

IFUSP/P 315  
B.I.F. - USP

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**INSTITUTO DE FÍSICA  
CAIXA POSTAL 20516  
01000 - SÃO PAULO - SP  
BRASIL**

# publicações

IFUSP/P-315

LFP-10

BIRREFRINGÊNCIA LINEAR E ATIVIDADE  
ÓTICA NUM PLASMA MAGNETIZADO

**B.I.F. - USP**

J.H.Vuolo e R.M.O.Galvão

Instituto de Física - Universidade de  
São Paulo

FEV/82

BIRREFRINGÊNCIA LINEAR E ATIVIDADE ÓTICA NUM PLASMA  
MAGNETIZADO

J.H.Vuolo e R.M.O.Galvão\*

Instituto de Física - Universidade de São Paulo,  
C.P.20516, São Paulo, S.P., Brasil

RESUMO

Birrefringência linear e atividade ótica são considerados separadamente para propagação de uma onda eletromagnética num plasma frio magnetizado, usando a aproximação de frequências muito maiores que a frequência de plasma. É mostrado que em certos casos de interesse, esses fenômenos podem ser considerados independentes. Expressões explícitas são obtidas para os índices de refração para birrefringência linear e atividade ótica. Os índices de atenuação correspondentes são obtidos em primeira ordem na atenuação. É mostrado que os estados característicos para dicroísmo linear coincidem com os estados característicos para birrefringência linear. Os estados característicos para dicroísmo elíptico são obtidos.

1. INTRODUÇÃO

Um plasma magnetizado exhibe birrefringência linear e atividade ótica para propagação de uma onda eletromagnética. Ambos os fenômenos são diretamente associados ao campo magnético estático presente de forma que não podem ser considerados como fenômenos independentes. Neste aspecto, a propagação de uma onda eletromagnética num cristal anisotrópico é um pouco diferente, uma vez que usualmente a birrefringência linear e a atividade ótica são fenômenos fisicamente independentes e descritos de forma independente. O tensor de Fresnel (ou o tensor de índice) e o tensor de absorção descrevem a birrefringência linear e a atenuação correspondente (dicroísmo linear), enquanto que a atividade ótica e o dicroísmo circular são descritos por vetores adequados<sup>(1)</sup>. Para um plasma magnetizado a birrefringência linear e a atividade ótica não são considerados separadamente. Isto só é feito nos limites de propagação longitudinal ou transversal em relação ao campo magnético estático. O formalismo utilizado no caso geral não permite que os fenômenos sejam distinguidos<sup>(2,3)</sup>. Entretanto, o estudo de evolução da polarização de uma onda eletromagnética num plasma magnetizado fica bastante simplificado utilizando-se a esfera de Poincaré e conhecendo-se os estados característicos e índices de refração e atenuação separadamente para birrefringência linear e atividade ótica, nos casos em que houver predominância de um ou de outro fenômeno. No caso geral, ambos os fenômenos podem ser combinados pelo método de superposição utilizado em ótica de cristais<sup>(1)</sup>.

No que segue, são obtidos os estados característicos, índices de refração e índices de atenuação separadamente para birrefringência linear e para atividade ótica. Esta separação é baseada na separação do tensor constante dielétrica em partes simétricas e

\* Endereço permanente: Instituto de Física "Gleb Wataghin" - Universidade Estadual de Campinas, Caixa Postal 1170, Campinas, S.P., Brasil.

antissimétrica, sendo este tensor obtido de um modelo orbital como feito usualmente na descrição da propagação de uma onda num plasma frio magnetizado<sup>(2,3)</sup>. São obtidos os limites nos quais há predominância de um ou outro fenômeno, sendo mostrado em particular que em certos casos de interesse, birrefringência linear e atividade ótica podem ser considerados fenômenos independentes. Os estados característicos para dicroísmo elíptico são obtidos a partir dos índices de atenuação e estados característicos para dicroísmo linear e circular. Os estados característicos para dicroísmo linear coincidem com os estados característicos para birrefringência linear devido à degenerescência dos tensores de índice e de absorção.

## 2. TENSOR CONSTANTE DIELÉTRICA

A propagação de uma onda eletromagnética num meio anisotrópico é descrita a partir das equações de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

e relações constitutivas

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{K}_m \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.2)$$

A notação utilizada é a seguida por Heald e Wharton<sup>(2)</sup>.

O tensor constante de permeabilidade permite descrever efeitos de temperatura num plasma magnetizado<sup>(4,5)</sup>. Para um plasma frio

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

A lei de Ohm completa o conjunto de equações<sup>(2)</sup>

$$\mathbf{J} = \check{\sigma} \cdot \mathbf{E}$$

Definindo o tensor constante dielétrica complexo por meio da relação

$$\check{\mathbf{K}} = 1 - j \frac{\check{\sigma}}{\epsilon_0 \omega} = \mathbf{K} - j \frac{\check{\sigma}}{\epsilon_0 \omega} \quad (2.3)$$

as equações de Maxwell podem ser reescritas formalmente sem as densidades de carga e de correntes livres

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \check{\mathbf{K}} \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \check{\mathbf{K}} \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \check{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E}$$

Para uma onda plana progressiva na direção  $\check{\mathbf{r}}$  e fator de fase dado por

$$\exp[j\omega t - \check{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}]$$

as equações (2,4) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{r}} \cdot \epsilon_0 \check{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E} &= 0 & \check{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} &= j\omega \mu_0 \mathbf{H} \\ \check{\mathbf{r}} \cdot \mu_0 \mathbf{H} &= 0 & \check{\mathbf{r}} \times \mathbf{H} &= -j\omega \check{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Estas equações mostram que  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\check{\mathbf{r}}$  são perpendiculares entre si, embora o campo elétrico possa ter componente longitudinal em relação à direção de propagação. A equação de onda para  $\mathbf{E}$  é obtida de (2.5)

$$\ddot{\mu} \times (\ddot{\mu} \times E) + \ddot{K} \cdot E = 0 \quad (2.6)$$

onde  $\ddot{\mu}$  é o índice de refração complexo definido por

$$\ddot{\mu} = -j \frac{\gamma}{\omega} \frac{c}{\omega}$$

A equação (2.6) mostra que o conhecimento do tensor constante dielétrica complexo permite obter  $\ddot{\mu}$  e assim as características da propagação da onda eletromagnética no meio. No que segue,  $\ddot{K}$  será obtido considerando um plasma de Lorentz uniforme imerso num campo magnético estático (2).

A equação de movimento é a chamada equação de Langevin:

$$m \dot{w} = -e E(t) - e v \times B_0 - \nu m w \quad (2.7)$$

onde  $w$  é a velocidade do elétron e  $\nu$  a frequência efetiva de colisão elétron-íon para transferência de momento. Para propagação na direção-z (Figura 1) e

$$J = -n e w$$

obtem-se

$$(1 - j \frac{\nu}{\omega}) J_x - j \frac{\omega_c}{\omega} \cos \theta J_y + j \frac{\omega_c}{\omega} \sin \theta \cos \beta J_z = -j \frac{\omega_p^2}{\omega} \epsilon_0 E_x$$

$$j \frac{\omega_c}{\omega} \cos \theta J_x + (1 - j \frac{\nu}{\omega}) J_y + j \frac{\omega_c}{\omega} \sin \theta \sin \beta J_z = -j \frac{\omega_p^2}{\omega} \epsilon_0 E_y$$

$$-j \frac{\omega_c}{\omega} \sin \theta \cos \beta J_x - j \frac{\omega_c}{\omega} \sin \theta \sin \beta J_y + (1 - j \frac{\nu}{\omega}) J_z = -j \frac{\omega_p^2}{\omega} \epsilon_0 E_z$$

onde

$$\omega_c = \frac{e B_0}{m} \quad e \quad \omega_p^2 = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m} \quad (2.8)$$

