

**INSTITUTO
DE FÍSICA**

preprint

IFUSP/P-264

CONFRONTO LORENTZ-EINSTEIN E SUAS INTERPRETAÇÕES.
II. A TEORIA DE LORENTZ E SUA CONSISTÊNCIA.

A. Villani

Instituto de Física, Universidade de São Paulo
São Paulo, Brasil.

ABRIL/1981

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA
Caixa Postal - 20.516
Cidade Universitária
São Paulo - BRASIL

IFUSP - USP

**FORA DE
CIRCULAÇÃO**

IFUSP/P 264
IFUSP - USP

O CONFRONTO LORENTZ-EINSTEIN E SUAS INTERPRETAÇÕES.

II. A teoria de Lorentz e sua consistência.

A. Villani

Instituto de Física - USP

Na primeira parte deste nosso trabalho⁽¹⁾ foi mostrado que a teoria de Einstein constitui uma ruptura em relação à física do começo do século XX, ruptura que se caracteriza pelo abandono da teoria eletromagnética (e.m.) do éter. Foi mostrado também que a teoria da Relatividade não se baseia no resultado negativo da experiência de Michelson e Morley, problema bem vivo para os teóricos do éter, mas se apresenta como uma teoria de princípios, ou seja, uma teoria que se propõe uma re-interpretação de todos os resultados anteriores com base em alguns princípios fundamentais.

Nesta segunda parte analisaremos diretamente o problema da consistência das sucessivas modificações da teoria de Lorentz, problema que ainda hoje é discutido entre os intérpretes da teoria da Relatividade, pois ele é crucial para qualquer tentativa de sua reconstrução racional: ele tem implicações metodológicas e ideológicas e obriga os seus intérpretes a revelar e discutir abertamente os pressupostos teóricos de suas análises.

Já foi dito que a nossa pretensão não é reconstruir o debate, mas simplesmente apresentar posições diferentes e contrastantes: por isso escolhemos relatar em primeiro lugar a opinião de Holton⁽²⁾ em relação a este tema, e em segundo lugar a posição de E. Zahar⁽³⁾, que além de criticar a abordagem holtoniana, propõe uma maneira sistemática de enfrentar o problema.

II.1. A teoria eletromagnética de Lorentz

A análise de Holton parte diretamente de uma crítica da versão final da teoria de Lorentz, publicada em 1904: no entanto, quem não é familiarizado com este assunto, dificilmente poderá entender o valor das críticas sem conhecer, pelo menos em grandes linhas, o trabalho de progressiva reformulação da teoria. Por isso vamos apresentar o resumo das várias etapas do trabalho de Lorentz como fornecido por G. Batimelli⁽⁴⁾, eliminando, quando possível, toda a interpretação que a-

presente alguma possibilidade de contestação.

Os cientistas do fim do século XIX estavam particularmente animados com a perspectiva de preencher o vácuo deixado pela crise do mecanicismo, através de um programa eletromagnético que se tornasse novamente elemento unificador da Física. De fato, a utilização de ações mecânicas de contato, além de tornar a explicação dos fenômenos excessivamente complexa e dificilmente manipulável matematicamente, não dava conta de um número crescente de fenômenos físicos, mesmo postulando a presença de um meio mecânico entre os corpos. A teoria e.m. de Lorentz, a mais bem sucedida, é uma tentativa de produzir esta unificação através da interação entre o eter, sede do campo e.m., e as cargas elétricas

"O mundo físico consiste de três coisas separadas, tres tipos de material fundamental: primeiro a matéria ordinária tangível, segundo os elétrons, terceiro o eter...

... Em relação ao eter, - o suporte da luz que preenche o universo inteiro - ... desde que temos aprendido a considerá-lo como transmissor não só dos fenômenos óticos, mas também eletromagnéticos, o problema da sua natureza tornou-se mais premente do que nunca...

... A explicação mais simples do fenômeno (da aberração da luz) é assumir que a Terra inteira é completamente permeável ao eter e pode-se movimentar através dele sem arrastá-lo...

Graças as investigações de Vander-Walls e de outros físicos, fomos forçados a pensar que também cada molécula individual é permeável (ao eter)... e o mesmo parece verdadeiro para cada átomo; isso nos conduz a avançar a idéia que um átomo, em última instância, consiste em algum tipo de modificação local do eter onipresente, modificação que pode se deslocar de um local ao outro sem que o próprio meio altere sua posição..."⁽⁵⁾.

Nesta teoria o eter, que é a sede do campo e.m., interage sôe eletromagneticamente com a matéria ponderável que é constituída de cargas extensas: ele penetra a matéria e conseqüentemente podem ter lugar fenômenos e.m. no interior dela. Ao mesmo tempo o eter não se movimenta com a matéria, por isso a velocidade da luz, no vácuo, é independente do estado de movimento da fonte, ao contrário do que sustentavam as teorias balísticas da luz. Qual a natureza da interação entre cargas e eter?

"... Para encontrar o ponto de partida da teoria (dos fenômenos e.m. em substâncias em movimento) eu tenho recorrido aos elétrons. Tenho

elaborado a opinião que estes devem ser permeáveis ao eter e que cada um deles deve ser o centro de um campo elétrico e, quando em movimento, também de um campo magnético...

... A força que age num elétron é sempre devida ao eter na sua vizinhança imediata e, portanto, é afetado diretamente pelo estado deste eter e indiretamente pelas cargas e velocidades dos outros elétrons: mais ainda a força depende da carga e da velocidade da partícula sobre a qual está agindo...

Com isso consegui obter o coeficiente de arrastamento de Fresnel e explicar de forma simples a maioria dos fenômenos ópticos nas cargas em movimento... Ao mesmo tempo temos colocado as bases de uma teoria geral que atribue aos elétrons todos os processos e.m. que tem lugar nas substâncias ponderáveis"⁽⁶⁾.

Dessa forma Lorentz tinha conseguido explicar os fenômenos ópticos e eletromagnéticos, até então não relacionados, desde a emissão e absorção do calor radiante, a dispersão normal e anômala, a rotação da luz de Faraday e Voigt, até o efeito Zeeman. Mais ainda a teoria era compatível, até a primeira ordem em v/c , com os resultados da aberração da luz das estrelas, do arrastamento parcial dos raios luminosos pela matéria em movimento, do efeito Doppler, fenômenos nos quais não podia ser evidenciado o movimento da Terra em relação ao eter.

