UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

PUBLICAÇÕES

IFUSP/P-499

O PROGRAMA DE ERLANGEN DE FELIX KLEIN
(CONSIDERAÇÕES COMPARATIVAS SOBRE AS PESQUISAS GEOMÉTRICAS MODERNAS)

Tradução e Comentários por

Normando Celso Fernandes
Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Outubro/1984

O PROGRAMA DE ERLANGEN DE FELIX KLEIN

(CONSIDERAÇÕES COMPARATIVAS SOBRE AS PESQUISAS GEOMÉTRICAS MODERNAS)

Tradução e Comentários por

Normando Celso Fernandes

"La géométrie usuelle est la plus simple des théories physiques"

E. Picard, Revue du mois, 10 février 1908.

São Paulo, outubro de 1984

O PROGRAMA DE ERLANGEN DE FELIX KLEIN

Tradução e Comentários por

Normando Celso Fernandes

Departamento de Física Experimental

Instituto de Física - U S P

São Paulo, outubro de 1984

O PROGRAMA DE ERLANGEN DE FELIX KLEIN

ERLANGEN - 1872

(Tradução e comentários por Normando Celso Fernandes)

APRESENTAÇÃO - Neste trabalho apresentamos uma versão em língua portuguesa do famoso Programa de Erlangen cujo título original deve-se ler " Considerações Comparativas Sobre As Pesquisas Geométricas Modernas ". Na sua forma final como a que apresentamos aqui, o programa foi publicado com o título " Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen ", em Mathematische Annalen, Vol XLIII, (1893) p. 63. O programa original, contudo, foi publicado por ocasião da abertura do ano acadêmico de 1872 da Universidade de Erlangen. Nessa altura, Felix Klein tinha apenas 23 anos de idade.

Seria desnecessário realçar aqui a importância do Programa de Erlangen na história do desenvolvimento da ciência do século XX. No dizer de J. Dieudonné, esse trabalho serve como um verdadeiro " divisor de águas " que coroa a longa e brilhante evolução da Geometria Projetiva, graças ao enfoque fundamental colocado no conceito de grupo. As conseqüências e os prolongamentos das idéias de Klein motivaram e continuam motivando pesquisas fundamentais em Matemática e em Física. Pela profundidade dos temas abordados, preferimos não tecer considerações específicas sobre os capítulos. Vamos apresentar o texto e deixar que o leitor medite sobre ele.

CONSIDERAÇÕES COMPARATIVAS

Dentre os resultados obtidos nos últimos cincoenta anos no campo da geometria, ocupa o primeiro lugar o desenvolvimento da Geometria Projetiva (ver Nota I). Ainda que a princípio as relações métricas parecessem inacessíveis a essa disciplina pois elas não se conservam invariantes pelas projeções, recentemente, entretanto, foram elas também incorporadas sob o ponto de vista projetivo, de modo que agora os métodos projetivos compreendem todas as geometrias somente com a ressalva que as propriedades métricas, não mais como propriedades dos entes em si, são vistas como relações entre esses e uma forma fundamental, o círculo imaginário no infinito (da esfera).

Comparando as noções da geometria ordinária (elementar) com este método, que introduz gradativamente as formas no espaço, surge a questão se existe um princípio geral, segundo o qual ambos os métodos podem se organizar. Uma tal questão ganha mais importância pois, junto com a geometria elementar e com a projetiva, uma série de outros métodos se apresenta, ainda que menos desenvolvidos, mas que merecem também um direito de existência autônoma. Tais métodos consistiriam da geometria dos raios recíprocos, das transformações racionais, etc., os quais serão mencionados e expostos no que se segue.

Aceitando a tarefa de estabelecermos em sequência esses desenvolvimentos, certamente não chegaremos a desenvolver nenhuma idéia essencialmente nova mas somente delinearemos com clareza e precisão o que já foi pensado sobre cada assunto de forma mais ou menos exata. Entretanto, a publicação de considerações destinadas a estabelecer uma visão global se justifica pois, a geometria que essencialmente é una, pelo desenvolvimento rápido pela qual passa nos últimos tempos, se subdividiu demais em disciplinas quase separadas (ver Nota II) que progridem independentemente umas das outras.

Adicione-se a isso a intenção particular de expor métodos e pontos de vista que se desenvolveram em trabalhos recentes de Lie e meus. Os nossos trabalhos, ainda que se referindo a objetos distintos, entram nesse modo geral de considerações, necessitando, entretanto, de uma discussão que caracterize o ponto de vista almejado e as suas tendências.

Ainda que até agora só tenhamos falado de pesquisas geométricas, dentre essas devemos também entender os trabalhos relativos às variedades com qualquer número de dimensões, os quais se desenvolveram a partir da geometria com a abstração da representação espacial, representação aliás não essencial para as considerações puramente matemáticas (ver Notas III e IV). No estudo das variedades nós nos defrontamos com espécies diferentes como em geometria e tratamos, como em geometria, de pôr em relevo o que há de comum e o que há de diferente em pesquisas realizadas independentemente.

De maneira abstrata, bastaria em seguida falar simplesmente de variedades com várias dimensões mas, retornando à representação geométrica mais familiar, encontramos explicações mais simples e inteligíveis. Como exemplo, partindo da consideração de entes geométricos e desenvolvendo o raciocínio sobre esses, reconstruimos o mesmo caminho percorrido pela ciência no seu desenvolvimento, o que costuma ser uma base importante para a exposição.

Não é possível fazer aqui uma exposição preliminar da matéria com a qual nos ocuparemos na seqüência, pois essa não se adapta muito bem a uma forma mais concisa [1] ; os títulos dos parágrafos mostrarão o progresso geral do pensamento. No final há uma série de notas, as quais desenvolvem de forma mais ampla alguns pontos particulares, quando isso pode parecer útil para a explicação geral do texto, sendo que esses pontos estão bem separados de outros semelhantes pois a finalidade é seguir o princípio matemático abstrato de acordo com as considerações do

---

[1] Essa concisão da forma é um defeito da nossa exposição, e é de se esperar que ela não torne a compreensão sensivelmente mais penosa. Eu não poderia remediar isso a menos que fizesse uma exposição muito mais extensa, na qual seriam desenvolvidas em detalhes as teorias particulares que aqui são apenas mencionadas.

texto em si.

- § 1 -

GRUPO DE TRANSFORMAÇÕES NO ESPAÇO . GRUPO PRINCIPAL COLOCA-SE UM PROBLEMA GERAL

O conceito mais essencial dentre aqueles necessários para o que exporemos em seguida é o de grupo de transformações do espaço.

Compondo tantas transformações do espaço quantas quisermos (2) sempre teremos de novo uma transformação. Ora, se um dado conjunto de transformações goza da propriedade de que cada transformação resultante de composições de transformações do conjunto ainda pertence ao conjunto, chamaremos a esse conjunto de grupo (3) (4).

---

(2) Supomos sempre sujeito simultaneamente às transformações todo o complexo das figuras do espaço e falamos, portanto, simplesmente de transformações do espaço. As transformações podem introduzir ao invés dos pontos, outros elementos, como o que acontece com as transformações recíprocas mas, no texto, não distinguiremos esses conceitos.

(3) Essa definição ainda necessita de um complemento. Supomos implicitamente, que os grupos do texto só admitem operações cujas inversas também estejam definidas ; entretanto, no caso duma infinidade de operações, isso não decorre da própria definição de grupo ; é, portanto, uma hipótese que deve ser adicionada à definição de grupo do texto.

(4) A noção e a denominação são emprestadas da teoria

Um exemplo de grupo de transformações é dado pelo conjunto dos movimentos (considerando cada movimento como uma operação efetuada sobre todo o espaço). Um grupo contido neste é, por exemplo, o das rotações ao redor de um ponto (5). Inversamente, um grupo que contém o grupo dos movimentos é constituído pelo conjunto das transformações homográficas (colineações). Por outro lado, o conjunto das transformações recíprocas (dualísticas) não constitui nenhum grupo, pois duas reciprocidades aplicadas uma depois da outra dão lugar a uma transformação homográfica - entretanto, teremos de novo um grupo se considerarmos o conjunto de todas as transformações recíprocas e colineares (6).

---

das substituições onde consideramos, não transformações dum campo contínuo, mas sim permutações dum número finito de grandezas discretas.

(5) Camille Jordan determinou todos os grupos contidos no grupo dos deslocamentos (isometrias) (Annali di Matematica, t II).

(6) Não obstante sempre considerarmos as transformações dum grupo como aparecendo em sucessões contínuas, convém notar que esse aspecto não é essencial. Por exemplo, os deslocamentos em número limitado que fazem com que um corpo regular retorne ao ponto de partida também formam um grupo ; isso também ocorre para os deslocamentos, em número limitado, que fazem com que uma senóide venha a se superpor.

Estamos então no espaço das transformações que não alteram as propriedades geométricas das figuras. De fato, pela própria conceituação de propriedades geométricas, vemos que estas últimas são independentes das posições que as figuras a serem estudadas ocupam no espaço, das suas grandezas absolutas e, finalmente, também da orientação (7) segundo a qual suas partes estão dispostas. As propriedades de uma tal figura permanecem portanto inalteradas em relação a todos os movimentos do espaço nas suas transformações de semelhança, nos processos de reflexões (espelhamento), como também em relação a todas as transformações que resultam das composições destas. O conjunto de tais transformações chamaremos de <u>grupo principal</u> (8) de transformações do espaço : <u>as propriedades geométricas não se alteram pelas transformações do grupo principal</u>. Podemos também afirmar de modo inverso : <u>as propriedades geométricas são caracterizadas pela sua invariância com respeito às transformações do grupo principal</u>. Em verdade, se se considera por um momento o espaço como imóvel, isto é, como uma variedade rígida, então cada figura terá um interesse individual; isso se

---

(7) Por orientação é preciso entender aqui a propriedade: ordem segundo a qual uma figura se distingue da sua simétrica (imagem refletida). Assim é que, pela orientação, uma hélice destrógira se distingue duma hélice levógira.

(8) Por definição , essas transformações formam necessariamente um grupo

expressa dizendo que as propriedades intrínsecas da figura são propriamente geométricas se elas se conservam segundo as transformações do grupo principal. Esta noção, formulada aqui dum modo mais ou menos indeterminado, vai reaparecer de maneira mais clara no desenvolvimento ulterior das considerações.

Façamos agora abstração da figura material que, do ponto de vista matemático, não é essencial e consideremos no espaço, simplesmente uma variedade multidimensional. Como exemplo, vamos nos fixar na representação habitual do ponto como um elemento do espaço tomado como uma variedade tri-dimensional. Por analogia com as transformações do espaço, falamos de transformações da variedade; essas também formam <u>grupos</u>. Somente que aqui as coisas não se passam como no espaço onde um grupo se distingue de outro pelo seu significado ; aqui cada grupo é equivalente a outro. Como generalização da Geometria surge assim o seguinte problema abrangente :

<u>É dada uma variedade e nesta um grupo de transformações; estudar os entes que fazem parte da variedade no que concerne às propriedades que não se alteram pelas transformações do dado grupo</u>.

Segundo a expressão moderna a qual se refere somente a um determinado grupo, o de todas as transformações lineares, podemos também dizer assim:

É dada uma variedade e nesta um grupo de transformações: desenvolver a teoria dos invariantes relativos a esse grupo.

Este é o problema geral que abrange em si, não somente a geometria ordinária, mas também, em particular os novos métodos geométricos que devemos enunciar e as diversas maneiras de tratamento das variedades multidimensionais. Convém notar que é a arbitrariedade que subsiste no que diz respeito à escolha do grupo de transformações a ser fixado; e temos igual direito, no que se segue (isso já está implícito), de tecer todas as espécies de considerações que possam se encaixar no esquema geral.