Substituindo

$$Y = \frac{\omega_c}{\omega} \quad Y_L = Y \cos \theta \quad Y_T = Y \sin \theta$$

$$A = 1 - j \frac{\nu}{\omega} \quad X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad M^2 = \ddot{\mu}^2 - 1 \quad (2.9)$$

e comparando com

$$\ddot{\sigma}^{-1} \cdot J = IE$$

obtem-se

$$\ddot{\sigma}^{-1} = \lambda \begin{bmatrix} A & -j Y_L & j Y_T \cos \beta \\ j Y_L & A & j Y_T \sin \beta \\ -j Y_T \cos \beta & -j Y_T \sin \beta & A \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

onde

$$\lambda = j \frac{\omega}{\epsilon_0 \omega_p^2}$$

O tensor constante dielétrica é obtido por cálculo direto

$$\ddot{K} = 1 - j \frac{\ddot{\sigma}}{\epsilon_0 \omega}$$

onde

$$\ddot{\sigma} = \frac{1}{\lambda(A^2 - Y^2)} \begin{bmatrix} A - \frac{Y_T^2}{A} \sin^2 \beta & j Y_L + \frac{Y_T^2}{A} \sin \beta \cos \beta & -j Y_T \cos \beta + \frac{Y_L Y_T}{A} \sin \beta \\ -j Y_L + \frac{Y_T^2}{A} \sin \beta \cos \beta & A - \frac{Y_T^2}{A} \cos^2 \beta & -j Y_T \sin \beta - \frac{Y_L Y_T}{A} \cos \beta \\ j Y_T \cos \beta + \frac{Y_L Y_T}{A} \sin \beta & j Y_T \sin \beta - \frac{Y_L Y_T}{A} \cos \beta & A - \frac{Y_L^2}{A} \end{bmatrix}$$

### 3. BIRREFRINGÊNCIA LINEAR E ATIVIDADE ÓTICA

O formalismo do tensor constante dielétrica complexo reduz o problema da propagação de uma onda eletromagnética num meio condutor ao problema de propagação num meio não condutor, tal como um cristal anisotrópico, uma vez que as equações de Maxwell são formalmente idênticas. Assim, no que segue será feito o mesmo tratamento que para um cristal anisotrópico e opticamente ativo<sup>(1)</sup>.

O vetor  $\mathbf{D}$  pode ser escrito na forma<sup>(6)</sup>

$$\mathbf{D} = \check{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{j} (\mathbf{G} \times \mathbf{E}) = \epsilon_0 \check{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E}$$

ou equivalentemente

$$\mathbf{E} = \check{\alpha} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{j} \mathbf{\Pi} \times \mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon_0} \check{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \mathbf{D} \quad (3.1)$$

onde  $\check{\epsilon}$  e  $\check{\alpha}$  são tensores simétricos que descrevem a birrefringência linear, enquanto os vetores  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{\Pi}$  descrevem a atividade ótica e são chamados respectivamente vetor de giração e vetor de atividade ótica. A equação (3.1) é mais conveniente na solução da equação de onda (2.6) e na discussão de problemas de propagação, uma vez que  $\mathbf{D}$  é transversal em relação à direção de propagação da onda ( $\mathbf{D}_z = 0$ ).

A parte real simétrica  $\mathbf{K}_s^{-1}$  de  $\check{\mathbf{K}}^{-1}$  é definida como tensor de índice e a parte imaginária simétrica é o tensor de absorção linear. O termo correspondente ao produto vetorial pode ser representado por um tensor antissimétrico  $\mathbf{K}_A^{-1}$  cuja parte imaginária descreve a atividade ótica, enquanto que a parte real descreve o dicroísmo circular<sup>(1)</sup>.

O tensor  $\check{\mathbf{K}}^{-1}$  é obtido de  $\check{\mathbf{K}}$  por cálculo direto e suas partes simétrica e antissimétrica  $\mathbf{K}_s^{-1}$  e  $\mathbf{K}_A^{-1}$  podem então ser obti-

das imediatamente. É mais simples e de mais interesse inverter  $\check{\mathbf{K}}$  no sistema de coordenadas no qual  $\check{\mathbf{K}}_s$  é diagonalizado. Este sistema define os eixos elétricos principais do meio.

O tensor  $\check{\mathbf{K}}_s$  pode ser diagonalizado para um sistema de coordenadas com eixo  $z'$  alinhado com o campo magnético estático. Neste sistema obtém-se

$$\check{\mathbf{K}}_s^{-1} = \mathbf{1} - \frac{X/A}{A^2 - Y^2} \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 - Y^2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A expressão de  $\check{\mathbf{K}}_s^{-1}$  mostra que os eixos elétricos principais perpendiculares ao campo magnético estático são degenerados, devido à degenerescência dos autovalores correspondentes. Este resultado é esperado uma vez que o plasma frio magnetizado é isotrópico nas direções perpendiculares ao campo magnético.

Invertendo o tensor  $\check{\mathbf{K}}'$  e retornando ao sistema de coordenadas original por rotações convenientes obtém-se

$$\check{\mathbf{K}}^{-1} = \mathbf{1} + f_i A_i^2 - f_i Y_T N_s - \mathbf{j} f_i A_i N_A$$

onde

$$A_i = A - X \quad \text{e} \quad f_i = \frac{X}{A_i (A_i^2 - Y^2)} \quad (3.3)$$

e  $N_s$  e  $N_A$  são respectivamente matrizes simétrica e antissimétrica dadas por

$$N_s = \begin{bmatrix} Y_T \text{sen}^2 \beta & -Y_T \text{sen} \beta \cos \beta & -Y_L \text{sen} \beta \\ -Y_T \text{sen} \beta \cos \beta & Y_T \cos^2 \beta & Y_L \cos \beta \\ -Y_L \text{sen} \beta & Y_L \cos \beta & Y_L^2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$N_A = \begin{bmatrix} 0 & -Y_L & Y_T \cos \beta \\ Y_L & 0 & Y_T \text{sen} \beta \\ -Y_T \cos \beta & -Y_T \text{sen} \beta & 0 \end{bmatrix}$$

É interessante observar que  $\check{K}$  pode ser escrito como

$$\check{K} = 1 - fA^2 + fY_T N_s + jfA N_A$$

onde

$$f = \frac{x}{A(A^2 - Y^2)}$$

isto é,  $\check{K}^{-1}$  pode ser obtido de  $\check{K}$  simplesmente trocando A por  $A_1 = -A - x$ , e f por  $-f_1$ .

As matrizes  $\check{K}_s^{-1}$  e  $\check{K}_A^{-1}$  são dadas por

$$\check{K}_s^{-1} = 1 + f_1 A_1^2 - f_1 Y_T N_s \quad \text{e} \quad \check{K}_A^{-1} = -j f_1 A_1 N_A$$

O índice de refração para propagação da onda pode ser obtido resolvendo-se as equações (2.6) e (3.1). Para  $D_z = 0$  tem-se

$$D_x = \epsilon_0 \check{\mu}^2 E_x \quad \text{e} \quad D_y = \epsilon_0 \check{\mu}^2 E_y \quad (3.5)$$

e de

$$\epsilon_0 E = \check{K}^{-1} \cdot D$$

obtem-se

$$\epsilon_0 E_x = D_x + f_1 A_1^2 D_x + j f_1 A_1 Y_L D_y \quad (3.6)$$

$$\epsilon_0 E_y = D_y + f_1 A_1^2 D_y - f_1 Y_T^2 D_y - j f_1 A_1 Y_L D_x$$

Substituindo (3.5)

$$E_x (1 - \check{\mu}^2 - f_1 A_1^2 \check{\mu}^2) = j f_1 A_1 Y_L \check{\mu}^2 E_y$$

$$E_y (1 - \check{\mu}^2 - f_1 A_1^2 \check{\mu}^2 + f_1 Y_T^2 \check{\mu}^2) = -j f_1 A_1 Y_L \check{\mu}^2 E_x$$

Resolvendo, obtém-se a equação

$$U^2 + \frac{Y_T^2}{A_1} U - Y_L^2 = 0$$

onde

$$U = \frac{\frac{1}{\check{\mu}^2} - 1 - f_1 A_1^2}{f_1 A_1}$$

A solução é obtida para  $\check{\mu}$  na forma

$$\frac{1}{\check{\mu}_{1,2}^2} = 1 + \frac{x}{A_1^2 - Y^2} \left[ A_1 - \frac{Y_T^2}{2A_1} \pm \sqrt{\left(\frac{Y_T^2}{2A_1}\right)^2 + Y_L^2} \right] \quad (3.7)$$

e pode ser mostrado por cálculo direto que essa equação é equivalente à forma usual da equação de Appleton-Hartree:

$$\check{\mu}_{1,2} = 1 - x \left[ A - \frac{Y_T^2}{2A_1} \pm \sqrt{\left(\frac{Y_T^2}{2A_1}\right)^2 + Y_L^2} \right]^{-1}$$

#### 4. BIRREFRINGÊNCIA LINEAR

Os estados característicos e índices de refração e de atenuação para birrefringência linear são obtidos supondo-se a ausência de atividade ótica, isto é, supondo-se

$$N_A = 0$$

Os estados característicos para birrefringência linear e dicroísmo linear podem ser obtidos geometricamente examinando-se as partes real e imaginária do tensor  $\check{K}_s^{-1}$  e utilizando resultados

conhecidos da ótica de cristais<sup>(1,7)</sup>. Conforme mostra a equação (3.2), os autovalores associados às direções perpendiculares ao campo magnético estático são degenerados e os elipsóides de índice e de absorção, associados respectivamente às partes real e imaginária de  $\check{\mu}_s^{-1}$  são elipsóides de revolução em torno do campo magnético estático.

