

$$\psi^* f \;=\; f \circ \psi \;,$$

onde $(\circ)$ é a composição de funções (regra da cadeia) do Cálculo Elementar.

2. $1 - forma: \; \alpha \;=\; a_i(\mathbf{y})\; dy^i$. Então:

$$\psi^* \alpha \;=\; a_i[\mathbf{y}(\mathbf{x})]\; \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\; dx^j \;,$$

3. $2 - forma: \; \beta \;=\; dy^1 \wedge dy^2$. Considerando-se que: $y^i \;=\; y^i(x^1,\; x^2)$ (i = 1, 2), teremos:

$$\psi^* \beta \;=\; \psi^*(dy^1 \wedge dy^2) \;=\; (\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\; dx^1 \;+\; \frac{\partial y^1}{\partial x^2}\; dx^2) \wedge (\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\; dx^1 \;+\; \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\; dx^2) \;=$$

$$=\; (\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\; \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \;-\; \frac{\partial y^1}{\partial x^2}\; \frac{\partial y^2}{\partial x^1})\; dx^1 \wedge dx^2 \;=\; \frac{\partial(y^1,\; y^2)}{\partial(x^1,\; x^2)}\; dx^1 \wedge dx^2 \;,$$

$$\psi^* \beta \;=\; \psi^*(dy^1 \wedge dy^2) \;=\; J\; dx^1 \wedge dx^2 \;,$$

onde **J** é o **jacobiano** do Cálculo Elementar, dado por:

$$J \;=\; \frac{\partial(y^1,\; y^2)}{\partial(x^1,\; x^2)} \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} y^1_{x^1} & y^1_{x^2} \\ y^2_{x^1} & y^2_{x^2} \end{bmatrix} \;.$$

Propriedades de ψ^*. A aplicação ψ^*, definida pela expressão (4.1.3.2), tem as seguintes propriedades:

1. $\psi^*(\alpha \;+\; \beta) \;=\; \psi^*\alpha \;+\; \psi^*\beta \;,$ (4.1.3.2a)
2. $\psi^*(\alpha \wedge \beta) \;=\; (\psi^*\alpha) \wedge (\psi^*)\beta \;,$ (4.1.3.2b)
3. $\psi^*(d\alpha) \;=\; d(\psi^*\alpha) \;,$ (4.1.3.2c)
4. Se $\phi: \; E^m \;\rightarrow\; E^n, \;\; \psi: \; E^n \;\rightarrow\; E^r$ e $\psi \circ \phi: \; E^m \;\rightarrow\; E^r$, então:

$$(\psi \circ \phi)^* \alpha \;=\; (\phi^* \circ \psi^*) \alpha \quad \text{ou} \quad (\psi \circ \phi)^* \;=\; \phi^* \circ \psi^* \;. \qquad (4.1.3.2d,e)$$

Observações

1. Na expressão (4.1.3.2a), as formas α e β devem ter o mesmo grau, enquanto na (4.1.3.2b) elas podem ter graus diferentes.

2. A expressão (4.1.3.2c) mostra que a diferenciação exterior **d** é invariante por uma transformação de coordenadas.

3. As expressões (4.1.3.2d,e) representam a **regra da cadeia** para as derivadas parciais do Cálculo Elementar.

Vamos verificar as três primeiras propriedades de ψ^* no seguinte caso particular. Seja a aplicação ψ definida por:

$$\psi : E^m \;\to\; E^n, \qquad x = u + v, \qquad y = u - v\,,$$

e as seguintes formas:

$$\alpha = xy\,dx \quad \text{e} \quad \beta = y\,dy.$$

1. Propriedade representada pela expressão (4.1.3.2a):

$$\boxed{\psi^*(\alpha + \beta) = \psi^*\alpha + \psi^*\beta}$$

Para os valores dados acima, teremos:

$$\psi^*\alpha = \psi^*(xy\,dx) = (u + v)(u - v)\,d(u + v) = (u^2 - v^2)\,(du + dv)\,,$$

$$\psi^*\beta = \psi^*(y\,dy) = (u - v)\,d(u - v) = (u - v)\,(du - dv)\,,$$

$$\psi^*(\alpha + \beta) = \psi^*(xy\,dx + y\,dy) = (u + v)(u - v)\,d(u + v) + (u - v)\,(du - dv) =$$

$$= (u^2 - v^2)\,(du + dv) + (u - v)\,(du - dv)\,.$$

Comparando-se os resultados acima, verifica-se que:

$$\psi^*(\alpha + \beta) = \psi^*\alpha + \psi^*\beta\,.$$

2. Propriedade representada pela expressão (4.1.3.2b):

$$\boxed{\psi^*(\alpha \wedge \beta) = (\psi^*\alpha) \wedge (\psi^*)\beta}$$

Considerando-se os mesmos dados e resultados do item anterior, virá:

$$\psi^*(\alpha \wedge \beta) = \psi^*(xy\,dx \wedge y\,dy) = (u + v)(u - v)\,d(u + v) \wedge (u - v)\,d(u - v) =$$

$$= (u^2 - v^2)\,(du + dv) \wedge (u - v)\,(du - dv) = \psi^*\alpha \wedge \psi^*\beta\,.$$

3. Propriedade representada pela expressão (4.1.3.2c):

$$\boxed{\psi^*(d\alpha) \ = \ d(\psi^*\alpha)}$$

Para os valores de α e $\psi^*\alpha$ dados acima e considerando-se as propriedades do produto exterior entre formas (Definição (3.1.1.3)), teremos:

$$d\alpha \ = \ d(xy\ dx) \ = \ d(xy) \wedge dx \ = \ (x\ dy \ + \ y\ dx) \wedge dx \ = \ -\ x\ dx \wedge dy \ ,$$

$$d(\psi^*\alpha) \ = \ d[(u^2 \ - \ v^2)\ (du \ + \ dv)] \ = \ d(u^2 \ - \ v^2) \wedge du \ + \ d(u^2 \ - \ v^2) \wedge dv \ =$$

$$= \ (2u\ du \ - \ 2v\ dv) \wedge du \ + \ (2u\ du \ - \ 2v\ dv) \wedge dv \ = \ 2(u + \ v)\ du \wedge dv \ ,$$

$$\psi^*(d\alpha) \ = \ \psi^*(-\ x\ dx \wedge dy) \ = \ -\ (u \ + \ v)\ d(u \ + \ v) \wedge d(u \ - \ v) \ =$$

$$= \ -\ (u \ + \ v)\ (du \ + \ dv) \wedge (du \ - \ dv) \ = \ 2(u \ + \ v)\ du \wedge dv \ = \ d(\psi^*\alpha) \ .$$

4. Propriedade representada pela expressão (4.1.3.2d):

$$\boxed{(\psi \circ \phi)^*\alpha \ = \ (\phi^* \circ \psi^*)\alpha}$$

Para verificar essa propriedade, consideremos uma $0 - forma$ **f** e as regras de composição do Cálculo Elementar. Então:

$$(\psi \circ \phi)^* f \ = \ f \circ (\psi \circ \phi) \ = \ \phi^*(f \circ \psi) \ = \ (\phi^* \circ \psi^*) f \ .$$

Exercícios (4.1.3)

EX.4.1.3.1 Se $\alpha \ = \ x\ dy$, calcule $\psi^*\alpha$, para a seguinte aplicação:

$$\psi : \quad E^1 \quad \rightarrow \quad E^2 : \quad t \quad \rightarrow \quad (x \ = \ t^2, y \ = \ t^3) \ .$$

Solução

Usando-se a Definição (4.1.3.2), teremos:

$$\psi^*\alpha \ = \ (t^2)\ \frac{\partial y}{\partial t}\ dt \ = \ (t^2)\ \frac{\partial}{\partial t}\ (t^3)\ dt \ = \ 3\ t^4\ dt \ .$$

EX.4.1.3.2 Dada a aplicação:

$$\psi : \quad R^2 \quad \to \quad R^2 : \quad (\rho, \theta) \quad \to \quad (x \ = \ \rho \ cos\theta, \ y \ = \ \rho \ sen\theta) \ ,$$

calcule:

1. $\psi^* E \ = \ \psi^*[X \ (x, \ y) \ dx \ + \ Y \ (x, \ y) \ dy]$;
2. $\psi^*(dx \wedge dy)$.

$\boxed{\textbf{Solução}}$

1. Usando-se as Definições (4.1.3.2) e (3.1.1.3), virá:

$$\psi^* E \ = \ X'(\rho, \theta) \ (\tfrac{\partial x}{\partial \rho} \ d\rho \ + \ \tfrac{\partial \ x}{\partial \theta} \ d\theta) \ + \ Y'(\rho, \theta) \ (\tfrac{\partial y}{\partial \rho} \ d\rho \ + \ \tfrac{\partial \ y}{\partial \theta} \ d\theta) \ =$$

$$= \ X'(\rho, \theta) \ (cos\theta \ d\rho \ - \ sen\theta \ d\theta) \ + \ Y'(\rho, \theta) \ (sen\theta \ d\rho \ + \ cos\theta \ d\theta) \ =$$

$$= \ [X'(\rho, \theta) \ cos\theta \ + \ Y'(\rho, \theta) \ sen\theta] \ d\rho \ + \ [\ - \ X'(\rho, \theta) \ sen\theta \ + \ Y'(\rho, \theta) \ cos\theta] \ d\theta \ ,$$

$$\psi^* E \ = \ R(\rho, \theta) \ d\rho \ + \ \Theta(\rho, \theta) \ d\theta \ ,$$

onde:

$$R(\rho, \theta) \ = \ X'(\rho, \theta) \ cos\theta \ + \ Y'(\rho, \theta) \ sen\theta \ ,$$

$$\Theta \ (\rho \ \theta) \ = \ - \ X'(\rho, \theta) \ sen\theta \ + \ Y'(\rho, \theta) \ cos\theta \ ,$$

$$X' \ = \ \psi^* X \ = \ X \circ \psi \qquad Y' \ = \ \phi^* Y \ = \ Y \circ \psi \ .$$

2. Usando-se os resultados do item anterior, podemos escrever:

$$\psi^*(dx \wedge dy) \ = \ (\tfrac{\partial x}{\partial \rho} \ d\rho \ + \ \tfrac{\partial \ x}{\partial \theta} \ d\theta) \wedge (\tfrac{\partial y}{\partial \rho} \ d\rho \ + \ \tfrac{\partial \ y}{\partial \theta} \ d\theta) \ =$$

$$= \ (\tfrac{\partial x}{\partial \rho} \ \tfrac{\partial \ y}{\partial \theta} \ - \ \tfrac{\partial \ x}{\partial \theta} \ \tfrac{\partial y}{\partial \rho} \ ) \ d\rho \wedge d\theta \ = \ (cos\theta \ \rho \ cos\theta \ + \ sen\theta \ \rho \ sen\theta) \ d\rho \wedge d\theta \ ,$$

$$\psi^*(dx \wedge dy) \ = \ \rho \ d\rho \wedge d\theta \ .$$

Observe-se que ρ representa justamente o jacobiano da aplicação dada.

4.1.4 Variedades e Sistemas de Coordenadas

Até aqui, consideramos a Diferenciação Exterior **d** sobre os espaços vetoriais euclidianos E^n e, também, usamos as coordenadas cartesianas (x^i, i = 1, 2, ... , n). Isso significa dizer que trabalhamos num **subconjunto aberto** de E^n ou, equivalentemente, que esse espaço foi **embebido** num plano. Contudo, existem espaços geométricos que não podem ser considerados como subconjuntos abertos de E^n. Por exemplo, a superfície $\mathbf{S}^2$ de uma esfera do $\mathbf{R}^3$ não pode ser embebida em um plano. Assim, considerando-se que a operação **d** independe de sistemas de coordenadas, segundo a expressão (4.1.3.2c), vamos estudar essa operação **d** naqueles espaços geométricos que são, genericamente, conhecidos como **variedades** (**manifolds**). Para isso, vamos antes apresentar algumas definições.

Definição 4.1.4.1. Um **espaço topológico ET** é um par $(E,\ T)$, onde **E** é um conjunto não vazio de pontos e **T** é uma família de subconjuntos abertos $\mathbf{U}_i$ $(i \in I)$ de **E** satisfazendo as seguintes condições:

1. $E,\ \emptyset \in T \qquad (\emptyset = \text{conjunto vazio});$
2. $\bigcap_{i\ \in\ J} U_i \ \in \ T \qquad (J \subset I, \quad J = \text{finito});$
3. $\bigcup_{i\ \in\ J} U_i \ \in \ T \qquad (J \subset I).$

Os elementos de **E** são chamados de **abertos** e **T** de **topologia** do ET.

Exemplo. Seja um espaço topológico simples constituído por quatro elementos:

$$E \ = \ \{a, b, c, d\} \ .$$

Enquanto a seguinte família de subconjuntos abertos:

$$T \ = \ \Big\{ \{a\},\ \{a, b\},\ \{a,\ b,\ d\},\ E,\ \emptyset \ \Big\} \ ,$$

forma uma topologia, pois satisfaz às condições da Definição (4.1.4.1), o mesmo não acontece com a família de subconjuntos abertos:

$$T' \ = \ \Big\{ \{a\},\ \{a, b\},\ \{b,\ c,\ d\},\ E,\ \emptyset \ \Big\} \ ,$$

pois:

$$\{\ a,\ b\} \ \cap \ \{b,\ c,\ d\} \ = \ \{\ b\} \ \notin \ T' \ .$$

Observações

1. Os mais conhecidos espaços topológicos são: a reta (R), o plano (R^2), o espaço (R^3) e a superfície esférica (S^2).

2. Um espaço topológico (E, T) é dito um **espaço topológico de Hausdorff - ETH** quando:

$$\forall\ x,\ y \in E, \quad \exists \quad (U, V) \in T \quad \to \quad U \cap V \ = \ \emptyset \qquad (x \in U, \quad y \in V, \quad x \neq y) \ .$$

3. Dois espaços topológicos $(E_i,\ T_i)$ (i = 1, 2) são chamados **homeomórficos** ou topologicamente equivalentes se:

$$\exists\, f:\ E_1\ \rightarrow E_2 \qquad \text{tal que} \qquad (f,\ f^{-1}) \text{ são contínuas.}$$

Nesse caso, a aplicação bijetiva **f** é chamada um **homeomorfismo**.

4. Um espaço topológico $(E,\ T)$ é dito **compacto**, se ele é um ETH e se cada **cobertura** tem uma **subcobertura** finita. Registre-se que uma família de abertos dada por $U\ =\ (A_i \mid i \in I) \in$ E é chamada **cobertura** de E, se:

$$A_i\ \neq\ \emptyset, \qquad E\ =\ \bigcup_{i\ \in\ I} A_i\ ,$$

e de **subcobertura**, se:

$$E\ =\ \bigcup_{j\ \in\ J\ \subset\ I} A_j\ .$$

Definição 4.1.4.2. Uma **base** para uma topologia **T** é uma coleção **B** de seus abertos $(B\subset T)$ tal que qualquer membro **U** de **T** pode ser obtido como uma união dos elementos de **B**.

Observação

No caso da reta (R), uma base possível é aquela formada por todos os intervalos abertos:

$$(a,\ b)\ =\ \{\ x \mid a\ <\ x\ <\ b\ \}\ .$$

Exemplo. Seja o espaço topológico constituído por três elementos:

$$E\ =\ \{a,\ b,\ c\}\ .$$

Sejam, também, as seguintes famílias de subconjuntos abertos:

$$T\ =\ \Big\{\ \emptyset,\ \{b\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}\ =\ E\ \Big\}\ ,$$

$$B\ =\ \Big\{\ \emptyset,\ \{b\},\ \{a,\ c\}\ \Big\}\ .$$

Verifica-se que **T** define uma topologia em **E**, tendo **B** como uma possível base.

Com efeito, para verificar que **T** define uma topologia, temos de ver se ela satisfaz as condições da Definição (4.1.4.1). Assim:
a) $E\ ,\emptyset \in T$;
b) $\{b\} \cap \{a,\ c\}\ =\ \emptyset \in T$;
c) $\{b\} \cap \{a,\ b,\ c\}\ =\ \{a,\ c\} \in T$;
d) $\{a,\ c\} \cap \{a,\ b,\ c\}\ =\ \{b\} \in T$;

e) $\{b\} \cup \{a,\ c\}\ =\ \{a,\ b,\ c\} \in T$;
f) $\{a,\ c\} \cup \{a,\ b,\ c\}\ =\ \{a,\ b,\ c\} \in T$.

Por outro lado, para mostrar que **B** define uma base de **T**, vamos usar a Definição (4.1.4.2). Assim:
a) $\Big\{\ \emptyset,\ \{b\},\ \{a,\ c\}\ \Big\}(=\ B) \subset \Big\{\ \emptyset,\ E,\ \{b\},\ \{a,\ c\}\ \Big\}(=\ T)$;
b) $\{b\ \}\ =\ \{b\ \} \cup \emptyset$;
c) $\{a,\ c\ \}\ =\ \{a,\ c\ \} \cup \emptyset$;
d) $\{a,\ b,\ c\}\ =\ \{b\ \} \cup \{a,\ c\}$.

Definição 4.1.4.3. Um conjunto **M** de pontos é denominado uma **variedade** (**manifold**) se cada ponto $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$ tem um conjunto aberto (vizinhança) **U** que é homeomórfico a um conjunto aberto em algum E^n, ou seja, se se pode definir uma aplicação ψ um-a-um em E^n:

$$\phi : \quad U \quad \to \quad U' \quad \subset \quad E^n \ ,$$

com **U'** um aberto em E^n.

Observações

1. A variedade **M** é um espaço topológico de Hausdorff **localmente "quase" euclidiano**;

2. A variedade **M** tem a mesma dimensão **n** em todos os seus pontos;

3. A variedade **M** tem uma base que é **enumerável**. É oportuno registrar que um conjunto **X** é dito enumerável quando existe uma aplicação:

$$f : \quad N \quad \to \quad X \ ,$$

onde **f** é bijetiva e **N** é o conjunto dos números naturais.

Definição 4.1.4.4. Define-se uma **carta** (ou **sistema de coordenadas locais**) **c** em uma variedade **M** como um terno $c\ =\ (U,\ \psi,\ n)$, tal que:

1. $U \subset M$ é aberto;

2. $\psi :\ U\ \ \to\ \ U'\ =\ \psi(U) \subset E^n$ é aberto e ψ é um homeomorfismo;

3. $n\ (\geq 0) \in Z$ é a dimensão de **c**.

Observações

1. Daqui para a frente, desde que não haja perigo de confusão, uma carta será denotada por $(U,\ \psi)$.

2. O homeomorfismo ψ pode ser definido no sentido inverso $(\psi^{-\,1})$, isto é, de um conjunto aberto de $\mathbf{E}^n$ para alguma vizinhança de um ponto $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$. Neste caso ele é chamado uma **parametrização**.

Definição 4.1.4.5. Duas cartas $(U_1,\ \psi_1)$ e $(U_2,\ \psi_2)$ são ditas **C^k-compatíveis** quando:

1. ou $U_1 \cap U_2 \ = \ \emptyset$ *ou* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$;

2. as aplicações:

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-\,1} : \quad \psi_2(U_1 \cap U_2) \quad \to \quad \psi_1(U_1 \cap U_2) \ ,$$

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-\,1} : \quad \psi_1(U_1 \cap U_2) \quad \to \quad \psi_2(U_1 \cap U_2) \ ,$$

são de classe C^k, ou seja, existem as **k** primeiras derivadas.

Observações

1. Seja ψ_1 uma aplicação que leva qualquer ponto $\mathbf{P} \in (U_1 \cap U_2)$ em um aberto de E^n $(\psi_1(U_1))$, digamos o ponto $(x^1,\ x^2,\ ...,\ x^n)$, e ψ_2 uma aplicação que leva o mesmo ponto $\mathbf{P}$ em um outro aberto de E^n $(\psi_2(U_2))$, digamos o ponto $(y^1,\ y^2,\ ...,\ y^n)$. As relações funcionais definidas abaixo:

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-\,1} : \quad E^n \quad \to \quad E^n, \quad [y^i \ = \ y^i(x^i) \ , \quad \mathrm{i} = 1,\, 2,\, ...,\, \mathrm{n}] \qquad (4.1.4.1a)$$

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-\,1} : \quad E^n \quad \to \quad E^n, \quad [x^j \ = \ x^j(y^j) \ , \quad \mathrm{j} = 1,\, 2,\, ...,\, \mathrm{n}] \qquad (4.1.4.1b)$$

são chamadas de **transformações de coordenadas**. É importante destacar que se o determinante da matriz jacobiana que caracteriza cada uma dessas transformações for maior que zero, isto é:

$$det(\psi_2 \circ \psi_1^{-\,1}) \ > \ 0 \qquad \text{ou} \qquad det(\psi_1 \circ \psi_2^{-\,1}) \ > \ 0 \ ,$$

a variedade **M** é dita **orientável**. Se o determinante for negativo, **M** é dita **não-orientável**, como acontece, por exemplo, com a **fita de Möbius** e a **garrafa de Klein**.