- § 2 -

OS GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES DOS QUAIS UM ENGLOBA O OUTRO ESTÃO SUBORDINADOS ENTRE ELES. DIVERSOS TIPOS DE PESQUISAS GEOMÉTRICAS E SUAS RELAÇÕES MÚTUAS

Desde que as propriedades geométricas dos entes do espaço permanecem inalteradas em relação a todas as transformações do grupo principal, parece absurdo procurarmos as propriedades para as quais a inalterabilidade só se dá para uma parte das próprias transformações. Mas a colocação de uma tal questão é justificável, ao menos formalmente, se estudamos os entes do espaço em relação a elementos imaginados fixos. Consideremos como um exemplo, o caso da trigonometria esférica, onde além dos entes do espaço, temos um ponto distinto, fixado. Agora a questão primordial é esta : desenvolver o estudo das propriedades invariantes em relação ao grupo principal escolhido, não mais dos próprios entes do espaço, mas do sistema que eles formam com o ponto fixado. Mas podemos formular esta questão de outro modo: estudar os entes do espaço em si mesmos no que concerne às propriedades que não se alteram pelas transformações do grupo principal que conservam fixo o ponto proposto. Em outras palavras, é indiferente fazer um estudo : ou das figuras do espaço em relação ao grupo principal acrescentando o ponto dado, ou, sem acrescentar nada a priori, substituir o grupo principal por outro que esteja contido nele e cujas transformações deixem inalterado o ponto dado.

Este é um princípio do qual iremos fazer uso freqüente no que se segue e por isso damos agora uma formulação geral ilustrativa.

Seja dada uma variedade e, para fazer seu estudo, damos também um de seus grupos de transformações. Coloca-se então o problema de se estudar os entes contidos na variedade e seu relacionamento com um dos entes em especial. Podemos então ou acrescentar ao sistema de entes mais esse ente dado e assim estudar as propriedades do sistema estendido relacionadas ao grupo proposto - ou, não estender o sistema mas limitar as transformações que formam a base do estudo àquelas que já estão contidas no próprio grupo e que por hipótese deixam inalterado o ente proposto (e que necessariamente ainda formam um grupo).

Vamos agora raciocinar de maneira oposta à questão levantada no início do parágrafo e vamos nos ocupar do problema inverso, que é muito simples. Procuramos quais são as propriedades dos entes que se conservam segundo um grupo de transformações que contém o grupo principal como parte. Cada propriedade que encontramos com tal pesquisa é uma propriedade geométrica do próprio ente, mas a recíproca não é verdadeira. Para a recíproca passa a vigorar o princípio referido acima, segundo o qual, agora o grupo principal é o mais restrito. Têm-se, portanto :

Substituindo o grupo principal por outro grupo mais amplo as propriedades geométricas se conservam somente em parte. O restante aparece como propriedades não mais dos próprios entes mas como propriedades do sistema resultante do acréscimo de um ente especial aos entes originais. Esse ente especial, que sempre pode ser determinado (1), é definido pela condição que, supondo-o fixo, as únicas transformações dentre todas do grupo dado, que ainda são aplicáveis ao espaço, são as que pertencem ao grupo principal.

Sobre esta proposição repousam as particularidades dos novos raciocínios geométricos que devemos discutir e suas relações com o método elementar. A sua característica é de colocar como fundamento das considerações, ao invés do grupo

(1) Um tal ente pode ser gerado, por exemplo, aplicando as transformações do grupo principal ao elemento original arbitrário que não permanece invariante por nenhuma das transformações do grupo proposto.

principal, um outro grupo mais extenso de transformações do espaço. As relações mútuas são determinadas por uma proposição análoga, desde que os grupos estejam compreendidos um no outro. Isto também vale para o tratamento das variedades multidimensionais que iremos considerar. Isso será mostrado por meio de métodos simples pelos quais os teoremas estabelecidos de modo geral neste parágrafo e no precedente encontrarão explicações em objetos concretos.

- § 3 -

GEOMETRIA PROJETIVA

Cada transformação do espaço que não pertença precisamente ao grupo principal pode servir para transferir para novas figuras as propriedades de figuras já estabelecidas. Assim, usamos a geometria do plano como a geometria das superfícies que são representáveis sobre o plano; então, antes mesmo que nascesse uma verdadeira geometria projetiva, já se perguntava acerca das propriedades duma dada figura que podiam se deduzir de outra por meio de projeções. Mas a geometria projetiva somente surge mesmo é com a idéia de considerar a figura original como essencialmente idêntica a todas que dela se deduzem projetivamente e pelo enunciado de propriedades que se transferem por projeção de modo a tornar evidente suas independências das modificações que estejam sendo projetadas. Com isso, voltamos a colocar como fundamental o tratamento desenvolvido no § 1, definindo o grupo de todas as transformações projetivas, criando dessa maneira o contraste entre a geometria projetiva e a geometria elementar .

Um processo de desenvolvimento semelhante ao citado aqui pode, possivelmente, ser concebido para qualquer tipo de transformação do espaço. Voltaremos a esse ponto diversas vezes. Na própria Geometria projetiva esse desenvolvimento veio de duas direções. Uma das extensões dos conceitos se deu com a compreensão das transformações recíprocas (dualísticas) no grupo escolhido como fundamental. Do ponto de vista atual, duas figuras duais entre si, não mais são consideradas como diferentes mas como essencialmente idênticas. Um outro passo se deu com a extensão do grupo fundamental de transformações colineares e recíprocas mediante a consideração das transformações imaginárias correspondentes. Esse passo exige que antes estendamos o universo dos próprios elementos do espaço com a introdução dos imaginários - de modo análogo àquele que introduz as transformações recíprocas do grupo fundamental e que mantém os conceitos de ponto e de plano como elementos do espaço. Aqui não é o lugar apropriado para nos alongarmos sobre a conveniência da introdução dos elementos imaginários. Somente por meio deles é que se atinge a perfeita correspondência entre a ciência do espaço e o campo das operações algébricas. Entretanto, devemos notar que a razão de tal introdução está fundamentada na consideração de operações algébricas e não no grupo das trans-

formações projetivas e recíprocas. E, como para essas últimas podemos nos limitar a transformações reais desde que as colineações e as reciprocidades reais já formam um grupo - assim, do mesmo modo, podemos introduzir elementos imaginários do espaço, mesmo não nos colocando sob o ponto de vista projetivo e, fazemos isso tendo como objetivo o estudo de entes algébricos.

As proposições gerais do parágrafo precedente nos mostram como devemos conceber as propriedades métricas a partir de um ponto de vista projetivo. As propriedades métricas devem ser consideradas como relações projetivas com respeito a uma forma fundamental, o círculo imaginário no infinito(1), elemento que possui a propriedade de se transformar em si mesmo por meio das únicas transformações projetivas que também pertençam ao grupo principal. A proposição enunciada assim simplesmente necessita de um adendo essencial à visão ordinária restrita que corresponde a nos limitarmos aos elementos reais do espaço (e às transformações reais). Para estar sempre de acordo com este ponto de vista, é necessário

---

(1) Esta concepção deve ser lembrada como uma das coisas mais belas (da escola francesa) ; somente dessa maneira fica estabelecida de modo preciso a distinção entre propriedades de posição e propriedades métricas, distinção essa que deve ser feita desde o começo em geometria projetiva.

ainda adicionar expressamente ao círculo imaginário no infinito, o sistema de elementos reais (pontos) do espaço.

Convém lembrar agora o modo pelo qual von Staudt, na sua Geometria das posições, constrói a Geometria projetiva- isto é, aquela geometria projetiva que se limita a colocar como fundamental o grupo de todas as transformações projetivas e recíprocas reais (1).

É de se notar que nessa obra, do material das considerações habituais, apenas o que se conserva nas transformações projetivas é mantido. Querendo levar em conta também as considerações das propriedades métricas, será necessário introduzi-las como relações ligadas ao círculo imaginário no infinito. O processo de idéias assim completado adquire maior importância nas considerações expostas aqui pois veremos que é possível reconstruir edifícios geométricos análogos, dentro do espírito de cada um dos métodos geométricos simples que exporemos a seguir.

---

(1) A pesquisa mais ampla que compreende também as transformações imaginárias foi desenvolvida por von Staudt somente em " Beitrage zur Geometrie der Lage "

- § 4 -

CORRELAÇÃO ESTABELECIDA POR MEIO DUMA TRANSFORMAÇÃO DA VARIEDADE FUNDAMENTAL

Antes de passarmos a outras discussões dos métodos geométricos que surgem quando do estudo da geometria elementar e da geometria projetiva, vamos tecer algumas considerações gerais que irão se aplicar no que se segue e para as quais o que já discutimos servirá de exemplo.

Vamos examinar uma variedade A que tem um grupo B como fundamental. Se, por meio duma transformação qualquer a variedade A é levada numa outra variedade A', ao grupo B de transformações de A corresponderá um novo grupo B' que irá transformar A'. Temos então um princípio que se enuncia assim : ao tratamento de A tendo B como fundamental corresponde o tratamento de A' tendo B' como fundamental; isto é, cada propriedade duma figura contida em A relativamente ao grupo B fornece uma figura correspondente em A' com respeito ao grupo B'.

Seja, por exemplo, A uma reta (pontilhada), e seja B o grupo das transformações lineares, com ordem 3 do infinito = ∞^3, que transforma a reta nela mesma. A maneira de estudar A é então aquela que a nova álgebra chama de " teoria das formas binárias ". Ora, podemos referir a reta A a uma cônica A' do plano, mediante projeção por um ponto desta última. As transformações lineares B da reta nela mesma dão lugar agora, como se vê facilmente, às transformações B' da cônica nela mesma, isto é, as transformações da cônica que correspondem às transformações lineares do plano que reproduzem a cônica.

Mas, de acordo com o princípio do segundo parágrafo [1], é indiferente estudarmos a geometria sobre uma cônica supondo-a fixa e levando em conta somente as transformações lineares do plano que a reproduzem, ou estudarmos a geometria sobre a cônica considerando todas as transformações lineares do plano, deixando variar juntos o plano e a própria cônica. As propriedades que descobrimos nos sistemas de pontos sobre as cônicas são agora projetivas no sentido usual. Aduzindo estas últimas considerações aos resultados já obtidos, temos:

<u>A teoria das formas binárias e a geometria projetiva dos sistemas de pontos sobre uma cônica são a mesma coisa, ou seja, para cada proposição sobre as formas binárias há uma proposição correspondente sobre os sistemas de pontos e vice versa</u> [2].

---

(1) A bem dizer, o princípio é aplicado aqui numa forma um pouco mais geral.

(2) Ao invés da cônica no plano, podemos introduzir com igual sucesso uma cúbica no espaço e, de modo geral, a *n* dimensões, algo análogo.

Um outro exemplo apto a tornar mais evidente este gênero de considerações é o seguinte. Estabelecendo uma relação entre uma quádrica e um plano por meio de projeção estereográfica obtemos sobre aquela superfície um ponto fundamental : o centro de projeção. No plano obtemos dois pontos fundamentais: os traços das geratrizes que passam pelo centro. Ora, pode-se mostrar que as transformações lineares do plano que deixam inalterados os seus dois pontos fundamentais, dão lugar, por meio da representação, à transformações lineares da quádrica nela mesma, transformações essas que não alteram o centro de projeção (chamamos de transformações lineares da quádrica nela mesma àquelas transformações que operam linearmente no espaço e que sobrepõem a quádrica a ela mesma). Tornam-se, portanto, idênticos o estudo projetivo de um plano no qual se fixa dois pontos como fundamentais e o estudo duma quádrica na qual se fixa um ponto. O primeiro estudo - ainda que consideremos também elementos imaginários - não é outro senão o plano no sentido da geometria elementar. De fato, o grupo principal das transformações planas se compõe das transformações lineares que deixam inalterado um par de pontos (os pontos cíclicos). Obtemos então como conclusão:

<u>A geometria elementar do plano e o estudo projetivo duma quádrica com um ponto tomado como fundamental são a mesma coisa</u>.