As ondas características na ausência de atenuação são ondas linearmente polarizadas nas direções dos eixos principais da seção elíptica do elipsóide de índice normal à direção de propagação. Os estados característicos para dicroísmo linear são dados de forma análoga com relação ao elipsóide de absorção. Resulta que os estados característicos para dicroísmo linear coincidem com os estados característicos para birrefringência linear na ausência de atenuação, uma vez que os eixos principais das seções elípticas dos elipsóides de índice e de absorção coincidem. Tais direções são a direção perpendicular ao campo magnético estático (onda extraordinária) e a direção perpendicular a esta (onda ordinária).

Os índices de refração correspondentes podem ser obtidos de maneira análoga à dedução da equação de Appletton-Hartree do parágrafo anterior. Considerando por simplicidade um sistema de referência com  $\beta=0$  (Figura 1), a onda extraordinária será linearmente polarizada na direção x, enquanto que a onda ordinária será polarizada na direção y. As equações (3.6) na ausência de atividade ótica podem ser escritas como

$$E_x = \check{\mu}_x^2 E_x + \epsilon_i A_i^2 \check{\mu}_x^2 E_x$$

$$E_y = \check{\mu}_0^2 E_y + \epsilon_i A_i^2 \check{\mu}_0^2 E_y - \epsilon_i Y_T^2 \check{\mu}_0^2 E_y$$

e os índices de refração complexos são dados por

$$\check{\mu}_x^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_i A_i^2} \quad (\text{onda extraordinária})$$

$$\check{\mu}_0^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_i A_i^2 - \epsilon_i Y_T^2} \quad (\text{onda ordinária}) \quad (4.1)$$

Os índices de refração reais  $\mu$  e os índices de atenuação  $\chi$  podem ser obtidos de

$$\check{\mu} = \mu - j\chi$$

ou

$$\check{\mu}^2 = \mu^2 - \chi^2 - 2\mu\chi j \quad (4.2)$$

Assim,

$$\text{Re } \check{\mu}^2 = \mu^2 - \chi^2$$

$$\text{Im } \check{\mu}^2 = -2\mu\chi$$

Os valores explícitos de  $\mu$  e  $\chi$  podem ser obtidos da expansão de  $\check{\mu}^2$  em séries de potências de  $j\frac{\nu}{\omega}$ :

$$A = 1 - j\frac{\nu}{\omega} \quad \text{e} \quad A_i = 1 - x - j\frac{\nu}{\omega}$$

Para a onda extraordinária se obtém

$$\mu_x^2 = 1 - \frac{x A_x}{A_x - Y^2}$$

onde

$$A_x = 1 - X \quad (4.3)$$

e

$$\chi_x = \frac{(1 - \mu_x^2)^2 (A_x^2 + Y^2)}{\mu_x 2x A_x^2} \frac{\nu}{\omega}$$

e para a onda ordinária

$$\mu_0^2 = 1 - \frac{X}{1 - \frac{A_x Y_L^2}{A_x^2 - Y_T^2}}$$

$$\chi_0 = \frac{(1 - \mu_0^2)^2}{\mu_0} \left[ \frac{A_x^2 Y_L^2 + Y_T^2 Y_L^2}{(A_x^2 - Y_T^2)^2} + 1 \right] \frac{1}{2X} \frac{\nu}{\omega} \quad (4.4)$$

Nas expressões foram considerados somente termos até primeira ordem em  $\frac{v}{w}$ .

### 5. EFEITO DA BIRREFRINGÊNCIA LINEAR NA ESFERA DE POINCARÉ

Um estado qualquer de polarização elíptica de uma onda eletromagnética pode ser representado na esfera de Poincaré por um ponto de longitude  $2\psi$  e latitude  $2\varphi$ , sendo  $\psi$  o ângulo de inclinação do semi-eixo maior da elipse de polarização e  $\varphi$  definido a partir dos semi-eixos  $a$  e  $b$  (Figuras 2 e 3):

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a} \quad b < a$$

onde o sinal positivo é escolhido para o vetor deslocamento elétrico girante à direita (R) segundo a convenção IEEE<sup>(8)</sup>. Segundo esta convenção a polarização é direita (R) quando o deslocamento elétrico gira no sentido antihorário quando a onda é observada se aproximando. Esta convenção é oposta à da ótica clássica (1).

O polo superior da esfera de Poincaré é a onda circularmente polarizante direita (R), enquanto estados linearmente polarizados são representados no equador da esfera. Assim, os estados característicos  $L_x$  e  $L_o$  terão latitudes nulas e longitudes:

$$2\psi_x = 2\beta \quad \text{e} \quad 2\psi_o = 2\beta + \pi$$

$$\varphi_x = \varphi_o = 0$$

Considerando uma onda num estado de polarização qualquer  $P$  atravessando uma espessura infinitesimal  $dz$ , o efeito da birrefringência linear na esfera de Poincaré será uma rotação antihorária do ponto  $P$  em torno do estado  $L_x$  de um ângulo (Figura 4):

$$\frac{w}{c} \Delta\mu_b dz$$

onde

$$\Delta\mu_b = \mu_o - \mu_x \tag{5.1}$$

$\Delta\mu_b$  pode ser calculado diretamente a partir dos índices de refração. Usando expansões em séries de potências de  $x$ , pode-se obter expressão mais explícita para  $\Delta\mu_b$ . Considerando termos até ordem  $x^2$  obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta\mu_b &= \frac{xY_T^2}{2(1-Y^2)} \left[ 1 + \frac{x}{2(1-Y^2)} (3 - 2Y^2 + \frac{3}{2}Y_T^2) \right] \\ &= \frac{xY_T^2}{2A_x(A_x - Y^2)} \left[ 1 + \frac{x}{2(1-Y^2)} (\frac{3}{2}Y_T^2 - 1) \right] \end{aligned} \tag{5.2}$$

Conforme já mostrado, os estados característicos para dicroismos linear coincidem com os estados característicos para birrefringência linear na ausência de atenuação. Assim, o efeito do dicroísmo linear na esfera de Poincaré será um deslocamento de  $P$  ao longo de um grande círculo de  $L_o$  para  $L_x$  de um ângulo

$$\frac{w}{c} \Delta\chi_b \operatorname{sen} 2s_b dz$$

onde  $2s_b$  é o ângulo entre  $P$  e  $L_x$  e em ordem mais baixa em  $x$ :

$$\begin{aligned} \Delta\chi_b &= \chi_o - \chi_x = \frac{xY_T^2}{2(1-Y^2)^2} (Y^2 - 3) \frac{v}{w} \\ &= \Delta\mu_b \frac{(Y^2 - 3)}{(Y^2 - 1)} \frac{v}{w} \end{aligned} \tag{5.3}$$

### 6. ATIVIDADE ÓTICA

Para se estudar o efeito da atividade ótica separadamente, deve ser suposta a ausência de birrefringência linear. Para isto é suficiente supor que as ondas características para birrefringência linear tenham mesmo índice de refração para qualquer direção de propagação da onda. Um índice de refração médio pode

ser considerado para birrefringência linear com base em algum critério. O critério mais adequado no caso é o de minimizar ou eliminar os erros do método de superposição. Resultados equivalentes podem ser obtidos pelo método de superposição ou teoria exata considerando um índice de refração médio dado por (1)

$$\frac{1}{\mu_m^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_x + \mu_o}{\mu_x^2 \mu_o^2} \right) \quad (6.1)$$

Entretanto, no que segue será considerado um índice de refração médio mais simples algebricamente

$$\frac{1}{\mu_m^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_x^2} + \frac{1}{\mu_o^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\mu_x^2 + \mu_o^2}{\mu_x^2 \mu_o^2} \quad (6.2)$$

e será mostrado que os resultados do método de superposição assim obtidos são exatos pelo menos até termos de 2a. ordem em x.

Obtem-se

$$\frac{1}{\mu_m^2} = 1 + f_i A_i^2 - \frac{1}{2} f_i Y_T^2$$

e comparando com

$$E = \frac{1}{\epsilon_o} K_s^{-1} \cdot ID = \frac{1}{\epsilon_o} \frac{1}{\mu_m^2} ID$$

tem-se

$$K_s^{-1} = 1 + f_i A_i^2 - \frac{1}{2} f_i Y_T^2$$

As equações (3.6) nesse caso poderiam ser escritas como

$$E_x = \check{\mu}^2 \left( 1 + f_i A_i^2 - \frac{1}{2} f_i Y_T^2 \right) E_x + j f_i A_i \check{\mu}^2 Y_L E_y \quad (6.3)$$

$$E_y = \check{\mu}^2 \left( 1 + f_i A_i^2 - \frac{1}{2} f_i Y_T^2 \right) E_y - j f_i A_i \check{\mu}^2 Y_L E_x$$

O coeficiente de polarização da onda pode ser obtido das equações acima

$$\check{R}^2 = \left( \frac{E_x}{E_y} \right)^2 = -1 \quad \text{ou} \quad \check{R} = \pm j$$

$\check{R} = j$  representa a onda circularmente polarizada direita (R), enquanto que  $\check{R} = -j$  representa a onda circularmente polarizada esquerda (L).