2. Os sistemas de coordenadas usualmente considerados (cartesiano, polar, elíptico, etc.) formam um sistema de funções coordenadas. Esta é uma distinção relevante, uma vez que tal sistema necessita de um número diferente de cartas para "plotar" a variedade **M**. Contudo, enquanto o sistema cartesiano (x, y) é bastante para "plotar" o R^2, o mesmo não acontece com o sistema polar (r, ϕ), pois a coordenada ϕ não se relaciona com um homeomorfismo, já que os pontos $\phi \ = \ 0$ e $\phi \ = \ 2\pi$ são coincidentes. É oportuno observar que a mais popular singularidade na Física - a **singularidade de Schwarzschild** - não é real, ela decorre da escolha de um sistema de coordenadas.

Definição 4.1.4.6. Define-se **atlas** sobre uma variedade **M** a reunião de cartas $(U_i,\ \phi_i)$ C^k-compatíveis que cobre **M**, isto é:

$$\bigcup_{i \, \in \, I} U_i \ = \ M \ .$$

Observações

1. Se todas as cartas são relacionadas por aplicações lineares em suas intersecções, teremos um **atlas linear**.

2. Toda variedade compacta pode ser coberta por atlas finitos, isto é, um atlas com um número finito de cartas.

3. O espaço euclidiano E^n é uma variedade cujo atlas é composto de uma única carta. Neste caso, esse espaço é automaticamente orientável.

Exemplo. Seja a circunferência S^1 definida por:

$$S^1 \;=\; \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 \;+\; y^2 \;=\; 1\;\} \;.$$

Consideremos uma aplicação $\psi_1^{-\,1}$ definida pela coordenada polar:

$$\psi_1^{-\,1}: \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi) \qquad \to \qquad S^1, \qquad \phi \;\to\; (x \;=\; cos\phi,\; y \;=\; sen\phi) \;.$$

Verifica-se que $\phi_1^{-\,1}$ não é homeomórfica, pois o ponto $(1,\; 0)$ sobre S^1 é o mesmo para dois valores de ϕ $(0,\; 2\pi)$. Porém, se considerarmos a aplicação:

$$\psi_1^{-\,1}: \quad (0 \;<\; \phi \;<\; 2\pi) \qquad \to \qquad S^1, \qquad \phi \;\to\; (x \;=\; cos\phi,\; y \;=\; sen\phi) \;.$$

verifica-se que:

$$\psi_1^{-\,1}\,(0 \;<\; \phi \;<\; 2\pi) \;=\; U \;=\; S^1 \;-\; \{\;(1, 0)\;\}, \qquad U \subset S^1 \;.$$

Desse modo, o par $(U\;, \psi)$ representa uma carta em $\mathbf{S}^1$. Porém, como $\mathbf{U}$ não cobre toda a variedade S^1, precisamos encontrar uma outra carta. Assim, consideremos a aplicação $\psi_2^{-\,1}$ definida por:

$$\psi_2^{-\,1}: \quad (-\,\pi \;<\; \phi \;<\; \pi) \qquad \to \qquad S^1, \qquad \phi \;\to\; (x \;=\; cos\phi,\; y \;=\; sen\phi) \;.$$

Então:

$$\psi_2^{-\,1}\,(-\,\pi \;<\; \phi \;<\; \pi) \;=\; V \;=\; S^1 \;-\; \{\;(-\,1, 0)\;\}, \qquad V \subset S^1 \;,$$

define uma nova carta dada por (V, ψ_2). Ora, como:

$$U \;\cup\; V \;=\; S^1 \;,$$

então essas duas cartas constituem um atlas para a variedade S^1, de acordo com a Definição (4.1.4.6).

Definição 4.1.4.7. Um atlas definido em uma variedade **M** é dito **diferenciável** se todas as transformações de coordenadas são aplicações diferenciáveis (C^∞).

Observação

Tomemos as transformações de coordenadas definidas pelas expressões (4.1.4.1a,b). Diferenciando-se as mesmas e usando-se a regra da cadeia, virá:

$$\delta^i_k \;=\; \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\ .$$

Essa expressão indica que ambos os jacobianos das transformações de coordenadas - $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ e $\frac{\partial x^j}{\partial y^k}$ - são diferentes de zero.

Definição 4.1.4.8. Um atlas diferenciável em uma variedade **M** é dito um **atlas maximal** ou **completo**, quando não pode estar contido propriamente em nenhum outro atlas diferenciável em **M**.

Definição 4.1.4.9. Define-se uma **variedade diferenciável** como sendo uma variedade topológica **M** com um atlas diferencial completo ou maximal.

Exemplo. O R^n é uma variedade diferenciável e o seu atlas é constituído de uma única carta:

$$U \;=\; (R^n, I), \qquad I(identidade): \;\; R^n \quad \to \quad R^n\ ,$$

onde as funções coordenadas dessa carta são as coordenadas canônicas $(x^1,\ x^2,\ ...,\ x^n)$. Observe-se que quando R^n é considerada como uma variedade diferenciável ela é então conhecida como um **espaço afim**.

Definição 4.1.4.10. Sejam **M** e **N** duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação contínua $f\ :\ M \ \to\ N$ é dita **diferenciável em um ponto p** $(p \in M)$ se dadas as cartas $(U\ ,\ g)$ de **M** e $(V\ ,\ h)$ de **N**, a aplicação definida por:

$$h \circ f \circ g^{-1}:\ \ g(U) \quad \to \quad h(V)\ ,$$

é diferenciável $(\in C^k)$ no ponto $g(p)$.

Observações

1. A aplicação $h \circ f \circ g^{-1}$ está definida em $g[f^{-1}(V) \cup U]$.

2. A aplicação **f** é dita **diferenciável** se ela é diferenciável em todos os pontos de **M**.

3. Se **f** é uma bijeção e sua inversa f^{-1} é também diferenciável, então **f** é denominada **difeomorfismo**. É interessante destacar que uma variedade diferenciável é difeomórfica ao espaço E^n, o que significa dizer que ela se comporta localmente como E^n.

Definição 4.1.4.11. Seja **M** uma variedade diferenciável e **N** um subconjunto de **M** $(N \subset M)$. Então **N** é chamada de **subvariedade diferenciável** de **M** se, para todo ponto **p** $\in$ **N**, existe uma carta $(U\ ,\ f)$ do atlas de **M**, tal que:

$$p \in U \quad \to \quad f(p) \;=\; 0 \in E^n\ ;$$

$$f(U \cap N) \ = \ f(U) \cap E^m \ .$$

Definição 4.1.4.12. Sejam **M** e **N** duas variedades diferenciáveis. A aplicação diferenciável $f \ : \ M \ \ \to \ \ N$ é dita uma **imersão** se as cartas $(U \ , \ g)$ $(g \ : \ U \ \ \to \ \ U' \subset E^m)$ e $(V \ , \ h)$ $(h \ : \ V \ \ \to \ \ V' \subset E^n \ (m \ < \ n))$ podem ser escolhidas de tal modo que:

$$h \circ f \circ g^{-1} \ : \ g(U) \quad \to \quad h(V) \ ,$$

é uma inclusão, isto é, quando consideramos que E^m como $E^m \times \{ \ 0 \ \} \subset E^n$.

Observações

1. A representação de **f** em coordenadas locais é dada por:

$$(x^1, \ x^2, \ ... \ x^m) \quad \to \quad (x^1, \ x^2, \ ... \ x^m, \ 0, \ ..., \ 0) \ .$$

2. Se:

a) $f(M) \subset N$ é uma subvariedade de N ;

b) $f \ : \ M \ \ \to \ \ f(M)$ é um difeomorfismo,
então **f** é denominada um **mergulho** (“imbed”) e, conseqüentemente, se diz que **M** está mergulhada em **N**.

Exemplos

1. A aplicação **f** definida por:

$$f \ : \ E^1 \ \ \to \ \ E^2; \qquad f(x) \ = \ (cos \ 2\pi x, \ sen \ 2\pi x) \ ,$$

é uma **imersão** com $f(E^1) \ = \ S^1 \subset E^2$. Assim, se diz que o círculo (S^1) está imerso (embebido) e não mergulhado no plano.

2. A aplicação definida por:

$$f \ : \ E^1 \ \ \to \ \ E^3; \qquad f(x) \ = \ (cos \ 2\pi x, \ sen \ 2\pi x, \ x) \ ,$$

é um **mergulho**. Assim, se diz que a hélice $f(E^1)$ está mergulhada ou embebida no espaço. É oportuno destacar que as superfícies não-orientáveis (sem fronteiras), tais como a fita de Möbius e a garrafa de Klein, são imersas ou embebidas no E^4.

4.1.5 Campos Vetoriais e Tensoriais sobre Variedades

Definição 4.1.5.1. Seja **p** um ponto de uma variedade **M** e **R(M)** o conjunto de todas as funções com valores reais, definidas e diferenciáveis em alguma vizinhança de **p**. Define-se um **vetor tangente** $\mathbf{V}_p$ no ponto **p** como a aplicação (operador):

$$V_p \ : \ R(M) \quad \to \quad E^1 \ ,$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. $V_p(af \ + \ bg) \ = \ a \, V_p(f) \ + \ b \, V_p(g), \quad \forall \, a, \ b \in K; \quad \forall \, f, g \in R(M) \ ,$ (4.1.5.1a)

2. $V_p(f.g) \ = \ f(p) \, V_p(g) \ + \ g(p) \, V_p(f) \ .$ (Regra de Leibniz) (4.1.5.1b)

Observações

1. Sendo a expressão (4.1.5.1b) uma conseqüência da expressão (4.1.2.1b) (lembrar que **f** é uma $0 - forma$), resulta então que a aplicação V_p é uma **derivada**.

2. Para uma constante **c**, tem-se: $V_p(c) \ = \ 0$. Vejamos como demonstrar essa afirmação. Fazendo-se $f \ = \ g \ = 0$ em (4.1.5.1a), teremos $V_p(0) \ = \ 0$. Considerando-se $f \ = \ g \ = \ 1$ em (4.1.5.1b), virá $V_p(1) \ = \ 2 \, V_p(1) \ \rightarrow \ V_p(1) \ = \ 0$. Por fim, colocando-se $f \ = \ 1, g \ = \ 0$ e a $\neq 0$, a expressão (4.1.5.1a) resultará: $V_p(a) \ = \ 0$.

Exemplo. Seja $x(p) \ = \ (x^1, \ x^2, \ ..., \ x^n)$ um sistema de coordenadas local válido em alguma vizinhança de $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$. Usando-se o Cálculo Elementar, é fácil ver que a aplicação definida por:

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p \ : \ R(M) \ \rightarrow \ E^1 \ ,$$

satisfaz as expressões (4.1.5.1a,b).

Definição 4.1.5.2. O conjunto T_p**(M)** de todos os vetores tangentes a **M** no ponto **p** é denominado **espaço tangente**.

Observações

1. O espaço $T_p(M)$ é um espaço vetorial gerado pelos vetores tangentes a todas as curvas que passam por $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$. Ele tem a mesma dimensão de **M**, não importa quão curvado seja **M**, e é isomorfo a E^n. Registre-se que os vetores tangentes são comumente chamados **vetores** ou ainda **vetores contravariantes**.

2. Para um sistema de coordenadas local (x^i) válido em alguma vizinhança de $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$, as aplicações (operadores) $\{ \ \frac{\partial}{\partial x^i} \ = \ \partial_i \ \}$ formam uma **base natural** ou **base coordenada** do espaço vetorial $T_p(M)$. Saliente-se que quando $\mathbf{M} = E^3$, ∂_i é o conhecido operador ∇:

$$\partial_i \equiv \nabla \ .$$

2.1. Qualquer vetor $V_p \in T_p(M)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$V_p \ = \ V_p^i \, \partial_i \ = \ V_p(x^i) \, \partial_i \ . \qquad (4.1.5.2a)$$

É oportuno notar que a expressão (4.1.5.2a) tem sua gênese no desenvolvimento em série de Taylor de uma dada função **f(x)**. Com efeito, considerando-se um ponto $(x \ = \ p \ + \ v)$ muito próximo de **p**, o desenvolvimento de Taylor de **f(x)** será dado por:

$$f(x \ = \ p \ + \ v) \ = \ f(p) \ + \ v \ \frac{d(f(x)}{dx}|_{x \, = \, p} + \ ... \ , \qquad (4.1.5.2b)$$

onde $\frac{d(f(x))}{dx}|_{x\ =\ p}$ representa a inclinação de $\mathbf{f(x)}$ no ponto **p**. Assim, se tivermos uma variedade n-dimensional com coordenadas x^i, poderemos ter **n** direções diferentes, de modo que o segundo termo da equação (4.1.5.2b) torna-se:

$$v^i\ \frac{\partial(f(x))}{\partial x^i}|_{x\ =\ p}\ .$$

Em vista do exposto acima, o termo:

$$v^i\ \frac{\partial}{\partial x^i}|_{x\ =\ p}\ , \qquad (4.1.5.2c)$$

idêntico à expressão (4.1.5.2a), é denominado **derivada direcional**.

2.2. Quando uma variedade **M** é embebida em um espaço vetorial, um vetor tangente $V_p \in T_p(M)$ pode ser considerado como um **vetor velocidade** no tempo $t\ =\ 0$, para um ponto que descreve uma curva γ(t) passando através de **p** no tempo nulo [$\gamma(0)\ =\ p$]. Essa curva é associada a uma **derivada direcional** que indica a taxa de variação no tempo 0 de uma função **f** definida sobre **M**:

$$(\frac{d[\gamma(t)]}{dt})_{t=0}\ =\ \partial_{t\ =\ 0}\ f[\gamma(t)]\ . \qquad (4.1.5.2d)$$

2.3. Para uma transformação de coordenadas ($\bar{x}\ \rightarrow\ \bar{x}\ (\mathbf{x})$), a regra da cadeia do Cálculo Elementar nos mostra que:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\ =\ \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\ \frac{\partial}{\partial x^j}\ . \qquad (4.1.5.2e)$$

3. Segundo vimos no tópico (1.1) do Capítulo 1, um espaço vetorial admite sempre um espaço vetorial dual. Ora, sendo $T_p(M)$ um espaço vetorial, o seu dual - $T_p^*(M)$ - será constituído pelas aplicações lineares:

$$\omega_p\ :\ T_p(M)\ \ \rightarrow\ \ E^1\ .$$

Esse espaço é denominado **espaço cotangente** de **M** em **p**, e seus elementos são chamados **covetores**, ou **vetores covariantes**, ou ainda $1 - formas$. Esse espaço tem a mesma dimensão de $T_p(M)$. É oportuno salientar que, conforme vimos ainda no item (1.1), dada uma base arbitrária { e_i } de $T_p(M)$, existe uma única base { ε^j } de $T_p^*(M)$, chamada sua **base dual**, com a propriedade dada pela expressão (1.1.2.2a), ou seja:

$$\varepsilon^j\ (e_i)\ =\ \delta_i^j\ . \qquad (4.1.5.3)$$

3.1. Na Mecânica Clássica, o espaço tangente corresponde ao **espaço de velocidades** $\dot{q}^i$ e o espaço cotangente ao **espaço dos momentos** p_i, ambos relativos ao **espaço das configurações** q^i.

4. A reunião dos espaços $T_p^*(M)$ para todo **p** é denominada **espaço fibrado ("bundle") tangente** $T^*(M)$ sobre **M**:

$$T^*(M) \ = \ \bigcup_p \ T_p^*(M) \ .$$

Definição 4.1.5.3. Seja **f** $\in C^\infty(U, E^1)$ e **p** $\in U \subset M$. Define-se a **diferencial** de **f** em **p** o número $(df)_p$ dado por:

$$(df)_p \ : \ T_p(M) \quad \rightarrow \quad E^1 \ ,$$

$$v \ \rightarrow \ (df)_p(v) \ = \ v(f), \qquad \forall \ v \in T_p(M) \ . \qquad (4.1.5.4)$$

Observações

1. Consideremos um sistema de coordenadas locais ($\mathbf{x}^i$) em uma vizinhança de **p**. Segundo vimos acima, $\{ \ (\frac{\partial}{\partial x^i})_p \ \}$ formam uma base para $T_p(M)$.

1.1. Segundo a expressão (4.1.5.2a), para $v \in T_p(M)$ podemos escrever:

$$v \ = \ a^i \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p, \qquad (a^i \in K) \ .$$

Aplicando-se a expressão (4.1.5.4) ao resultado acima, virá:

$$(df)_p(v) \ = \ (df)_p[a^i \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p] \ = \ a^i \ (\tfrac{\partial f}{\partial x^i})_p \quad \rightarrow \quad (df)_p \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p \ = \ (\tfrac{\partial f}{\partial x^i})_p \ . \qquad (4.1.5.5a)$$

Em particular, se fizermos $\mathbf{f} = x^j$ ($x^j \ : \ M \quad \rightarrow \quad E^i$), a expressão (4.1.5.5a) nos dá:

$$(dx^j)_p \ (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p \ = \ (\tfrac{\partial x^j}{\partial x^i})_p \ = \ \delta_i^j \ . \qquad (4.1.5.5b)$$

Comparando-se as expressões (4.1.5.3) e (4.1.5.5b), verifica-se que $\{(dx^1)_p, \ ..., \ (dx^n)_p \ \}$ é a base do espaço dual $T_p^*(M)$. É oportuno destacar que esse resultado nos mostra que as **formas diferenciais** dx^i não são os **incrementos** da variável x^i, como indicam alguns textos clássicos do Cálculo Elementar, e sim, elas representam uma aplicação (operador) linear.

1.2. Para uma transformação de coordenadas: $\bar{x} \rightarrow \bar{x}$ ($\mathbf{x}$), a regra da cadeia do Cálculo Elementar nos mostra que:

$$d\bar{x}^i \ = \ \tfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \ dx^j \ . \qquad (4.1.5.5c)$$

2. Considerando-se que $(df)_p \in T_p^*(M)$ e usando-se o resultado acima, podemos escrever:

$$(df)_p \ = \ a_j \ (dx^j)_p, \quad (a_j \in K) \ . \qquad (4.1.5.6a)$$

Usando-se a expressão acima no lado esquerdo da expressão (4.1.5.5a) e usando-se, também, a expressão (4.1.5.5b), virá:

$$(df)_p \, (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p \; = \; a_j \; (dx^j) \; (\tfrac{\partial}{\partial x^i})_p \; = \; a_j \; \delta_i^j \; = \; a_i \; .$$

Em vista disso, a expressão (4.1.5.5a) tomará a seguinte forma:

$$(df)_p \; = \; (\tfrac{\partial f}{\partial x^i})_p \; (dx^i)_p \; , \qquad (4.1.5.6b)$$

que representa a expressão usual para a diferencial de uma função real do Cálculo Elementar. Esse resultado explica por que os membros do espaço cotangente são também chamados de **1-formas**.

Definição 4.1.5.4. Define-se um **campo de vetores X** em uma variedade diferenciável **M** como uma aplicação **X** que associa a cada ponto **p** $\in$ **M** um vetor tangente $X_p \in T_p(M)$:

$$X \; : \; p \in M \quad \rightarrow \quad X_p \in T_p(M) \; .$$

Observações

1. Seja $(x^1, \; x^2, \; ... \; x^n)$ um sistema de coordenadas locais em um conjunto aberto **U** $\subset$ **M**; então $\forall$ **p** $\in$ **U**, teremos:

$$X_p \; = \; X_p^i \; \tfrac{\partial}{\partial x^i}|_p \; , \qquad (4.1.5.7a)$$

onde X_p^i são os componentes de **X** relativamente ao sistema (x^i).