Quando Michelson propôs e realizou (em 1887, junto com Morley) o experimento do interferômetro com grande precisão, os efeitos do movimento da Terra em relação ao eter, que são de segunda ordem em v/c , deveriam finalmente ter aparecido. O resultado negativo da experiência constituiu a primeira anomalia séria ao modelo do eter estacionário: Lorentz propôs em 1892 a hipótese da contração, segundo a qual o movimento das franjas não apareceria devido a uma compensação entre o efeito da velocidade da Terra e a alteração do comprimento do braço do interferômetro na mesma direção. A hipótese não era sem fundamentação. De fato, Lorentz tinha demonstrado que entre as coordenadas de um sistema S_1 de cargas em equilíbrio e em repouso no eter e as coordenadas do sistema S_2 com as mesmas cargas em equilíbrio e em movimento com velocidade v no eter existe a relação:

$$x_2 = x_1 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{1/2} \quad y_2 = y_1 \quad z_2 = z_1$$

se a velocidade de S_2 for na direção x . Neste caso existe uma relação correspondente entre as forças elétricas, que garante o equilíbrio nos dois sistemas e que é consequência das equações de Maxwell.

Em outras palavras, para cargas em movimento, o equilíbrio é mantido através de uma contração das distâncias.

Em 1892, Lorentz já pensava numa analogia entre as forças elétricas e moleculares, mas somente em 1895 ele desenvolveu explicitamente a hipótese de que as forças moleculares se transformassem da mesma forma que as elétricas: dessa forma a contração dos corpos em movimento dependeria diretamente da manutenção do equilíbrio, a nível molecular. No mesmo trabalho Lorentz introduziu um tempo local diferente do tempo absoluto, que tinha função auxiliar no sistema de referência em movimento. Através desta variável fictícia Lorentz pode enunciar o seu teorema dos estados correspondentes, que introduzia uma simetria na dependência funcional entre os campos e as coordenadas espaço-temporais nos sistemas de referência do éter e em movimento, permitindo dessa forma uma primeira invariância das equações de Maxwell.

A hipótese da contração espacial e o teorema dos estados correspondentes dão conta do resultado negativo do experimento de M.-M., mas estão em contradição com os resultados da experiência de Rayleigh e Brace de 1902, e de Trouton e Noble de 1903: no primeiro caso previa-se uma dupla refração, no segundo um torque restaurador, mas em ambos os casos os efeitos, de segunda ordem em v/c , não apareceram.

A versão final da teoria de Lorentz, com algumas modificações tendentes a eliminar a possibilidade de detetar os efeitos do movimento em relação ao éter, apareceu em 1904 com a versão definitiva das equações de transformação junto com uma proposta sobre a forma e a estrutura do elétron: a idéia fundamental é que a contração das distâncias e a dilatação dos tempos junto com suas consequências não permitem detetar experimentalmente os efeitos do movimento em relação ao éter pois afetam diretamente os instrumentos de medida, que realizam medidas coerentes com as coordenadas "fictícias" e não com as coordenadas "verdadeiras".

II.2. A crítica de Holton

A análise que Holton faz da teoria de Lorentz não está reunida num único trabalho, e por isso deve ser construída a partir de várias observações espalhadas; também ela se apresenta sempre comparativa, no sentido de que Holton tenta mostrar que a teoria de Lorentz é inferior a de Einstein. Para caracterizar essa inferioridade Holton utiliza dois tipos de argumentação: de um lado a menor consistência do ponto de vista matemático e do outro lado a maior utilização de hipóteses ou suposições.

O trabalho fundamental de Lorentz de 1904, tem por finalidade,

como já acenamos, explicar, dentro do contexto da teoria do eter estacionário, os recentes resultados experimentais tentando atingir uma teoria válida até segunda ordem em v/c . Para Holton, este trabalho apresenta as seguintes características.

a) Lorentz não consegue a completa invariância das equações de Maxwell para as transformações por ele inventadas, mesmo até segunda ordem, na presença de cargas em movimento.

De fato a transformada da equação:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

passa a ser no sistema auxiliar

$$\operatorname{div} \vec{D}' = \rho' \left[1 - \frac{v}{c} \mu'_x \right]$$

onde \vec{D} , ρ e \vec{D}' , ρ' são campo elétrico e densidade de carga nos dois sistemas, v é a velocidade do sistema em movimento e μ'_x é a velocidade das cargas, no novo sistema, na direção \hat{x} .

Isso na opinião de Holton, implica na possibilidade, de detectar, em princípio, o movimento da Terra em relação ao eter, pela possibilidade de encontrar um sistema de referência no qual a carga não se conserva.

b) O segundo ponto é o caráter precário da teoria de Lorentz, pois as sucessivas complicações vem sempre de novos dados experimentais que devem ser tratados incluindo hipóteses especiais. O próprio resultado negativo das experiências de Michelson, Rayleigh e Noble é uma compensação de feitos opostos: de um lado a modificação dos instrumentos de medida e do outro a modificação dos objetos medidos. Este caráter precário da teoria pode ser objetivamente observado pelo número de hipóteses sucessivamente introduzidas. Prescindindo por enquanto de uma análise mais refinada sobre a plausibilidade das hipóteses do ponto de vista lógico, psicológico ou epistemológico, Holton afirma que no trabalho aparecem pelo menos trinta vezes as palavras hipótese, assunção, suposição ou equivalente. Para conseguir salvar o eter, respeitar os mecanismos e os princípios conhecidos e integrar os resultados experimentais, Lorentz fez as seguintes hipóteses:

a) Que o éter é estacionário.

b) Que as equações de transformação das coordenadas espaço-temporais são do tipo por ele proposto.

- c) Que a teoria se restringe a pequenos valores da razão v/c .
- d) Que o elétron em repouso é esférico.
- e) Que a carga do elétron é uniformemente distribuída.
- f) Que toda a massa é de origem eletromagnética.
- g) Que o elétron em movimento muda as suas dimensões exatamente na ra-

zão $\left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{1/2}$.