Para outros exemplos como também para a extensão, em particular, ao caso multidimensional, reenvio ao meu trabalho "Über Liniengeometrie und metrische Geometrie ", Math. Ann. Bd. V, 2 , p 271 , bem como aos trabalhos de Lie que ainda serão citados.

- § 5 -

SOBRE A ARBITRARIEDADE NA ESCOLHA DO ELEMENTO DO ESPAÇO. PRINCÍPIO DE TRANSPORTE (CORRELAÇÃO) DE HESSE; GEOMETRIA DA RETA .

Como elemento da reta, do plano no espaço e, de modo geral, duma variedade que queremos examinar, podemos tomar, ao invés do ponto, qualquer elemento contido na própria variedade : um grupo de pontos, eventualmente uma curva, uma superfície, etc (ver Nota IV). Não sendo fixado a priori o número de parâmetros arbitrários do qual a forma escolhida depende, a reta, o plano, o espaço, etc. aparecem, dependendo do elemento escolhido, como apresentando um número qualquer de dimensões. Mas, desde que admitamos como fundamento do estudo geométrico um mesmo grupo de transformações, o conteúdo da Geometria permanece inalterado ; ou seja, cada teorema obtido adotando um certo elemento do espaço é também um teorema ao qual se adapta um outro elemento qualquer: troca-se apenas a ordem e a conexão entre as proposições.

O essencial é, então, o grupo de transformações; o número de dimensões que queiramos atribuir à variedade aparece como algo secundário. Estabelecendo uma relação entre essas observações e o que foi dito no início do parágrafo precedente obtém-se uma linda série de aplicações ; algumas delas serão desenvolvidas no texto pois tais exemplos parecem mais aptos que qualquer longa exposição a estabelecer o significado das considerações gerais.

A Geometria projetiva sobre a reta (a teoria das formas

binárias) equivale, pelo que foi dito no parágrafo precedente, à Geometria projetiva sobre a cônica. Sobre esta última, consideremos agora como elemento, ao invés do ponto, o par de pontos. Mas o complexo dos pares de pontos de uma cônica pode ficar em correspondência com o sistema das retas do plano, correspondência essa estabelecida quando consideramos o par de pontos da cônica que fornecem a intersecção com a reta. Segundo essa representação, as transformações lineares da cônica em si mesma dão lugar às transformações do plano (de retas) que deixam a cônica invariante. Pelo parágrafo 2 vemos que é indiferente considerarmos ou o grupo destas últimas transformações ou, o grupo de todas as transformações lineares do plano, adicionando cada vez a cônica dada às figuras do plano que devemos considerar. Reunindo todas essas considerações, temos :

A teoria das formas binárias e a geometria projetiva do plano com uma cônica como fundamental são idênticas.

E, afinal, como os grupos são semelhantes, a geometria projetiva do plano com uma cônica como fundamental coincide com a geometria métrica-projetiva que se pode instituir no plano, sobre uma cônica (ver Nota V), podemos então afirmar :

A teoria das formas binárias e a geometria métrica-projetiva geral no plano são idênticas.

Em lugar da cônica no plano podemos introduzir nas considerações precedentes uma superfície cúbica no espaço, etc., mas não desenvolveremos esse conceito. A conexão estabelecida entre a geometria do plano e a do espaço ou a de uma variedade multidimensional não é outra coisa, em essência, senão o princípio de transporte (correlação) de Hesse (Borchardt ' s Journal, vol. 66).

Um exemplo muito parecido temos na geometria projetiva do espaço ou, em outros termos, na teoria das formas quaternárias. Admitindo a reta como elemento do espaço e atribuindo-lhe, como se faz na teoria da reta, seis coordenadas homogêneas, havendo entre elas uma relação de condição quadrática, as colineações e reciprocidades do espaço aparecem como transformações lineares das seis variáveis consideradas como independentes, transformações essas que mantém invariante a relação quadrática. As mesmas considerações desenvolvidas acima permitem afirmar :

<u>A teoria das formas quaternárias coincide com a determinação métrica-projetiva numa variedade representável por seis variáveis homogêneas.</u>

Para uma exposição mais detalhada desses conceitos, reenvio a um trabalho que será publicado em breve em Math. Ann., vol VI, " Über die sogenannte Nich- Euklidische Geometrie " (Zweite Abhandlung) , como também a uma nota no fim desta monografia (ver Nota VI).

Convém adicionar às explicações precedentes outras duas observações, das quais a primeira já está incluída implicitamente no que dissemos até agora, mas deve ser mais desenvolvida pois o argumento ao qual ela se refere se presta facilmente a malentendidos.

Introduzindo formas quaisquer como elementos do espaço, vemos que este pode admitir quantas dimensões quisermos. Mas, se nos atemos ao método de raciocínio mais familiar a nós (o elementar ou o projetivo) então, o grupo que devemos admitir como fundamental para a variedade multidimensional é dado <u>a priori</u> e é chamado, respectivamente, ou de grupo principal ou de grupo das transformações projetivas. Querendo admitir um outro grupo, devemos extraí-lo, ou da intuição elementar ou da intuição projetiva. Portanto, se é verdade que, mediante uma escolha conveniente do elemento do espaço, este pode representar uma variedade com um número arbitrário de dimensões, concluimos que : <u>com esta representação temos que eliminar inicialmente um determinado grupo que seria o fundamento do estudo geométrico da variedade ou, querendo continuar com o grupo, devemos acomodar nossas concepções geométricas.</u> Sem esta observação, poder-se-ia, por exemplo, procurar uma representação da geometria da reta do modo seguinte. Atribuiríamos à reta seis coordenadas e, outros tantos coeficientes à cônica no plano. Imaginaríamos então que a geometria da reta seria a geometria dum sistema de cônicas, sistema esse que seria separado do complexo das cônicas do plano por meio duma relação quadrática entre os coeficientes. Isso soaria bem desde que colocássemos como grupo fundamental da geometria plana o grupo formado pelo conjunto das transformações representadas pelas transformações lineares dos coeficientes duma cônica, que reproduzem a equação condicional quadrática. Mas, se nos atemos ao tratamento elementar ou à geometria projetiva do plano, não temos imagem nenhuma.

A segunda observação se refere à seguinte noção : seja dado no espaço um grupo qualquer, por exemplo, o grupo principal. Escolhe-se uma figura qualquer do espaço, por exemplo, um ponto, uma reta ou ainda um elipsóide, etc., e aplica-se a essa figura todas as transformações do grupo principal. Obtém-se assim uma variedade multidimensional com um número de dimensões igual, em geral, ao número de parâmetros arbitrários contidos no grupo ; inferior, porém, em casos particulares. Isso ocorre quando a figura originalmente escolhida tem a propriedade de se transformar em si mesma por meio dum número infinito de transformações do grupo. À cada variedade assim gerada, damos o nome de corpo, em relação ao grupo (1).

---

(1) Escolho esse nome seguindo Dedekind que, na teoria dos números chama de " Corpo " um campo de números que resulta de elementos dados por meio de operações dadas. (Segunda edição das lições de Dedekind).

Ora, se queremos considerar o espaço segundo o espírito do grupo e ao mesmo tempo queremos assumir determinadas figuras como elementos do espaço sem que objetos equivalentes nesse sentido venham a ser representados de modo diverso, devemos evidentemente escolher os elementos do espaço de modo que sua variedade constitua em si um corpo ou possa se decompor em corpos (2). Desta observação, que aliás é evidente, mais adiante faremos uma aplicação (§ 9). A noção de corpo reaparecerá no último parágrafo juntamente com outras noções correlatas.

---

(2) No texto não se dá suficiente atenção ao fato de que o grupo proposto pode conter os chamados subgrupos excepcionais. Se uma figura geométrica permanece inalterada mediante as operações dum subgrupo excepcional, o mesmo se dá para todas as figuras que admitem essa propriedade (invariabilidade) como um resultado da operação do grupo inteiro. Ora, um corpo assim constituído seria de fato impróprio para representar as operações do grupo. Devemos então levar em conta , no texto, somente os corpos resultantes de elementos do espaço que não permaneçam inalterados por nenhum subgrupo excepcional do grupo proposto .

- § 6 -

GEOMETRIA DOS RAIOS RECÍPROCOS . INTERPRETAÇÃO DE X + i Y

Neste parágrafo voltamos à discussão dos diversos caminhos de investigação geométrica que foram iniciados nos parágrafos 2 e 3 . Sob muitos aspectos, podemos considerar uma categoria de considerações geométricas na qual se faz uso das transformações por raios recíprocos, como análoga ao raciocínio da geometria projetiva. Dessa categoria fazem parte as pesquisas sobre superfícies analagmáticas, sobre a teoria geral dos sistemas ortogonais, sobre a teoria do potencial, etc. Se as considerações desenvolvidas até agora nessa categoria não foram ainda reunidas numa Geometria especial, como a projetiva, mesmo tendo agora como grupo fundamental o conjunto das transformações que resulta da composição do grupo principal com as transformações por raios recíprocos, isso se deve ao fato de que tal teoria ainda não foi exposta com conexão ; entretanto, os poucos autores que se ocuparam deste ramo não ficaram longe duma tal exposição metódica.

A analogia entre a geometria dos raios recíprocos e a projetiva é evidente ; apenas necessita de uma comparação. Para isso, relembremos, em geral, os seguintes pontos :

Na Geometria projetiva os conceitos elementares são os de ponto, de reta e de plano. O círculo e a esfera são casos particulares da cônica e da quádrica. O infinito da geometria

elementar aparece como um plano; a forma fundamental à qual se refere a própria geometria é uma cônica imaginária no infinito.

Na geometria dos raios recíprocos os conceitos elementares são o ponto, o círculo e a esfera. Reta e plano são casos particulares destes últimos, caracterizados pelo fato de conterem um certo ponto - o do infinito - que, de resto, segundo o espírito do método, não se distingue dos outros pontos. A geometria elementar reaparece quando imaginamos esse ponto como fixo.

A geometria dos raios recíprocos é suscetível duma representação que se avizinha da teoria das formas binárias e da geometria da reta quando desenvolvemos esta última nos moldes do parágrafo precedente. Para isso, vamos nos restringir às considerações da geometria plana e, por conseguinte, às considerações da geometria dos raios recíprocos do plano (1).

---

(1) A geometria dos raios recíprocos sobre a reta, equivalente ao estudo projetivo da reta, será a dada pelas próprias transformações desta última. Também na geometria dos raios recíprocos se pode então falar da razão dupla entre quatro pontos duma reta e depois, duma circunferência.

Já consideramos a conexão que existe entre a geometria elementar do plano e a geometria sobre uma quádrica na qual se distingue um ponto. Fazendo-se abstração deste último e estudando-se então a geometria projetiva sobre a própria superfície, tem-se uma imagem da geometria dos raios recíprocos do plano. De fato, é fácil nos convencermos (2) que, em virtude da representação da quádrica, ao grupo de transformações por raios recíprocos do plano corresponde o conjunto das transformações lineares da quádrica. Temos, portanto :

<u>A geometria dos raios recíprocos no plano e a geometria projetiva sobre uma quádrica são equivalentes</u> .

E de modo análogo :

<u>A geometria dos raios recíprocos no espaço se identifica com o estudo projetivo duma variedade representada por uma equação homogênea de segundo grau com cinco variáveis.</u>

A geometria do espaço fica desse modo ligada, por meio da geometria dos raios recíprocos, a uma variedade quadridimensional, do mesmo modo que a geometria projetiva a liga a uma variedade pentadimensional.