2. Seja **f** o conjunto das funções diferenciáveis em **M** $[f \in R(M)]$. Então, usando-se a expressão (4.1.5.7a), teremos:

$$(Xf)_p \; = \; X_p^i \; \tfrac{\partial f}{\partial x^i}|_p \; , \qquad (4.1.5.7b)$$

3. No item (2.1) do Capítulo 2, estudamos os tensores definidos em espaços vetoriais euclidianos e seus respectivos espaços duais. Agora, podemos generalizar o que foi estudado nesse item, definindo **tensores em variedades diferenciáveis**. Assim, considerando-se as bases desses espaços $(\{e_i\}$ e $\{\varepsilon^j(x)\})$ e, também, a expressão (4.1.5.5b), podemos fazer a seguinte correspondência:

$$e_i \quad \rightarrow \quad \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \varepsilon^j(x) \quad \rightarrow \quad dx^j \; .$$

Portanto, a expressão (2.1.1.2a) será escrita da seguinte maneira:

$$t \; = \; t^{i_1 i_2 ... i_p}_{j_1 j_2 ... j_q} \; \tfrac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \tfrac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes ... \otimes \tfrac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes ... \otimes dx^{j_q} \; . \qquad (4.1.5.8a)$$

3.1. Para uma transformação de coordenadas $\bar{x} \rightarrow \bar{x}$ $(\mathbf{x})$, teremos:

$$\bar{t}^{\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_p}_{\bar{b}_1 \bar{b}_2 ... \bar{b}_q} \; = \; \tfrac{\partial \bar{x}^{\bar{a}_1}}{\partial x^{c_1}} \; \tfrac{\partial \bar{x}^{\bar{a}_2}}{\partial x^{c_2}} \; ... \; \tfrac{\partial \bar{x}^{\bar{a}_p}}{\partial x^{c_p}} \; \tfrac{\partial x^{d_1}}{\partial x^{\bar{b}_1}} \; \tfrac{\partial x^{d_2}}{\partial x^{\bar{b}_2}} \; ... \; \tfrac{\partial x^{d_q}}{\partial x^{\bar{b}_q}} \; t^{c_1 c_2 ... c_p}_{d_1 d_2 ... d_q} \; . \qquad (4.1.5.8b)$$

Registre-se que a maioria dos livros sobre Cálculo Tensorial apresenta a expressão acima como a definição de **tensor**.

Definição 4.1.5.5. Sejam **X** e **Y** dois campos de vetores de uma variedade diferenciável **M** e **f** uma função diferenciável também de **M** [$f \in R(M)$]. Define-se **comutador** entre **X** e **Y** da seguinte maneira:

$$[X,\ Y](f)\ =\ (XY\ -\ YX)(f)\ =\ X\,Y(f)\ -Y\,X(f)\ , \qquad (4.1.5.9)$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $[X,\ Y]\ =\ -\,[Y,\ X]$; (4.1.5.9a)

2. $[aX\ +\ bY,\ Z]\ =\ a\,[X,\ Z]\ +\ b\,[Y,\ Z]; \quad \forall\ a, b \in K$, (4.1.5.9b)

3. $[[X,\ Y],\ Z]\ +\ [[Y,\ Z],\ X]\ +\ [[Z,\ X],\ Y]\ =\ 0$; (Identidade de Jacobi) (4.1.5.9c)

4. $[fX,\ gY]\ =\ fg\,[X,\ Y]\ +\ f\,X(g)Y\ -\ g\,Y(f)X; \quad \forall\ f, g \in R(M)$. (4.1.5.9d)

Observações

1. Uma Álgebra satisfazendo as expressões (4.1.5.9,a,b,c,d) é denominada **Álgebra de Lie**.

2. O produto (operador) **XY** definido abaixo:

$$(XY)f\ =\ X(Yf)\ =\ X^i\ \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j\ \frac{\partial f}{\partial x^j})\ =\ X^i\ \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\ \frac{\partial f}{\partial x^j}\ +\ X^i\ Y^j\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\ ,$$

não pertence ao espaço tangente devido à presença do último termo na expressão acima.

Definição 4.1.5.6. Seja uma variedade diferenciável **M** e um conjunto aberto **U** da mesma, isto é, $U \subset M$. Um conjunto $\{\ X_i\ \}$ de **m** campos vetoriais é chamado uma **base local** ("local frame", "comoving frame" ou "vielbein") se, para qualquer $\mathbf{p} \in \mathbf{U}$, $\{\ X_{(p)i}\ \}$ é uma base de $\mathbf{T}_p\mathbf{(M)}$. Isto significa que cada $\mathbf{X}_{(p)i}$ é um vetor tangente de **M** em **p** e que o conjunto deles é linearmente independente.

Observações

1. Qualquer conjunto de **m** campos de vetores linearmente independentes pode ser usado como uma base local. Para algumas variedades existe uma **base global**, enquanto que para outros, somente base local. Registre-se que, quando $m\ =\ 4$, a base local se denomina **tetrada**.

2. Uma base local $\{\ X_i\ \}$, diretamente relacionada a um sistema de coordenadas locais definido em **U**, é dita **holonômica**, ou **coordenada**, se:

$$[X_i,\ X_j](f)\ =\ 0, \quad \forall\ f \in R(M)\ . \qquad (4.1.5.10a)$$

No caso contrário, isto é:

$$[X_i,\ X_j](f) \neq 0 \ , \qquad (4.1.5.10b)$$

ela é dita **não-holonômica** ou **não-coordenada**.

2.1. Se $(x^1,\ x^2,\ ...,\ x^m)$ são coordenadas sobre **U**, então o conjunto de campos de vetores tangentes:

$$\{\ \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\ \}, \quad \forall\ p \in U\ ,$$

forma uma **base coordenada** ou **base holonômica**, considerando-se que ela satisfaz a expressão (4.1.5.10b), em virtude da igualdade das derivadas cruzadas conforme se demonstra no Cálculo Elementar. Cada elemento dessa base $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ representa um vetor tangente à linha coordenada ao longo da qual somente x^i varia, enquanto as outras coordenadas permanecem fixas.

2.2. No caso de uma base não-holonômica o comutador de quaisquer de seus elementos pode ser expandido nessa mesma base, isto é:

$$[X_i,\ X_j]\ =\ C_{ij}^k\ X_k\ , \qquad (4.1.5.11)$$

onde C_{ij}^k são chamados os **coeficientes de estrutura** da Álgebra correspondente.

2.3. Dada uma base não-holonômica $\{\ X_i\ \}$, é sempre possível escrevê-la em alguma base coordenada, ou seja:

$$X_i\ =\ X_i^j\ \frac{\partial}{\partial x^j}\ .$$

Exemplos

1. Seja $(x,\ y,\ z)$ um sistema de coordenadas cartesianas no E^3. A base holonômica correspondente ao mesmo será: $(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z})$ que representam, respectivamente, vetores ortonormados tangentes aos eixos coordenados **x**, **y** e **z**, isto é: $(\hat{e}_x,\ \hat{e}_y,\ \hat{e}_z)$. Observe-se que esse sistema representa a carta $(E^3\ ,\ I)$, onde **I** é a identidade:

$$I\ :\ E^3\ \rightarrow\ E^3, \quad (x,\ y,\ z)\ \rightarrow\ (x,\ y,\ z)\ .$$

2. Seja $(r\ ,\ \theta)$ um sistema de coordenadas polares de $\mathbf{E}^2$. A base holonômica correspondente a esse sistema será: $(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial \theta})$ que representam, respectivamente, vetores tangentes às retas concorrentes passando na origem, e às circunferências centradas também na origem, isto é: $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta)$. Registre-se que esse sistema representa a carta $(E^2\ ,\ f)$, onde:

$$f\ :\ E^2\ \rightarrow\ E^2, \quad (\mathrm{r}, \theta)\ \rightarrow\ (x\ =\ r\ cos\theta,\ y\ =\ r\ sen\theta)\ ,$$

onde:

$$0 \leq r\ <\ \infty, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\ \pi\ .$$

3. Seja $(r\ ,\ \theta,\ \phi)$ um sistema de coordenadas esféricas do E^3. A base holonômica correspondente ao mesmo será: $(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial \theta},\ \frac{\partial}{\partial \phi})$ que representam, respectivamente, vetores tangentes às retas concorrentes passando pela origem, às circunferências centradas na origem e situadas no plano (x, y), e às circunferências centradas na origem e situadas no plano perpendicular ao plano $(x\ ,\ y)$ e contendo o eixo dos **z**, isto é: $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\phi)$. Note-se que esse sistema representa a carta $(E^3\ ,\ f)$, onde:

$$f\ :\ E^3\ \rightarrow\ E^3,\ \ (\mathrm{r},\ \theta,\ \phi)\ \rightarrow\ (x\ =\ r\ sen\theta\ cos\phi,\ y\ =\ r\ sen\theta\ sen\phi,\ z\ =\ r\ cos\theta)\ ,$$

onde:

$$0 \leq r\ <\ \infty, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\ \pi\ .$$

3.1. Para o sistema de coordenadas esféricas definido acima, a base definida por:

$$X_r\ =\ \frac{\partial}{\partial r}, \quad X_\theta\ =\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad X_\phi\ =\ \frac{1}{r\ sen\theta}\ \frac{\partial}{\partial \phi}\ ,$$

é uma base não-holonômica cujos coeficientes de estrutura são obtidos por intermédio da expressão (4.1.5.11), da seguinte maneira.

$$[X_r,\ X_\theta]\ =\ C^r_{r\theta}\ X_r\ +\ C^\theta_{r\theta}\ X_\theta\ +\ C^\phi_{r\theta}\ =\ [\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}]\ =\ \frac{\partial}{\partial r}\ (\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta})\ -\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ (\frac{\partial}{\partial r})\ =$$

$$=\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\ -\ \frac{1}{r}\ (\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta})\ -\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r}\ =\ -\ \frac{1}{r}\ (\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta})\ =\ -\ \frac{1}{r}\ X_\theta\ =\ C^r_{r\theta}\ X_r\ +\ C^\theta_{r\theta}\ X_\theta\ +\ C^\phi_{r\theta}\ X_\phi\ .$$

Portanto:

$$C^r_{r\theta}\ =\ C^\phi_{r\theta}\ =\ 0; \quad C^\theta_{r\theta}\ =\ -\ \frac{1}{r}\ .$$

De modo análogo, podemos mostrar que:

$$C^\phi_{r\phi}\ =\ -\ \frac{1}{r}; \quad C^\phi_{\theta\phi}\ =\ -\ \frac{1}{r\ tg\theta}\ ,$$

e os demais coeficientes são nulos.

Exercícios (4.1.5)

EX.4.1.5.1 Para o sistema de coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \phi)$ definido por:

$$f\ :\ (r, \theta,\ \phi)\ \rightarrow\ (x\ =\ r\ sen\theta\ cos\phi,\ y\ =\ r\ sen\theta\ sen\phi,\ z\ =\ r\ cos\theta)\ ,$$

$$f^{-1}\ :\ (x,\ y,\ z)\ \rightarrow\ \Big(r\ =\ \sqrt{x^2\ +\ y^2 +\ z^2},\ \theta\ =\ tg^{-1}\ (\frac{\sqrt{x^2\ +\ y^2}}{z}),\ \phi\ =\ tg^{-1}\ (\frac{y}{x})\ \Big)\ ,$$

encontre as bases holonômica e dual.

Solução

a) **Base holonômica**. Usando-se a regra da cadeia (expressão (4.1.5.2e)) para a transformação de coordenadas **f** considerada, virá:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} = cos\phi\ sen\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + sen\phi\ sen\theta\ \frac{\partial}{\partial y} + cos\theta\ \frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} = r\ cos\theta\ cos\phi\ \frac{\partial}{\partial x} + r\ cos\theta\ sen\phi\ \frac{\partial}{\partial y} - r\ sen\theta\ \frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z} = -\ r\ sen\theta\ sen\phi\ \frac{\partial}{\partial x} + r\ sen\theta\ cos\phi\ \frac{\partial}{\partial y} + 0\ .$$

Em termos matriciais, podem escrever:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen\theta\ cos\phi & sen\theta\ sen\phi & cos\theta \\ r\ cos\theta\ cos\phi & r\ cos\theta\ sen\phi & -\ r\ sen\theta \\ -\ r\ sen\theta\ sen\phi & r\ sen\theta\ cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Em termos de vetores tangentes, teremos:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen\theta\ cos\phi & sen\theta\ sen\phi & cos\theta \\ r\ cos\theta\ cos\phi & r\ cos\theta\ sen\phi & -\ r\ sen\theta \\ -\ r\ sen\theta\ sen\phi & r\ sen\theta\ cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}.$$

Considerando-se que a base $(\hat{e}_x,\ \hat{e}_y,\ \hat{e}_z)$ é ortonormada, o produto escalar entre os vetores da base holonômica calculada acima é dado por:

$$(\vec{e}_r,\ \vec{e}_r) = sen^2\theta\ cos^2\phi + sen^2\theta\ sen^2\ \phi + cos^2\theta =$$

$$= sen^2\theta\ (sen^2\phi + cos^2\phi) + sen^2\theta = sen^2\theta + cos^2\theta = 1\ ,$$

$$(\vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\theta) = r^2\ cos^2\theta\ cos^2\phi + r^2\ cos^2\theta\ sen^2\phi + r^2\ sen^2\theta = r^2\ ,$$

$$(\vec{e}_\phi,\ \vec{e}_\phi) = r^2\ sen^2\theta\ sen^2\phi + r^2\ sen^2\theta\ cos^2\phi = r^2\ sen^2\theta\ ,$$

$$(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta) = (\vec{e}_\theta,\ \vec{e}_r) = r\ sen\theta\ cos\theta\ cos^2\phi + r\ sen\theta\ cos\theta\ sen^2\phi - r\ sen\theta\ cos\theta = 0\ ,$$

$$(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\phi) = (\vec{e}_\phi,\ \vec{e}_r) = -\ r\ sen^2\theta\ sen\phi\ cos\phi + r\ sen^2\theta\ sen\phi\ cos\phi = 0\ ,$$

$$(\vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\phi) = (\vec{e}_\phi,\ \vec{e}_\theta) = -\ r^2\ sen\theta\ cos\theta\ sen\phi\ cos\phi + r^2\ sen\theta\ cos\theta\ cos\phi\ sen\phi = 0\ .$$

Verifica-se, portanto, que a base holonômica $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ é ortogonal, porém não ortonormada. Para torná-la ortonormada, basta dividir o segundo e terceiros vetores, respectivamente, por **r** e $r\ sen\theta$, os famosos **parâmetros de Lamé**. Assim, a base holonômica ortonormada do sistema de coordenadas esféricas será:

$$(\vec{e}_r,\ \frac{1}{r}\ \vec{e}_\theta,\ \frac{1}{r\ sen\theta}\ \vec{e}_\phi)\ =\ (\hat{e}_r,\ \hat{e}_\theta,\ \hat{e}_\phi\ .)$$

b) **Base dual**. Para obtermos essa base, vamos usar a expressão (4.1.5.6b) para a transformação de coordenadas f^{-1} considerada e a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dz}\ (tg^{-1}z)\ =\ \frac{1}{1\ +\ z^2}\ .$$

Desse modo, teremos:

$$dr\ =\ \frac{\partial r}{\partial x}\ dx\ +\ \frac{\partial r}{\partial y}\ dy\ +\ \frac{\partial r}{\partial z}\ dz\ =\ \frac{x}{r}\ dx\ +\ \frac{y}{r}\ dy\ +\ \frac{z}{r}\ dz\ =$$

$$=\ sen\theta\ cos\phi\ dx\ +\ sen\theta\ sen\phi\ dy\ +\ cos\theta\ dz\ ,$$

$$d\theta\ =\ \frac{\partial\theta}{\partial x}\ dx\ +\ \frac{\partial\theta}{\partial y}\ dy\ +\ \frac{\partial\theta}{\partial z}\ dz\ =\ \frac{z\ x}{r^2\ \sqrt{x^2\ +\ y^2}}\ dx\ +\ \frac{z\ y}{r^2\ \sqrt{x^2\ +\ y^2}}\ dy\ -\ \frac{\sqrt{x^2\ +\ y^2}}{r^2}\ dz\ =$$

$$=\ \frac{1}{r}\ (cos\theta\ cos\phi\ dx\ +\ cos\theta\ sen\phi\ dy\ -\ sen\theta\ dz)\ .$$

$$d\phi\ =\ \frac{\partial\phi}{\partial x}\ dx\ +\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\ dy\ +\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\ dz\ =\ -\ \frac{y}{x^2\ +\ y^2}\ dx\ +\ \frac{x}{x^2\ +\ y^2}\ dy\ +\ 0\ dz\ =$$

$$=\ \frac{1}{r\ sen\phi}\ (-\ sen\phi\ dx\ +\ cos\phi\ dy\ +\ 0\ dz)\ ,$$

Em termos matriciais, podem escrever:

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{bmatrix}\ =\ \begin{bmatrix} sen\theta\ cos\phi & sen\theta\ sen\phi & cos\theta \\ \frac{1}{r}\ cos\theta\ cos\phi & \frac{1}{r}\ cos\theta\ sen\phi & -\ \frac{1}{r}\ sen\theta \\ -\ \frac{1}{r\ sen\theta}\ sen\phi & \frac{1}{r\ sen\theta}\ cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}\ .$$

Agora, vejamos se essa base dual é ortonormada. Para isso, inicialmente, vamos mostrar que a base dual $(dx\ ,\ dy\ ,\ dz)$ é ortonormada. Com efeito, usando-se os resultados dos exercícios (4.1.2.1) e (3.1.5.1), isto é:

$$\star\ dx\ =\ dy \wedge dz,\quad \star\ dy\ =\ dz \wedge dx,\quad \star\ dz\ =\ dx \wedge dy,\quad \star\ (dx \wedge dy \wedge dz)\ =\ 1\ ,$$

$$(d\alpha,\ d\beta)\ =\ \star\ (d\alpha \wedge \star\ d\beta)\ ,$$

teremos:

$$(dx,\ dx) \ = \ \star\,(dx \wedge \star\, dx) \ = \ \star\,(dx \wedge dy \wedge dz) \ = \ 1 \ ,$$

$$(dx,\ dy) \ = \ (dy,\ dx) \ = \ \star\,(dx \wedge dz \wedge dx) \ = \ -\ (dx \wedge dx \wedge dz) \ = \ 0 \ ,$$

$$(dx,\ dz) \ = \ (dz,\ dx) \ = \ \star\,(dx \wedge dx \wedge dy) \ = \ 0 \ ,$$

$$(dy,\ dy) \ = \ \star\,(dy \wedge dz \wedge dx) \ = \ \star\,(dx \wedge dy \wedge dz) \ = \ 1 \ ,$$

$$(dy,\ dz) \ = \ (dz,\ dy) \ = \ \star\,(dy \wedge dx \wedge dy) \ = \ 0 \ ,$$

$$(dz,\ dz) \ = \ \star\,(dz \wedge dx \wedge dy) \ = \ \star\,(dx \wedge dy \wedge dz) \ = \ 1 \ .$$

De posse desses resultados, teremos:

$$(dr,\ dr) \ = \ sen^2\theta\ cos^2\phi \ + \ sen^2\theta\ sen^2\phi \ + \ cos^2\theta \ = \ 1 \ ,$$

$$(dr,\ d\theta) \ = \ (d\theta,\ dr) \ = \ \tfrac{1}{r}\ (sen\theta\ cos\phi\ cos\theta\ cos\phi \ + \ sen\theta\ sen\phi\ cos\theta\ sen\phi - cos\theta\ sen\theta) = \ 0,$$

$$(dr,\ d\phi) \ = \ (d\phi,\ dr) \ = \ \tfrac{1}{r\ sen\theta}\ (sen\theta\ cos\phi\ sen\phi \ + \ sen\theta\ sen\phi\ cos\phi) \ = \ 0 \ ,$$

$$(d\theta,\ d\theta) \ = \ \tfrac{1}{r^2}\ (cos^2\theta\ cos^2\phi \ + \ cos^2\theta\ sen^2\phi \ + \ sen^2\theta) \ = \ \tfrac{1}{r^2} \ .$$

$$(d\phi,\ d\phi) \ = \ \tfrac{1}{r^2\ sen^2\theta}\ (sen^2\phi \ + \ cos^2\phi) \ = \ \tfrac{1}{r^2\ sen^2\theta} \ ,$$

$$(d\theta,\ d\phi) \ = \ (d\phi,\ d\theta) \ = \ \tfrac{1}{r^2\ sen\theta}\ (-\ cos\theta\ sen\phi\ cos\phi \ + \ cos\theta\ sen\phi\ cos\phi) \ = \ 0 \ ,$$

Verifica-se, portanto, que a base dual $(dr,\ d\theta,\ d\phi)$ é ortogonal, porém não ortonormada. Para torná-la ortonormada, basta multiplicar o segundo e terceiros covetores, respectivamente, por $\mathbf{r}$ e $r\ sen\theta$, os famosos **parâmetros de Lamé**. Assim, a base dual ortonormada para o sistema de coordenadas esféricas será:

$$(dr,\ r\ d\theta,\ r\ sen\theta\ d\phi) \ .$$

Observações complementares

As técnicas usadas nesse problema nos permitem demonstrar que:

1. Entre as bases ortonormadas dual e holonômica, existe a seguinte correspondência:

$$dr \ \ \to \hat{e}_r \ ; \qquad (r\ d\theta) \ \ \to \ \ \hat{e}_\theta \ ; \qquad (r\ sen\theta\ d\phi) \ \ \to \ \ \hat{e}_\phi \ .$$

2. Para a base dual ortonormada $(dr,\ r\ d\theta,\ r\ sen\theta\ d\phi)$, podemos escrever:

$$\star\, dr \;=\; r\, d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi, \quad \star\, (r\; sendθ\; d\phi) \;=\; dr \wedge r\, d\theta, \quad \star\, (r\; d\theta) \;=\; r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr\;,$$

$$\star\, (dr \wedge r\; d\theta) \;=\; r\; sen\theta\; d\phi), \quad \star\, (r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr) \;=\; r\; d\theta, \quad \star\, (r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;=\; dr\;,$$

$$\star\, (dr \wedge r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;=\; 1\;.$$

3. Para o sistema de coordenadas polares $(r,\ \theta)$ definido por:

$$f\ :\ (r, \theta)\ \ \rightarrow\ \ (x\ =\ r\ cos\theta,\ y\ =\ r\ sen\theta)\ ,$$

$$f^{-1}\ :\ (x,\ y)\ \ \rightarrow\ \ \Big(\, r\ =\ \sqrt{x^2\ +\ y^2},\ \theta\ =\ tg^{-1}\ (\tfrac{y}{x})\, \Big)\ ,$$

podemos demonstrar que a base dual ortonormada vale:

$$(dr,\ r\ d\theta)\ .$$

$\boxed{\text{EX.4.1.5.2}}$ Usando a Definição (4.1.2.1) e os resultados dos Exercícios (4.1.2.1) e (4.1.5.1), obtenha o gradiente, divergente, rotacional e laplaciano, em coordenadas esféricas $(r,\ \phi,\ \theta)$.