As soluções correspondentes para os índices de refração são dadas então por

$$\check{\mu}_R^2 = \frac{1}{1 + f_i A_i^2 - \frac{1}{2} f_i Y_T^2 + f_i A_i Y_L} \quad (6.4)$$

$$\check{\mu}_L^2 = \frac{1}{1 + f_i A_i^2 - \frac{1}{2} f_i Y_T^2 - f_i A_i Y_L}$$

Os índices de refração reais e índices de atenuação podem ser obtidos em expansões em séries de :

$$\mu_{R,L}^2 = \frac{1}{1 + \frac{x}{A_x^2 - Y^2} \left( A_x - \frac{Y_T^2}{2A_x} \pm Y_L \right)} \quad (6.5)$$

$$\chi_{R,L} = \mu_{R,L}^3 \frac{x}{2(A_x^2 - Y^2)} \left[ \frac{2A_x(A_x \pm Y_L)}{A_x^2 - Y^2} - \frac{Y_T^2(3A_x^2 - Y^2)}{2A_x(A_x^2 - Y^2)} - 1 \right] \quad (6.6)$$

## 7. EFEITO DA ATIVIDADE ÓTICA NA ESFERA DE POINCARÉ

O efeito da atividade ótica sobre um estado de polarização P na esfera de Poincaré será uma rotação antihorária deste ponto em torno do estado R de um ângulo (Figura 5):

$$\frac{\omega}{c} \Delta \mu_c dz \quad (7.1)$$

onde

$$\Delta \mu_c = \mu_L - \mu_R$$

Considerando termos até ordem  $x^2$  obtêm-se:

$$\begin{aligned} \Delta\mu_c &= \frac{xY_L}{A_x^2 - Y^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{x}{(1-Y^2)} \left( \frac{Y_T^2}{2} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{xY_L}{(1-Y^2)} \left[ 1 + \frac{x}{2(1-Y^2)} \left( \frac{3}{2} Y_T^2 + 1 \right) \right] \quad (7.2) \end{aligned}$$

O efeito do dicroísmo circular na esfera de Poincaré será um deslocamento de P ao longo de um meridiano de R para L de um ângulo

$$\frac{\omega}{c} \Delta\chi_c \text{ sen } 2s_c$$

onde  $2s_c$  é o ângulo entre P e R e em ordem mais baixa em x

$$\Delta\chi_c = \chi_R - \chi_L = \frac{2xY_L}{(1-Y^2)^2} \frac{\mathcal{J}}{\omega} \quad (7.3)$$

#### 8. BIRREFRINGÊNCIA ELÍPTICA

Os estados característicos para birrefringência elíptica na ausência de atenuação podem ser obtidos dos resultados para birrefringência linear e atividade ótica. São os estados que se propagam invariados sob efeito simultâneo de birrefringência linear e atividade ótica. O deslocamento na esfera de Poincaré devido à birrefringência linear será uma rotação antihorária do estado em torno de  $L_x$  com raio de rotação  $\text{sen}2\varphi$  enquanto que a atividade ótica será uma rotação antihorária em torno do estado R com raio de rotação  $\text{cos}2\varphi$  (Eqs. (5.1) e (7.1)). Resultam dois estados característicos  $P_1$  e  $P_2$  com longitudes iguais às de  $L_0$  e  $L_x$  respectivamente e latitudes dadas pela condição de deslocamento nulo (Figura 6):

$$\frac{\omega}{c} \Delta\mu_b \text{ sen } 2\varphi dz = \frac{\omega}{c} \Delta\mu_c \text{ cos } 2\varphi dz$$

As coordenadas de  $P_2$  e  $P_1$  na esfera de Poincaré serão respectivamente

$$\text{tg } 2\varphi_2 = \frac{\Delta\mu_c}{\Delta\mu_b} = \frac{2A_x Y_L}{Y_T^2} \quad 2\psi_2 = 2\beta \quad (8.1)$$

e

$$\text{tg } 2\varphi_1 = -\text{tg } 2\varphi_2 \quad 2\psi_1 = 2\psi_2 + \pi \quad (8.2)$$

Estes resultados podem ser obtidos por cálculo direto<sup>(9,10)</sup> e são resultados exatos, apesar de terem sido deduzidos por meio de expansões até 2a. ordem em x.

O efeito da birrefringência elíptica será uma rotação antihorária de um estado de polarização qualquer P em torno de  $P_2$  de um ângulo (Figura 7):

$$\frac{\omega}{c} \Delta\mu dz$$

onde

$$\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2 \quad (8.3)$$

e  $\Delta\mu$  pode ser calculado a partir da equação de Appletton-Hartree ou pelo método de superposição por

$$\Delta\mu^2 = \Delta\mu_b^2 + \Delta\mu_c^2 \quad (8.4)$$

Esta equação permite determinar somente o módulo de  $\Delta\mu$ , de forma que o sinal de  $\Delta\mu$  deve ser determinado a partir do sentido das rotações para birrefringência linear e para atividade ótica. Considerando termos até ordem  $x^2$  o método de superposição (Eq.(8.4)) ou o cálculo direto (Eq.(8.3)) dão o mesmo resultado:

$$\Delta\mu = \frac{x Y_T^2}{2(1-Y^2)\cos 2\varphi_2} \left[ 1 + \frac{x}{2(1-Y^2)} \left( 3 - 2Y^2 + \frac{3}{2} Y_T^2 \right) \right] \quad (8.5)$$

9. DICROISMO ELÍPTICO

Os estados característicos para dicroísmo elíptico podem ser definidos como estados que se propagam invariados sob efeito simultâneo de dicroísmo linear e circular. O dicroísmo linear corresponde a um deslocamento de  $L_o$  para  $L_x$ , enquanto o dicroísmo circular será um deslocamento de  $R$  para  $L$ . Assim, os estados característicos para dicroísmo elíptico têm mesmas longitudes de  $L_x$  e  $L_o$ . Indicando por  $D_2$  o estado característico com mesma longitude de  $L_x$ , sua latitude  $2\varphi_{D_2}$  é determinada pela condição (Figura 8)

$$\frac{\omega}{c} \Delta\chi_b \sin 2\varphi_{D_2} dz = -\frac{\omega}{c} \Delta\chi_c \cos 2\varphi_{D_2} dz \quad (9.1)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{D_2} = -\frac{\Delta\chi_c}{\Delta\chi_b} = -\frac{4Y_L}{Y_T^2(Y^2-3)}$$

As coordenadas dos estados característicos  $D_1$  e  $D_2$  para dicroísmo elíptico são dadas por

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{D_2} = \frac{4Y_L}{Y_T^2(3-Y^2)} \quad 2\psi_{D_2} = 2\beta$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{D_1} = -\operatorname{tg} 2\varphi_{D_2} \quad 2\psi_{D_1} = 2\psi_{D_2} + \pi \quad (9.2)$$

O efeito do dicroísmo elíptico sobre um estado de polarização qualquer  $P$  na esfera de Poincaré será um deslocamento des

te ponto ao longo de um grande círculo de  $D_1$  para  $D_2$  de um ângulo

$$\frac{\omega}{c} \Delta\chi_D \sin 2s dz \quad (9.3)$$

onde  $2s$  é o ângulo entre  $P$  e  $D_2$  e

$$\Delta\chi_D = \chi_{D_1} - \chi_{D_2}$$

$\Delta\chi_D$  pode ser calculado diretamente a partir da equação de Appletton-Hartree ou pelo método de superposição por

$$\Delta\chi_D^2 = \Delta\chi_b^2 + \Delta\chi_c^2 \quad (9.4)$$

Esta expressão só fornece o módulo de  $\Delta\chi_D$ , de forma que seu sinal deve ser determinado a partir dos sinais de  $\Delta\chi_b$  e  $\Delta\chi_c$ .

No que segue,  $\Delta\chi_D$  será determinado mais diretamente a partir da equação (9.3) para comparação com a equação (9.4).