- h) Que as forças entre partículas não carregadas e as forças entre uma partícula não carregada e outra carregada tem as mesmas propriedades de transformação das forças eletrostáticas num sistema em repouso.
- i) Que as cargas nos átomos são constituídas de elétrons separados.
- j) Que cada uma das cargas nos átomos é influenciada somente pelas outras cargas do mesmo átomo.
- k) Que o átomo em movimento deforma-se como um todo da mesma maneira do elétron.

Ao contrário, a teoria de Einstein apresenta os dois postulados, da invariância das leis e da constância da velocidade da luz, e as hipóteses sobre a isotropia e homogeneidade do espaço, além das três propriedades lógicas da definição de sincronização de relógios. A natureza dessas hipóteses é bem mais geral e isso para Holton caracteriza a simplicidade lógica e a abrangência da teoria.

Após essa análise bem objetiva dos sucessivos trabalhos de Lorentz, Holton não se mostra completamente satisfeito. Procurando avançar através da análise das hipóteses que Lorentz utilizou, pergunta-se se estas não podem ser classificadas ou hierarquizadas, através da avaliação do valor que assumem na construção da teoria. A resposta que ele dá a esta pergunta é que existem hipóteses "ad hoc", ou seja, inventadas somente para explicar alguma coisa específica, e hipóteses "não ad hoc". Como distinguir entre as duas?

Na longa discussão que Holton faz a respeito, a coisa mais clara é que a caracterização de uma hipótese como "ad hoc" não é trivial.

a) Em primeiro lugar é uma caracterização que depende do contexto: no caso específico da contração das distâncias, ela é certamente "ad hoc" quando utilizada para explicar o resultado de Michelson de outra forma não explicável, mas perde este caráter quando é derivada das equações de transformação de Lorentz. Por sua vez as equações de transformação podem ser consideradas "ad hoc" quando utilizadas somente para tornar covariantes as equações de Maxwell. (De fato Lorentz se recusou a tirar as consequências físicas do "tempo local", utilizado como artifício matemático para obter a covariância). Pelo contrá-

rio as mesmas equações de transformação, quando derivadas dos postulados da Relatividade, não seriam "ad hoc" em relação ao experimento de M.-M., pois a explicação que dão do resultado nulo é muito mais geral do que o mesmo.

b) Em segundo lugar o termo "ad hoc" é aplicado diferentemente por diferentes pessoas ou em diferentes épocas a uma mesma hipótese. Por exemplo: Fitzgerald considerava a hipótese de contração "ad hoc" em 1889, quando ela a propôs pela primeira vez, mas já em 1894, depois de analisar o tratado de Lorentz sobre as forças moleculares, modificou a sua opinião. Ao contrário na mesma época, o próprio Lorentz parecia ainda não completamente satisfeito em relação a mesma hipótese e Poincaré ainda criticou a abordagem de Lorentz como muito frágil e dependente, até a formulação do trabalho de 1904.

c) Em terceiro lugar precisa distinguir entre dois sentidos diferentes da qualificação "ad hoc", de um lado o do cientista que trabalha numa determinada área e que "sente" que uma determinada hipótese é "ad hoc" e de outro lado o do lógico que analisa as implicações epistemológicas de uma determinada hipótese que já pertence a ciência como instituição. Por exemplo a hipótese de contração, apesar de bem recebida pelos teóricos do eter, pois dava conta do resultado de Michelson, era considerada "ad hoc" pela comunidade científica, e manteve este caráter aleatório e improvável mesmo depois que ela foi ligada a um esquema explicativo baseado na analogia entre forças elétricas e moleculares, ao passo que provavelmente isso seria suficiente para descharacterizá-la como "ad hoc" aos olhos de um epistemólogo.

Para Holton, então, a caracterização da teoria de Lorentz e das suas hipóteses não pode ser feita unicamente analisando o status lógico do problema e enumerando as premissas logicamente independentes, nem utilizando o critério de Popper que considera aceitáveis somente aquelas hipóteses auxiliares que aumentam o grau de falsificabilidade do sistema⁽⁷⁾: ao contrário deve-se sobretudo recorrer à intuição que os cientistas tem sobre sua essencialidade e sua capacidade de resolver problemas. No nosso caso, como vimos, as opiniões variam dependendo do período e das pessoas, que, conseqüentemente, tomaram posições diferentes diante das mesmas hipóteses.

Holton parece endossar a opinião de Einstein em relação a teoria de Lorentz.

"A explicação até então corrente dos resultados dos experimentos de Michelson em termos de contração, comprometia ulteriormente a teoria eletrodinâmica baseada no eter, que Einstein já conside

rava inadequada por razões principalmente estéticas. O problema que Einstein via não era o status lógico da hipótese da contração nem o próprio resultado experimental de Michelson (pois poderia ser acomodado, mesmo que com ulteriores dificuldades), mas a incapacidade da teoria de Lorentz de satisfazer o critério de perfeição interna de uma teoria... Nas teorias de princípios, a ênfase não é numa propriedade ou num fenômeno particular, mas na síntese criativa da totalidade da experiência física num campo. Seria uma infeliz caricatura pensar que qualquer experimento fosse a razão principal da reestruturação de toda a eletrodinâmica"⁽⁸⁾.

Uma posição bem diferente é defendida por Zahar, que articula toda a sua argumentação utilizando o modelo da "Metodologia de Programas de Investigação Científica", (M.P.I.C.) de Lakatos com pequenas modificações.

O primeiro passo consiste numa explicitação das características de um programa de pesquisa, das várias possibilidades de uma hipótese ser considerada "ad hoc", e finalmente da possibilidade de um fato ser considerado como novo, podendo de tal forma confirmar ou não uma hipótese.

O segundo passo da argumentação de Zahar é a caracterização específica do programa de Lorentz e da hipótese da contração dentro desse contexto. Finalmente o último passo é a demonstração que, contrariamente a opinião de Holton, a hipótese da contração não pode ser considerada "ad hoc" em nenhum dos sentidos definidos anteriormente.

II.3.1. O modelo M.P.I.C.