$\boxed{\text{Solução}}$

a) **Gradiente**. Seja a função escalar $f(r,\ \theta,\ \phi)$. Segundo o Exercício (4.1.2.1), o gradiente dessa $(0 - forma)$ será dado por:

$$\nabla\ f\ =\ df\ .$$

Do Cálculo Elementar, podemos escrever que:

$$\nabla f\ =\ df\ =\ \tfrac{\partial f}{\partial r}\ dr\ +\ \tfrac{\partial f}{\partial \theta}\ d\theta\ +\ \tfrac{\partial f}{\partial \phi}\ d\phi\ .$$

Em termos da base dual ortonormada do sistema de coordenadas esféricas, a expressão acima é escrita na forma:

$$df\ =\ \tfrac{\partial f}{\partial r}\ dr\ +\ \tfrac{1}{r}\ \tfrac{\partial f}{\partial \theta}\ (r\ d\theta)\ +\ \tfrac{1}{r\ sen\theta}\ \tfrac{\partial f}{\partial \phi}\ (r\ sen\theta\ d\phi)\ .$$

Por outro lado, em termos da base holonômica ortonormada desse mesmo sistema, podemos escrever:

$$\boxed{\nabla f\ =\ \tfrac{\partial f}{\partial r}\ \hat{e}_r\ +\ \tfrac{1}{r}\ \tfrac{\partial f}{\partial \theta}\ \hat{e}_\theta\ +\ \tfrac{1}{r\ sen\theta}\ \tfrac{\partial f}{\partial \phi}\ \hat{e}_\phi}$$

b) **Divergência**. Seja o vetor $\vec{A}$. Segundo o Exercício (4.1.2.1), a divergência desse vetor será dada por:

$$\nabla \, . \, \vec{A} \; = \; \star \, d \star A \; .$$

Portanto, para calcularmos essa divergência vamos, inicialmente, considerar a $1 - forma$ associada a esse vetor, isto é:

$$A \; = \; A_r \; dr \; + \; A_\theta \; r \; d\theta \; + \; A_\phi \; r \; sen\theta \; d\phi \; .$$

Assim, usando-se os resultados do Exercício (4.1.5.1) e a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$\star \, A \; = \; \star \, (A_r \; dr \; + \; A_\theta \; r \; d\theta \; + \; A_\phi \; r \; sen\theta \; d\phi) \; =$$

$$= \; A_r \star dr \; + \; A_\theta \star (r \; d\theta) \; + \; A_\phi \star (r \; sen\theta \; d\phi) \; =$$

$$= \; A_r \; r \; d\theta \wedge r \; sen\theta \; d\phi \; + \; A_\theta \; r \; sen\theta \; d\phi \wedge dr \; + \; A_\phi \; dr \wedge r \; d\theta \; ,$$

$$d \star A \; = \; d(r^2 \; A_r \; sen\theta) \; d\theta \wedge d\phi \; + \; d(r \; sen\theta \; A_\theta) \; d\phi \wedge dr \; + \; d(r \; A_\phi) \; dr \wedge d\theta \; =$$

$$= \; \tfrac{1}{r^2} \; \tfrac{\partial(r^2 \; A_r)}{\partial r} \; dr \wedge r \; d\theta \wedge r \; sen\theta \; d\phi \; + \; \tfrac{1}{r \; sen\theta} \; \tfrac{\partial(sen\theta \; A_\theta)}{\partial \theta} \; r \; d\theta \wedge r \; sen\theta \; d\phi \wedge dr \; +$$

$$+ \; \tfrac{1}{r \; sen\theta} \; \tfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \; r \; sen\theta \; d\phi \wedge dr \wedge r \; d\theta \; =$$

$$= \; (\tfrac{1}{r^2} \; \tfrac{\partial(r^2 \; A_r)}{\partial r} \; + \; \tfrac{1}{r \; sen\theta} \; \tfrac{\partial(sen\theta \; A_\theta)}{\partial \theta} \; + \; \tfrac{1}{r \; sen\theta} \; \tfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi}) \; (dr \wedge r \; d\theta \; r \; sen\theta \; d\phi) \; ,$$

$$\star \, d \star A \; = \; \Big(\tfrac{1}{r^2} \; \tfrac{\partial(r^2 \; A_r)}{\partial r} \; + \; \tfrac{1}{r \; sen\theta} \; \tfrac{\partial(sen\theta \; A_\theta)}{\partial \theta} \; + \; \tfrac{1}{r \; sen\theta} \; \tfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \; \Big) \star (dr \wedge r \; sen\theta \; d\phi \wedge r \; d\theta) \; .$$

Portanto:

$$\boxed{\nabla \, . \, \vec{A} \; = \; \tfrac{1}{r^2} \; \tfrac{\partial}{\partial r} \; (r^2 \; A_r) \; + \; \tfrac{1}{r \; sen\theta} \; \tfrac{\partial}{\partial \theta} \; (sen\theta \; A_\theta) \; + \; \tfrac{1}{r \; sen\theta} \; \tfrac{\partial}{\partial \phi} \; (A_\phi)}$$

c) **Rotacional**. Seja o vetor $\vec{A}$. Segundo o Exercício (4.1.2.1), o rotacional desse vetor será dado por:

$$\nabla \times \vec{A} \; = \; \star \, dA \; .$$

Portanto, para calcularmos esse rotacional vamos, inicialmente, levaremos em consideração a $1 - forma$ associada a esse vetor, isto é:

$$A \; = \; A_r \; dr \; + \; A_\theta \; r \; d\theta \; + \; A_\phi \; r \; sen\theta \; d\phi \; .$$

Usando-se a Definição (4.1.2.1) e o resultado do Exercício (4.1.5.1), virá:

$$dA \;=\; d(A_r)\; dr \;+\; d(r\; A_\theta)\; d\theta \;+\; d(r\; sen\theta\; A_\phi)\; d\phi \;=$$

$$=\; \Big(\; \tfrac{\partial A_r}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\; d\theta \;+\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi}\; d\phi \;\Big) \wedge dr \;+$$

$$+\; \Big(\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial \phi}\; d\phi \;+\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial \theta}\; d\theta \;\Big) \wedge d\theta \;+$$

$$+\; \Big(\; \tfrac{\partial (r\; sen\theta\; A_\phi)}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{\partial (r\; sen\theta\; A_\phi)}{\partial \phi}\; d\phi \;+\; \tfrac{\partial (r\; sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta}\; d\theta \;\Big) \wedge d\phi \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{r}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\; (r\; d\theta \wedge dr) \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi}\; (r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr) \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r}\; (dr \wedge r\; d\theta) \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial (A_\theta)}{\partial \phi}\; (r\; sen\theta\; d\phi \wedge r\; d\theta) \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \tfrac{\partial (r\; A_\phi)}{\partial r}\; (dr \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;+\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \tfrac{\partial (sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta}\; (r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi)\;,$$

$$\star\; dA \;=\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \Big(\; \tfrac{\partial (sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta} \;-\; \tfrac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \;\Big) \star (r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \Big(\; \tfrac{1}{sen\theta}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi} \;-\; \tfrac{\partial (r\; A_\phi)}{\partial r} \;\Big) \star (r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr) \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \Big(\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r} \;-\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \;\Big) \star (dr \wedge r\; d\theta)\;,$$

$$\star\; dA \;=\; \tfrac{1}{r\; sen\theta}\; \Big(\; \tfrac{\partial (sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta} \;-\; \tfrac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \;\Big)\; dr \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{r}\; \Big(\; \tfrac{1}{sen\theta}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi} \;-\; \tfrac{\partial (r\; A_\phi)}{\partial r} \;\Big)\; r\; d\theta \;+\; \tfrac{1}{r}\; \Big(\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r} \;-\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \;\Big)\; r\; sen\theta\; d\phi\;.$$

Em termos da base holonômica ortonormada, teremos:

$$\boxed{\nabla \times \vec{A} = \tfrac{1}{rsen\theta}\Big(\tfrac{\partial (sen\theta\; A_\phi)}{\partial \theta} - \tfrac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\Big)\hat{e}_r + \tfrac{1}{r}\Big(\tfrac{1}{sen\theta}\; \tfrac{\partial A_r}{\partial \phi} - \tfrac{\partial (r\; A_\phi)}{\partial r}\Big)\hat{e}_\theta + \tfrac{1}{r}\;\Big(\; \tfrac{\partial (r\; A_\theta)}{\partial r} - \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\Big)\hat{e}_\phi}$$

d) **Laplaciano**. Seja a função escalar f(r, θ, ϕ). Segundo o Exercício (4.1.2.1), o laplaciano dessa ($0 - forma$) será dado por:

$$\Delta\; f \;=\; \star\; d \star df\;.$$

Do Cálculo Elementar, podemos escrever que:

$$df \;=\; \tfrac{\partial f}{\partial r}\; dr \;+\; \tfrac{\partial f}{\partial \theta}\; d\theta \;+\; \tfrac{\partial f}{\partial \phi}\; d\phi\;.$$

Usando-se o resultado do Exercício (4.1.5.1) e a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$\star\, df \;=\; \frac{\partial f}{\partial r} \star dr \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta} \star (r\; d\theta) \;+\; \frac{1}{r\; sen\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi} \star (r\; sen\theta\; d\phi) \;=$$

$$=\; \frac{\partial f}{\partial r}\,(r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,(r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr) \;+\; \frac{1}{r\; sen\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,(dr \wedge r\; d\theta)\;,$$

$$d \star df \;=\; d\,\Big(\, \frac{\partial f}{\partial r}\,(r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,(r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr) \;+\; \frac{1}{r\; sen\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,(dr \wedge r\; d\theta)\,\Big) \;=$$

$$=\; \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r})\,(dr \wedge r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi) \;+\; \frac{1}{r\; sen\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\frac{1}{r}\; sen\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta})\,(r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr) +$$

$$+\; \frac{1}{r^2\; sen^2\theta}\,\frac{\partial}{\partial \phi}\,(\frac{\partial f}{\partial \phi}\,(r\; sen\theta\; d\phi \wedge dr \wedge r\; d\theta) \;=$$

$$=\; \Big(\, \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}) \;+\; \frac{1}{r^2\; sen\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(sen\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}) \;+\; \frac{1}{r^2\; sen^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\,\Big)\,(dr \wedge r\; d\theta \wedge r\; sen\theta\; d\phi)\;,$$

$$\star\, d\, \star f \;=\; \Big(\, \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}) \;+\; \frac{1}{r^2\; sen\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(sen\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}) \;+\; \frac{1}{r^2\; sen^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\,\Big) \star (dr \wedge r\; d\theta \wedge r\; sen\theta d\phi).$$

Portanto:

$$\boxed{\Delta f \;=\; \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}) \;+\; \frac{1}{r^2\; sen\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(sen\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}) \;+\; \frac{1}{r^2\; sen^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}}$$

4.1.6 Variedades Riemannianas

Definição 4.1.6.1. Seja $T_p(M)$ o conjunto de campos de vetores diferenciáveis. Define-se uma **métrica Riemanniana** a forma bilinear (tensor covariante de ordem 2) definida por:

$$g_p \;:\; T_p(M) \times T_p(M) \;\to\; R\;,$$

$$(X,\; Y) \;\to\; g_p(X,\; Y)\;,$$

com as seguintes propriedades:

1. $g_p(X,\; X) \;>\; 0$ (positiva-definida);
2. $g_p(X,\; Y) \;=\; g_p(Y,\; X) \;=\; < X,\; Y >$, onde $< \, , \, > =$ produto escalar ou interno;
3. $g_p(X,\; Y) \;=\; 0, \quad \forall\, X \in T_p(M) \quad \Longleftrightarrow \quad Y \;=\; 0$.

Observações

1. A métrica é dita **indefinida**, quando:

$$g_p(X,\ X)\ =\ 0 \qquad \text{não implica} \qquad X\ =\ 0\ .$$

2. Sendo a métrica uma forma bilinear, é suficiente conhecer seus valores sobre uma base. Assim, seja a base local $\{\ X_{(p)i}\ \}$ de uma variedade **M**. Portanto, a métrica g_p será dada pela matriz $n\ \times\ n$:

$$g_{(p)ij}\ =\ g_p(X_{(p)i},\ X_{(p)j})\ = < X_{(p)i},\ X_{(p)j} > , \qquad (4.1.6.1)$$

que é simétrica ($g_{(p)ij}\ =\ g_{(p)ji}$) e invertível ($det(g_{(p)ij} \neq 0$).

2.1. Seja uma mudança de bases descrita pela matriz γ:

$$\bar{X}_{(p)i}\ =\ \gamma_i^j\ X_{(p)j}\ . \qquad (4.1.6.2a)$$

Segundo a expressão (1.1.4.15), a matriz da métrica se transforma da seguinte maneira:

$$\bar{g}_{(p)ij}\ =\ \left(\gamma^T\ g_p\ \gamma^{-1}\right)_{ij}\ . \qquad (4.1.6.2b)$$

3. **Teorema de Gram-Schmidt**. Qualquer métrica admite sempre uma base ortonormada $\{\ \epsilon_i\ \}$, isto é:

$$g(\epsilon_i,\ \epsilon_j)\ =\ \eta_{ij}\ ,$$

onde η_{ij} é uma matriz diagonal com **P** sinais positivos (+) e **N** sinais negativos, sendo $P\ +\ N\ =\ n$:

$$\eta_{ij}\ =\ diag(1,\ 1,\ ...,\ 1,\ -1,\ -1,\ ...,\ -1)\ .$$

Esse Teorema permite dizer que para qualquer matriz **g**, simétrica e de determinante não-nulo, existe sempre uma matriz invertível γ, tal que:

$$\left(\gamma^T\ g_p\ \gamma^{-1}\right)_{ij}\ =\ \eta_{ij}\ .$$

3.1. Conforme vimos no Capítulo 1, a **assinatura s** de uma métrica é dada por: $s\ =\ P\ -\ N$. Quando $\mathbf{s = 0}$, a métrica é positiva-definida. Assim, estritamente falando, somente nesse caso ela recebe o nome de **métrica riemanniana** ou **produto escalar**. Quando $s \neq 0$, teremos a **pseudométrica riemanniana**, conforme vimos acima.

4. **Teorema de Sylvester**. A assinatura de uma métrica **s** não depende da escolha da base ortonormal.

5. Segundo vimos anteriormente, o espaço vetorial $T_p(M)$ induz o espaço vetorial $T_p^*(M)$ como seu dual. Desse modo, dada uma base arbitrária $\{\ e_i\ \}$ de $T_p(M)$, existe uma base $\{\ \varepsilon^j\ \}$ de $T_p^*(M)$, chamada sua **base dual**, com a propriedade dada pela expressão (1.1.2.2a), ou seja:

$$\varepsilon^j \ (e_i) \ = \ \delta_i^j \ . \qquad (4.1.6.3)$$

5.1. Essa base dual será holonômica, se ela for uma $1 - forma$ exata, isto é, se existem $0 - formas \ x^j$, tal que:

$$\varepsilon^j \ = \ dx^j \qquad \rightarrow \qquad d(dx^j) \ = \ 0 \ .$$

5.2. Para essa base dual $\{ \ \varepsilon^j \ \}$ podemos definir a seguinte métrica:

$$g^{ij} \ = \ g^*(\varepsilon^i, \ \varepsilon^j) \ . \qquad (4.1.6.4)$$

Conforme mostramos na expressão (1.1.3.11), essa métrica é recíproca da métrica g_{jk}, isto é:

$$g^{ij} \ g_{jk} \ = \ \delta_k^i \ . \qquad (4.1.6.5)$$

5.3. Essa métrica dual será ortonormada, se:

$$g^*(\xi^i, \ \xi^j) \ = \ \eta^{ij} \ = \ \eta_{ij} \ . \qquad (4.1.6.6)$$

6. Usando-se a expressão (4.1.5.8a), podemos escrever para a métrica **g** a seguinte expressão:

$$g \ = \ g_{ij} \ dx^i \otimes dx^j \ . \qquad (4.1.6.7a)$$

Registre-se que a notação usual para essa métrica é a seguinte:

$$ds^2 \ = \ g_{ij} \ dx^i \ dx^j \ . \qquad (4.1.6.7b)$$

6.1. Seja uma curva parametrizada $\gamma(\lambda)$ definida em **M** cujo vetor tangente sobre a mesma é dado por $\vec{X} \ = \ \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$. O seu comprimento será dado por:

$$d\ell^2 \ = < d\vec{x}, \ d\vec{x} > \, = \, < \vec{X} \ d\lambda, \ \vec{X} \ d\lambda > \, = \, < \vec{X}, \ \vec{X} > \ d\lambda^2 \ = \ g(\vec{X}, \ \vec{X}) \ d\lambda^2 \ .$$

Se a métrica for positiva-definida $\Big(g(\vec{X}, \ \vec{X}) \ > \ 0\Big)$, então o comprimento de um elemento da curva γ será:

$$d\ell \ = \ \sqrt{g(\vec{X}, \ \vec{X})} \ d\lambda \ . \qquad (4.1.6.7c)$$

Quando a métrica é **indefinida**, teremos:

$$d\ell \ = \ \sqrt{|g(\vec{X}, \ \vec{X})|} \ d\lambda \ . \qquad (4.1.6.7d)$$

7. Uma métrica estabelece uma relação entre campos vetoriais e covetoriais, ou seja, ela pode ser definida como uma aplicação unívoca $(um \ - um)$ que transforma vetores em $1 - formas$ $(covetores)$:

$$g(X, \ \ ) \ = \ \tilde{X}, \qquad \forall X \in T_p(M), \qquad \tilde{X} \in R(M) \ .$$

7.1. Se $\{ \ e_i \ \}$ for uma base arbitrária de $T_p(M)$, então:

$$g(X, \ e_i) \ = \ \tilde{X}(e_i) \ = \ X_i \ = \ g(X^j e_j, \ e_i) \ = \ X^j \ < e_j, \ e_i > = \ X^j g_{ji} \ ,$$

onde X_i é chamada a **imagem contravariante** de **X**. Considerando-se a simetria de g_{ij} e a expressão (4.1.6.5), observa-se que:

$$X_i \ = \ g_{ij} X^j \ , \qquad (4.1.6.8a)$$

$$g^{ki} X_i \ = \ g^{ki} g_{ij} X^j \ = \ \delta^k_j X^j \ \ \rightarrow \ \ X^k \ = \ g^{ki} X_i \ . \qquad (4.1.6.8b)$$

As expressões (4.1.6.8a,b) nos mostram que o tensor métrico g_{ij} e seu recíproco g^{ij} funcionam, respectivamente, como **abaixadores** e **levantadores** de índices.