Supondo que a atenuação seja pequena, os estados característicos  $S_1$  e  $S_2$  para birrefringência elíptica com atenuação serão representados na esfera de Poincaré por pontos respectivamente próximos dos estados  $P_1$  e  $P_2$  característicos para birrefringência elíptica na ausência de atenuação (Figura 9). Considerando uma onda num estado inicial de polarização  $S_2$ , de intensidade inicial  $I_o$  e atravessando uma espessura infinitesimal  $dz$  do meio, o único efeito sobre a onda será uma atenuação de sua intensidade  $I$

$$I = I_o e^{-2K_2 dz} = I_o - I_o 2K_2 dz$$

onde  $k_2$  é o coeficiente de atenuação

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \chi_2$$

Decompondo o estado  $S_2$  segundo os estados ortogonais  $D_1$  e  $D_2$  as intensidades das componentes serão inicialmente (1)

$$I_{10} = I_0 \cos^2 \frac{2s}{2} = I_0 \cos^2 s \quad (9.5)$$

$$I_{20} = I_0 \cos^2 \frac{\pi - 2s}{2} = I_0 \sin^2 s$$

onde  $s$  é o ângulo entre  $S_2$  e  $D_2$ . Se for considerado a propagação das componentes no meio, existem dois efeitos. Um deles é a atenuação das componentes descrita por

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{10} - I_{10} 2K_{D1} dz \\ I_2 &= I_{20} - I_{20} 2K_{D2} dz \end{aligned} \quad (9.6)$$

E o outro efeito é a birrefringência elíptica dos estados  $D_1$  e  $D_2$  que pode ser descrita como uma rotação em torno do eixo  $P_1P_2$ . Uma vez que os estados  $D_1$  e  $D_2$  são característicos para dicroísmo, eles não sofrem deslocamento na esfera de Poincaré devido à atenuação e na rotação devida à birrefringência elíptica eles permanecem ortogonais, não havendo troca de energia entre um estado e outro. Assim, o único efeito sobre a intensidade das componentes será a atenuação descrita pelas equações (9.6), e de

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = I_{10} + I_{20} - 2(I_{10}K_{D1} + I_{20}K_{D2}) dz \\ &= I_0 - 2I_0(\sin^2 s K_{D1} + \cos^2 s K_{D2}) dz \end{aligned}$$

resulta

$$K_2 = K_{D1} \sin^2 s + K_{D2} \cos^2 s$$

Analogamente, obtém-se

$$K_1 = K_{D1} \cos^2 s + K_{D2} \sin^2 s$$

e assim

$$K_1 - K_2 = (K_{D1} - K_{D2}) \cos 2s$$

ou

$$\Delta\chi_D = \chi_{D1} - \chi_{D2} = \frac{\chi_1 - \chi_2}{\cos 2s} \quad (9.7)$$

Em primeira ordem em  $\frac{\nu}{\omega}$  pode-se escrever

$$2s = 2\varphi_2 - 2\varphi_{D2}$$

e os índices de atenuação  $\chi_1$  e  $\chi_2$  podem ser calculados da equação de Appletton-Hartree em expansões em séries de potências de  $\frac{\nu}{\omega}$ .

Das equações (3.7) e (4.2) obtém-se em ordem mais baixa em  $\frac{\nu}{\omega}$ :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{(1 - \mu_1^2)^2}{\mu_1} \frac{(A_x + C - D)}{2x A_x} \frac{\nu}{\omega} \\ \chi_2 &= \frac{(1 - \mu_2^2)^2}{\mu_2} \frac{(A_x + C + D)}{2x A_x} \frac{\nu}{\omega} \end{aligned} \quad (9.8)$$

onde

$$\begin{aligned} C &= \frac{Y_r^2}{2A_x} = Y_L (\operatorname{tg} 2\varphi_2)^{-1} \\ D &= \frac{C^2}{(C^2 + Y_L^2)^{\frac{1}{2}}} = Y_L \frac{\cos^2 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_2} \end{aligned}$$

Em primeira ordem em  $x$  obtém-se

$$\chi_1 - \chi_2 = \frac{x}{(1 - y^2)^2} (y^2 - 3) D \left[ 1 + \operatorname{tg} 2\varphi_2 \operatorname{tg} 2\varphi_{D2} \right] \frac{\nu}{\omega}$$

e substituindo

$$\cos 2s = \cos(2\varphi_2 - 2\varphi_{D2}) = \cos 2\varphi_2 \cos 2\varphi_{D2} \left[ 1 + \operatorname{tg} 2\varphi_2 \operatorname{tg} 2\varphi_{D2} \right]$$

em (9.7) obtém-se

$$\Delta\chi_D = \chi_{D_1} - \chi_{D_2} = \frac{\chi Y_T^2}{2(1-Y^2)^2} \frac{(Y^2-3)}{\cos 2\varphi_{D_2}} \frac{\nu}{\omega}$$

O mesmo resultado pode ser obtido em módulo de (9.4).

10. ESTADOS CARACTERÍSTICOS PARA BIRREFRINGÊNCIA ELÍPTICA COM ATENUAÇÃO

Os estados característicos para propagação da onda podem ser obtidos pelo método de superposição como estados que permanecem invariados sob efeito simultâneo de birrefringência elíptica sem atenuação e dicroísmo elíptico. Indicando por  $S_2$  o estado característico próximo de  $P_2$ , a rotação infinitesimal de  $S_2$  em torno de  $P_2$  devida à birrefringência elíptica sem atenuação deve ser igual e oposta ao deslocamento de  $S_2$  de  $D_1$  para  $D_2$  devido ao dicroísmo elíptico.

O ângulo  $\xi$  entre  $S_2$  e  $P_2$  é da ordem de  $\nu/\omega$  e uma vez que  $P_2$  e  $D_2$  têm mesma longitude, resulta que a diferença de latitude entre  $P_2$  e  $S_2$  é um arco da ordem de  $b\xi$  onde  $b$  é um ângulo pequeno da ordem de  $\nu/\omega$  (Figura 10). Assim, a diferença de latitude entre  $P_2$  e  $S_2$  é de 2a. ordem em  $\nu/\omega$ . Em ordem mais baixa em  $\nu/\omega$  :

$$\begin{aligned} 2\varphi_2 &= 2\varphi_{S_2} \\ 2\varphi_1 &= 2\varphi_{S_1} \end{aligned} \quad (10.1)$$

Indicando por  $2\alpha$  a diferença de latitude entre os estados  $P_2$  e  $S_2$

$$2\psi_{S_2} = 2\psi_2 - 2\alpha \quad (10.2)$$

resulta que para o estado  $S_1$  (Figura 10):

$$2\psi_{S_1} = 2\psi_1 + 2\alpha \quad (10.2)$$

o que mostra que os estados característicos para propagação da onda com atenuação são não ortogonais.

Impondo a condição de que os deslocamentos devidos à birrefringência elíptica e dicroísmo elíptico sejam iguais e opostos, resulta

$$\text{sen}\epsilon \frac{\omega}{c} \Delta\mu dz = \frac{\omega}{c} \Delta\chi \text{sen}2s dz$$

ou

$$\Delta\mu \text{sen}\epsilon = \Delta\chi \text{sen}2s$$

Considerando o triângulo esférico  $P_2S_2R$  tem-se pela lei dos senos em ordem mais baixa em  $\frac{\nu}{\omega}$  :

$$\frac{\text{sen}\epsilon}{\text{sen}\delta} = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} - 2\varphi_2)}{\text{sen}\frac{\pi}{2}}$$

Assim

$$\text{sen}\epsilon = \text{sen}2\alpha \cos 2\varphi_2$$

e

$$\Delta\mu \text{sen}2\alpha \cos 2\varphi_2 = \Delta\chi \text{sen}2s$$

Em ordem mais baixa em  $\nu/\omega$  tem-se

$$2s = 2\varphi_2 - 2\varphi_{D_2}$$

e

$$\text{sen}2\alpha = \frac{\Delta\chi}{\Delta\mu} \cos 2\varphi_{D_2} (\text{tg}2\varphi_2 - \text{tg}2\varphi_{D_2})$$

e se obtém

$$\text{sen}2\alpha = \text{sen}2\varphi_2 \frac{\nu}{\omega}$$

ou ainda

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{sen}2\varphi_2 \frac{\nu}{\omega}$$

Assim resulta que

$$\psi_{S_2} = \psi_2 - \alpha \quad \text{e} \quad \psi_{S_1} = \psi_1 + \alpha$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi_2 \frac{v}{\omega}$$

em ordem mais baixa em  $v/\omega$ .

Os mesmos resultados podem ser obtidos calculando diretamente os estados elípticos característicos para propagação da onda com atenuação, como é feito a seguir.