A geometria dos raios recíprocos no plano - ainda que consideremos apenas as transformações reais - permite, por outro lado, que estabeleçamos uma representação interessante.

De fato, representando uma variável complexa x + i y no plano, vemos que às suas transformações lineares corresponde

---

(2) Veja o trabalho já citado : " Über Liniengeometrie und metrische Geometrie "

o grupo dos raios recíprocos com a restrição de ser real (1). Mas o estudo das funções de uma variável complexa quando submetidas a transformações lineares arbitrárias, não é outra coisa senão, embora de um modo um pouco diverso, a teoria das formas binárias.

Então :

<u>A teoria das formas binárias encontra sua representação na geometria dos raios recíprocos do plano real e precisamente de modo tal que os valores complexos das variáveis aí se encontrem.</u>

---

(1) O modo de expressão no texto não é exato. As transformações $z' = (\alpha z + \beta) / (\gamma z + \delta)$ (onde $z'=x'+iy'$, $z=x+iy$) correspondem só aquelas operações do grupo dos raios recíprocos para as quais não há nenhum reviramento dos ângulos (para as quais os pontos cíclicos do plano não se permutam). Querendo abranger o grupo complexo dos raios recíprocos será necessário considerarmos, além das transformações mencionadas, também as outras (não menos importantes)

$z' = (\alpha \bar{z} + \beta) / (\gamma \bar{z} + \delta)$ onde, de novo $z'=x'+iy'$ não é função de $z = x + iy$ mas de $\bar{z} = x - iy$.

Do plano podemos agora partir para a quádrica, para recairmos na pesquisa habitual com vistas às transformações projetivas. Como consideramos somente elementos reais do plano, a escolha da quádrica não pode ser qualquer. Em particular, podemos admitir uma esfera - como se faz também comumente para a interpretação duma variável complexa e obtemos desse modo a proposição seguinte :

A teoria das formas binárias a variáveis complexas encontra sua representação na geometria projetiva da superfície esférica real.

Não pude me esquivar de expor numa nota (ver Nota VII) como esta representação elucida bem a teoria das formas binárias, cúbicas e quaternárias.

GENERALIZAÇÃO DOS PARÁGRAFOS PRECEDENTES

GEOMETRIA DA ESFERA DE LIE

A teoria das formas binárias, a geometria dos raios recíprocos e a geometria da reta, teorias das quais acabamos de exibir a conexão geral e que parecem diferir apenas no tocante ao número de dimensões, são suscetíveis de algumas extensões que iremos expor. Essas generalizações servirão para esclarecer, com novos exemplos, a idéia de que o grupo que fixa o modo de estudar um domínio dado pode ser estendido arbitrariamente; entretanto, nossa intenção aqui é apresentar as considerações desenvolvidas por Lie num trabalho recente (1) e as relações entre essas considerações e o que apresentamos até agora nos capítulos precedentes. O modo pelo qual chegaremos à geometria da esfera de Lie difere daquele adotado por ele pelo fato dele se apoiar em noções da geometria da reta enquanto que nós, para nos atermos principalmente à intuição geométrica ordinária e para mantermos uma conexão com os parágrafos precedentes, manteremos um número menor de variáveis. Como o próprio Lie já notou (Göttinger Nachrichten, 1871, nº 7, 22), as considerações são independentes do número de variáveis. Elas pertencem ao círculo mais extenso das pesquisas relativas ao estudo projetivo das equações quadráticas com número

(1) Partielle Differentialgleichungen und Complexe, Math. Annalen, Bd V.

qualquer de variáveis, pesquisas sobre as quais já fizemos alguns acenos e que ainda iremos reencontrar (ver entre outros o § 10).

Eu parto da correspondência, obtida por projeção estereográfica, entre o plano real e a esfera. Já no § 5 nós estabelecemos a correspondência entre a reta do plano e o par de pontos nos quais ela intersecta uma cônica, o que liga a Geometria do plano à geometria sobre a cônica. Nós podemos, do mesmo modo, estabelecer uma correspondência entre a geometria do espaço e a geometria sobre a esfera, fazendo corresponder a cada plano do espaço a circunferência segundo a qual ele corta a esfera. Se agora, por projeção estereográfica, nós transportamos a geometria estabelecida sobre a esfera para a do plano (e então cada circunferência se transforma numa circunferência), vemos que vão se corresponder : a geometria do espaço, que tem por elemento o plano e por grupo o das transformações lineares que transformam a esfera nela própria; e a geometria plana, que tem por elemento a circunferência e por grupo o dos raios vetores recíprocos.

Queremos agora estender de duas maneiras a primeira dessas geometrias, tomando, ao invés do seu grupo, um grupo mais geral. A generalização resultante se transfere então imediatamente, por meio da representação, à geometria plana.

Em lugar das transformações lineares do espaço de planos que deixam invariante a esfera, podemos sem nos afastarmos muito, escolher ou o conjunto das transformações lineares

do espaço, ou o complexo das transformações dos planos que (num sentido que vai ser ainda precisado) deixam a esfera inalterada ; no primeiro caso fazemos abstração da esfera ; no segundo, do caráter linear das transformações a serem empregadas. A primeira generalização é facilmente concebível: podemos então examiná-la em primeiro lugar e extrair as conseqüências para a geometria plana. Voltaremos depois nossa atenção para a segunda, para a qual teremos primeiramente de determinar a transformação a mais geral possível.

Todas as transformações lineares do espaço transformam feixes e estrelas de planos, respectivamente, em feixes e estrelas. Sobre a esfera, o feixe de planos dá um feixe de circunferências, isto é, uma série simplesmente infinita de circunferências se cortando nos mesmos pontos; a estrela de planos, uma estrela de circunferências, isto é, uma série duplamente infinita de circunferências ortogonais a uma circunferência fixa (a circunferência cujo plano tem por polo o ponto pelo qual passam os planos). Às transformações lineares do espaço correspondem então, sobre a esfera e, por conseguinte no plano, as transformações circulares caracterizadas pelo fato de transformarem feixes e estrelas de circunferências em feixes e estrelas de circunferências (1). <u>A geometria do plano obtida com a adoção desse grupo de transformações é a representação da geometria projetiva ordinária do espaço</u> . Nessa geometria não mais podemos usar o ponto como elemento do plano, pois os pontos, em relação ao

---

(1) Grassmann em seu <u>Ausdehnungslehre</u>, considera casualmente essas transformações (p. 278 da edição de 1862) ao grupo de transformações escolhido, não constituem um corpo (§ 5), escolhemos então como elementos as circunferências.

Para a segunda extensão de que falamos, é preciso primeiramente indagar sobre a natureza do grupo correspondente de transformações . Trata-se de encontrar transformações tais que todo feixe de planos com o eixo tangente à esfera dê lugar a um (outro feixe) igualmente disposto. Por brevidade, podemos primeiro transformar a pergunta usando a dualidade e, por outro lado, diminuir de uma unidade o número de dimensões; teríamos então de encontrar as transformações pontuais do plano que fizessem corresponder a cada tangente duma cônica dada, uma outra tangente à mesma cônica. Para atingir essa finalidade, consideremos o plano com sua cônica como imagem duma quádrica projetada a partir de um ponto que não se encontra sobre ela, de maneira a fazer com que a cônica seja a curva de contorno aparente. Às tangentes da cônica correspondem as geratrizes da quádrica e a questão proposta estará reduzida a esta outra : encontrar o conjunto das transformações pontuais que reproduzem a superfície, as geratrizes permanecendo geratrizes.

Ora, há tantas dessas transformações quantas queiramos: basta considerar o ponto da superfície como intersecção das geratrizes de cada sistema e transformar, de qualquer modo, esses sistemas neles mesmos. Dentre essas transformações se encontram, em particular, aquelas que são lineares :

essas são as únicas que iremos considerar. Se tivéssemos efetivamente, não uma superfície, mas uma variedade multidimensional representada por uma equação quadrática, só permaneceriam as transformações lineares ; as outras desapareceriam[1].

Quando referidas sobre o plano por meio de projeção (não estereográfica), essas transformações lineares que reproduzem a superfície se tornam transformações pontuais com duas determinações, de forma que a cada tangente da cônica de contorno corresponde outra tangente ; entretanto a uma reta qualquer corresponde , em geral, uma cônica que possui um contacto duplo com a cônica de contorno aparente. Este grupo de transformações pode ser caracterizado dum modo muito conveniente se adotamos uma determinação métrica projetiva baseada sobre a cônica de contorno aparente. As transformações têm agora o efeito de mudar pontos que, no sentido métrico, estão a uma distância nula um do outro ou, pontos que estão a uma distância constante dum ponto fixo sendo mudados para a mesma configuração geométrica.

---

(1) Se projetamos estereograficamente a variedade, obtemos o conhecido teorema : " Além das transformações do grupo dos raios vetores recíprocos, não existe, nos campos multidimensionais (e já no espaço) , nenhuma transformação pontual conforme. No plano, ao contrário, existe uma infinidade ". Ver ainda os trabalhos citados de Lie.

Todas essas considerações podem ser estendidas a um número qualquer de variáveis; em particular, elas podem ser utilizadas na solução da questão colocada no início relativa à esfera e ao plano que agora é escolhido como elemento do espaço. Nesse caso, podemos fornecer um resultado particularmente intuitivo, pois o ângulo formado por dois planos, no sentido da determinação métrica baseada sobre a esfera, é igual ao ângulo formado no sentido ordinário, pelas circunferências de intersecção na esfera.

Obtemos, então, sobre a esfera e, por conseguinte sobre o plano, um grupo de transformações circulares que tem a propriedade de transformar círculos tangentes (que formam um ângulo nulo) e círculos que cortam outro segundo um mesmo ângulo, respectivamente em círculos que satisfazem aos mesmos requisitos. A esse grupo de transformações pertencem as transformações lineares sobre a esfera e as transformações por raios vetores recíprocos no plano (1)

---

(1) As fórmulas seguintes tornarão muito mais claras as considerações do texto. Seja

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

a equação, em coordenadas tetraédricas ordinárias, da esfera que é relacionada estereograficamente ao plano. Os x que satisfazem essa equação de condição adquirem então para nós o significado de coordenadas tetracíclicas no plano , e

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

se torna a equação geral do círculo no plano. Se calculamos o raio desse círculo, encontramos a raiz quadrada

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} \quad ,$$

A geometria do círculo que se pode construir com esse grupo é análoga à Geometria da esfera proposta por Lie para o espaço e que parece ter uma importância excepcional nos estudos sobre a curvatura das superfícies. Ela abrange a geometria dos raios vetores recíprocos no mesmo sentido em que essa abrange a geometria elementar.

As transformações circulares (esféricas) que acabamos de obter têm, em particular, a propriedade de transformar circunferências (esferas) tangentes em outras igualmente tangentes. Considerando todas as curvas (superfícies) como envoltórias de circunferências (esferas), vemos que duas curvas (superfícies) tangentes serão sempre transformadas em curvas (superfícies) igualmente tangentes.

---

que representaremos por $i\,u_5$. Podemos agora considerar os círculos como elementos do plano. Então, o grupo dos raios vetores recíprocos se oferece como o conjunto de transformações lineares homogêneas de u_1, u_2 , u_3 , u_4 , tal que

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

se reproduza a menos de um fator. O grupo mais extenso que corresponde à Geometria da esfera de Lie se compõe de transformações lineares das cinco variáveis u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 que, a menos de um fator, reproduzem

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 \quad .$$

As transformações em pauta pertencem à categoria que estudaremos de modo geral mais tarde, as transformações de contacto, isto é, transformações tais que o contacto das figuras permanece invariante. As transformações circulares mencionadas primeiramente neste parágrafo, ao lado das quais podendo se colocar as transformações esféricas análogas, não são transformações de contacto.