Exemplos

1. Para o sistema de coordenadas polares $(r, \ \theta)$, a métrica correspondente (obtida usando-se a expressão (4.1.6.1) e o Exercício (4.1.5.1)), será dada por:

$$g_{rr} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_r) \ = \ 1; \qquad g_{\theta\theta} \ = \ (\vec{e}_\theta, \ \vec{e}_\theta) \ = \ r^2; \qquad g_{r\theta} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_\theta) \ = \ 0 \ ,$$

$$g^{rr} \ g_{rr} \ = \ 1 \ \ \rightarrow \ \ g^{rr} \ = \ 1; \qquad g^{\theta\theta} \ g_{\theta\theta} \ = \ 1 \ \ \rightarrow \ \ g^{\theta\theta} \ = \ \tfrac{1}{r^2} \ .$$

Em termos matriciais, teremos:

$$g_{ij} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{g}^{ij} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} .$$

Destaque-se que essa métrica também pode ser obtida por intermédio da expressão (4.1.6.2b), considerando-se que, para o sistema cartesiano $(x \ , \ y \ , \ z)$, a sua métrica é a matriz unitária.

2. Para o sistema de coordenadas esféricas $(r, \ \theta, \ \phi)$, a métrica correspondente (obtida usando-se a expressão (4.1.6.1) e o Exercício (4.1.5.1)) será dada por:

$$g_{rr} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_r) \ = \ 1; \qquad g_{\theta\theta} \ = \ (\vec{e}_\theta, \ \vec{e}_\theta) \ = \ r^2; \qquad g_{\phi\phi} \ = \ (\vec{e}_\phi, \ \vec{e}_\phi) \ = \ r^2 \ sen^2\theta \ ;$$

$$g_{r\theta} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_\theta) \ = \ 0; \qquad g_{r\phi} \ = \ (\vec{e}_r, \ \vec{e}_\phi) \ = \ 0; \qquad g_{\theta\phi} \ = \ (\vec{e}_\theta, \ \vec{e}_\phi) \ = \ 0 \ .$$

Em termos matriciais, teremos:

$$g_{ij} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\ sen^2\theta \end{bmatrix} .$$

É oportuno destacar que essa métrica também pode ser obtida por intermédio da expressão (4.1.6.2b), considerando-se que, para o sistema cartesiano (x , y , z), a sua métrica é a matriz unitária. Destaque-se ainda que, usando-se a expressão (4.1.6.5), a métrica associada à base dual desse sistema de coordenadas será dada por:

$$g^{ij} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\ sen^2\theta} \end{bmatrix} .$$

Definição 4.1.6.2. Define-se uma **variedade Riemanniana** a toda variedade diferenciável **M** sobre a qual é definida uma métrica Riemanniana.

Observações

1. Se a métrica for não-Riemanniana, a variedade é chamada não-Riemanniana.

2. **Teorema de Whitney**. É sempre possível definir pelo menos uma métrica Riemanniana sobre uma variedade diferenciável arbitrária.

Definição 4.1.6.3. Seja *X(M)* um conjunto de campos de vetores **X** de uma variedade diferenciável **M**. Define-se **conexão afim** ∇ sobre **M** a seguinte aplicação:

$$\nabla \;:\; X(M) \times X(M) \quad\rightarrow\quad X(M)\ , \qquad (4.1.6.9a)$$

$$(X, Y) \quad\rightarrow\quad \nabla_X(Y)\ , \qquad (4.1.6.9b)$$

com as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}(Z) \;=\; f\ \nabla_X(Z) \;+\; g\ \nabla_Y(Z)\ , \qquad (4.1.6.9c)$
2. $\nabla_X(Y \;+\; Z) \;=\; \nabla_X(Y) \;+\; \nabla_X(Z)\ , \qquad (4.1.6.9d)$
3. $\nabla_X(fY) \;=\; f\ \nabla_X(Y) \;+\; X(f)(Y)\ , \qquad (4.1.6.9e)$

onde **X, Y, Z** $\in$ *X(M)* e **f, g** $\in$ **R(M)**.

Observações

1. A conexão afim ∇ é dita **simétrica**, se:

$$\nabla_X(Y) \;-\; \nabla_Y(X) \;=\; [X,\ Y]\ . \qquad (4.1.6.10a)$$

2. Para uma base local ($\partial_i \;=\; \frac{\partial}{\partial x^i}$, i = 1, 2, ..., n), define-se:

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) \ = \ \Gamma_{ij}^k \ \partial_k \ . \qquad (4.1.6.10b)$$

3. Para uma base dual (dx^i, i = 1, 2, ..., n), define-se:

$$\nabla_{\partial_i}(dx^j) \ = \ - \ \Gamma_{ik}^j \ d^k \ , \qquad (4.1.6.10c)$$

4. Para uma base arbitrária $\{ \ e_i \ \}$ e sua correspondente base dual $\{ \ \theta^i \ \}$, define-se a **forma de conexão** ω_j^i da seguinte maneira:

$$\nabla_{e_k} \ e_j \ = \ \omega_j^i(e_k) \ e_i \ , \qquad (4.1.6.11a)$$

onde:

1. $\omega_j^i \ = \ \Gamma_{kj}^i \ \theta^k \ . \qquad (4.1.6.11b)$
2. $\omega_{ij} \ + \ \omega_{ji} \ = \ dg_{ij}, \quad \omega_{ij} \ = \ g_{ik} \ \omega_j^k \ . \qquad (4.1.6.11c)$
3. $d\theta^i \ + \ \omega_j^i \wedge \theta^j \ = \ 0 \ . \qquad (4.1.6.11d)$

Definição 4.1.6.4. Dado um campo de vetores **X**, define-se um campo de tensores ∇X, chamado **derivada covariante** ou **derivada absoluta**, da seguinte maneira:

$$\nabla X(Y, \ \omega) \ = < \omega, \ \nabla_Y(X) > \ , \qquad (4.1.6.12a)$$

onde $< \ , \ >$ significa produto interno e ω é uma $1 - forma$.

Observações

1. Para uma base local (∂_i) e sua correspondente base dual (dx^i), segundo a expressão (4.1.5.8a), podemos escrever:

$$\nabla X \ = \ \nabla_j X^i \ \partial_i \otimes dx^j \ .$$

Usando-se as expressões (4.1.6.3) e (4.1.6.12a), e considerando-se que $X \ = \ X^k \ \partial_k$, virá:

$$\nabla_j X^i \ = \ \nabla X(\partial_j, \ dx^i) \ = < dx^i, \ \nabla_{\partial_j}(X^k \ \partial_k) > =$$

$$= < dx^i, \ \nabla_{\partial_j} \ (X^k) \ \partial_k \ + \ X^k \ \nabla_{\partial_j} \ (\partial_k) > = < dx^i, \ \partial_j \ X^k \ \partial_k \ + \ X^k \ \Gamma_{jk}^m \partial_m > =$$

$$= \ \partial_j \ X^k \ (dx^i \ \partial_k) \ + \ \Gamma_{jk}^m \ X^k \ (dx^i \ \partial_m) \ = \ \partial_j \ X^k \ \delta_k^i \ + \ \Gamma_{jk}^m \ X^k \ \delta_m^i \ .$$

Portanto:

$$\nabla_j X^i \ = \ X_{,j}^i \ = \ \partial_j X^i \ + \ \Gamma_{jk}^i \ X^k \ . \qquad (4.1.6.12b)$$

1.1. Para um covetor X_i, a sua derivada covariante é obtida usando-se a expressão (4.1.6.10c). Assim, teremos:

$$\nabla_j X_i \;=\; X_{i,j} \;=\; \partial_j X_i \;-\; \Gamma_{ji}^k \; X_k \; . \qquad (4.1.6.12c)$$

2. Seja $\gamma(t)$ uma curva definida em **M**, isto é:

$$\gamma(t) \;:\; [a,\; b] \in R \quad \rightarrow \quad M \; .$$

Para um campo de vetores **X** definido em uma vizinhança aberta de $\gamma([a,\; b])$, a sua derivada covariante ao longo de γ é dada por:

$$t \quad \rightarrow \quad \nabla_{\dot{\gamma}}(X). \qquad (\dot{\gamma} \;=\; \tfrac{d\gamma}{dt}) \; .$$

2.1. Para uma base local (∂_i) e considerando-se que:

$$X \;=\; X^i \; \partial_i, \qquad \dot{\gamma} \;=\; \tfrac{dx^i}{dt} \; \partial_i \; ,$$

teremos:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(X) \;=\; (\tfrac{dX^k}{dt} \;+\; \Gamma_{ij}^k \; \tfrac{dx^i}{dt} \; X^i) \; \partial_k|_{\gamma(t)} \; . \qquad (4.1.6.13a)$$

2.2. Um campo vetorial **X** é dito ser **transportado paralelamente** ao longo de uma curva suave γ(t) em uma variedade diferenciável **M**, se:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(X) \;=\; 0 \; . \qquad (4.1.6.13b)$$

2.3. A conexão afim ∇ é dita **métrica** se o transporte paralelo de **X** ao longo de toda curva diferenciável em **M** preserva o produto interno, ou seja:

$$\nabla_X g \;=\; 0 \; . \qquad (4.1.6.14)$$

3. Para toda **variedade Riemanniana**, existe uma única conexão afim ∇ que é métrica e simétrica. Assim, dada uma base local, tem-se:

$$\Gamma_{ij}^k \;=\; \Gamma_{ji}^k \;=\; \tfrac{1}{2} \; g^{km} \; (\partial_i \; g_{mj} \;+\; \partial_j \; g_{im} \;-\; \partial_k \; g_{ij}) \; , \qquad (4.1.6.15)$$

que são conhecidos como os **símbolos de Christoffel**, **coeficientes da conexão** ∇, **conexão de Levi-Civita** ou **conexão Riemanniana**.

Definição 4.1.6.5. Seja *X(M)* um conjunto de campos de vetores **X** de uma variedade diferenciável **M** e ∇ a conexão afim sobre **M**. Define-se **torsão T** e **curvatura R** dessa conexão, respectivamente, as aplicações definidas por:

$$T \ : \ X(M) \times X(M) \quad \rightarrow \quad X(M), \qquad (4.1.6.16a)$$

$$T(X,\ Y) \ = \ \nabla_X(Y) \ - \ \nabla_Y(X) \ - \ [X,\ Y] \ , \qquad (4.1.6.16b)$$

$$R \ : \ X(M) \times X(M) \times X(M) \quad \rightarrow \quad X(M) \ , \qquad (4.1.6.17a)$$

$$R(X,\ Y)(Z) \ = \ \nabla_X\Big(\nabla_Y(Z)\Big) \ - \ \nabla_Y\Big(\nabla_X(Z)\Big) \ - \ \nabla_{[X,Y]}(Z) \ , \qquad (4.1.6.17b)$$

onde **(X, Y, Z)** $\in$ *X(M)*.

Definição 4.1.6.6. Define-se o **tensor torsão** T_{ij}^k de uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável **M** como a aplicação:

$$T \ : \ X^*(M) \times X(M) \times X(M) \quad \rightarrow \quad R(M) \ , \qquad (4.1.6.18a)$$

definida por:

$$T(\omega,\ X,\ Y) \ = < \omega,\ T(X,\ Y) > . \qquad (4.1.6.18b)$$

Observações

1. Para uma base local (∂_i) e sua correspondente base dual (dx^i), as expressões (4.1.6.16b), (4.1.6.18b) e (4.1.6.10b) nos permitem escrever que:

$$T_{ij}^k \ = \ T(dx^k,\ \partial_i,\ \partial_j) \ = < dx^k,\ T(\partial_i,\ \partial_j) > =$$

$$= < dx^k,\ \nabla_{\partial_i}\ (\partial_j) \ - \ \nabla_{\partial_j}\ (\partial_i) \ - \ [\partial_i,\ \partial_j] > .$$

Usando-se as expressões (4.1.6.3) e (4.1.6.10a), teremos:

$$T_{ij}^k \ = < dx^k,\ \Gamma_{ij}^m\ \partial_m \ - \ \Gamma_{ji}^n\ \partial_n > = \ \Gamma_{ij}^m\ (dx^k \partial_m) \ - \Gamma_{ji}^n\ (dx^k \partial_n) \ .$$

Por fim, usando-se a expressão (4.1.6.3), virá:

$$T_{ij}^k \ = \ \Gamma_{ij}^m\ \delta_m^k \ - \ \Gamma_{ij}^n\ \delta_n^k \quad \rightarrow \quad T_{ij}^k \ = \ \Gamma_{ij}^k \ - \ \Gamma_{ji}^k \ . \qquad (4.1.6.18c)$$

É oportuno esclarecer que, quando a variedade é Riemanniana, o tensor tensão é nulo, uma vez que Γ_{ij}^k é simétrico.

Definição 4.1.6.7. Define-se o **tensor curvatura** $R_{jk\ell}^i$ de uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável **M** como a aplicação:

$$R \ : \ X^*(M) \times X(M) \times X(M) \times X(M) \quad \rightarrow \quad R(M) \ , \qquad (4.1.6.19a)$$

definida por:

$$R(\omega,\ Z,\ X,\ Y)\ = <\omega,\ R(X,\ Y)Z> . \qquad (4.1.6.19b)$$

Observações

1. Para uma base local (∂_i) e sua correspondente base dual (dx^i), as expressões (4.1.6.17b), (4.1.6.19b), (4.1.6.10b) e (4.1.6.3) nos permitem escrever que:

$$R^i_{jk\ell}\ =\ R(dx^i,\ \partial_j,\ \partial_k,\ \partial_\ell)\ = <dx^i,\ R(\partial_k,\ \partial_\ell)\ \partial_j> =$$

$$= <dx^i,\ (\nabla_{\partial_k}\ \nabla_{\partial_\ell}\ -\ \nabla_{\partial_\ell}\ \nabla_{\partial_k}\ -\ \nabla_{[\partial_k,\ \partial_\ell]})\ \partial_j> =$$

$$= <dx^i,\ \nabla_{\partial_k}\ (\nabla_{\partial_\ell}\ \partial_j)\ -\ \nabla_{\partial_\ell}\ (\nabla_{\partial_k}\ \partial_j)> = <dx^i,\ \nabla_{\partial_k}\ (\Gamma^m_{\ell j}\ \partial_m)\ -\ \nabla_{\partial_\ell}\ (\Gamma^n_{kj}\ \partial_n)> \ =$$

$$= <dx^i,\ (\nabla_{\partial_k}\ \Gamma^m_{\ell j})\ \partial_m\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ (\nabla_{\partial_k}\ \ \partial_m)\ -\ (\nabla_{\partial_\ell}\ \Gamma^n_{kj})\ \partial_n\ -\ \Gamma^n_{kj}\ (\nabla_{\partial_\ell}\ \partial_n)> =$$

$$= <dx^i,\ (\nabla_{\partial_k}\ \Gamma^m_{\ell j})\ \partial_m\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ \Gamma^r_{km}\ \ \partial_r\ -\ (\nabla_{\partial_\ell}\ \Gamma^n_{kj})\ \partial_n\ -\ \Gamma^n_{kj}\ \Gamma^s_{\ell n}\ \partial_s> =$$

$$=\ \partial_k\ \Gamma^m_{\ell j}\ (dx^i\ \partial_m)\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ \Gamma^r_{km}\ (dx^i\ \partial_r)\ -\ \partial_\ell\ \Gamma^n_{kj}\ (dx^i\ \partial_n)\ -\ \Gamma^n_{kj}\ \Gamma^s_{\ell n}\ (dx^i\ \partial_s)\ =$$

$$=\ \partial_k\ \Gamma^m_{\ell j}\ \delta^i_m\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ \Gamma^r_{km}\ \delta^i_r\ -\ \partial_\ell\ \Gamma^n_{kj}\ \delta^i_n\ -\ \Gamma^n_{kj}\ \Gamma^s_{\ell n}\ \delta^i_s\ .$$

Por fim, teremos:

$$R^i_{jk\ell}\ =\ \partial_k\ \Gamma^i_{\ell j}\ -\ \partial_\ell\ \Gamma^i_{kj}\ +\ \Gamma^m_{\ell j}\ \Gamma^i_{km}\ -\ \Gamma^n_{kj}\ \Gamma^i_{\ell n}\ . \qquad (4.1.6.20a)$$

1.1. O tensor curvatura $R^i_{jk\ell}$, conhecido como **tensor de Riemann-Christoffel**, satisfaz as seguintes propriedades:

a) $R^i_{jk\ell}\ +\ R^i_{\ell jk}\ +\ R^i_{k\ell j}\ =\ 0$. (Primeira Identidade de Bianchi) (4.1.6.20b)

b) $R^i_{jk\ell,m}\ +\ R^i_{jmk,\ell}\ +\ R^i_{j\ell m,k}\ =\ 0$. (Segunda Identidade de Bianchi) (4.1.6.20c)

c) $R^i_{jk\ell}\ =\ -\ R^i_{j\ell k}$. (4.1.6.20d)

d) $R_{ijk\ell}\ =\ g_{im}\ R^m_{jk\ell}\ =\ -\ R_{jik\ell},\quad R_{ijk\ell}\ =\ -\ R_{ij\ell k},\quad R_{ijk\ell}\ =\ R_{k\ell ij}$. (4.1.6.20e,f,g)

2. A partir do tensor curvatura $R^i_{jk\ell}$, define-se:

$$R_{j\ell}\ =\ R^i_{ji\ell}\ , \qquad (\textbf{Tensor de Ricci}) \qquad (4.1.6.21a)$$

$$R\ =\ g^{ik}\ R_{ik}\ . \qquad (\text{Curvatura Escalar}) \qquad (4.1.6.21b)$$

3. Para uma base arbitrária $\{ e_i \}$ e sua correspondente base dual $\{ \theta^i \}$, define-se a **forma de curvatura** Ω^i_j da seguinte maneira:

$$R(e_i,\ e_j)\ e_k \ = \ \Omega^\ell_k(e_i,\ e_j)\ e_\ell \ , \qquad (4.1.6.22a)$$

onde:

1. $\Omega^i_j \ = \ R^i_{kj\ell}\ \theta^k \wedge \theta^\ell \ . \qquad (4.1.6.22b)$
2. $\Omega^i_j \ = \ d\omega^i_j \ + \ \omega^i_k \wedge \omega^k_j \ . \qquad (4.1.6.22c)$

É importante registrar que, no 4-espaço, as **formas de Cartan** - ω^i_j e Ω^i_j - reduzem-se drasticamente. Assim, existem somente seis (6) formas de conexão ω^i_j em comparação com os quarenta (40) **símbolos de Christoffel** Γ^i_{jk}, e somente seis (6) formas de curvatura Ω^i_j em comparação com os vinte (20) componentes do **tensor de Riemann-Christoffel** $\mathrm{R}^i_{jk\ell}$ ou dez (10) do **tensor de Ricci** R_{ij}.

Exercícios (4.1.6)

EX.4.1.6.1 Para um sistema de coordenadas polares $(r,\ \theta)$, calcule as conexões de Cartan.