Um programa de pesquisa é caracterizado por um núcleo sólido que, por decisão metodológica é considerado não falsificável pois constitui a base para articular as explicações e as deduções: dentro do programa as teorias nascem da união do núcleo sólido com as hipóteses auxiliares, que por sua vez serão modificadas ao aparecem anomalias. No entanto as modificações não serão feitas de forma arbitrária: existe uma heurística do programa, que é um conjunto de sugestões e "dicas" menos rígidas do núcleo sólido, que governa o aparecimento ou a modificação das hipóteses auxiliares.

Com essas premissas podemos agora caracterizar em que sentido uma hipótese pode ser considerada "ad hoc". Na realidade o conceito elaborado por Zahar não se refere a uma hipótese isolada, mas a relação entre duas teorias sucessivas, obtidas através da modificação ou introdução de hipóteses auxiliares.

"Uma teoria é $ad\ hoc_1$ se ela não apresenta nenhuma consequência nova em relação a anterior. Uma teoria é $ad\ hoc_2$ se, apesar de apresentar consequências novas, nenhuma delas foi de fato verificada; por uma razão ou outra o experimento inventado para testar uma nova previsão não pôde ser realizado ou, pior ainda, uma vez realizado deu resultados contrastantes com as previsões da teoria.

Finalmente uma teoria é $ad\ hoc_3$, se, (apesar de apresentar consequências novas verificadas) ela é obtida da anterior através de modificações das hipóteses auxiliares que não estão de acordo com o espírito da heurística do programa"⁽⁹⁾.

É claro que pelo menos os dois primeiros sentidos de $ad\ hoc$ dependem estritamente daquilo que se considera consequência nova: por isso torna-se necessário um esclarecimento a respeito.

Um fato é considerado novo em relação a uma dada hipótese se ele não pertence a situação problema que governou a construção da hipótese. Evidentemente, qualquer fato temporalmente mais novo do que a hipótese obedecerá ao critério apresentado: no entanto a novidade temporal não é condição necessária para a novidade de um fato. Em outras palavras, para avaliar a relação entre teoria e dados empíricos dentro de um programa de pesquisa é necessário considerar a maneira pela qual a teoria foi construída e os problemas que ela pretendia resolver. Por exemplo as linhas espectrais do hidrogênio obedeciam a uma certa fórmula matemática, encontrada empiricamente por Balmer: elas eram conhecidas há bastante tempo, quando Bohr propôs a sua teoria do átomo com os níveis energéticos dos elétrons caracterizados por órbitas estáveis; as razões entre as diferenças de energia de alguns níveis são as mesmas que as razões entre as frequências das linhas espectrais sugerindo portanto uma relação entre diferenças de níveis de energia e frequências espectrais. Portanto estas mesmas linhas espectrais com as suas relações características podem ser consideradas um fato novo que confirma a hipótese dos níveis energéticos dos elétrons.

II.3.2. O programa de Lorentz

No caso específico do programa de Lorentz, o núcleo sólido consiste nas equações de Maxwell para o campo e.m., nas leis de Newton do movimento, com as transformações de Galileu e a expressão da força de Lorentz:

$$\vec{F} = c \left[\vec{D} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{H} \right]$$

A heurística do programa nasce do princípio metafísico de que todos os fenômenos físicos são governados por ações transmitidas através do eter. A aplicação dessa heurística a problemas específicos geram hipóteses auxiliares e, com elas, teorias que se modificam sucessivamente.

No nosso caso temos três teorias sucessivas: T_1, T_2, T_3 .

T_1 é constituída pelo núcleo sólido com as hipóteses implícitas:

- a) que relógios em movimento não retardam;
- b) que barras de material não se encurtam pelo movimento através do eter.

T_2 é obtida a partir de T_1 substituindo a hipótese b) pela contração de Lorentz-Fitzgerald.

Consequentemente um corpo que se movimenta no eter com velocidade \vec{v} é encurtado na mesma direção, de um fator

$$\left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

T_3 é obtida a partir de T_2 modificando a hipótese a), substituindo-a pela hipótese de que relógios em movimento são retardados pelo fator

$$\left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

Resta saber se as modificações introduzidas sucessivamente constituem hipóteses ad hoc em algum dos sentidos definidos acima: Zahar vai mostrar que as passagens $T_1 \rightarrow T_2$ e $T_2 \rightarrow T_3$ não podem ser consideradas ad hoc e em particular que a introdução da hipótese da contração não foi uma manobra de Lorentz gerada por uma "física do desespero" para salvar o eter a qualquer custo, como é sustentado por Holton.

II.3.3. A hipótese da contração

Podemos afirmar que a teoria de Lorentz T_2 é "ad hoc" se julgada como modificação da T_1 ? Ou seja, existem previsões novas (além do experimento de M.-M.) que podem ser deduzidas a partir dela?

A resposta é positiva: de fato no experimento de Kennedy-Thorndike, no qual os braços do interferômetro são desiguais, a previsão sobre o tempo que os raios gastam para voltar ao espelho semi-prateado é

diferente da previsão clássica e da previsão da Relatividade Especial^(9a).

E em relação aos dois outros sentidos de "ad hoc", o que dizer?

Zahar afirma que na análise de Holton a hipótese da contração, que diferencia T_2 de T_1 , na realidade está desligada do resto de T_2 e em particular das transformações de Lorentz: isso significa qualificar-lá de ad hoc₃.

Holton também sustenta que a hipótese da contração foi inventada para explicar o resultado de M.-M.: se lembrarmos que por longo tempo este resultado foi o único a sustentá-la então devemos relegar a hipótese à categoria de ad hoc₂.