O coeficiente de polarização da onda é dado por

$$\check{R} = -\frac{H_y}{H_x} = \frac{E_x}{E_y}$$

Das equações de Maxwell se obtém formalmente (2)

$$\check{\sigma}_s \cdot \mathbf{E} = \mathbf{H}$$

onde

$$\check{\sigma}_s = j\omega\epsilon_0 \begin{bmatrix} \check{\mu}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\mu}^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \check{\mu}^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

e combinando com a equação (2.10) se obtém

$$(\check{\sigma}^{-1} \check{\sigma}_s - 1) \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (10.5)$$

onde

$$\check{\sigma}^{-1} \check{\sigma}_s - 1 = -\frac{1}{X} \begin{bmatrix} AM^2 + X & -jY_L M^2 & -jY_T \cos\beta \\ jY_L M^2 & AM^2 + X & -jY_T \operatorname{sen}\beta \\ -jY_T M^2 \cos\beta & -jY_T M^2 \operatorname{sen}\beta & -A + X \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

sendo M e demais grandezas definidas pelas equações (2.9). Resolvendo as duas primeiras equações de (10.5) se obtém o coeficiente de polarização:

$$\check{R} = \frac{j \operatorname{tg} \beta + \check{Q}}{\check{Q} \operatorname{tg} \beta - j} \quad (10.7)$$

onde

$$\check{Q} = \frac{A + \frac{X}{M^2}}{Y_L}$$

Expandindo  $\check{Q}$  em séries de potências de  $v/\omega$  resulta em

primeira ordem

$$\check{Q} = Q + jg$$

sendo

$$Q_{\pm} = (\check{Q})_{v=0} = \frac{C \mp (C^2 + Y_L^2)^{\frac{1}{2}}}{Y_L} = \frac{\cos 2\varphi_2 \mp 1}{\operatorname{sen} 2\varphi_2} \quad (10.8)$$

e

$$g_{\pm} = \frac{C \mp D}{Y_L (1 - X)} \frac{v}{\omega} = \mp Q_{\pm} \cos 2\varphi_2 \frac{v}{\omega}$$

onde C e D são definidos pelas equações (9.8) e os sinais correspondem respectivamente aos da equação (3.8). Assim,

$$\check{R} = \frac{j(\operatorname{tg} \beta + g) + Q}{Q \operatorname{tg} \beta - j + jg \operatorname{tg} \beta}$$

Pode ser mostrado por cálculo direto que R pode ser escrito na forma

$$\check{R} = \frac{j \operatorname{tg} \beta_1 + Q_1}{Q_1 \operatorname{tg} \beta_1 - j} \quad (10.9)$$

onde

$$\operatorname{tg}(\beta - \beta_1) = \frac{g}{Q Q_1 - 1} \quad (10.10)$$

e  $Q_1$  é tal que

$$(Q_1 - Q)(Q Q_1 - 1) = g^2 Q_1 \quad (10.11)$$

Comparando (10.9) com (10.7) pode ser observado que os

coeficientes de polarização da onda com e sem atenuação são formalmente idênticos. Assim, os resultados na presença de atenuação podem ser transcritos daqueles na ausência de atenuação interpretando  $tg\beta_1$  por  $tg\beta$  e  $Q_1$  por  $Q$ .

Resolvendo a equação (10.11) para  $Q_1$  e expandindo o resultado em primeira ordem em  $g^2$  obtém-se:

$$Q_1 = Q + \frac{Q}{Q^2 - 1} g^2$$

Assim, em primeira ordem em  $\nu/\omega$  pode-se tomar

$$Q_1 = Q \quad (10.12)$$

Uma vez que a elipticidade do estado de polarização está associada somente ao parâmetro  $Q$ , chega-se ao mesmo resultado estabelecido na equação (10.1), isto é, em primeira ordem em  $\nu/\omega$  os estados característicos com e sem atenuação têm mesma elipticidade (mesma latitude na esfera de Poincaré).

A inclinação da elipse de polarização está associada ao ângulo  $\beta_1$  dado então por

$$tg(\beta_1 - \beta) = \frac{g}{Q^2 - 1} \quad (10.13)$$

Substituindo as equações (10.8) se obtém:

$$tg(\beta_1 - \beta) = \pm \frac{1}{2} \text{sen } 2\varphi_2 \frac{\nu}{(1-x)\omega} \cong \beta_1 - \beta$$

O sinal negativo da equação (3.8) (e assim o da equação acima) corresponde à onda característica "extraordinária" ( $P_2$  ou  $S_2$ ) e assim

$$\Psi_{S_2} = \beta - \frac{1}{2} \text{sen } 2\varphi_2 \frac{\nu}{(1-x)\omega}$$

Enquanto que o sinal positivo corresponde à onda característica

"ordinária" ( $P_1$  ou  $S_1$ ) e

$$\Psi_{S_1} = \left[ \beta + \frac{1}{2} \text{sen } 2\varphi_2 \frac{\nu}{(1-x)\omega} \right] + \frac{\pi}{2}$$

Deve ser observado que os resultados acima são exatos (em  $x$ ), enquanto que os resultados expressos pelas equações (10.2) foram obtidos em ordem mais baixa em  $x$ .

Pode ser mostrado (9) que os estados característicos com atenuação podem ser representados por elipses que são imagens espelho uma da outra com relação a um plano que forma  $45^\circ$  com o plano definido pela direção de propagação e o campo magnético.

## 11. CONCLUSÕES

Os estados característicos para birrefringência linear e atividade ótica só dependem respectivamente do campo magnético transversal e longitudinal. Assim, as expressões (5.2) e (7.2) mostram que os efeitos de birrefringência linear e atividade ótica sobre a evolução da polarização da onda dependem essencialmente dos campos magnéticos transversal e longitudinal respectivamente. No caso

$$y^2 \ll 1 \quad (11.1)$$

estes efeitos podem ser considerados completamente independentes, um associado somente ao campo magnético transversal, enquanto que o outro somente ao campo longitudinal.

As considerações acima se estendem aos dicroísmos linear e circular, como mostram as equações (5.3) e (7.3).

O efeito da atividade ótica na esfera de Poincaré é representado por uma rotação em torno do eixo RL proporcional a  $Y_L$ , enquanto que a birrefringência linear é uma rotação em torno do

eixo  $L_O L_x$  proporcional a  $Y_T^2$ . Estes resultados permitem uma análise qualitativa simples da evolução da polarização da onda num meio.

Um caso de interesse é a propagação de ondas de altas frequências (microondas ou radiação infravermelhas distante) para diagnósticos de densidade de plasma e corrente de plasma num tokamak. Para propagação perpendicular ao campo toroidal, haverá o efeito de birrefringência linear associado ao campo transversal que é essencialmente o campo toroidal, e o efeito de atividade ótica associado à componente longitudinal do campo poloidal (Figura 11). Assim, a medida da atividade ótica permite determinar a densidade de corrente de plasma. A atividade ótica pura ocorre se

$$Y_T^2 \ll Y_L \quad (11.2)$$

ou se o estado de polarização inicial da onda for alinhado com o eixo  $L_O L_x$  e a atividade ótica for suficientemente pequena de forma que o ponto representativo não se desloque significativamente deste eixo. De Marco e Segre<sup>(10)</sup> propõem a medida do campo poloidal de tokamaks por rotação de Faraday nesta última condição.

Se o estado inicial de polarização da onda for linear e perpendicular ao eixo  $L_O L_x$  na esfera de Poincaré, o efeito de birrefringência linear se torna máximo e se

$$Y_T^2 \gg Y_L \quad (11.3)$$

este efeito se torna predominante. Neste caso, o efeito sobre o estado de polarização da onda é independente da corrente de plasma, uma vez que a birrefringência linear é associada essencialmente ao campo toroidal. Este resultado corresponde ao obtido nume-

ricamente por Craig<sup>(11)</sup> que se a polarização inicial da onda for linear e em  $45^\circ$  com a direção do campo toroidal, a evolução da polarização dependerá essencialmente da densidade de plasma e não da corrente. Segre<sup>(12)</sup> chega a este resultado por expansões em séries de potências para a birrefringência elíptica.

Uma outra situação de interesse é a propagação da onda num percurso tal como o mostrado na Figura 12 (direção z). Se as condições

$$B_p^2 \ll B_T^2 \quad \text{e} \quad Y^2 \ll 1$$

forem satisfeitas, é fácil ver da geometria do percurso e devido ao fato do perfil de densidade de plasma ir a zero na borda que a birrefringência linear será um efeito desprezível comparado com a atividade ótica. Isto é, o efeito será uma rotação de Faraday pura dependente da densidade de plasma e do campo magnético toroidal. A possibilidade de medida da densidade de plasma no Tokamak TBR<sup>(13)</sup> por rotação de Faraday usando laser infravermelho é discutida em maiores detalhes em outro texto<sup>(14)</sup>.