Solução

Para o sistema de coordenadas polares $(r,\ \theta)$, vimos que:

$$g_{ij} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} , \qquad g^{ij} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} .$$

a) **Forma de conexão** Usando-se as expressões (4.1.6.11c) e (4.1.6.22c), teremos:

$$dg_{rr} \ = \ d(1) \ = \ 0 \ = \ 2\ \omega_{rr} \quad \rightarrow \quad \omega_{rr} \ = \ 0 \ ,$$

$$dg_{\theta\theta} \ = \ d(r^2) \ = \ 2\ r\ dr \ = \ 2\ \omega_{\theta\theta} \quad \rightarrow \quad \omega_{\theta\theta} \ = \ r\ dr \ .$$

Sendo:

$$\omega^i_j \ = \ g^{ik}\ \omega_{jk} \ ,$$

então:

$$\omega^r_r \ = \ g^{rr}\ \omega_{rr} \ = \ 0, \qquad \omega^\theta_\theta \ = \ g^{\theta\theta}\ \omega_{\theta\theta} \ = \ \frac{1}{r^2}\ r\ dr \ = \ \frac{dr}{r} \ .$$

b) **Forma de curvatura**

Usando-se a expressão (4.1.6.22c) e os resultados anteriores, virá:

$$\Omega_r^r \;=\; d\omega_r^r \;+\; \omega_k^r \wedge \omega_r^k \;=\; d(0) \;+\; \omega_r^r \wedge \omega_r^r \;=\; 0 \;+\; 0 \;=\; 0 \;,$$

$$\Omega_\theta^\theta \;=\; d\omega_\theta^\theta \;+\; \omega_k^\theta \wedge \omega_\theta^k \;=\; d(\tfrac{dr}{r}) \;+\; \omega_\theta^\theta \wedge \omega_\theta^\theta \;=\; d(\tfrac{1}{r}) \wedge dr \;+\; 0 \;=\; -\; \tfrac{1}{r^2}\; dr \wedge dr \;=\; 0 \;.$$

Problemas (4.1)

4.1.1. Usando o conceito de diferenciação exterior:

a) Calcule $d\alpha$, onde:

a.1) $\alpha \;=\; x^2\; y\; dy \wedge dz \;-\; x\; z\; dx \wedge dy$; $a.2)\; \alpha \;=\; 2\; x\; y\; dx \;+\; x^2\; dy$;

a.3) $\alpha \;=\; 2\; y\; z\; dy \wedge dz \;+\; x\; y\; dz \wedge dx \;-\; x\; z\; dx \wedge dy$.

b) Demonstre que:

b.1) $\nabla\; .\; (\vec{A} \times \vec{B}) \;=\; \vec{A}\; .\; \nabla \times \vec{B} \;-\; \vec{B}\; .\; \nabla \times \vec{A}$;

b.2) $\nabla \times (f\vec{A}) \;=\; f\; \nabla \times \vec{A} \;+\; \nabla\; f \times \vec{A}$.

4.1.2. Para o sistema de coordenadas cilíndricas $(r,\; \theta,\; z)$ definido por:

$$f \;:\; (r, \theta,\; z) \;\;\rightarrow\;\; (x \;=\; r\; cos\theta,\; y \;=\; r\; sen\theta,\; z \;=\; z) \;,$$

$$f^{-1} \;:\; (x,\; y,\; z) \;\;\rightarrow\;\; \Big(\; r \;=\; \sqrt{x^2 \;+\; y^2},\; \theta \;=\; tg^{-1}\; (\tfrac{y}{x}) \;\Big) \;,$$

$$0 \leq r \;<\; \infty, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\; \pi \qquad -\; \infty \;<\; z \;<\; \infty \;,$$

encontre: a) as bases holonômica e dual; b) as formas do gradiente, divergente, rotacional e laplaciano; c) a métrica correspondente g_{ij}; d) a derivada covariante de g^{ij}.

4.1.3. Mostre que o **símbolo de Christoffel** Γ^i_{jk} não é um tensor do tipo (1,2).

4.1.4. Para o **tensor de Riemann-Christoffel** $R^i_{jk\ell}$, demonstre as propriedades representadas pelas expressões (4.1.6.20b,c,d,e,f,g).

4.1.5. Para as **formas de Cartan** (conexão ω^i_j e curvatura Ω^i_j), demonstre as propriedades representadas pelas expressões (4.1.6.11c,d) e (4.1.6.22c), e calcule essas formas para o sistema de coordenadas esféricas.

$\boxed{\text{Capítulo 5}}$

5.1 Integração Exterior

5.1.1 Integração de Formas

Definição 5.1.1.1. Dada uma variedade **M** e um **intervalo fechado I** $\in E^1$, define-se um **segmento de curva** Γ ou ($1 - segmento$) como a aplicação:

$$\Gamma \ : \ I \ = \ [a, \ b] \qquad \to \qquad M \ .$$

Definição 5.1.1.2. Seja ω uma $1-forma$ em uma variedade **M** e Γ um $1-segmento$. Define-se a **integral de** ω sobre Γ como:

$$\int_\Gamma \omega \ = \ \int_{[a,b]} \omega^* \ = \ \int_{[a,b]} \Gamma^* \omega \ = \ \int_a^b \omega \ \Big(\ \Gamma'(t) \ \Big) \ dt \ , \qquad (5.1.1.1a)$$

onde (*) é a operação dada pela Definição (4.1.3.2).

Observações

1. Seja $\vec{f} \ = \ \Big(\ f_1(x, \ y, z), \ f_2(x, \ y, z), \ f_3(x, \ y, \ z) \ \Big)$ uma função vetorial contínua em uma região **D** do espaço $\mathbf{R}^3$ e seja ω a correspondente $1 - forma$, dada por:

$$\omega \ = \ f_1 \ dx \ + \ f_2 \ dy \ + \ f_3 \ dz \ .$$

Usando-se o Cálculo Vetorial Elementar, a expressão (5.1.1.1a) é escrita da seguinte forma:

$$\int_\Gamma \omega \ = \ \int_\Gamma f_1 \ dx \ + \ f_2 \ dy \ + \ f_3 \ dz \ = \ \int_\Gamma \vec{f} \ . \ d\vec{r} \ =$$

$$= \ \int_a^b \ [f_1^*(t) \ x'(t) \ + \ f_2^*(t) \ y'(t) \ + \ f_3^*(t) \ z'(t)] \ dt \ ,$$

onde:

$$f_i^* \ = \ f_i \ [x(t), \ y(t), \ z(t)] \ (i \ = \ 1, \ 2, \ 3), \ x'(t) \ = \ \tfrac{dx(t)}{dt}, \ y'(t) \ = \ \tfrac{dy(t)}{dt}, z'(t) \ = \ \tfrac{dz(t)}{dt} \ .$$

No Cálculo Vetorial Elementar, essa integral é conhecida como **integral de linha** ou **circulação**. Na Física, um dos exemplos mais conhecidos dessa integral é o **trabalho** τ de uma força $\vec{F}$ ao longo de uma curva Γ:

$$\tau \ = \ \int_\Gamma \vec{F} \ . \ d\vec{r} \ .$$

2. Seja **f** uma $0 - forma$ e Γ uma curva ($1 - segmento$) que vai do ponto **a** ao ponto **b** - $\Gamma \ = \ [a, \ b]$. O operador **fronteira** ∂ aplicado a Γ - $\partial\Gamma$ - é definido como:

$$\partial\Gamma \;=\; b \;-\; a \;,$$

e a integral de **f** sobre $\partial\Gamma$ como:

$$\textstyle\int_{\partial\Gamma} f \;=\; f(b) \;-\; f(a) \;. \qquad (5.1.1.1b)$$

Definição 5.1.1.3. Dada uma variedade **M** e um **retângulo fechado D** $\in E2$, define-se uma **superfície suave S** ou ($2 - segmento$) como a aplicação:

$$\mathbf{S} \;:\; D \;=\; [u,\; v] \quad \rightarrow \quad M \quad (a \leq u \leq b,\; c \leq v \leq d) \;.$$

Observações

1. Essa superfície **S** é formada por **curvas-arestas**, que são os $1 - segmentos$ $\partial\, \mathbf{S_1},\; \partial\, \mathbf{S_2},\; \partial\, \mathbf{S_3}\; e\partial\, \mathbf{S_4}$, definidos por:

$$\partial\, \mathbf{S}_1(u) \;=\; \mathbf{S}(c,\; u), \qquad \partial\, \mathbf{S}_2(v) \;=\; \mathbf{S}(b,\; v) \;, \qquad (5.1.1.2a,b)$$

$$\partial\, \mathbf{S}_3(u) \;=\; \mathbf{S}(d,\; u) \;, \qquad \partial\, \mathbf{S}_4(v) \;=\; \mathbf{S}(a,\; v) \;, \qquad (5.1.1.2c,d)$$

onde o sentido de percurso se dá no crescimento das variáveis **u** e **v**.

2. Define-se o operador **fronteira** ∂ aplicado a **S** - ∂ **S** - pela expressão:

$$\partial\, \mathbf{S} \;=\; \partial\, \mathbf{S}_1 \;+\; \partial\, \mathbf{S}_2 \;-\; \partial\, \mathbf{S}_3 \;-\; \partial\, \mathbf{S}_4 \;. \qquad (5.1.1.2e)$$

Os sinais de menos na frente de $\partial\, \mathbf{S}_3$ e $\partial\, \mathbf{S}_4$ significam que devemos invertê-los quando se efetua um percurso num só sentido pelas curvas-arestas de **D**.

Definição 5.1.1.4. Seja η uma $2-forma$ em uma variedade **M** e **S** um $2-segmento$. Define-se a **integral de** η sobre **S** como:

$$\textstyle\int\int_{\mathbf{S}} \eta \;=\; \int\int_D \eta^* \;=\; \int\int_D \mathbf{S}^*\eta \;=\; \int_a^b \int_c^d \eta\, \Big(\, \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v \,\Big)\; du\; dv \;. \qquad (5.1.1.3)$$

Observações

1. Seja $\vec{f} \;=\; \Big(\, f_1(x,\; y, z),\; f_2(x,\; y, z),\; f_3(x,\; y,\; z) \,\Big)$ uma função vetorial contínua em uma região **D** do espaço $\mathbf{R}^3$ e seja η a correspondente $2 - forma$, dada por:

$$\eta \;=\; f_1\; dy \wedge dz \;+\; f_2\; dz \wedge dx \;+\; f_3\; dx \wedge dy \;.$$

Do Cálculo Vetorial Elementar, temos:

$$\textstyle\int\int_{\mathbf{S}} \vec{f} \;.\; d\, \vec{S} \;=\; \int\int_{\mathbf{S}} \vec{f} \;.\; \vec{n}\; dS \;=\; \pm \int\int_{R_{yz}} f_1\; dy\; dz \pm \int\int_{R_{zx}} f_2\; dz\; dx \pm \int\int_{R_{xy}} f_3\; dx\; dy \;,$$

onde R_{yz}, R_{zx} e R_{xy} representam as projeções de $\vec{S}$ sobre os planos **yz**, **zx** e **xy**, respectivamente, e os sinais das integrais do segundo membro são determinados pela posição relativa entre o vetor unitário $\vec{n}$ e os eixos coordenados $(x\ ,\ y\ ,\ z)$. Desse modo, a expressão (5.1.1.3) será escrita na forma:

$$\int\int_{\mathbf{S}} \eta \ = \ \int\int_{\mathbf{S}} (f_1\ dy \wedge dz \ + \ f_2\ dz \wedge dx \ + \ f_3\ dx \wedge dy) = \int\int_{\mathbf{S}} \vec{f} \ .\ d\,\vec{S}\ ,$$

que representa, no Cálculo Vetorial Elementar, um tipo de **integral de superfície**. Na Física, ele representa o **fluxo** de um campo vetorial através de uma superfície.

Definição 5.1.1.5. Seja ω uma $1 - forma$ e ∂ **S** a fronteira de **S**. Define-se a **integral** de ω sobre ∂ **S** como:

$$\int_{\partial S} \omega \ = \ \int_{\partial S_1} \omega + \ \int_{\partial S_2} \omega \ + \ \int_{-\ \partial S_3} \omega + \ \int_{-\ \partial S_4} \omega \ =$$

$$= \ \int_{\partial S} \omega \ = \ \int_{\partial S_1} \omega + \ \int_{\partial S_2} \omega \ - \ \int_{\partial S_3} \omega - \ \int_{\partial S_4} \omega \ . \qquad (5.1.1.4)$$

$\boxed{\textbf{Exercícios (5.1.1)}}$

$\boxed{\text{EX.5.1.1.1}}$ Calcule $\int_{\Gamma} \omega$, nos seguintes casos:

a) $\omega \ = \ x\ dy \ - \ y\ dx; \quad \Gamma\ :\ (x,\ y) \ \ \rightarrow \ \ (cos\ t,\ sen\ t), \quad 0 \leq t \leq 2\,\pi\ .$

b) $\omega \ = \ x^2\ dx \ + \ y\ dy \ + \ xyz\ dz; \quad \Gamma\ :\ (x,\ y,\ z) \ \ \rightarrow \ \ (t,\ t,\ t), \quad 0 \leq t \leq 1\ .$

Solução

a) Segundo a expressão (5.1.1.1a), teremos:

$$\int_{\Gamma} (x\ dy \ - \ y\ dx) \ = \ \int_{[0,\ 2\pi]} \Gamma^* \ (x\ dy \ - \ y\ dx) \ =$$

$$= \ \int_0^{2\pi} [cost\ d(sen\ t) \ - \ sen\ t\ d(cos\ t)] \ = \ \int_0^{2\pi} [cos^2\ t \ + \ sen^2\ t]\ dt \ = \ \int_0^{2\pi} dt \ = \ 2\pi\ .$$

b) Tomando-se ainda a expressão (5.1.1.1a), teremos:

$$\int_{\Gamma} (x^2\ dx \ + \ y\ dy \ + \ xyz\ dz) \ = \ \int_{[0,\ 1]} \Gamma^* \ (x^2\ dx \ + \ y\ dy \ + \ xyz\ dz) \ =$$

$$= \ \int_0^1 (t^2 \ + \ t \ + \ t^3)\ dt \ = \ \left[\ \frac{t^3}{3} \ + \ \frac{t^2}{2} \ + \ \frac{t^4}{4}\ \right]_o^1 \ = \ (\tfrac{1}{3} \ + \ \tfrac{1}{2} \ + \ \tfrac{1}{4}) \ = \ \frac{13}{12}\ .$$

$\boxed{\text{EX.5.1.1.2}}$ Calcule $\int\int_{\mathbf{S}} \eta$, nos seguintes casos:

a) $\eta \ = \ x\ dy \wedge dz \ + \ y\ dx \wedge dy\ ;$

$\mathbf{S}\ :\ (x,\ y)\ \ \rightarrow\ \ (u\ +\ v,\ u\ -\ v, uv),\quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\ .$

b) $\eta\ =\ xy\ dy \wedge dz\ +\ x\ dz \wedge dx\ +\ 3xz\ dx \wedge dy$;

$\mathbf{S}\ :\ (x,\ y,\ z)\ \ \rightarrow\ \ (u,\ v,\ u^2\ +\ v^2),\quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\ .$

Solução

a) Inicialmente, calculemos $\mathbf{S}^*\ \eta$:

$$\mathbf{S}^*\ (x\ dy \wedge dz\ +\ y\ dx \wedge dy)\ =$$

$$=\ (u\ +\ v)\ d(u\ -\ v) \wedge d(uv)\ +\ (u\ -\ v)\ d(u\ +\ v) \wedge d(u\ -\ v)\ =$$

$$=\ (u\ +\ v)\ (du\ -\ dv) \wedge (u\ dv\ +\ vdu)\ +\ (u\ -\ v)\ (du\ +\ dv) \wedge (du -\ dv)\ =$$

$$=\ (u\ +\ v)\ (u\ du \wedge dv\ -\ v\ dv \wedge du)\ + (u\ -\ v)\ (-\ du \wedge dv\ +\ dv \wedge du)\ =$$

$$=\ (u\ +\ v)(u\ +\ v)du \wedge dv - 2\ (u - v)\ du \wedge dv = [(u\ +\ v)^2 - 2\ u\ +\ 2\ v]du \wedge\ dv\ ,$$

$$\mathbf{S}^*\ (x\ dy \wedge dz\ +\ y\ dx \wedge dy)\ =\ (u^2\ +\ 2\ u\ v\ +\ v^2\ -\ 2\ u +\ 2v)\ du \wedge dv\ .$$

Usando-se a expressão (5.1.1.3), teremos:

$$\int\int_{\mathbf{S}}\ (x\ dy \wedge dz\ +\ y\ dx \wedge dy)\ =\ \int\int_D\ \mathbf{S}^*\ (x\ dy \wedge dz\ +\ y\ dx \wedge dz)\ =$$

$$=\ \int_o^1 \int_o^1\ (u^2\ +\ 2\ u\ v\ +\ v^2\ -\ 2\ u +\ 2v)\ du\ dv\ =$$

$$=\ \int_o^1 [\int_o^1\ (u^2\ -\ 2u\ +\ 2\ u\ v)\ du]\ (v^2\ +\ 2\ v)\ dv\ =$$

$$=\ \int_o^1\ (\tfrac{1}{3}\ -\ 2\ .\ \tfrac{1}{2}\ +\ 2\ .\ \tfrac{v}{2}\ +\ v^2\ +\ 2v)\ dv\ =\ \int_o^1\ (v^2\ +\ 3\ v\ -\ \tfrac{2}{3})\ dv\ =\ \tfrac{7}{6}\ .$$

b) Inicialmente, calculemos $\mathbf{S}^*\ \eta$:

$$\mathbf{S}^*\ (xy\ dy \wedge dz\ +\ x\ dz \wedge dx\ +\ 3xz\ dx \wedge dy)\ =$$

$$=\ \mathbf{S}^*\ (uv\ dv \wedge d(u^2\ +\ v^2)\ +\ u\ d(u^2\ +\ v^2) \wedge du\ +\ 3u(u^2\ +\ v^2)\ du \wedge dv\ =$$

$$=\ uv\ dv \wedge (2\ udu + 2vdv) + u\ (2\ udu\ +\ 2\ vdv)\ \wedge du + (3\ u^3 + 3uv^2)\ du \wedge dv =$$

$$=\ 2\ u^2 v\ dv \wedge du\ +\ 2\ uv\ dv \wedge du\ +\ (3\ u^3\ +\ 3\ uv^2)\ du \wedge dv\ =$$

$$=\ (3\ u^3\ +\ 3\ uv^2\ -\ 2\ u^2 v\ -\ 2\ uv)\ du \wedge dv\ .$$

Usando-se a expressão (5.1.1.3), teremos:

$$\int\int_{\mathbf{S}} (xy\ dy \wedge dz\ +\ x\ dz \wedge dx\ +\ 3xz\ dx \wedge dy)\ =$$

$$=\ \int\int_D \mathbf{S}^*\ (xy\ dy \wedge dz\ +\ x\ dz \wedge dx\ +\ 3xz\ dx \wedge dy)\ =$$

$$=\ \int_o^1 \int_o^1 (3\ u^3\ +\ 3\ uv^2\ -\ 2\ u^2v\ -\ 2\ uv)\ du\ dv\ =$$

$$=\ \int_o^1 (\tfrac{3}{4}\ +\ \tfrac{3}{2}\ v^2\ -\ 2\ .\ \tfrac{1}{3}\ v\ -\ 2\ .\ \tfrac{1}{2}\ v)\ dv\ =\ (\tfrac{3}{4}\ +\ \tfrac{3}{2} \times \tfrac{1}{3}\ -\ \tfrac{5}{3} \times \tfrac{1}{2})\ =\ \tfrac{5}{12}\ .$$

5.1.2 Teorema Generalizado de Stokes

Seja α uma $p - forma$ e **D** um **(p + 1)-domínio** orientado com uma fronteira ∂ **D** cuja orientação é induzida pela de **D**. O **Teorema Generalizado de Stokes** afirma que:

$$\int_D d\alpha\ =\ \int_{\partial D} \alpha\ . \qquad (5.1.2.1)$$

Observações

1. O **Teorema Generalizado de Stokes**, também conhecido como **Teorema de Barrow-Newton-Leibniz-Gauss-Ostrogradski-Green-Stokes-Poincaré**, pode ser demonstrado em uma variedade diferenciável **M**. Neste caso, **D** e ∂ **D** recebem o nome genérico de **cadeia**.

2. Se α é uma $p - forma$ e β uma $q - forma$, as expressões (4.1.2.1b) e (5.1.2.1) nos permitem obter a generalização da **integração por partes**, ou seja:

$$\int_D d(\alpha \wedge \beta)\ =\ \int_D (d\alpha \wedge \beta\ +\ (-1)^p\ \alpha \wedge d\beta)\ =\ \int_{\partial D} (\alpha \wedge \beta)\ . \qquad (5.1.2.2)$$

3. O operador fronteira ∂ satisfaz a seguinte propriedade:

$$\partial\ .\ \partial\ =\ 0\ . \qquad (5.1.2.3)$$

Intuitivamente, essa propriedade é entendida da seguinte forma: uma curva que limita uma superfície não tem pontos extremos; a superfície que limita um volume não tem borda.