As duas espécies de extensões que relacionamos apenas com a geometria dos raios recíprocos se aplicam também de maneira análoga à geometria da reta e em geral , ao estudo projetivo duma variedade caracterizada por uma equação quadrática , como já mencionamos.

- § 8 -

ENUMERAÇÃO DE OUTROS MÉTODOS QUE TÊM POR BASE UM GRUPO DE TRANSFORMAÇÕES PONTUAIS

A geometria elementar, a geometria dos raios vetores recíprocos e mesmo a geometria projetiva quando dela não levamos em conta as transformações por dualidade que acarretam uma mudança do elemento do espaço, são exemplos particulares dos numerosos métodos de estudo imagináveis, nos quais adotamos como básicos os grupos de transformações pontuais. Aqui vamos assinalar somente os três métodos seguintes, que adotam grupos de transformações pontuais. Ainda que esses métodos estejam longe de estarem desenvolvidos como disciplinas próprias, como a geometria projetiva, podemos, entretanto, reconhecer os seus papéis nas pesquisas modernas.(1)

1 . O grupo das transformações racionais. - Nas transformações racionais, é preciso distuinguir cuidadosamente se elas são racionais para todos os pontos do campo sobre o qual se opera, como o espaço ou o plano, etc., ou se elas são racionais somente para os pontos dum conjunto que pertence ao campo, como uma superfície ou uma curva. Somente as primeiras são aplicáveis na construção duma geometria do espaço ou do plano; as últimas, segundo o nosso ponto de vista, só vão ter importância quando do estudo da geometria duma superfície ou de uma curva dada. A mesma distinção se aplica para a analysis situs que iremos tratar a seguir.

Entretanto, as pesquisas desenvolvidas por nós até aqui têm se voltado essencialmente para as transformações da segunda espécie. Como não propomos aqui o estudo da geometria sobre uma superfície, nem sobre uma curva, pois o problema aí seria o de encontrar critérios para que duas superfícies (duas curvas) se transformassem umas nas outras, essas pesquisas fogem do nosso objetivo (2). O esquema geral

---

(1) Enquanto que, nos exemplosprecedentes, tínhamos grupos com um número limitado de parâmetros, chegamos agora a consideração de grupos chamados infinitos.

(2) Elas se relacionam, de outro modo e de modo mais elegante, às nossas considerações, fato que eu não sabia em exposto neste trabalho não abrange a totalidade das pesquisas matemáticas : certos caminhos encontram-se reunidos aqui somente porque permitem um certo enfoque comum.

Para uma geometria das transformações racionais, que admita como fundamentais as transformações da primeira espécie, somente existem até agora alguns princípios. Para as formas de primeira espécie sobre a reta, as transformações racionais se reduzem às transformações lineares e não fornecem nada de novo. No plano conhecemos bem o complexo das transformações racionais (transformações de Cremona); sabemos que elas resultam da composição de transformações quadráticas. Conhecemos também as características invariantes das curvas planas, suas espécies, a existência de módulos; mas essas considerações não estão ainda verdadeiramente desenvolvidas como uma geometria do plano, no nosso entendimento. Para o espaço, toda a teoria está apenas nascendo. Conhecemos até agora um pequeno número de transformações racionais e essas são utilizadas para relacionar superfícies

---

1872. Sendo dada uma forma algébrica qualquer (curva, superfície , etc.) podemos transportá-la para um espaço superior, introduzindo como coordenadas as razões

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \dots : \varphi_p = du_1 : du_2 : \dots : du_p ,$$

onde $u_1, u_2, \dots, u_p$ são as integrais abelianas de primeira espécie ligadas à curva. Temos somente que admitir como básico para as considerações sobre esse espaço de ordem superior, o grupo das transformações lineares homogêneas dos φ. Ver trabalhos de Brill, Noether e Weber, assim como o meu " Zur Theorie der Abelschen Functionen", Math. Ann. XXXVI

conhecidas com desconhecidas.

2. Analysis situs - Na chamada Analysis situs, estudamos a invariância por transformações que resultam da composição de transformações infinitamente pequenas (infinitésimos). Como já dissemos, é preciso distinguir também aqui se devemos considerar o campo total, por exemplo o espaço, como submetido à transformação, ou somente um conjunto contido nele, como uma superfície. As transformações de primeira espécie poderiam ser tomadas como fundamento duma geometria do espaço. Seu grupo seria constituído de um modo totalmente diferente dos que consideramos até aqui. Como ele abrange todas as transformações que resultam de transformações pontuais, infinitésimas e reais, ele próprio se limita aos elementos reais do espaço e corresponde ao domínio da função arbitrária. Podemos estender de modo conveniente este grupo de transformações relacionando-o com as transformações homográficas reais que modificam também os elementos no infinito.

3. - O grupo de todas as transformações pontuais . Se, em relação a esse grupo, nenhuma superfície possui propriedades individuais, pois cada uma delas pode ser transformada em qualquer outra pelas operações do grupo, existem, entretanto, elementos de ordem mais elevada que permitem que o estudo desse grupo possa ser empregado de modo vantajoso. No estudo geométrico adotado por nós, pouco importa que esses elementos tenham sido considerados até aqui menos como elementos geométricos do que elementos analíticos que, por

acaso encontram uma aplicação geométrica e, que no seu estudo hajam sido empregados métodos (como precisamente transformações pontuais arbitrárias) que só remotamente são concebidos como transformações geométricas. Entre essas formas analíticas encontram-se as expressões diferenciais homogêneas e, em seguida, as equações a derivadas parciais. Entretanto, para o estudo geral dessas últimas equações, parece que o grupo de todas as transformações de contacto é preferível.

A proposição fundamental da geometria que admite como fundamental o grupo de todas as transformações pontuais é: uma tal transformação é sempre, para uma parte infinitesimal do espaço, equivalente a uma transformação linear. Os desenvolvimentos da geometria projetiva são então aplicáveis aos infinitésimos, qualquer que seja o grupo admitido como básico no estudo das variedades e, temos aí uma característica notável do método da geometria projetiva.

Já falamos anteriormente da relação que existe entre os estudos que se apóiam em grupos que abrangem outros grupos; daremos aqui mais um exemplo da teoria geral do parágrafo 2. Propomos a questão de como é preciso conceber, do ponto de vista do " conjunto das transformações pontuais ", as propriedades projetivas, e queremos fazer isso sem levarmos em conta as transformações por dualidade, pois essas são próprias do grupo da geometria projetiva. Essa questão não é diferente desta outra : qual deve ser a condição para que o grupo das transformações lineares seja separado do conjunto das transformações pontuais ? O que caracteriza as primeiras é que a todo plano corresponde um plano. Elas são

transformações pontuais que deixam o conjunto de planos invariante, ou, decorrente desse fato, deixam invariante o conjunto das retas.

A geometria projetiva se obtém então da geometria de todas as transformações pontuais com a adição da variedade dos planos, do mesmo modo que a geometria elementar se obtém da projetiva com a adição do círculo imaginário no infinito. Em particular, devemos, do ponto de vista das transformações pontuais, conceber a propriedade duma superfície como sendo algébrica e com uma certa ordem, como invariante segundo o conjunto dos planos. Isso se torna bem claro quando, seguindo Grassmann, ligamos a geração dos elementos algébricos à sua construção linear.

- § 9 -

O GRUPO DAS TRANSFORMAÇÕES DE CONTACTO

Há muito tempo que consideramos, em casos particulares, as transformações de contacto; o próprio Jacobi usou, em pesquisas analíticas, a transformação de contacto a mais geral. Entretanto, elas só foram colocadas entre as concepções geométricas mais freqüentes pelos trabalhos recentes de Lie(1).

(1) Ver o trabalho já citado : " Uber partielle Differential gleichungen und Complexe ", Math. Ann. Bd. V. Os desenvolvimentos relativos às equações de derivadas parciais exibidos no texto são devidos a comunicações orais de Lie, outubro de 1872.

Não será, entretanto, supérfluo expor aqui claramente o que é uma transformação de contacto, limitando-nos, como sempre, ao espaço pontual tridimensional.

Por transformação de contacto, é preciso entender, do ponto de vista analítico, toda transformação na qual os valores das variáveis x, y, z e das derivadas parciais $dz/dx = p$, $dz/dy = q$, são expressas em função de quantidades análogas x', y', z', p', q'. É evidente que, em geral, superfícies tangentes se transformam em superfícies tangentes, o que justifica o nome de <u>transformações de contacto</u>. Se partimos do ponto como elemento do espaço, as transformações de contacto se dividem em três classes : aquelas que à infinidade tripla de pontos fazem corresponder novamente pontos (essas são as transformações pontuais que acabamos de considerar), aquelas que transformam a infinidade em curvas e, enfim, aquelas que a transforma em superfícies. Não é necessário considerar essa divisão como essencial pois, usando-se outros elementos do espaço ainda em número triplamente infinito, como os planos, reencontramos outra vez uma divisão em três grupos ; contudo, esta não coincide com aquela que se obtém quando se parte de pontos.

Se aplicamos a um ponto todas as transformações de contacto, obtemos a totalidade de pontos, de curvas e de superfícies. Será preciso então a totalidade dos pontos, das curvas e das superfícies para constituirmos um corpo do nosso grupo. Podemos concluir desta regra geral que, no sentido das transformações de contacto, não é correto tratar uma questão (como, por exemplo, a teoria das equações a derivadas parciais

que iremos estudar imediatamente) empregando somente coordenadas de pontos e de planos, pois justamente esses elementos do espaço escolhidos como base não constituem um corpo.

Mas, se queremos nos ater aos métodos habituais, a introdução, como elemento do espaço, de todos os indivíduos contidos no corpo em questão, isso não será praticável, pois o número desses elementos será infinitamente infinito. Disso decorre a necessidade de introduzir como <u>elemento do espaço</u> nessas considerações, não o ponto, nem a curva, nem a superfície mas sim o <u>elemento de superfície</u>, isto é, o sistema de valores x, y, z, p, q. Por uma transformação de contacto qualquer, cada elemento de superfície se transforma em outro ; essa quíntupla infinidade de elementos de superfície constitui um corpo.

Partindo desse ponto de vista, é preciso conceber o ponto, a curva e a superfície como agregados de elementos de superfície e, como agregados duma dupla infinidade desses elementos. De fato, a superfície é coberta por ∞^2 elementos, um número igual de elementos fornece as tangentes a uma curva e esse é também o número de elementos que passam por um ponto. Mas esses agregados, duplamente infinitos, de elementos, têm ainda uma propriedade característica comum. Se, para dois elementos de superfície consecutivos x, y, z, p, q e $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $p + dp$, $q + dq$, tivermos

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

diremos que eles são <u>associados em posição</u>. Então, o ponto, a curva e a superfície são todos os três, <u>conjuntos duplamente infinitos de elementos sendo que cada elemento é associado em posição com aqueles (em número simples de infinidade) que lhes são vizinhos</u>. O ponto, a curva e a superfície ficam assim caracterizados de modo único e é também assim que eles devem ser representados analiticamente se queremos tomar por base o grupo das transformações de contacto.

A associação em posição de dois elementos consecutivos é uma relação invariante por toda transformação de contacto. Entretanto, de modo recíproco, podemos também definir as transformações de contacto como as substituições de cinco variáveis x, y, z, p, q, tais que a relação $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ permaneça invariante. Em tais pesquisas, o espaço deve ser visto como uma variedade pentadimensional e, para estudar essa variedade, temos que admitir como grupo fundamental o conjunto das transformações de variáveis que deixem invariante uma relação diferencial determinada.