A argumentação de Zahar é complexa e pode ser resumida pelos seguintes passos:

a) A contração de Lorentz-Fitzgerald (C.L.-F.) foi deduzida de uma hipótese mais geral, a Hipótese das Forças Moleculares (H.F.M.).

b) A H.F.M. está ligada as transformações de Lorentz e está de acordo com a heurística do programa porque os fenômenos físicos continuam sendo explicados através do eter.

c) A H.F.M. não tem nada a ver com o experimento de Michelson, pois ela nasce de considerações matemáticas referentes as propriedades das equações de Maxwell: conseqüentemente o experimento M.-M. constitue um "fato novo" em relação a ela.

d) De a) + b) Zahar conclui que a contração de L.-F. não pode ser considerada ad hoc₃; de a) + c) conclui-se que a hipótese da contração não pode ser considerada ad hoc₂.

e) Mais em geral Zahar contesta a reconstrução da gênese da teoria da Relatividade, segundo a qual Einstein produziu o seu trabalho por causa da artificialidade da contração e da teoria geral de Lorentz em relação a explicação do experimento de M.-M. De fato a teoria de Einstein não explica o resultado de Michelson pela simples razão de que o seu postulado da invariância da velocidade da luz em todos as referências inerciais torna o resultado trivial. Ao contrário, na teoria de Lorentz, na sua versão definitiva que inclui o Teorema dos Estados Correspondentes, é possível deduzir que a velocidade da luz deve ser igual a c em todos os referenciais e daí tirar o resultado nulo do experimento de M.-M. Em outras palavras a teoria de Lorentz se apresenta de forma coerente e é consistente com os dados experimentais: portanto se o programa de Einstein foi de fato superior ao de Lorentz, a razão não deve ser procurada na artificialidade desta última, mas em alguma propriedade especial da teoria da Relatividade.

Vamos agora seguir passo a passo a argumentação de Zahar.

II.3.3.1. *A origem das transformações de Lorentz e o Teorema dos Estados Correspondentes*

Usando as equações de Maxwell para um referencial em repouso no eter, o campo e.m. pode ser determinado a partir da carga, da posição e do estado de movimento dos elétrons envolvidos. A equação diferencial correspondente (D) se escreve:

$$\left[c^2 \nabla^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right] f(x,y,z,t) = g(x,y,z,t) \quad (D)$$

onde g é uma função conhecida e f é a função do campo procurada: a solução desse problema, matematicamente não apresenta grandes dificuldades.

Mas no caso de um referencial ligado a Terra (que presumivelmente está em movimento em relação ao eter) a equação torna-se mais complexa e perde a sua simetria. Lorentz então inventou um conjunto de novas coordenadas fictícias (x', y', z', t') , ligadas às coordenadas reais por uma série de transformações apropriadas, mas que têm a propriedade de deixar invariante a nova equação diferencial (D') de forma que qualquer solução de (D) seja também solução de (D') e uma vez atingidas as soluções de (D') seria simples passar para as soluções reais através das transformações. Portanto o problema que Lorentz enfrenta é matemático e as suas equações de transformação são estritamente matemáticas, não envolvendo o experimento de M.-M.

As equações de transformação propostas por Lorentz são:

$$\begin{aligned} x' &= \beta x = \beta(x_1 - vt_1) & z' &= z = z_1 \\ y' &= y = y_1 & t' &= t - \frac{v\beta^2 x}{c^2} = \beta^2 \left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2} \right) \quad \text{com} \end{aligned}$$

$$\beta = \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-1/2}$$

onde $(x_1, y_1, z_1$ e $t_1)$ são as coordenadas no sistema do eter, (x, y, z, t) são as coordenadas Galileanas no sistema em movimento em relação ao eter, e (x', y', z', t') são as coordenadas fictícias.

Como acabamos de observar as coordenadas fictícias não são as reais, sobretudo porque é difícil interpretar realisticamente t' : no entanto se considerarmos um sistema eletrostático S solidário com o referencial em movimento, ou seja, um sistema no qual todas as partículas tem a mesma velocidade em relação ao eter, é possível dar uma in-

interpretação física as transformações pois os campos não dependem de t' . Lorentz de fato fez corresponder a um sistema S , em movimento no eter, outro sistema S' em repouso, que é obtido pela expansão de S apenas na direção x de um fator β . S' então representa a imagem ampliada de S e conseqüentemente S será a imagem contraída de S' . Repare que as coordenadas de S' não coincidem com as coordenadas do eter, pois estas últimas consideram também que S está em movimento. Em outras palavras, se a distância "real" entre dois pontos de S , no referencial solidário com S , é \underline{d} , a distância medida no referencial do eter ainda será \underline{d} , ao passo que a distância calculada em um referencial solidário com S' (o referencial fictício) será $d' = \beta d$.

Calculando em seguida as forças elétricas que agem em S e S' entre pontos correspondentes, obtêm-se facilmente que

$$F_x = F'_x \qquad F_y = F'_y / \beta \qquad F_z = F'_z / \beta$$

Consequência imediata: se o sistema S está em equilíbrio ($\vec{F} = 0$), também o correspondente sistema S' estará em equilíbrio. Mas S' representa a imagem de S no sistema em repouso e nele as distâncias parecem ampliadas do fator β : ao contrário ao passarmos S' para S , as distâncias serão contraídas pelo fator $1/\beta$. Daí a ligação entre esta interpretação física das transformações e a hipótese da contração torna-se evidente⁽¹⁰⁾. É significativo, a esse respeito, que a passagem para uma interpretação física se dê somente num problema de eletrostática, que não envolve a coordenada temporal t' , causa de muitas atribuições para Lorentz: de fato é preciso esperar até 1905 para que Poincaré e Einstein, de diferentes maneiras, resolvam completamente o problema cinemático.

II.3.3.2. A derivação da C.L.-F. da Hipótese das Forças Moleculares

A Hipótese das Forças Moleculares pode ser resumida dessa forma: às forças moleculares se transformam como as eletromagnéticas e em particular na passagem de um sistema estacionário S' para um sistema em movimento S , as forças moleculares se transformam como as eletrostáticas, ou seja

$$\vec{F} = (1 ; 1/\beta ; 1/\beta) \vec{F}'$$

quando então as coordenadas são submetidas as correspondentes transformações de Lorentz.

$$x' = \beta x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Consequentemente se uma barra está em equilíbrio no sistema em movimento S , todos os seus pontos estarão em equilíbrio: mas também os pontos correspondentes, que mantinham entre si as distâncias dadas pelas transformações de Lorentz, estarão em equilíbrio em S' : consequentemente a barra que tem comprimento L em S , terá comprimento $L' = \beta L$ em S' . Se agora supusermos que a configuração de equilíbrio é única em cada sistema, teremos que uma barra que mede L' no sistema estacionário, medirá $L = L'/\beta$ no sistema em movimento, o que significa uma contração da barra.

Consequentemente, se um dos braços do interferômetro é contraído do fator $1/\beta$, na direção da velocidade da Terra a diferença de caminho ótico que resulta dessa contração é exatamente compensada pela menor velocidade média da luz na mesma direção: o resultado será que não aparece nenhum deslocamento de franjas de interferência.