A equação para a evolução da polarização num plasma magnetizado incluindo atenuação pode ser facilmente escrita a partir dos resultados obtidos para dicroísmo elíptico. Entretanto isto é discutido mais detalhadamente em outro texto<sup>(15)</sup>.

REFERÊNCIAS

1. G.N.Ramachandran and S.Ramaseshan, "Cristal Optics"; Encyclopedia of Physics Vol. 25/1, Springer, Berlin (1961).
2. M.A.Heald and C.B.Wharton, "Plasma Diagnostic with Microwave", John Wiley, New York (1965).
3. J.A.Ratcliffe, "The Magneto-Ionic Theory and its Application to Ionosphere", University Press, Cambridge (1959).
4. J.Neufeld, J.Appl.Phys. 34, 2549 (1963).
5. E.Astrom, "Waves in a Hot Ionized Gas in a Magnetic Field", in Electromagnetic Phenomena in Cosmic Physics, Editor B.Lehnert, University Press, Cambridge (1958).
6. P.Drude, "Theory of Optics", Longmans & Green, London (1829).
7. G.Salmon, "Analytic Geometry of Three Dimensions", Dublin (1881).
8. J.D.Kraus and K.R.Carver, "Electromagnetics", 2nd. Ed. Mac-Graw-Hill-Kogakusha, Tokyo (1973).
9. K.G.Budden, "Radio Waves in the Ionosphere", University Press, Cambridge (1961).
10. F. de Marco and S.E.Segre, Plasma Phys. 14, 245 (1972).
11. A.D.Craig, Plasma Phys. 18, 777 (1976).
12. S.E.Segre, Plasma Phys. 20, 295 (1978).
13. S.W.Simpson et al., "Design of the TBR Tokamak", Relatório Interno IFUSP/P-155-LFP-2, São Paulo (1978).
14. J.H.Vuolo e R.M.O.Galvão, Relatório Interno do Laboratório de Física de Plasmas, Instituto de Física da USP, São Paulo (1982).
15. J.H.Vuolo e R.M.O.Galvão, Trabalho a ser apresentado no Encontro Latino-Americano de Física de Plasmas e Pesquisa em Fusão Nuclear Controlada, Cambuquira, Brasil (1982).