3.1. Uma cadeia **C**, para a qual ∂ **C** $=\ 0$, é dita um **ciclo**.

3.2. Uma cadeia **C**, que pode ser escrita como **C** $= \partial$ **B** para algum **B**, é dita uma **fronteira**. Em vista da expressão (5.1.2.3), temos:

$$\partial\ \mathbf{C}\ =\ \partial(\partial\ \mathbf{B})\ =\ 0\ . \qquad (5.1.2.4)$$

A expressão acima é equivalente ao **Lema de Poincaré**:

$$d(d\alpha) \; = \; 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \partial(\partial \, \mathbf{B}) \; = \; 0 \; .$$

Exemplo

Verificar o **Teorema Generalizado de Stokes** no caso particular em que α é uma $1 - forma$ dada por:

$$\alpha \; = \; f_1(x, \; y, \; z) \; dx \; + \; f_2(x, \; y, \; z) \; dy \; + \; f_3(x, \; y, \; z) \; dz \; .$$

Consideremos uma transformação **T** que muda α para um novo sistema de coordenadas $(u \; , \; v)$. Então, segundo a Definição (4.1.3.2), teremos:

$$\alpha^* \; = \; f(u, \; v) \; du \; + \; g(u, \; v) \; dv \; ,$$

onde **f** e **g** são funções diferenciáveis de (u, v). Usando-se a Definição (4.1.2.1), teremos:

$$d(\alpha^*) \; = \; df \wedge du \; + \; dg \wedge dv \; = \; (\tfrac{\partial f}{\partial u} \; du \; + \; \tfrac{\partial f}{\partial v} \; dv) \wedge du \; + \; (\tfrac{\partial g}{\partial u} \; du \; + \; \tfrac{\partial g}{\partial v} \; dv) \wedge dv \; ,$$

$$d(\alpha^*) \; = \; (\tfrac{\partial g}{\partial u} \; - \; \tfrac{\partial f}{\partial v}) \; du \wedge dv \; .$$

Usando-se a Definição (5.1.1.4), a expressão (4.1.3.2c) e o resultado anterior, virá:

$$\textstyle\int\int_S \; d\alpha \; = \; \int\int_D \; (d\alpha)^* \; = \; \int\int_D \; d(\alpha^*) \; = \; \int\int_D \; (\frac{\partial g}{\partial u} \; - \; \frac{\partial f}{\partial v}) \; du \; dv \; =$$

$$\textstyle= \; \int\int_D \; \frac{\partial g}{\partial u} \; du \; dv \; - \; \int\int_D \; \frac{\partial f}{\partial v} \; du \; dv \; .$$

Para resolvermos as integrais duplas acima, vamos tratá-las como integrais iteradas. Inicialmente, lembremos que o $2 - segmento$ **S** tem as fronteiras $\partial_{S_1}, \; \partial_{S_2}, \; \partial_{S_3}$ e ∂_{S_4} e que o correspondente retângulo **D** $(a \leq u \leq b; \; c \leq v \leq d)$, decorrente da transformação **T**, tem as fronteiras $\partial \; D_1(u) \; = \; D(c, \; u), \; \partial \; D_2(v) \; = \; D(b, \; v), \; \partial \; D_3(u) \; = \; D(d, \; u) \; e \; \partial \; D_4(v) \; = \; D(a, \; v)$. Assim, teremos:

$$\textstyle\int\int_D \; \frac{\partial g}{\partial u} \; du \; dv \; = \; \int_c^d \left(\; \int_a^b \frac{\partial g(u,v)}{\partial u} \; du \; \right) \; dv \; = \; \int_c^d \; I(v) \; dv \; .$$

Como **v** é uma constante na integral **I(v)**, o integrando é uma derivada ordinária em relação a **u**. Portanto, de acordo com o **Teorema Fundamental do Cálculo**, teremos:

$$\textstyle I(v) \; = \; \int_a^b \frac{\partial g(u,v)}{\partial u} \; du \; = \; g(b, \; v) \; - \; g(a, \; v) \; ,$$

conseqüentemente:

$$\textstyle\int\int_D \; \frac{\partial g}{\partial u} \; du \; dv \; = \; \int_c^d \; g(b, \; v) \; dv \; - \; \int_c^d \; g(a, \; v) \; dv \; .$$

Sobre a curva $\partial\ D_2, du\ =\ 0$, então $\alpha^*\ =\ g(b,\ v)\ dv$. Portanto, usando-se a Definição (5.1.1.2), resultará:

$$\int_c^d g(b,\ v)\ dv\ =\ \int_{\partial D_2} \alpha^*\ =\ \int_{\partial S_2} \alpha\ .$$

De modo análogo, teremos:

$$\int_c^d g(a,\ v)\ dv\ =\ \int_{\partial D_4} \alpha^*\ =\ \int_{\partial S_4} \alpha\ .$$

Em vista disso, podemos escrever que:

$$\int\int_D \frac{\partial g}{\partial u}\ du\ dv\ =\ \int_{\partial S_2} \alpha\ -\ \int_{\partial S_4} \alpha\ .$$

Um raciocínio análogo ao que foi considerado acima nos mostra que:

$$\int\int_D \frac{\partial f}{\partial v}\ du\ dv\ =\ \int_{\partial S_3} \alpha\ -\ \int_{\partial S_1} \alpha\ .$$

Os resultados obtidos acima e mais a Definição (5.1.1.5) nos levam a verificar o **Teorema Generalizado de Stokes**. Com efeito:

$$\int_S d\alpha\ =\ \int_{\partial S_1} \alpha\ +\ \int_{\partial S_2} \alpha\ -\ \int_{\partial S_3} \alpha\ -\ \int_{\partial S_4} \alpha\ \ \rightarrow\ \ \int_S d\alpha\ =\ \int_{\partial S} \alpha\ .$$

Exercícios (5.1.2)

EX.5.1.2.1 Use o **Teorema Generalizado de Stokes** para demonstrar:

a) O **Teorema Fundamental do Cálculo** ou **Teorema de Barrow-Newton-Leibniz** - $\int_a^b df\ =\ f(b)\ -\ f(a)$;

b) O **Teorema de Gauss-Ostrogradski** - $\int_V \nabla\ .\ \vec{A}\ dV\ =\ \int_S \vec{A}\ .\ d\vec{S}$;

c) O **Teorema de Stokes** - $\int_S \nabla \times \vec{A}\ .\ d\vec{S}\ =\ \oint \vec{A}\ .\ d\vec{\ell}$.

Solução

a) **Teorema de Barrow-Newton-Leibniz** - Seja **f** uma $0-forma$ e consideremos D = [a, b] cuja fronteira é $\partial D\ =\ \partial([a,\ b])$. Então, usando-se as expressões (5.1.1.1b) e (5.1.2.1), teremos:

$$\int_{[a,b]} df\ =\ \int_a^b df\ =\ \int_{\partial([a,b])} f\ =\ f(b)\ -\ f(a)\ .$$

b) **Teorema de Gauss-Ostrogradski** - Sejam os seguintes vetores:

$$\vec{A}\ =\ A_x(x,\ y,\ z)\ \hat{x}\ +\ A_y(x,\ y,\ z)\ \hat{y}\ +\ A_z(x,\ y,\ z)\ \hat{z}\ ,$$

$$d\vec{S} \ = \ dy \ dz \ \hat{x} \ + \ dz \ dx \ \hat{y} \ + \ dx \ dy \ \hat{z} \ .$$

Seja ϕ_A a $1 - forma$ correspondente ao vetor $\vec{A}$, isto é:

$$\phi_A \ = \ A_x(x, \ y, \ z) \ dx \ + \ A_y(x, \ y, \ z) \ dy \ + \ A_z(x, \ y, \ z) \ dz \ .$$

Segundo vimos no Exercício (4.1.2.1), temos:

$$\star \ \phi_A \ = \ A_x \ dy \wedge dz \ + \ A_y \ dz \wedge dx \ + \ A_z \ dx \wedge dy \ ,$$

$$d\star \ \phi_A \ = \ (\tfrac{\partial A_x}{\partial x} \ + \ \tfrac{\partial A_y}{\partial y} \ + \ \tfrac{\partial A_z}{\partial z}) \ dx \wedge dy \wedge dz \ .$$

Escolhendo-se $\alpha \ = \ \star \ \phi_A$, o **Teorema Generalizado de Stokes** nos permite escrever que:

$$\int_V \ d \ (\star \ \phi_A) \ = \ \int_S \ (\star \ \phi_A) \quad \rightarrow$$

$$\int_V \ (\tfrac{\partial A_x}{\partial x} \ + \ \tfrac{\partial A_y}{\partial y} \ + \ \tfrac{\partial A_z}{\partial z}) \ dx \wedge dy \wedge dz \ = \ \int_S \ A_x \ dy \wedge dz \ + \ A_y \ dz \wedge dx \ + \ A_z \ dx \wedge dy \ .$$

Usando-se a notação do Cálculo Vetorial, teremos:

$$\int_V \ \nabla \ . \ \vec{A} \ dV \ = \ \int_S \ \vec{A} \ . \ d\vec{S} \ .$$

c) **Teorema de Stokes** - Sejam os seguintes vetores:

$$\vec{A} \ = \ A_x(x, \ y, \ z) \ \hat{x} \ + \ A_y(x, \ y, \ z) \ \hat{y} \ + \ A_z(x, \ y, \ z) \ \hat{z} \ ,$$

$$d\vec{S} \ = \ dy \ dz \ \hat{x} \ + \ dz \ dx \ \hat{y} \ + \ dx \ dy \ \hat{z} \ ,$$

$$d\vec{\ell} \ = \ dx \ \hat{x} \ + \ dy \ \hat{y} \ + \ dz \ \hat{z} \ .$$

Seja ϕ_A a $1 - forma$ correspondente ao vetor $\vec{A}$, isto é:

$$\phi_A \ = \ A_x(x, \ y, \ z) \ dx \ + \ A_y(x, \ y, \ z) \ dy \ + \ A_z(x, \ y, \ z) \ dz \ .$$

Segundo vimos no Exercício (4.1.2.1), temos:

$$d \ \phi_A \ = \ (\tfrac{\partial A_z}{\partial y} \ - \ \tfrac{\partial A_y}{\partial z}) \ dy \wedge dz \ + \ (\tfrac{\partial A_x}{\partial z} \ - \ \tfrac{\partial A_z}{\partial x}) \ dz \wedge dx \ + \ (\tfrac{\partial A_y}{\partial x} \ - \ \tfrac{\partial A_x}{\partial y}) \ dx \wedge dy \ .$$

Escolhendo-se $\alpha \ = \ \phi_A$, o **Teorema Generalizado de Stokes** nos permite escrever que:

$$\int_S \ d \ \phi_A \ = \ \oint_\Gamma \ \phi_A \quad \rightarrow$$

$$\int_S \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \int_\Gamma A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz\ .$$

Usando-se a notação do Cálculo Vetorial, teremos:

$$\int_S \nabla \times \vec{A}\ .\ d\vec{S} = \int_\Gamma \vec{A}\ .\ d\vec{\ell}\ .$$

$\boxed{\text{EX.5.1.2.2}}$ Considere um campo de força descrito pela $1 - forma$:

$$\alpha = (2x + y)\, dx + x\, dy\ .$$

Encontre o trabalho τ realizado por esse campo para mover uma partícula do ponto **A** (1, -2) ao ponto **B** (2, 1) ao longo de qualquer curva.

$\boxed{\text{Solução}}$

Inicialmente, calculemos $d\alpha$:

$$d\alpha = d[(2x + y)\, dx + x\, dy] = 2\, dx \wedge dx + dy \wedge dx + dx \wedge dy =$$

$$= -\, dx \wedge dy + dx \wedge dy = 0\ .$$

Portanto, segundo o **Lema de Poincaré**, essa forma é fechada. Vejamos se ela é exata. Para isso, procuremos a $0 - forma$ $\tau(x,\ y)$ de modo que tenhamos:

$$\alpha = d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \tau}{\partial y}\, dy = (2x + y)\, dx + x\, dy\ ,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 2x + y \quad \rightarrow \quad \tau = x^2 + y\, x + f(y)\ ,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = x \quad \rightarrow \quad \tau = x\, y + g(x) \quad \rightarrow \quad \tau(x,\ y) = x^2 + x\, y + C\ .$$

Usando-se o **Teorema Generalizado de Stokes** e o **Teorema Fundamental do Cálculo**, virá:

$$\int_D d\tau = \int_{\partial D} \tau = \int_A^B \tau = \tau(B) - \tau(A) = [x^2 + x\, y + C]_{(2,\ 1)} - [x^2 + x\, y + C]_{(1,\ -\ 2)},$$

$$\tau = 4 + 2 + C - 1 + 2 - C \quad \rightarrow \quad \tau = 7\ .$$

5.1.3 Derivada de Lie

Definição 5.1.3.1. Seja $(X_1,\ X_2,\ ...\ X_{p-1})$ um conjunto de campos de vetores sobre uma variedade **M** e α uma $p - forma$. Define-se o operador **produto interno** de α por **X**, a $(p - 1) - forma$ diferencial $i_X \alpha$ dada por:

$$(i_X \alpha)\ (X_1,\ X_2,\ ...\ X_{p-1})\ =\ \alpha(X, X_1,\ X_2,\ ...\ X_{p-1})\ , \qquad (5.1.3.1)$$

com as seguintes propriedades:

1) $i_{X\ +\ Y}\ =\ i_X\ +\ i_Y$; (5.1.3.2a)

2) $(i_X)^2\ =\ i_X\ i_X\ =\ 0$; (5.1.3.2b)

3) Se $\alpha\ e\ \beta$ são $p - formas$ e $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, então:

$$i_X(\alpha\ +\ \beta)\ =\ i_X\alpha\ +\ i_X\beta; \quad i_X\ (a\ \alpha)\ =\ a\ i_X\alpha\ ; \qquad (5.1.3.2c,d)$$

4) Se α é uma $p - forma$ e β uma $q - forma$, então:

$$i_X(\alpha \wedge \beta)\ =\ (i_X\alpha) \wedge \beta\ +\ (-\ 1)^p\ \alpha \wedge (i_X\beta)\ ; \qquad (5.1.3.2e)$$

5) Se α é uma $p - forma$ e $\mathbf{f}$ uma $0 - forma$, então:

$$i_{fX}\ \alpha\ =\ i_X(f\ \alpha)\ ; \qquad (5.1.3.2f)$$

6) Se α é uma $1 - forma$ e $\mathbf{f}$ uma $0 - forma$, então:

$$i_X\alpha\ =\ \alpha(X); \quad i_X(f)\ =\ 0\ . \qquad (5.1.3.2g,h)$$

Observações

1. Seja α uma $p - forma$ escrita em termos da base $\{\ dx^i\ \}$:

$$\alpha\ =\ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p}\ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}\ ... \wedge dx^{i_p}\ ,$$

e seja ainda $\mathbf{X} = X^i\ \frac{\partial}{\partial x^i}$, onde $\{\ \frac{\partial}{\partial x^i}\ \}$ é uma base natural de $T_p(M)$, dual de $\{\ dx^i\ \}$, então:

$$i_X\alpha\ =\ \frac{1}{(p\ -\ 1)!}\ X^{i_1}\ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p}\ dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} \wedge ... \wedge dx^{i_p}\ . \qquad (5.1.3.3a)$$

1.1. Seja a $1 - forma$ $\mathbf{df}$, dada por:

$$df\ =\ \frac{\partial f}{\partial x^i}\ dx^i\ ,$$

então:

$$i_X df\ =\ X^i\ \frac{\partial f}{\partial x^i}\ = < X,\ df > =\ X(f)\ , \qquad (5.1.3.3b)$$

onde $<\ ,\ >$ é o produto escalar ou interno.

Definição 5.1.3.2. Seja α uma $p - forma$ escrita em termos da base $\{\ dx^i\ \}$:

$$\alpha \ = \ \alpha_{i_1 i_2 ... i_p} \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} \ .$$

Define-se a **Derivada de Lie** de α em relação a **X** - $L_X \alpha$ - como:

$$L_X \alpha \ = \ X(\alpha_{i_1 i_2 ... i_p}) \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} \ + \ (\partial_{i_1} \ X^k) \ \alpha_{k i_2 ... i_p} \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} \ +$$

$$+ \ (\partial_{i_2} \ X^k) \ \alpha_{i_1 k ... i_p} \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} + ...$$

$$... \ + \ (\partial_{i_p} \ X^k) \ \alpha_{i_1 i_2 ... i_{p-1} k} \ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ ... \wedge dx^{i_p} \ . \qquad (5.1.3.4)$$

Observações

1. Para a $0 - forma$ **f**, as expressões (5.1.3.4) e (5.1.3.3b) permitem escrever que:

$$L_X f \ = \ X(f) \ = \ i_X \ df \ = \ X^i \ \frac{\partial f}{\partial x^i} \ = < X, \ df > . \qquad (5.1.3.5)$$

Comparando-se a expressão acima com a expressão (4.1.5.2a), que define a derivada direcional, verifica-se que elas são equivalentes. Desse modo, podemos dizer que:

A Derivada de Lie de uma função é a derivada direcional.

2. Para a $1 - forma \ \alpha \ = \ \alpha_j \ dx^j$, segundo as expressões (5.1.3.4) e (5.1.3.5), teremos:

$$L_X \alpha \ = \ X(\alpha_j) \ dx^j \ + \ (\partial_j \ X^i) \ \alpha_i \ dx^j \ = \ X^i \ (\partial_i \ \alpha_j) \ dx^j \ + \ (\partial_j \ X^i) \ \alpha_i \ dx^j \ .$$

Usando-se as expressões (5.1.3.2d,e) e (5.1.3.3b), obtêm-se os seguintes resultados:

$$i_X \ d\alpha \ = \ i_X [d\alpha_i \wedge dx^i] \ = \ i_X [(\partial_j \alpha_i) \ dx^j \wedge dx^i] \ ,$$

$$i_X \ d\alpha \ = \ \partial_j \alpha_i \ (i_X dx^j) \wedge dx^i \ - \ (\partial_j \alpha_i \ dx^j) \wedge (i_X dx^i) \ = \ X^j \ \partial_j \alpha_i \ dx^i \ - \ X^i \ \partial_j \alpha_i \ dx^j \ .$$

$$d(i_X \alpha) \ = \ d(X^i \ \alpha_i) \ = \ (\partial_i \ X^j) \ \alpha_j \ dx^i \ + \ X^i \ (\partial_j \ \alpha_i) \ dx^j \ .$$

$$i_X \ d\alpha \ + \ d(i_X \alpha) \ = \ X^j \ \partial_j \alpha_i \ dx^i \ + \ (\partial_i \ X^j) \ \alpha_j \ dx^i \ = \ X^i \ \partial_i \alpha_j \ dx^j \ + \ (\partial_j \ X^i) \ \alpha_i \ dx^j \ .$$

Comparando-se esse resultado com o de $L_X \alpha$ calculado acima, verifica-se que:

$$L_X \alpha \ = \ i_X \ d\alpha \ + \ d(i_X \alpha) \ = \ (i_X \ d)\alpha \ + \ (d \ i_X)\alpha \ \ \rightarrow \ \ L_X \alpha \ = \ \{ \ i_X, \ d \ \} \ \alpha \ ,$$

onde { , } indica o operador **anti-comutador**.