Uma possível prova de que Lorentz derivou a hipótese da contração independente do experimento de Michelson, é o fato de que ele conhecia o resultado desde a sua realização em 1887, e que ficou perturbado com ele, no entanto somente cinco anos mais tarde, em 1892, quando ele encontrou as suas equações de transformação matemáticas, lançou a Hipótese das Forças Moleculares e a contração. Portanto, a descoberta da H.F.M. foi independente da experiência de M.-M., cujo resultado nulo pode ser previsto a partir dela. Portanto o resultado do experimento, que confirma a Hipótese das Forças Moleculares, apesar de ser anteriormente conhecido, constitui um fato novo em relação a H.F.M. e consequentemente esta última não pode ser considerada ad hoc₂.

A H.F.M. é plausível dentro do sistema de Lorentz?

"... Se nós assumirmos que também as forças moleculares são transmitidas através do eter, como as forças elétricas e magnéticas, para as quais atualmente podemos fazer uma assunção definitiva, ... então a transmissão muito provavelmente afetará a ação entre duas moléculas ou átomos, numa maneira semelhante a atração e repulsão entre partículas carregadas"⁽¹¹⁾.

"Consequentemente a H.F.M. não é ad hoc₃ dentro do programa de Lorentz, cuja heurística requer que os fenômenos físicos sejam explicados em termos de ação contínua através do eter. As forças moleculares que determinam a forma de um dado corpo são transmitidas pelo mesmo meio que as do campo eletromagnético; ambos os tipos de força são estados do mesmo substrato: porque eles não deveriam se comportar e transformar-se na mesma maneira"⁽¹²⁾.

II.3.4. A versão final da teoria de Lorentz

A versão final da Teoria dos Estados Correspondentes, publicada em 1904 por Lorentz, do ponto de vista dos resultados experimentais pode ser considerada praticamente equivalente a teoria da Relatividade. Vamos analisar de que forma.

As equações de Maxwell são válidas no sistema do eter: se os instrumentos de medida ficassem inalterados num sistema de referência S em movimento, então a relação entre comprimento, intervalos de tempo, cargas e campos medidos no novo sistema seria mais complicada do que a implícita nas equações de Maxwell e em particular a velocidade da luz em S seria dependente da direção. A Teoria dos Estados Correspondentes afirma que os instrumentos são distorcidos de tal forma que as quantidades medidas $(x', t', \vec{D}', \vec{H}', \rho')$ satisfazem de fato as equações de Maxwell e daí a velocidade da luz medida é constante em S . O observador se considera então como dentro de um sistema S' , em repouso no eter e no qual as coordenadas "reais" são x', t' , etc., que na "realidade" são as medidas distorcidas feitas em S . O sistema fictício S' é chamado de correspondente de S e as medidas são chamadas de "efetivas".

Daí pode-se concluir que os resultados de alguns tipos de experimentos (pelo menos dos que envolvem forças elétricas e moleculares) ou possivelmente de qualquer experimento, não será afetado pelo movimento da Terra através do eter.

No entanto, do ponto de vista teórico, a dificuldade de interpretar fisicamente a transformação temporal, impediu a Lorentz de obter a total covariância das equações de Maxwell.

De fato, no eter temos:

$$\vec{\nabla}_1 \wedge \vec{D}_1 = \rho_1 \quad \vec{\nabla}_1 \wedge \vec{H}_1 = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial D_1}{\partial t} + \rho_1 \vec{v} \right)$$

onde ρ_1 é a densidade de carga e \vec{v} é sua velocidade no tempo t .

Ao contrário no sistema fictício S' , que envolve as coordenadas efetivas, e se movimenta com velocidade v na direção \hat{x} , teremos:

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{D}' = \rho' \left(1 - \frac{v \mu' x}{c^2} \right) \quad \vec{\nabla}' \wedge \vec{H}' = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial D'}{\partial t'} + \rho' \vec{\mu}' \right)$$

onde $\rho' = \rho / \beta$

$$\vec{\mu}' = \beta \begin{Bmatrix} \beta(v_x - v) \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$$

e portanto é perdida a simetria.

O problema é devido ao fato de que $\rho' = \rho/\beta$ é válido somente num sistema eletrostático: em geral a densidade de carga depende do tempo e portanto a sua transformação deve envolver a contagem das cargas presentes num volume elementar no tempo t' , incluindo portanto eventuais eventos simultâneos em S' , mas não simultâneos em S .

Com essa advertência, a equação, que de fato foi obtida por Poincaré com o seu modelo de elétron deformável, torna-se:

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{D}' = \sigma'$$

sendo σ' a nova densidade de carga; no entanto a outra equação torna-se

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{H}' = \frac{1}{c} \left[\left(\frac{\partial D'}{\partial t} + \sigma' \vec{u}' / \left(1 - \frac{v\mu'_x}{c^2} \right) \right) \right]$$

na qual precisaria interpretar $\vec{u}' / \left(1 - \frac{v\mu'_x}{c^2} \right)$ como a velocidade, "efetiva", e para isso precisaria abandonar o referencial Galileano e a sua composição de velocidades⁽¹³⁾. Einstein conseguiu no seu intento, de tornar covariantes as equações de Maxwell, pois ele desenvolveu primeiro toda a cinemática, incluindo nela a composição de velocidades, e depois impôs a covariância a todas as leis e, em particular, à teoria eletromagnética: nesse sentido a Teoria da Relatividade de Einstein se mostrou superior a teoria de Lorentz que queria chegar a nova cinemática depois de desenvolver a teoria eletromagnética.

Mas apesar dessas diferenças conceituais, do ponto de vista das medidas e dos efeitos observáveis a Teoria dos Estados Correspondentes é equivalente a Relatividade Especial de Einstein.

Portanto logo após 1905, parece razoável que Lorentz continue no seu programa de pesquisa, apesar da Relatividade, pois abraçar esta teoria teria significado abandonar vários pressupostos metafísicos, em particular a ação entre partículas através do éter, pressupostos com os quais tinha conseguido até então incorporar todos os dados experimentais, num conjunto coerente apesar de com muito esforço.