Os conjuntos representados por uma ou por várias equações entre as variáveis, isto é, as equações a derivadas parciais de primeira ordem e seus sistemas, se oferecem como objetos de estudo. É uma questão fundamental saber como, dos conjuntos de elementos que satisfazem às equações dadas, podemos deduzir conjuntos de elementos simplesmente e duplamente infinitos, tais que cada um dos elementos esteja associado em posição com o vizinho. O problema da resolução duma equação a derivadas parciais de primeira ordem recai numa questão semelhante. Podemos formulá-la assim: deduzir da infinidade quádrupla de elementos, que satisfazem à equação, todos os conjuntos duplamente infinitos de mesma natureza. Em particular, o problema da solução completa adquire desde o início esta forma precisa : dividir a infinidade quádrupla de elementos que satisfazem à equação numa infinidade dupla de tais conjuntos.

Nós não podemos aqui deixar para mais longe essas considerações sobre as equações às derivadas parciais ; por esse motivo, torno a citar os trabalhos de Lie. Notemos somente ainda que, do ponto de vista das transformações de contacto, uma equação a derivadas parciais de primeira ordem não possui nenhum invariante, que cada uma delas pode ser transformada em outra qualquer e que, portanto, as equações lineares não se distinguem umas das outras. Somente quando voltamos ao ponto de vista das transformações pontuais é que notamos distinções.

Os grupos de transformações de contacto, de transformações pontuais e de transformações projetivas, podem ser caracterizados por um raciocínio comum que não quero deixar de mencionar (1). Já definimos as transformações de contacto como aquelas que conservam a associação em posição de dois elementos consecutivos. As transformações pontuais, ao contrário, apresentam a propriedade característica de transformar elementos retilíneos consecutivos associados em posição em elementos de mesma natureza . Finalmente, as transformações homográficas e por dualidade conservam a associação em posição de dois elementos conexos. Como elemento conexo, entendemos o conjunto dum elemento de superfície com um elemento retilíneo contido nele ; elementos conexos consecutivos são chamados de associados em posição quando não somente o ponto, mas também o elemento retilíneo de um está contido no elemento de superfície do outro. A denominação (aliás provisória) de elemen-

(1) Eu devo essas definições a um chamamento de Lie.

to conexo se liga aos entes introduzidos recentemente em geometria por Clebsch (1), que são definidos por uma equação que contém as coordenadas do ponto, do plano e da reta e cujo análogo no plano recebeu de Clebsch o nome de conexo.

- § 10 -

SOBRE AS VARIEDADES COM UM NÚMERO QUALQUER DE DIMENSÕES

Já notamos diversas vezes que, ao estabelecermos uma ligação entre as nossas considerações e as noções de espaço, não temos outra finalidade senão facilitar o desenvolvimento de noções abstratas por meio de exemplos claros. No fundo, essas considerações são independentes da representação sensível e pertencem ao domínio geral de estudos matemáticos que chamamos de teoria das variedades com várias dimensões ou, brevemente (seguindo Grassmann) de teoria da extensão (Ausdehnungslehre) . É evidente o modo pelo qual devemos relacionar o que já afirmamos sobre o espaço com o conceito puro de variedade. Notemos somente, ainda uma vez, que no estudo abstrato, temos, com vistas à geometria, a vantagem de poder escolher inteiramente o grupo de transformações que deve ser

(1) Gött. Abhandlungen, B XVII; 1872 : " Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie " e, também Gött. Nachrichten, nº 22 ; 1872 : " Über ein Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene ".

tomado por base, enquanto que em geometria do espaço, um grupo completamente determinado, o grupo principal, é dado a priori.

Só abordaremos aqui, e ainda assim de passagem, os três métodos de estudo seguintes :

I. Método do estudo projetivo ou Álgebra Moderna (Teoria dos invariantes) . - Seu grupo se compõe do conjunto das transformações lineares e por dualidade das variáveis empregadas para a representação do elemento da variedade : é a generalização da geometria projetiva. Já assinalamos como esse método é empregado na discussão dos infinitésimos duma variedade que possui uma dimensão extra. Ele abrange os dois métodos de estudo que vamos indicar a seguir, no sentido que seu grupo abrange os grupos básicos dos outros dois métodos.

II. - A variedade com curvatura constante . - Em Riemann, a noção duma tal variedade resulta da noção mais geral duma variedade na qual é dada uma expressão diferencial das variáveis. O grupo, para essa variedade, consiste do conjunto das transformações das variáveis que deixa invariante a expressão dada. Chegamos por outro caminho à noção duma variedade com curvatura constante quando estabelecemos, no sentido projetivo, uma determinação métrica baseada numa equação quadrática dada entre as variáveis. Este método, como o de Riemann, permite a generalização para as variáveis complexas ; podemos depois restringir a variabilidade ao campo real. É a esse ramo que pertence a seqüência de pesquisas que abordamos nos parágrafos 5, 6 e 7.

III. - A variedade plana. - Riemann designa por variedade plana a variedade com curvatura constante nula. Sua teoria é a generalização imediata da geometria elementar. Seu grupo pode, como o grupo principal em geometria, ser destacado do grupo projetivo, mantendo-se fixa uma figura representada por duas equações, uma linear e outra quadrática. Se queremos nos adaptar à forma segundo a qual a teoria é apresentada habitualmente, devemos distinguir entre o real e o imaginário. A própria geometria elementar aparece em primeiro lugar nessa teoria ; depois aparecem as generalizações desenvolvidas recentemente sobre a teoria ordinária da curvatura, etc.

OBSERVAÇÕES FINAIS

Para terminar, faremos duas observações que estão em relação íntima com o que dissemos até aqui : a primeira diz respeito ao algoritmo a ser empregado na representação das noções apresentadas ; na segunda indicaremos alguns problemas que parecem ser importantes e fecundos.

Freqüentemente criticamos a geometria analítica porque, com a introdução do sistema de coordenadas, ela introduz elementos arbitrários, e essa crítica atinge igualmente todo modo de estudar as variedades que usa os valores das variáveis como características da variedade. Se essa crítica era bastante justificada, especialmente no princípio, pelo modo defeituoso de trabalhar com as coordenadas, ela agora perde

sentido, desde que o método seja racionalmente empregado. As expressões analíticas que podem se apresentar no estudo duma variedade do ponto de vista do grupo, devem, devido a seu significado, ser independentes do sistema de coordenadas, enquanto o sistema permanecer arbitrário : essa independência deve ser colocada em evidência nas fórmulas. A Álgebra moderna mostra que isso é possível e mostra também como devemos proceder; a noção de invariância é posta em relevo da forma mais evidente. Ela tem uma lei de formação geral e perfeita das expressões invariantes e se restringe a operar somente com elas. É isso que faz com que ela forneça o tratamento analítico mesmo quando adotamos outros grupos, que não o projetivo, como básicos (1). É preciso, evidentemente, que o algoritmo se adapte ao nosso objetivo, que empreguemos uma expressão clara e precisa da concepção e, por fim que ele seja conveniente para podermos penetrar em campos ainda não explorados.

Para o estabelecimento dos problemas que iremos ainda mencionar, torna-se necessária uma comparação entre as idéias que acabamos de mencionar e a teoria das equações de Galois.

Na teoria de Galois, como também aqui, todo o interesse está nos grupos de transformações. Mas os objetos aos quais se referem as transformações são bem diferentes : em Galois, lidamos com um número limitado de elementos distintos; aqui, com um número indefinido de elementos dum conjunto contínuo.

(1) Por exemplo, para o grupo de rotações do espaço tridimensional ao redor dum ponto fixo, um tal algoritmo é dado pelos quatérnions.

Entretanto, pela identidade do conceito de grupo, podemos levar a comparação mais longe [1] e indicarmos como se encontra caracterizada a posição que devemos atribuir a certas pesquisas começadas por Lie e por mim [2], dentro do ponto de vista exposto aqui.

Na teoria de Galois como ela é exposta, por exemplo, no _Traité d'Algèbre supérieure_ de Serret ou no _Traité des substitutions_ de C. Jordan, o verdadeiro objeto das pesquisas é a própria teoria de grupos ou a teoria das substituições ; a teoria das equações decorre como uma aplicação. Por analogia, queremos uma _teoria das transformações_, uma teoria dos grupos que podem ser engendrados por transformações duma dada natureza. As noções de comutatividade, de similitude, etc. seriam empregadas como na teoria das substituições. O estudo duma variedade extraído da consideração dum grupo fundamental de transformações surgiria como uma aplicação da teoria das transformações.

Na teoria das equações, são as funções simétricas dos coeficientes que primeiro chamam a atenção. Em seguida, o interesse se volta para as expressões que permanecem inalteradas, se não para todas as permutações das raízes, pelo menos para

---

(1) Lembrarei aqui que Grassmann, já na introdução da 1a edição da Ausdehnungslehre (1844), estabelecia um paralelo entre a Análise combinatória e a Teoria da extensão.

(2) Ver nosso trabalho : " Über diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen " Math. Ann., B. IV

um grande número delas. No estudo duma variedade com um grupo admitido como fundamental, poderíamos querer primeiramente determinar os corpos (§ 6) e as figuras que permanecem inalteradas sob a ação de todas as transformações do grupo ; entretanto, há figuras que não admitem todas as transformações do grupo mas somente algumas delas. Essas figuras, dentro do estudo baseado sobre o grupo, são particularmente interessantes pois gozam de propriedades notáveis. É assim, por exemplo, que dentro da geometria ordinária distinguimos corpos simétricos e regulares, superfícies de revolução e helicoidais. Se adotamos o ponto de vista da geometria projetiva e impomos, em particular, que as transformações que deixam as figuras invariantes sejam permutáveis, chegamos às figuras consideradas por Lie e por mim no trabalho citado e ao problema geral enunciado no § 6. Nos § 1 e 3 encontramos a determinação de todos os grupos que englobam uma infinidade de transformações lineares permutáveis no plano ; é uma parte da teoria geral das transformações que acabamos de expor [1].

---

(1) No texto devo abster-me de mostrar como é frutífera, para a teoria das equações diferenciais, a consideração das transformações infinitesimais. No § 7 do trabalho citado, Lie e eu mostramos que : equações diferenciais ordinárias que admitem as mesmas transformações infinitesimais apresentam as mesmas dificuldades de integração. Lie, em trabalhos diversos e, em particular, no citado mais acima (Math. Ann. Bd. V), fez ver, através de diversos exemplos, como essas considerações devem ser aplicadas para as equações a derivadas parciais (ver também as Comunicações à Academia de Christiania, maio 1872). Posso hoje indicar o fato de que os dois

NOTAS

I.- Sobre o contraste, em geometria moderna , entre os métodos analítico e sintético

A diferença entre a nova geometria sintética e a nova geometria analítica não deve ser considerada, hoje em dia, como essencial. As matérias estudadas e o modo de discussão pouco a pouco foram se tornando inteiramente semelhantes. Por isso, no texto, escolhemos o nome " geometria projetiva " para indicar as duas. Se o método sintético é vantajoso para a intuição do espaço, emprestando assim às suas primeiras teorias elementares um atrativo particular, o campo duma tal intuição não sendo por esse motivo fechado para o método analítico e, por isso, podendo conceber as fórmulas da geometria analítica como uma expressão clara e precisa das relações geométricas. Por outro lado, não podemos desprezar, para as pesquisas ulteriores, o benefício que um formalismo bem fundado oferece, pois esse precede, de certa maneira, o pensamento. Devemos, portanto, nos ater sempre

---

problemas mencionados no texto continuaram a dirigir uma grande parte dos trabalhos ulteriores de Lie e meus. No tocante a Lie, podemos citar sobretudo sua " Teoria dos grupos contínuos de transformações ", cuja exposição sistemática é objeto de dois Volumes (Leipzig, t.I, 1888;t.II, 1890). Dentre as minhas pesquisas posteriores ao presente artigo, eu posso indicar aquelas sobre os corpos regulares, sobre as funções modulares elíticas e, em geral, sobre as funções uniformes que admitem transformações lineares. Já em 1884 eu expunha as primeiras numa Obra especial : " Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade" (Leipzig)

ao princípio de não considerar como exaurido um argumento matemático, até que isso não se torne evidente no contexto. - E o avançar por intermédio de um formalismo não é mais que um primeiro passo, porém muito importante.