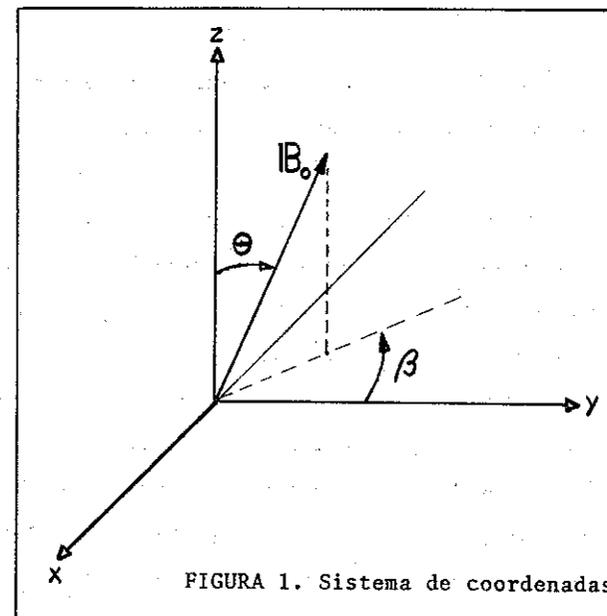


FIGURA 1. Sistema de coordenadas

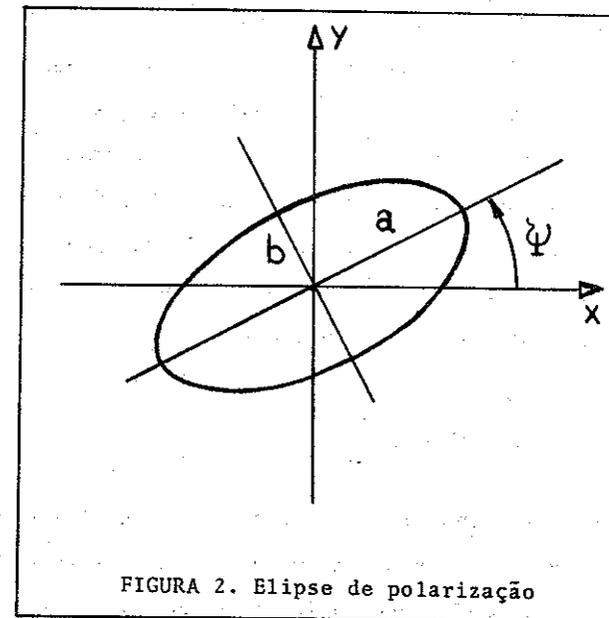


FIGURA 2. Elipse de polarização

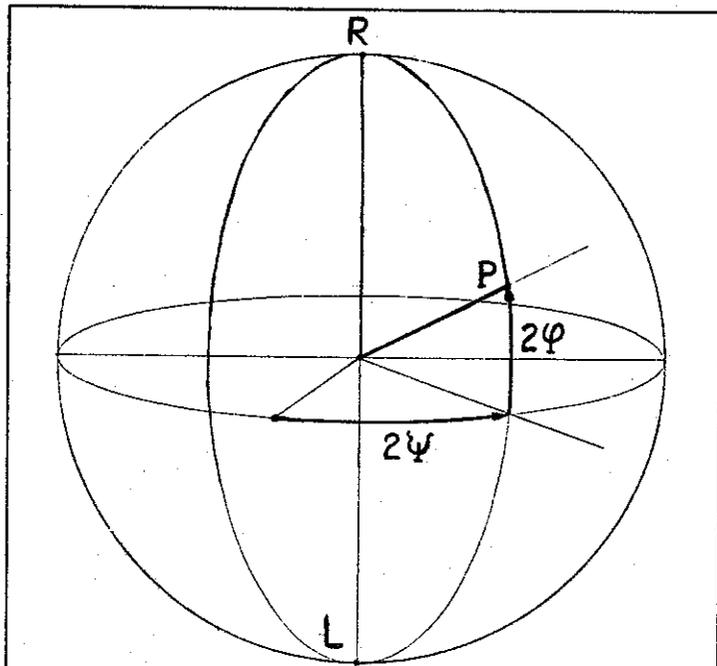


FIGURA 3. Esfera de Poincaré

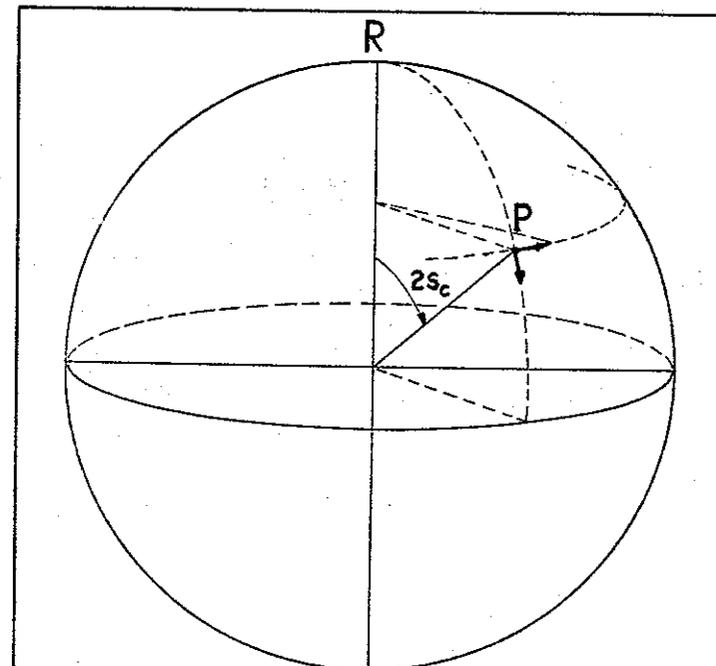


FIGURA 5. Atividade ótica e dicroísmo circular

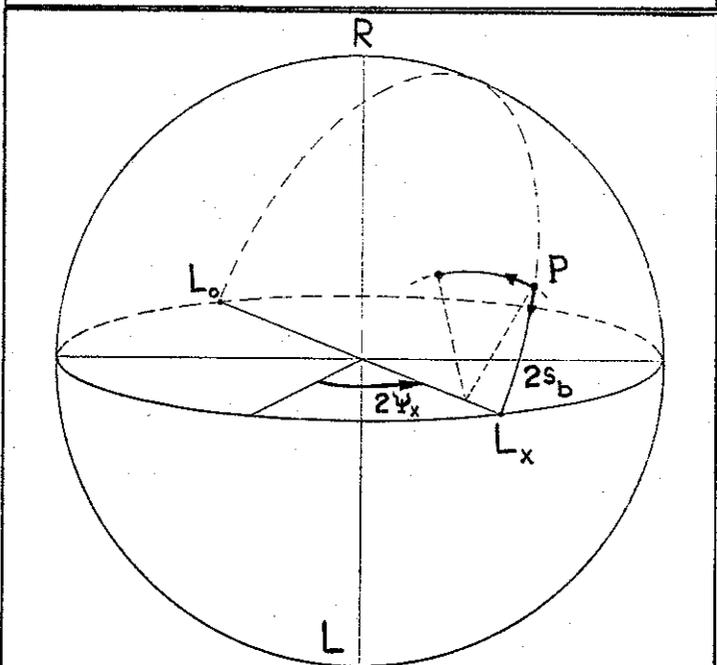


FIGURA 4. Birrefringência e dicroísmo lineares

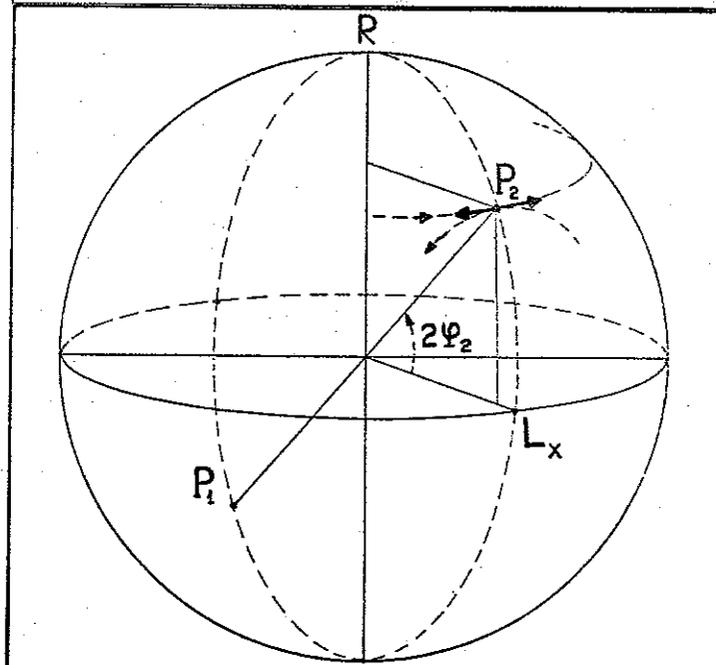


FIGURA 6. Estado característico  $P_2$

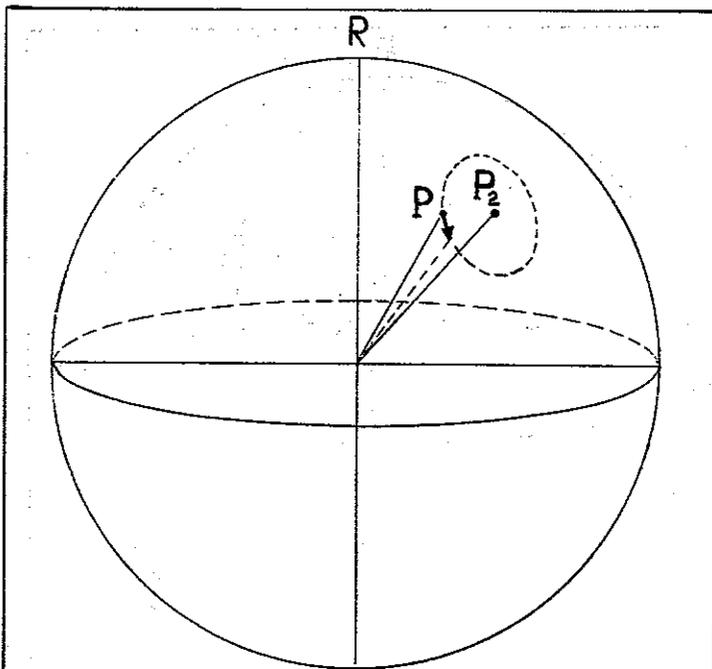


FIGURA 7. Birrefringência elíptica

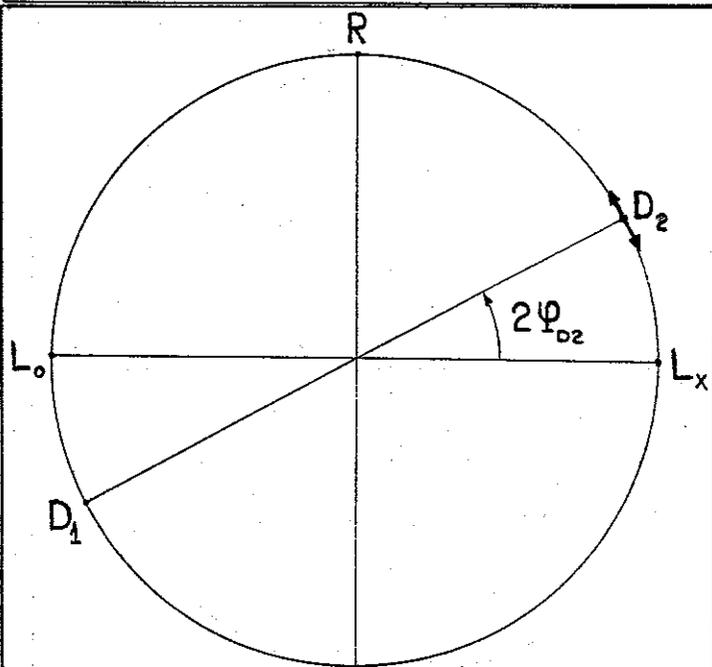


FIGURA 8. Determinação do estado  $D_2$

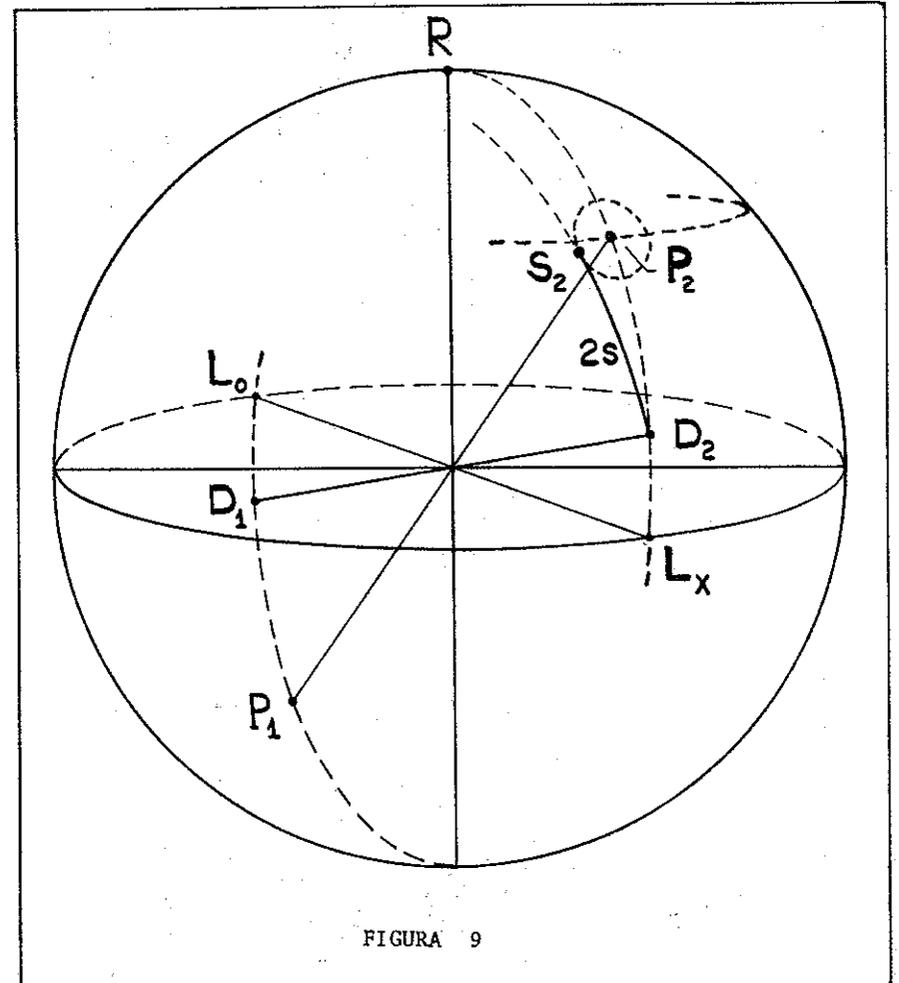


FIGURA 9