Para Zahar, os ajustamentos sucessivos da teoria de Lorentz não foram feitos ao acaso, no sentido de satisfazer de qualquer forma aos novos resultados experimentais, mas foram elaborados em conformidade com o programa heurístico do éter.

Então como explicar que a comunidade científica adotou, pelo menos através de vários dos seus cientistas mais eminentes, o ponto de

vista de Einstein?

"... Conseqüentemente se a eventual aceitação, pela comunidade científica, da teoria de Einstein, preferindo-a à de Lorentz, foi racional (i.e. se existem critérios gerais aceitáveis, segundo os quais a teoria de Einstein foi objetivamente melhor que a de Lorentz), esta racionalidade deve fundamentar-se em "mêritos extras" da teoria de Einstein"⁽¹⁴⁾.

A análise desses mêritos extras será o tema central das próximas partes, junto com a interpretação mais "sociológica" de G. Battimelli e com algumas considerações pessoais.

II.4. *Algumas críticas a interpretação de Zahar*

A análise de Zahar, como vimos, é bem articulada e fundamentada do ponto de vista metodológico, mas não foi recebida sem crítica⁽¹⁵⁾ no ambiente da pesquisa histórico-filosófica. A todas (ou quase todas) as críticas ele tenta responder⁽¹⁶⁾, abrindo um debate extremamente interessante e muitas vezes esclarecedor. Não é nossa intenção fazer o inventário desse debate, mas somente acenar, aqui e no final da próxima parte, aqueles pontos que ajudam a compreender melhor o significado e o alcance de uma "reconstrução racional".

A crítica mais aguda é a proposta por Miller⁽¹⁷⁾, com base na análise dos trabalhos de Lorentz de 1892, 1895 e 1904⁽¹⁸⁾.

Em relação ao trabalho de 1892, no qual Lorentz propõe a explicação do experimento de Michelson introduzindo a hipótese da Contração, Miller sustenta:

a) Para Lorentz não existe nenhuma ligação entre a Hipótese da Contração e aquilo que Zahar chama de Hipótese das Forças Moleculares (H.F.M.). A contração é derivada de argumentos geométricos, e fundada na adição de velocidades, de forma que a diferença entre os braços do interferômetro fosse $\delta = 1 - \frac{v^2}{2c^2}$. Para o próprio Lorentz a hipótese não tem maior alcance.

b) A H.F.M. é explicitamente considerada por Lorentz uma hipótese não desprezível, mas que não pode ser provada.

c) As equações de transformação das forças e.m. e a conservação do equilíbrio num sistema em movimento S e num sistema fictício S' , supondo válidas as transformações de Lorentz entre coordenadas, não constituem uma justificativa da hipótese de contração, pois o próprio Lorentz adverte de não dar muita importância a este resultado.

Em relação ao trabalho de 1895, Miller argumenta:

d) A H.F.M. não constitui uma teoria de Forças Moleculares, pois Lorentz não propõe nenhuma forma funcional para elas.

e) As equações de transformação de Lorentz não constituem um único conjunto, mas são de dois tipos: o primeiro, que servia para mostrar que, em primeira ordem em v/c , os processos eletrostáticos não eram influenciados pelo movimento da Terra, e que problemas de eletrodinâmica podiam ser transformados em problemas de eletrostática; o segundo, que envolvia a mudança da variável temporal era utilizado para provar a covariância das equações de Maxwell. Então a unificação operada por Zahar na sua reconstrução do teorema dos Estados Correspondentes não existe no trabalho de Lorentz de 1895.

Finalmente, em relação ao trabalho de 1904, Miller afirma:

f) A introdução da H.F.M. generalizadas e da contração do elétron não estão vinculadas: ao contrário esta última foge da heurística do programa de Lorentz, assim como Zahar a define, pois envolve a existência de forças de natureza não e.m. para poder explicar a estabilidade do elétron. No entanto ambas as hipóteses são necessárias para poder interpretar os resultados experimentais mais recentes de Trouton e de Rayleigh: mas Zahar passa por cima desse problema.

A crítica de Miller tem um objetivo: demolir toda a interpretação de Zahar, apresentando-a como uma invenção que não dá conta da história real e que através de expedientes como a redefinição de "fato novo" e de "ad hoc", tenta encaixar a história da Relatividade num modelo a priori e numa problemática artificial.

A resposta de Zahar⁽¹⁹⁾, por sua vez bastante articulada, tem o mérito de enfrentar a questão fundamental que, mais ou menos abertamente, dividiu, após a tese de Zahar, o debate sobre a relação entre Lorentz e Einstein.

Para ele existem dois pontos que justificam o recurso do historiador a uma reconstrução. Em primeiro lugar:

"... é óbvio que... o historiador não conhece todos os fatos. Em particular existe um tipo particular de fatos para os quais o historiador de ciência em princípio não tem acesso direto; trata-se do sistema intuitivo de avaliação que o cientista aplica na construção de suas próprias teorias ou na escolha entre diferentes programas existentes..."⁽²⁰⁾

Em segundo lugar existem fatos que devem ser manipulados com cuidado. Por exemplo, o conhecimento que uma opinião sobre a qualida

de de uma teoria científica foi compartilhada pela maioria dos cientistas da época não é garantia, para o historiador, da validade e da objetividade dessa opinião:

"Em alguns casos cientistas tem escrito sobre a sua metodologia e sobre a sua heurística. Mas temos visto que o relatório do cientista não pode sempre ser de imediato considerado válido: ele pode conscientemente mascarar a verdade ou pode ser sincero mas ter uma falsa consciência da sua atividade... Mesmo o historiador que decide aceitar a explicação do cientista sobre sua heurística, já está reconstruindo a história;...ele está de fato subcrevendo a hipótese realmente arrojada de que o cientista conhece e diz a verdade sobre si mesmo"(21).

Uma reconstrução, para ser aceitável, deve ser consistente com os fatos: mas essa condição é muito fraca.

Uma reconstrução aceitável pode ser chamada de racional se minimiza o recurso a fatores externos para os quais não existe evidência independente: evidentemente nenhuma reconstrução é perfeitamente racional, mas existem reconstruções mais ou menos racionais.