II. - Divisão da geometria moderna em disciplinas

Se, por exemplo, observamos como o físico matemático se priva das vantagens que ele extrairia, em muitos casos, duma intuição projetiva mesmo pouco desenvolvida; como, por outro lado, aquele que cultiva a geometria projetiva aborda pouco a rica mina de verdades matemáticas que deu lugar à descoberta da teoria da curvatura das superfícies, é necessário admitir que o estado atual da ciência geométrica é bastante imperfeito e deve melhorar em breve.

III. - Sobre a importância da intuição do espaço

Quando, no texto, falamos da intuição do espaço como qualquer coisa acessória, o fazemos em razão da natureza puramente matemática das considerações a serem formuladas. A intuição tem para essas a única finalidade da evidência, a qual, porém, do lado pedagógico, é de grande importância. Um modelo geométrico por exemplo é, sob esse ponto de vista, muito instrutivo e interessante.

Bem diferente é a questão da importância da intuição geométrica em geral. Eu a considero como uma coisa que subsiste em si. Existe uma geometria propriamente dita que só pode ser, como as pesquisas das quais nos ocupamos, uma forma sensível de considerações abstratas . Nessa geometria, temos de conceber de modo absoluto as figuras do espaço na plena verdade de suas formas e de entender (o que constitui o lado matemático) suas relações como conseqüências evidentes dos postulados da intuição do espaço. Nessa geometria, seja executado e examinado ou somente representado, um modelo não é um meio para atingir um fim , mas é a finalidade em si.

Instituindo dessa maneira a geometria com existência própria, sem depender da matemática pura, não fazemos nada de novo. É desejável, entretanto, colocar expressamente ainda uma vez esse ponto em evidência, pois as pesquisas recentes se afastam desse ponto de vista. E isso se liga ao fato que, inversamente, a própria investigação raramente estuda as propriedades das formas dos entes do espaço, se bem que esse caminho parece ser particularmente fecundo.

IV. - Sobre as variedades com um número qualquer de dimensões.

Que o espaço, concebido como lugar de pontos só tenha três dimensões, não precisa ser discutido do ponto de vista matemático. Mas, do mesmo ponto de vista matemático, não podemos impedir a afirmaçãode que ele podeter quatro ou mais dimensões. No entanto, só podemos perceber três. A teoria das variedades com várias dimensões, da maneira como ela se desenvolve nas pesquisas matemáticas modernas é, por sua própria natureza, totalmente independente de tais afirmações. No entanto, estabeleceu-se uma linguagem que seguramente decorre da idéia de dimensão. Ao invés de elementos dum conjunto contínuo, falamos de pontos dum espaço superior, etc. Em si, essa maneira de expressão apresenta muitos aspectos bons, pois referindo-se a concepções geométricas, ela facilita a compreensão. Por outro lado, essa forma de expressão tem como con-

seqüência danosa o fato de fazer supor para muitos que as pesquisas sobre as variedades com várias dimensões estão intimamente ligadas ao conceito da natureza do espaço. Nada é mais infundado que esta crença. É certo que as pesquisas matemáticas rapidamente encontrariam aplicações geométricas se a representação fosse exata; mas o valor e a finalidade das pesquisas sobre essas variedades, sendo independentes das representações geométricas, apresentam um grande conteúdo matemático intrínseco.

Bem diferente desse raciocínio é o modo indicado por Plücker de considerar o verdadeiro espaço como uma variedade com um número qualquer de dimensões, introduzindo como elemento (ver § 5 do texto) uma figura (curva, superfície,etc) que depende dum número qualquer de parâmetros.

O modo de representação que considera o elemento da variedade com um número qualquer de dimensões como análogo ao ponto do espaço foi desenvolvido pela primeira vez por Grassmann na sua " Ausdehnungslehre " de 1844. Grassmann não se preocupa com as idéias que apresentamos sobre a natureza do espaço; as idéias de Grassmann lembram remotamente algumas sugestões de Gauss e se espalham pelas pesquisas de Riemann sobre as variedades multidimensionais.

Os dois modos de ver, tanto o de Grassmann como o de Plücker, apresentam suas vantagens particulares ; os dois são empregados, com lucro.

V. - Sobre o que chamamos de Geometria não Euclidiana

Como tem sido mostrado em pesquisas recentes, a geometria métrica projetiva da qual nos ocupamos no texto, coincide essencialmente com a geometria métrica que obtemos quando rejeitamos o postulado das paralelas e que, sob o nome de Geometria não euclidiana, é atualmente objeto de frequentes debates e discussões. Se não mencionamos esse nome no texto, isso se deve a um motivo que avizinha das explicações da nota precedente. Associa-se ao nome de geometria não euclidiana uma quantidade de idéias não matemáticas, aceitas com muito entusiasmo por um lado e com muita repulsa por outro. Mas com essas idéias, nosso estudo puramente matemático nada tem a ver. Por meio das considerações que se seguem, quisemos trazer um pouco de luz a essa discussão.

As pesquisas em pauta sobre a teoria das paralelas e seus desenvolvimentos sucessivos apresentam duas facetas com importâncias matemáticas precisas.

Elas mostram primeiramente, e podemos considerar a coisa como definitivamente esgotada, que o axioma das paralelas não é uma conseqüência matemática dos axiomas que geralmente o precedem, mas que ele é a expressão dum fato intuitivo essencialmente novo que foi deixado de lado pelas pesquisas anteriores. Uma discussão semelhante poderia e deveria ser feita, mesmo fora da geometria, em relação a cada axioma; ganharíamos muita compreensão sobre a posição oposta aos axiomas.

Em segundo lugar, essas pesquisas nos forneceram uma noção matemática preciosa, a duma variedade com curvatura constante. Ela está ligada, como já notamos e desenvolvemos amplamente no § 10, do modo mais estreito, à determinação métrica projetiva desenvolvida independentemente de qualquer

teoria de paralelas. Se o estudo dessa determinação métrica projetiva, em si oferece um grande interesse matemático e permite numerosas aplicações, podemos reafirmar sua importância lembrando que ele compreende ainda, como um caso particular (caso limite), a determinação métrica da geometria e ensina a considerar esta dum ponto de vista mais elevado.

Totalmente independente dessas considerações é a questão de saber sobre o que repousa o axioma das paralelas, se ele deve ser considerado como dado de um modo absoluto, o que querem alguns, ou como estabelecido somente de modo aproximado a partir da experiência, como querem outros. Se houvessem razões para se aceitar este último modo de ver, as pesquisas matemáticas em questão nos mostrariam como então deve ser construída uma geometria mais exata. Mas esta é evidentemente uma questão filosófica que atinge princípios mais gerais do nosso entendimento. Ela não interessa ao matemático como tal, e ele pode desejar que suas pesquisas não sejam dependentes da resposta que, de um lado ou de outro, pode lhe ser dada.

VI. - A geometria da reta como estudo duma variedade com curvatura constante.

Relacionando uma com a outra a geometria da reta com a determinação métrica projetiva numa variedade pentadimensional nós devemos estar atentos ao fato de que as retas (no sentido da determinação métrica) só nos oferecem os elementos no infinito da variedade. Torna-se assim necessário examinar qual é o valor duma determinação métrica projetiva para seus elementos no infinito; iremos desenvolver aqui esta questão para afastar as dificuldades que se opõem à concepção da geometria da reta como geometria métrica. Referimos esses desenvolvimentos ao exemplo intuitivo que oferece a determinação métrica projetiva baseada sobre uma superfície do segundo grau.

Um par de pontos, tomado arbitrariamente no espaço, apresenta, em relação à superfície, um invariante absoluto: a razão anharmônica que os dois pontos formam com os dois pontos de intersecção da reta que os une com a superfície; entretanto, se os dois pontos se colocam sobre a superfície, a razão anharmônica tende para zero independentemente da posição dos pontos, exceto no caso onde os dois pontos se colocam sobre uma geratriz, caso no qual a razão se torna indeterminada; é o único caso particular que pode ocorrer com seu posicionamento relativo se eles não coincidem; temos assim a proposição :

<u>A determinação métrica projetiva que podemos basear no espaço sobre uma superfície do segundo grau não fornece nenhuma determinação métrica para a geometria sobre essa superfície</u>.

A isto se liga o fato de que podemos, por transformações lineares da superfície nela mesma, trazer três quaisquer de seus pontos em coincidência com três outros (1)

---

(1) Estas relações são alteradas na geometria métrica ordinária; para dois pontos no infinito, existe seguramente um invariante absoluto. A contradição que poderíamos assim encontrar, levando em conta as transformações lineares que admitem a superfície no infinito, é afastada se se leva em conta as translações e as transformações por similitude que não afetam o lugar dos pontos no infinito.

Para ter sobre a própria superfície uma determinação métrica, é preciso restringir o grupo de transformações e chega-se a isso mantendo fixo um ponto qualquer do espaço (ou seu plano polar). Suponhamos primeiramente que o ponto não esteja sobre a superfície. A partir desse ponto nós a projetamos então sobre um plano, o que fornece uma cônica como curva de contorno aparente. Sobre esta cônica baseamos, no plano, uma determinação métrica projetiva que referiremos depois sobre a superfície. Esta é uma verdadeira determinação métrica com curvatura constante, donde extraímos a proposição:

<u>Uma determinação métrica com curvatura constante é obtida sobre a superfície desde que mantenhamos fixo um ponto que não esteja sobre a superfície</u>.

Temos, do mesmo modo :

<u>Tomando como ponto fixo um ponto da própria superfície, obtém-se sobre essa uma determinação métrica com curvatura nula</u>.

Para todas essas determinações métricas sobre a superfície, as geratrizes são linhas com comprimento nulo. As expressões para o elemento de arco da superfície não diferem, nas diferentes determinações, a menos de um fator constante. Não existe sobre a superfície um elemento de arco absoluto, entretanto podemos falar do ângulo formado por duas direções sobre a superfície.

Todas essas proposições e considerações podem ser aplicadas à geometria da reta. Para o próprio espaço formado de retas não existe a priori nenhuma determinação métrica. Só obtemos uma quando mantemos fixo um complexo linear e, então ela tem curvatura constante ou nula dependendo do complexo ser geral ou particular (uma reta). À escolha desse complexo também está ligada a existência de um elemento de arco absoluto. Qualquer que seja essa escolha, a distância entre duas retas infinitamente vizinhas que se cortam é nula e, podemos também falar do ângulo formado por duas retas infinitamente próximas duma reta dada (1).

VII. - Sobre a interpretação das formas binárias

Mostraremos aqui qual representação simples podemos, por meio da interpretação de x + i y sobre a esfera, obter para os sistemas de formas que estão ligados à forma binária cúbica e à forma binária biquadrática.

(1) Ver o trabalho : " Über Liniengeometrie und metrische Geometrie " (Math. Ann. Bd. V, 271)

Uma forma binária cúbica f tem : um covariante cúbico Q, um quadrático Δ e um invariante R (1). Com f e Q formamos toda uma série de covariantes do sexto grau

$$Q^2 + \lambda R f^2 ,$$

entre os quais se encontra igualmente Δ^3. Podemos demonstrar (2) que cada covariante da forma cúbica se decompõe em sistemas de seis pontos. A infinidade será dupla se λ puder assumir valores complexos.