2.1. A expressão acima vale para uma $p - forma \ \alpha$. Desse modo, podemos apresentar a seguinte definição.

Definição 5.1.3.3. Seja α uma $p - forma$. Define-se a **Derivada de Lie** de α como:

$$L_X\alpha \;=\; (i_X\; d)\;\alpha \;+\; (d\; i_X)\alpha \;=\; (i_X\; d \;+\; d\; i_X)\alpha \;=\; \{\; i_X,\; d\;\}\;\alpha\;. \qquad (5.1.3.6)$$

Observação

A expressão acima mostra que os operadores **d**, i_X e L_X satisfazem a chamada **identidade de homotopia**:

$$L_X \;=\; i_X\; d \;+\; d\; i_X\;, \qquad (5.1.3.7a)$$

com as seguintes propriedades:

a) $L_X\;.\;d \;=\; d\;.\;L_X;\qquad L_X\;.\;i_X \;=\; i_X\;.\;L_X\;;\qquad$ (5.1.3.7b,c)

b) $[L_X,\; L_Y] \;=\; L_{[X,\;Y]};\qquad [L_X,\; i_Y] \;=\; i_{[X,\;Y]}\;;\qquad$ (5.1.3.7d,e)

c) $[[L_X,\; L_Y],\; L_Z] \;+\; [[L_Z,\; L_X],\; L_Y] \;+\; [[L_Y,\; L_Z],\; L_X] \;=\; 0\;;\qquad$ (5.1.3.7f)

d) $L_X(\alpha \;+\; \beta) \;=\; L_X\alpha \;+\; L_X\beta;\qquad L_X(a\;\alpha) \;=\; a\;L_X\alpha\;;\qquad$ (5.1.3.7g)

e) $L_X(\alpha\wedge\beta) \;=\; L_X\alpha\wedge\beta \;+\; \alpha\wedge L_X\beta\;;\qquad$ (5.1.3.7h)

f) $L_X\;f \;=\; X\;f;\qquad L_X\;df \;=\; d(X\;f)\;;\qquad$ (5.1.3.7i,j)

g) $L_{fX}\alpha \;=\; f\;L_X\alpha \;+\; df\wedge i_X\alpha\;;\qquad$ (5.1.3.7k)

h) $L_{X\;+\;Y} \;=\; L_X \;+\; L_Y;\qquad L_{aX} \;=\; a\;L_X\;,\qquad$ (5.1.3.7l,m)

i) $L_X\;\alpha \;=\; d[\alpha(X)] \;+\; (d\alpha)(X)\;.\qquad$ (5.1.3.7n).

Observação

A expressão (5.1.3.7n) é conhecida como **Identidade de Cartan** [Burke (1985)].

Definição 5.1.3.4. Para o tensor $T^{a_1a_2\dots a_p}_{b_1b_2\dots b_q}$, a **Derivada de Lie** é definida da seguinte maneira:

$$(L_XT)^{a_1a_2\dots a_p}_{b_1b_2\dots b_q} \;=\; X^k\;\partial_kT^{a_1a_2\dots a_p}_{b_1b_2\dots b_q} \;-\; (\partial_kX^{a_1})\;T^{ka_2\dots a_p}_{b_1b_2\dots b_q} \;-(\partial_kX^{a_2})\;T^{a_1k\dots a_p}_{b_1b_2\dots b_q} \;-\;\dots\;-$$

$$-\;(\partial_kX^{a_p})\;T^{a_1a_2\dots a_{p-1}k}_{b_1b_2\dots b_q} \;+\; (\partial_{b_1}X^k)\;T^{a_1a_2\dots a_p}_{kb_2\dots b_q} \;+\; (\partial_{b_2}X^k)\;T^{a_1a_2\dots a_p}_{b_1k\dots b_q} \;+\;\dots\;+$$

$$+\;(\partial_{b_q}X^k)\;T^{a_1a_2\dots a_p}_{b_1b_2\dots b_{q-1}k}\;. \qquad (5.1.3.8a)$$

Observação

Para o **tensor métrico** g_{ij}, tem-se:

$$(L_Xg)_{ij} \;=\; X_{i,\;j} \;+\; X_{j,\;i}\;, \qquad (5.1.3.8b)$$

onde a vírgula (,) representa a Derivada Covariante. Registre-se que, quando $L_X\mathbf{g} = 0$, temos a chamada **Equação de Killing**, que representa uma **isometria**, definida como uma transformação de uma variedade em si própria que preserva a métrica. Essa transformação é também chamada de **movimento**.

Exercícios (5.1.3)

EX.5.1.3.1 Use a Definição de Derivada Covariante, dada pela expressão (4.1.6.12c), para demonstrar a expressão (5.1.3.8b).

Solução

Usando-se as expressões (5.1.3.8a) e (4.1.6.8a), teremos:

$$(L_X g)_{ij} \; = \; X^k \, \partial_k \, g_{ij} \; + \; (\partial_i \, X^k) \, g_{kj} \; + \; (\partial_j \, X^k) \, g_{ik} \; , \qquad \text{(I)}$$

$$\partial_j \, X_i = \partial_j \, (g_{ki} \, X^k) \; = \; X^k \, \partial_j \, g_{ki} \; + \; (\partial_j \, X^k) \, g_{ki} \quad \to \quad (\partial_j \, X^k) \, g_{ki} = \partial_j \, X_i \; - \; X^k \, \partial_j \, g_{ki} \; ,$$

$$\partial_i \, X_j = \partial_i \, (g_{kj} \, X^k) \; = \; X^k \, \partial_i \, g_{kj} \; + \; (\partial_i \, X^k) \, g_{kj} \quad \to \quad (\partial_i \, X^k) \, g_{kj} = \partial_i \, X_j \; - \; X^k \, \partial_i \, g_{kj} \; ,$$

Levando-se essas duas últimas expressões na expressão (I) e lembrando que o tensor $\mathbf{g}_{ij}$ é simétrico, virá:

$$(L_X g)_{ij} \; = \; X^k \, (\partial_k \, g_{ij} \; - \; \partial_j \, g_{ki} \; - \; \partial_i \, g_{kj}) \; + \; \partial_i \, X_j \; + \; \partial_j \, X_i \; . \qquad \text{(II)}$$

Tomemos o **símbolo de Christoffel**, dado pela expressão (4.1.6.15):

$$\Gamma^k_{ij} \; = \; \Gamma^k_{ji} \; = \; \frac{1}{2} \, g^{km} \, (\partial_i \, g_{mj} \; + \; \partial_j \, g_{im} \; - \; \partial_m \, g_{ij}) \; \to \; 2 \, \Gamma^k_{ij} \; = \; g^{km} \, (\partial_i \, g_{mj} + \partial_j \, g_{im} \; - \; \partial_m \, g_{ij}),$$

$$2 \, \Gamma^k_{ij} \, X_k = g^{km} \, X_k \, (\partial_i \, g_{mj} \; + \; \partial_j \, g_{im} \; - \; \partial_m \, g_{ij}) \; = \; X^m \, (\partial_i \, g_{mj} \; + \; \partial_j \, g_{im} \; - \; \partial_m \, g_{ij}) \; ,$$

$$2 \, \Gamma^k_{ij} \, X_k \; = \; X^k \, (\partial_i \, g_{kj} \; + \; \partial_j \, g_{ik} \; - \; \partial_k \, g_{ij}) \quad \to$$

$$- \, \Gamma^k_{ij} \, X_k \; - \; \Gamma^k_{ji} \, X_k \; = \; X^k \, (\partial_k \, g_{ij} \; - \; \partial_i \, g_{kj} \; - \; \partial_j \, g_{ki}) \; . \qquad \text{(III)}$$

Levando-se (III) em (II), e usando-se a expressão (4.1.6.12c), virá:

$$(L_X g)_{ij} \; = \; \partial_i \, X_j \; - \; \Gamma^k_{ij} \, X_k \; + \; \partial_j \, X_i \; - \; \Gamma^k_{ji} \, X_k \quad \to \quad (L_X g)_{ij} \; = \; X_{j,\, i} \; + \; X_{i,\, j} \; .$$

5.1.4 Derivada Convectiva e Integração sobre um Domínio Móvel

Existem situações onde a evolução de sistemas físicos pode ser vista como um fluxo em alguma configuração espacial apropriadamente escolhida, como acontece, por exemplo, na Mecânica dos Fluidos e nos problemas de transporte de um modo geral, tanto clássico quanto quântico. Neste caso, a existência de um fluxo sugere imediatamente o uso da **Derivada de Lie** relativa à velocidade **V** para a generalização do conceito de **Derivada Convectiva** δ_t, importante no tratamento de problemas de fluxo, uma vez que este é descrito por um campo vetorial **V** de velocidades.

Definição 5.1.4.1. Seja α uma $p - forma$. Define-se a **Derivada Convectiva** de α - $\delta_t\ \alpha$ - como:

$$\delta_t\ \alpha\ =\ \partial_t\ \alpha\ +\ L_V\ \alpha\ . \qquad (5.1.4.1)$$

Observações

1. Para a $0 - forma$ **f**, as expressões (5.1.4.1) e (5.1.3.5) permitem escrever que:

$$\delta_t\ f\ =\ \partial_t\ f\ +\ L_V\ f\ =\ \partial_t\ f\ +\ V^i\ \partial_i\ f\ =\ \partial_t\ f\ +\ (\vec{V}\ .\ \nabla)\ f\ . \qquad (5.1.4.2a)$$

2. Para a $p - forma$ α, as expressões (5.1.4.1) e (5.1.3.6) permitem escrever que:

$$\delta_t\ \alpha\ =\ \partial_t\ \alpha\ +\ L_V\ \alpha\ =\ \partial_t\ \alpha\ +\ i_V\ (d\ \alpha)\ +\ d\ (i_V\ \alpha)\ . \qquad (5.1.4.2b)$$

Definição 5.1.4.2. Seja α uma $p - forma$ e consideremos um domínio **D** que se move com uma velocidade **V**. Define-se a taxa de variação da integral de α ao longo de **D**, como:

$$\delta_t \int_D \alpha\ =\ \int_D \delta_t\ \alpha\ . \qquad (5.1.4.3a)$$

Observações

1. Usando-se as expressões (5.1.4.3a) e (5.1.4.2b), teremos:

$$\delta_t \int_D \alpha\ =\ \int_D \partial_t\ \alpha\ +\ \int_D i_V\ (d\ \alpha)\ +\ \int_D d\ (i_V\ \alpha)\ .$$

Usando-se o **Teorema Generalizado de Stokes**, dado pela expressão (5.1.2.1), virá:

$$\delta_t \int_D \alpha\ =\ \int_D \partial_t\ \alpha\ +\ \int_D i_V\ d\ \alpha\ +\ \int_{\partial D} i_V\ \alpha\ . \qquad (5.1.4.3b)$$

1.1. A expressão acima generaliza as fórmulas do Cálculo Vetorial relativas à integração sobre domínios de dimensões 1, 2 e 3. Por exemplo, na dimensão 2, ela corresponde ao **Teorema de Helmholtz**:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{A}\ .\ d\vec{S}\ =\ \int_S \Big(\ \vec{V}\ \nabla\ .\ \vec{A}\ -\ \nabla \times (\vec{V} \times \vec{A})\ \Big)\ .\ d\vec{S}\ . \qquad (5.1.4.3c)$$

Problemas (5.1)

5.1.1. Dada a $1-forma$ ω:

$$\omega \ = \ 2 \ x \ y \ z \ dx \ + \ x^2 \ z \ dy \ + \ x^2 \ y \ dz \ ,$$

calcule $\int_\Gamma \omega$, para:

$$\Gamma \ : \ \ (x, \ y, \ z) \ \ \rightarrow \ \ (ru, \ su, \ tu), \quad 0 \leq u \leq 1 \ .$$

5.1.2. Para cada uma das $1-formas$ ω dadas abaixo, verifique se elas são fechadas, e quais são exatas.

a) $2 \ x \ y \ dx \ + \ x^2 \ dy \ + \ 2 \ z \ dz$;

b) $\frac{(- \ y \ dx \ + \ x \ dy)}{\sqrt{x^2 \ + \ y^2}}$;

c) $e^{x \ y} \ (dx \ + \ \frac{x}{y} \ dy)$;

d) $\frac{(x \ cos \ x \ - \ senx)}{x^2} \ y \ dx \ + \ \frac{senx}{x} \ dy$.

5.1.3. Use o **Teorema Generalizado de Stokes** para demonstrar:

a) **Teorema de Green**: $\int_V \ (f \ \Delta \ g \ - \ g \ \Delta \ f) \ dV \ = \ \oint_S \ (f \ \nabla \ g \ - \ g \ \nabla \ f) \ . \ d\vec{S}$.

b) $V \ = \ \frac{1}{3} \int_{\partial R} (x \ dy \wedge dz \ + \ y \ dz \wedge dx \ + \ z \ dx \wedge dy)$.

5.1.4. Demonstre as propriedades da **Derivada de Lie -** L_X.

5.1.5. Demonstre o **Teorema de Helmholtz**:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{A} \ . \ d\vec{S} \ = \ \int_S \Big(\ \vec{V} \ \nabla \ . \ \vec{A} \ - \ \nabla \times (\vec{V} \times \vec{A}) \Big) \ . \ d\vec{S} \ .$$

Bibliografia - Parte 1

1. Aldrovandi, R. and Pereira, J. G. **An Introduction to Geometrical Physics**. World Scientific (1995).

2. Arnold, V. I. **Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica**. Editora Mir Moscovo (1987).

3. Bamberg, P. and Sternberg, S. **A Course in Mathematics for Students of Physics 1, 2**. Cambridge University Press (1992).

4. Bressoud, D. M. **Second Year Calculus**. Springer-Verlag (1991).

5. Burke, W. L. **Applied Differential Geometry**. Cambridge University Press (1987).

6. Costa, J. E. R. **O Cálculo das Componentes do Tensor de Riemann através de Formas Diferenciais**. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora (1990).

7. Deschamps, G. A. **Exterior Differential Forms**. IN: **Mathematics Applied to Physics**. Springer-Verlag (1970).

8. ————, **Electromagnetics and Differential Forms**, *Proceedings of the IEEE, 69 (6)*: 676-696 (1981).

9. Eguchi, T., Gilkey, P. B. and Hanson, A. J. **Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry**, *Physics Reports 66 (6)*:213-393 (1980).

10. Ferreira, B. A. **Equações de Maxwell em Forma Tensorial e em Linguagem de Formas Diferenciais**. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora (1992).

11. Flanders, H. **Differential Forms with Applications to the Physical Sciences**. Academic Press (1963).

12. ———, **Differential Forms**, IN: **Studies in Global Geometry and Analysis 4**. The Mathematical Association of America. (1967).

13. Göckeler, M. and Schücker, T. **Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity**. Cambridge University Press (1995).

14. Hsu, H. P. **Vector Analysis**. Simon and Schuster, Inc. (1969).

15. Kremer, H. F. **Cálculo Tensorial**. Notas de aulas. Instituto de Física da Universidade Federal do Paraná (1962).

16. Nash, C. and Sen, S. **Topology and Geometry for Physicists**. Academic Press (1992).

17. Oliveira, W. **Introdução à Geometria Riemanniana**. Notas de Aulas. Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora (1990).

18. O'Neil, B. **Elementos de Geometria Diferencial**. Editorial Limusa-Wiley, S. A. (1972).

19. Schleifer, N. **Differential Forms as a Basis for Vector Analysis, with Applications to Electrodynamics**, *American Journal of Physics 51 (12)*: 1139-1145 (1983).

20. Schutz, B. **Geometrical Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press (1995).

21. Spivak, M. **Calculus on Manifolds**. W. A. Benjamin, Inc. (1965).

22. von Westenholz, C. **Differential Forms in Mathematical Physics**. North-Holland Publishing Company (1986).

CURRÍCULO RESUMIDO

José Maria Filardo Bassalo (jmfbassalo@gmail.com) nasceu em Belém do Pará, em 10 de setembro de 1935. Engenheiro Civil pela Escola de Engenharia do Pará, em 1958; Bacharel em Física pela Universidade de Brasília, em 1965; Mestre (1973) e Doutor (1975) pela Universidade de São Paulo. Publicou: 66 trabalhos científicos no Brasil e no exterior; 235 trabalhos sobre a História da Física divulgados em sítios, revistas nacionais e internacionais. É autor dos seguintes livros - Editados pela UFPA: **Introdução à Mecânica dos Meios Contínuos** (1973); **Aspectos Contemporâneos da Física** (2000), com Antônio Nassar e Mauro Cattani; **Tópicos da Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm** (2003), com Nassar, Cattani e Paulo Alencar; **Teoria de Grupo e Algumas Aplicações em Física** (2005), com Cattani; **Forma de Linhas Espectrais em Gases Neutros, Plasmas Densos e Estabilidade Quiral** (2007), com Cattani; **Crônicas da Física**: Tomos **1** (1987); **2** (1990); **3** (1992); **4** (1994); **5** (1998); **6** (2002); **Nascimentos da Física (3.500 a. C. – 1900 A. D.)** (1996); **Nascimentos da Física (1901-1950)** (2000); **Nascimentos da Física (1951-1970)** (2005). Outras Editoras: **Da Sovela à Universidade Passando pela Engenharia** (Fundação Minerva, 2005); **Eletrodinâmica Quântica** (Livraria da Física, 2006); **Ética e Atividade Científica** (Átomo/EDUFPA, 2006), com Robson Farias e Edison Ferreira; **Nascimentos da Física (1971-1990)** (Fundação Minerva, 2007) e **Nascimentos da Física (1991-2000)** (Fundação Minerva, 2009); **Eletrodinâmica Clássica** (Livraria da Física, 2007); **Teoria de Grupos** (Livraria da Física, 2008), **Osciladores Harmônicos: Clássicos e Quânticos** (Livraria da Física, 2009), **Cálculo Exterior** (Livraria da Física, 2009), **Elementos de Física Matemática 1, 2, 3** (Livraria da Física, 2010, 2011, 2012) com Cattani; **Dirac** (Livraria da Física, 2013), **Landau** (Livraria da Física, 2013), **Einstein** (Livraria da Física, 2013), **Pauli** (Livraria da Física, 2013), **Fermi** (Livraria da Física, 2013), e **Feynman** (Livraria da Física, 2013), com Francisco Caruso. **Curiosidades da Física – 1, 2, 3, 4, 5, 6** (Fundação Minerva, 2007, 2008, 2010, 2010, 2011, 2012) e **Meus Caminhos e a Repressão Militar** (Casa Editorial Maluhy & Co., 2013). Para detalhes desse resumo curricular (atualizado em 12 de maio de 2014), ver o sítio: http://www.bassalo.com.br.

CURRÍCULO RESUMIDO

Mauro Sergio Dorsa Cattani (mcattani@if.usp.br) nasceu em Pompéia, Estado de São Paulo, no dia 29 de maio de 1942. Em 1963 bacharelou−se em Física pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (FFCLUSP). Em 1964 foi contratado como assistente do Prof. César Lattes na Cadeira de Física Superior do Departamento de Física da FFCLUSP. Em 1965 participou da criação de um Grupo de Geofísica em Salvador, Bahia, no Departamento de Física da Universidade Federal da Bahia. No período de 1966−1968 esteve no Instituto de Física da Universidade de Pisa desenvolvendo sua Tese de Doutoramento. Obteve os títulos de Doutor em Física em setembro de 1968 e de Livre Docência em setembro de 1969, ambos no Departamento de Física da FFCLUSP. Em 1970 participou da criação de um Grupo de Astrofísica no Instituto de Física da USP (IFUSP). Em 1972 fez seu Pós−Doutoramento no Laboratório de Infra−Vermelho da Universidade de Paris no Campus de Orsay, França. Em 1972 foi promovido a Professor Adjunto do IFUSP. Em 1974 participou da criação de um Grupo de Plasmas que deu origem ao primeiro Tokamak Brasileiro (TBr 1). Em 1977 foi eleito Membro Titular da Academia Paulista de Ciências do Estado de São Paulo. Em 1985 tornou−se Professor Titular do IFUSP. Aposentou-se compulsoriamente em 2012. Em 2009 foi eleito Membro Titular da Academia Paraense de Ciências. Foi Editor Associado da revista Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer de 1983 a 1993. Tem cerca de 165 trabalhos publicados em revistas de âmbito internacional. Orientou 9 doutoramentos e 8 mestrados. Publicou os livros **Elementos de Mecânica dos Fluidos (**Edgard Blücher, 1985 e 1990**), Aspectos Contemporâneos da Física** (2000) com J.M.F.Bassalo e A.B. Nassar, **Tópicos da Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm** (2003), com J.M.F.Bassalo, A. B. Nassar e P.T. S. Alencar.Com J.M.F.Bassalo publicou **Teoria de Grupo e Algumas Aplicações em Física (**2005), **Forma de Linhas Espectrais em Gases Neutros, Plasmas Densos e Estabilidade Quiral** (2007), **Teoria de Grupos** (2008),**Osciladores Harmônicos: Clássicos e Quânticos** (2009) **Cálculo Exterior** (2009) e **Elementos de Física Matemática 1, 2 e 3**. (2010-2012). Publicou cerca de 40 artigos sobre **Ensino de Física** (RBEF **e** IFUSP**)** e 6 **e-books** (IFUSP) sobre **Ensino de Física** & **Pesquisa**. Tem vários artigos de divulgação científica publicados no jornal O Estado de São Paulo. O seu currículo vitae integral pode ser visto no site http://fap.if.usp.br/~mcattani