É racional, para Zahar, considerar que Lorentz desde 1892 reconhecia a ligação entre a H.F.M. e a hipótese da contração de Lorentz-Fitzgerald (para isso existem indícios plausíveis⁽²²⁾), apesar de algumas afirmações do próprio Lorentz ou da existência eventual e temporária de linhas paralelas de desenvolvimento de pesquisa: o fato de Lorentz não ser sempre totalmente coerente com o programa de pesquisa torna a reconstrução não totalmente racional. No entanto o abandono da metodologia dos programas de pesquisa para abraçar uma linha mais descritiva, cria mais problemas do que resolve⁽²³⁾, e portanto é menos racional. Um discurso análogo vale para as outras objeções de Miller.

Notas e Referências

- (1) A. Villani - "O confronto Lorentz-Einstein e suas interpretações. I. A Revolução Einsteiniana", submetido a Revista de Ensino de Física, 1980. Preprint IFUSP/P-259.
- (2) G. Holton - "Einstein, Michelson and the crucial experiment", está em G. Holton - "Thematic origins of scientific thought", Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), 1973, pp. 261-353.

- (3) E. Zahar - "Why did Einstein's programme supersede Lorentz's" , Brit. Jour. Phyl. Sci. 24, 95-123 (I), 223-262 (II), 1973.
- (4) G. Battimelli - "Teoria dell'elettrone e teoria della Relatività. Uno studio sulle cause della scomparsa dalla prassi scientifica del concetto di etere elettromagnetico", Tese di Laurea (não publicado), Roma, 1973.
- (5) H.A. Lorentz - "The theory of electrons and the propagation of light", Nobel Lecture, 1902, pp. 15,19,20.
- (6) V. ref. 5, pp. 22-23.
- (7) Para Popper são plausíveis somente as hipóteses que tem implicações experimentais bem definida e que permitam distinguir uma teoria de uma outra.
- (8) V. ref. 2, pp. 315-316.
- (9) V. ref. 3, pp. 101.
- (9a) No caso dos dois braços do interferômetro serem diferentes, mesmo incluindo o efeito da contração de Lorentz, poderíamos esperar um deslocamento de franjas, quando a velocidade do interferômetro muda em relação ao etere de v para \bar{v} . O movimento de rotação da Terra forneceu para Kennedy e Thorndike esta variação de velocidade.
- (10) De fato S' (o sistema fictício) é equivalente matematicamente ao etere; no entanto S é contraído em relação a S' . Portanto S é contraído em relação a um sistema S_1 em repouso no etere: esta contração de S é "real" e aparece quando as coordenadas utilizadas são as do referencial absoluto ou as do correspondente referencial galileiano solidário com S .
- (11) H.A. Lorentz - está em "The principle of Relativity", Dover, 1923, tradução inglesa de vários artigos.
- (12) V. ref. 3, pp. 116.
- (13) A composição de velocidade galileiana obedece a regra de soma vetorial $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v}$ aonde \vec{v} é a velocidade do referencial S em relação a S' , \vec{u} é a velocidade do corpo no referencial S , \vec{u}' é a velocidade do corpo em S' . Ao contrário, a composição relativista de velocidades obedece a uma regra bem mais complicada: no caso de \vec{v} ser na direção \hat{x} , temos

$$u'_x = \frac{u_x + v}{1 + \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left[1 + \frac{vu_x}{c^2}\right]}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu_x}{c^2}}$$

no limite de $|\vec{u}|$ ou $|\vec{v}|$ pequeno as duas fórmulas coincidem com boa aproximação.

- (14) V. ref. 3, p. 123.
- (15) a) P.K. Feyerabend - "Zahar on Einstein", Brit. Jour. Phil. Sci., 25, 1974, pp. 25-28.
b) A. Miller - "On Lorentz's methodology", Brit. Jour. Phil. Sci., 25, 1974, pp. 29-45.
c) K. Schaffner - "Einstein versus Lorentz: Research Programmes and the logic of Comparative Theory Evaluation", Brit. Jour. Phil. Sci., 25, 1974, pp. 45-77.
- (16) a) E. Zahar - "Einstein debt to Lorentz: a reply to Feyerabend and Miller", Brit. Jour. Phil. Sci., 29, 1978, pp. 49-59.
b) E. Zahar - "Mach, Einstein and the rise of modern science", Brit. Jour. Phil. Sci. 28, 1977, pp. 195-213.
- (17) V. ref. 15(b).
- (18) a) H.A. Lorentz - "La theorie electromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvant", (1892), in Collected Papers, 2, pp. 164-343.
b) H.A. Lorentz - "The relative motion of the Earth and the Ether" (1892), in Collected Papers, 4, pp. 219-223.
c) H.A. Lorentz - "Versus erner Theorie...", Leiden 1895, in Collected Papers, 5, pp. 1-138.
d) H.A. Lorentz - "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light" (1904), in Collected Papers, 5, pp. 172-197.
- (19) V. ref. 16(a).
- (20) V. ref. 16(a), p. 54.
- (21) V. ref. 16(a), p. 54.
- (22) Na própria ref. 18(a): para maiores detalhes v. nota (23).
- (23) "... Primeiro:... Porque (Lorentz) demorou cinco anos para chegar a uma hipótese que é deduzível dos resultados de Michelson junto com uma simples lei da mecânica? Segundo: porque Lorentz descobriu a sua hipótese da contração imediatamente após a descoberta da sua famosa transformação? Sabemos que existe uma ligação lógica entre a transformação de Lorentz e a hipótese de Contração. Devemos crer que Lorentz não estava consciente dessa ligação e alguma "astúcia da razão" o fez produzir os resultados na ordem lógica apropriada?...

Contrariamente a pretensão de Miller, Lorentz afirmou (no seu trabalho de 1892), que se as forças moleculares e eletromagnéticas obedecem a mesma lei de transformação, todos os corpos serão contraídos de um fator $(1 - \frac{v^2}{2c^2})$... Ambos os caminhos heurísticos são presentes no trabalho de Lorentz de 1895: o caminho não ad hoc (dedução da contração a partir de H.F.M.) está na seção 23; o caminho ad hoc (dedução da contração a partir da lei de adição das velocidades está na seção 90. Somente esta última foi incluída na tradução inglesa..." (V. ref. 16(a), pp. 56-57).