O conjunto de formas assim definido pode ser representado sobre a esfera da seguinte maneira (3): por meio de uma transformação linear conveniente, trazemos os três pontos representados por f sobre três pontos equidistantes sobre um grande círculo. Podemos tomar esse grande círculo como o equador; as longitudes dos três pontos f situados sobre ele são 0°, 120° e 240°. Q é então representado pelos pontos do equador cujas longitudes são 60°, 180° e 300°. Δ será representado pelos dois polos. Cada forma $Q^2 + \lambda R f^2$ é

(1) Ver os capítulos de Clebsch sobre a questão : " Theorie der binären Formen "

(2) Pela consideração das transformações lineares de f nela mesma. Ver Math. Ann. IV, 352.

(3) Ver também BELTRAMI : " Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche " (Memorie Acc. Bologna, 1870) representada por seis pontos cujas latitudes e longitudes estão contidas na tabela seguinte, onde α e β designam números quaisquer

α	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$
β	$120^\circ+\beta$	$240^\circ+\beta$	$-\beta$	$120^\circ-\beta$	$240^\circ-\beta$

É interessante ver, examinando a sucessão desses sistemas de pontos sobre a esfera, como deduzimos f e Q contados duplos, e Δ contado triplo.

Uma forma biquadrática possui um covariante H também biquadrático, um covariante de sexto grau T, e dois invariantes i e j . O conjunto de formas biquadráticas $i\,H + \lambda\, j\, f$, que correspondem todas ao mesmo T, é particularmente notável; a esse conjunto pertencem os três fatores quadráticos nos quais T pode se decompor, cada um deles estando contado duplamente.

Tracemos agora, pelo centro da esfera, três eixos retangulares Ox, Oy e Oz. Os seis pontos de intersecção com a esfera dão a forma T. Designando por x, y e z as coordenadas dum ponto qualquer da esfera, os quatro pontos que correspondem a uma biquadrática $i\,H + \lambda\, j\, f$ são dados pela tabela

x,	y,	z,
x,	-y,	-z,
-x,	y,	-z,
-x,	-y,	z .

Esses quatro pontos são sempre os vértices dum tetraedro simétrico cujas arestas opostas são divididas em duas partes iguais pelos eixos do sistema de coordenadas ; o papel desempenhado por T, como resolvente de $i\,H + \lambda\, j\, f$, na teoria das equações biquadráticas, é posto assim em evidência.

UMA NOTA EXPLICATIVA

Normando Celso Fernandes

Departamento de Física Experimental

Instituto de Física - U S P

Poucos trabalhos matemáticos exerceram uma influência sobre os desenvolvimentos ulteriores da Geometria e da Física que seja comparada ao estímulo recebido pelo PROGRAMA DE ERLANGEN de Felix Klein. Esse trabalho marca o surgimento duma nova era na história da Geometria. Ele contém o germe da maior parte das teorias geométricas modernas e, por que não dizer, de grande parte da Física Teórica comtemporânea. As idéias propostas por Klein para o estudo de várias geometrias, vistas como teorias de invariantes sob a ação de grupos convenientes de transformações, permitiram que ele desenvolvesse uma conexão profunda entre as geometrias e estabelecesse mesmo uma axiomática e uma classificação das teorias geométricas.

Seguindo Klein, entendemos como " propriedades geométricas " as propriedades das figuras do espaço E e as grandezas relacionadas com essas figuras que permanecem invariantes quando efetuamos qualquer transformação pertencente a um certo grupo G. As propriedades geométricas serão as mesmas para todas as figuras equivalentes. O sistema de proposições relativas às propriedades de figuras e grandezas que permanecem invariantes por todas as transformações do grupo G será chamado de " geometria do grupo G ".

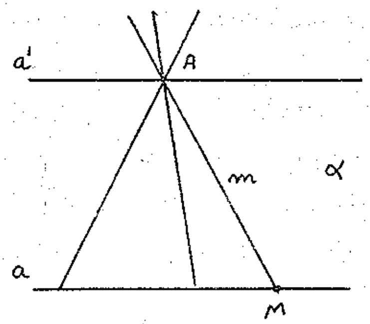
Para tornar mais preciso esse conceito de geometria (1), vamos necessitar de duas definições : a de <u>objeto geométrico</u> e a de <u>ação de um grupo</u> . Dados dois grupos G e H, uma aplicação M de G em H ; M : G → H será um <u>morfismo</u> se possuir a propriedade : M (g g') = M (g) M (g') qualquer que sejam g, g' de G. Seja E um conjunto qualquer. Consideramos o grupo formado por todas as bijeções (aplicações biunívocas) de E. Chamamos de <u>ação</u> de um grupo G sobre o conjunto E, todo morfismo do grupo G sobre o conjunto das bijeções de E. Finalmente, chamamos de <u>objetos geométricos</u>, os elementos de um conjunto E sobre o qual tenhamos definido a ação de um grupo G.

Com essas duas definições, chegamos, então, a entender o que passa a ser a definição geométrica de Klein : uma geometria é constituida pela especificação de um conjunto E (que será o espaço) e de um grupo G (de transformações de E) .

Como vemos, a amplidão e a generalidade da definição kleiniana de geometria permitem as mais variadas interpretações e extensões. No nosso modo de ver, o PROGRAMA DE ERLANGEN representa o coroamento de toda uma linha de pensamento, iniciada por Lobatchesky, que faz com que não mais interpretemos o espaço como mero receptáculo inerte das figuras nele contidas, mas sim como parte integrante da própria ciência geométrica. Essa linha, complementada com as idéias fundamentais de Riemann, abriu caminho para as nossas concepções atuais das teorias geométricas. Seria impossível enumerarmos aqui todas as ramificações e sugestões, tanto em Matemática como em Física, que frutificaram a partir do PROGRAMA DE ERLANGEN. Mesmo em áreas específicas os progressos foram tão grandes e importantes que não teríamos a pretensão de procurar condensar em poucas páginas o desenvolvimento científico de mais de um século de pesquisas. Além disso, como é óbvio, não teríamos competência para realizar tal tarefa (2). Como já dissemos na Apresentação, nossa intenção é de apenas apresentar esse texto clássico e alinhavar, em linhas gerais, alguns argumentos didáticos que podem ajudar o leitor a tirar suas próprias conclusões. Se o leitor tiver uma razoável formação matemática, poderá, sem prejuízos, prescindir da leitura dos nossos comentários. Estes comentários, cuja escolha foi suscitada pelo desejo de atualizar uns poucos conceitos do texto original que, para os estudantes não são muito familiares, devem ser interpretados como um simples complemento.

Alguns conceitos básicos emitidos por Klein mostram a generalidade do seu raciocínio. Entretanto, para termos uma visão mais intuitiva da definição de geometria, é necessário que o grupo G e o espaço E sobre o qual ele age, ganhem contornos mais concretos. O próprio Klein inicia o seu trabalho com um exemplo bem claro : a <u>geometria projetiva</u>. A geometria projetiva apresenta a vantagem de se apresentar como um caso bem geral pois ela engloba as várias geometrias mais familiares como a ortogonal, a afim, etc. Ela é uma disciplina que estuda as propriedades das figuras e das grandezas relacionadas com essas figuras que permanecem invariantes mediante a aplicação de qualquer transformação projetiva. O conjunto das transformações projetivas constitui o chamado grupo projetivo.

Vamos estudar agora, de modo intuitivo, o que entendemos por espaço projetivo (3). Em seguida, a noção de transformação projetiva se torna imediata. Vamos tomar um ponto A qualquer do espaço e uma reta a que não passa por A. Por A e a passamos um plano α e consideramos todas as possíveis retas que passam por A e que estejam em α. Essas retas formam o feixe de retas no plano, com centro A. Estabelecemos uma correspondência entre os raios m do feixe A com os pontos M de a. Para qualquer ponto M de a existe um raio m do feixe A. Mas a recíproca é enganosa. O raio a' que é paralelo a a não corta a e, portanto, a correspondência estabelecida não é biunívoca. Para remediar essa situação, dizemos que as retas paralelas se cortam no infinito. Dessa maneira, o raio a' vai corresponder não a um ponto ordinário de a, mas a um novo objeto, o ponto no infinito de a. Essa definição pode ser estendida e, vemos assim que o ponto no infinito de cada reta também pertence a cada plano que contém essa reta; todas as retas têm um ponto comum no infinito; o sistema de retas paralelas num plano fica sendo chamado de feixe de retas com centro no ponto no infinito. Aqui, já encontramos uma noção que, embo-



ra sendo elementar, apresenta uma característica nova : por projeção, um feixe de retas com centro no infinito pode se tornar um feixe arbitrário.

Os pontos no infinito de retas não paralelas no plano são considerados distintos e assim, cada plano passa a conter infinitos pontos no infinito. O conjunto de todos os pontos no infinito de um plano é chamado de reta no infinito do plano. Essas considerações se generalizam facilmente para o caso espacial. Aí, ao invés de reta no infinito, vamos ter um plano no infinito que será, no espaço, o conjunto de todos os pontos no infinito. Isso é claro de se ver se pensamos num plano qualquer no espaço. Esse plano determina uma reta no infinito. Essa reta pode ser interpretada como a intersecção do plano dado com o plano no infinito.

Dessa maneira, chegamos às definições fundamentais de espaços projetivos :

1) Uma reta projetiva será uma reta ordinária a qual adicionamos um ponto no infinito. Desse modo, uma reta projetiva fica sendo considerada uma " curva fechada " (4)

2) Um plano projetivo será um plano comum mais uma reta no infinito

3) Finalmente, um espaço projetivo será o espaço euclidiano comum adicionado de um plano no infinito.

Uma ilustração interessante do fato de termos " curvas fechadas ", " superfícies fechadas " e " espaços fechados " com a adição de elementos no infinito é encontrada, por exemplo, no modelo de Born - Von Karmann para um cristal (5). Por uma extensão de linguagem, poderíamos dizer que esse modelo apresenta uma certa característica projetiva.

Vamos apresentar agora alguns argumentos decisivos para a distinção conceitual entre geometria projetiva e geometria elementar (euclidiana). Em geometria euclidiana, os elementos no infinito também aparecem, mas são usados somente para a caracterização de certos fatos geométricos: dizemos em geometria elementar, que duas retas paralelas se encontram no infinito ou que o cilindro é um cone cujo vértice se encontra no infinito, etc. Mas o infinito, nesse sentido, fica sendo algo vago e não faz parte da teoria geométrica. Por outro lado, em geometria projetiva, os elementos no infinito fazem parte do corpo da teoria, sendo tratados em pé de igualdade com os elementos geométricos usuais. Vamos procurar realçar ainda mais o contraste entre geometria elementar e geometria projetiva. Essencialmente, a geometria euclidiana está preocupada em estabelecer relações métricas sobre as figuras: comprimentos e ângulos. Um segmento de reta AB sempre pode ser medido em geometria elementar, dando como resultado um número. Entretanto, se um dos pontos extremos do segmento vai para o infinito, o processo de medida perde sentido. Do mesmo modo, fica impossível conceber a medida de um ângulo se um de seus lados vai para o infinito. Assim, em geometria elementar, os elementos no infinito, ainda que importantes, são inteiramente distintos dos elementos geométricos usuais. A geometria projetiva contrasta frontalmente com o que acabamos de afirmar. Nela, como os processos de medida (métricos) não têm sentido

pois, dependendo do centro de projeção um elemento no infinito pode ser transformado num elemento usual e vice-versa, fica impossível a distinção entre um elemento ordinário e um elemento no infinito.

Como conclusão, vemos que para definir de modo preciso a noção de espaço projetivo, temos de banir da geometria projetiva tudo que estiver relacionado com medida.

Juntamente com o conceito de espaço projetivo, vamos tentar desenvolver a noção de transformação projetiva (projetividade).

Para maior clareza das idéias, vamos considerar ainda duas retas a e a' num plano α . Queremos estabelecer uma correspondência biunívoca entre pontos de a e a', ou seja, dado um ponto M de a e um ponto M' de a', devemos especificar de que modo ao ponto M corresponde somente um ponto M'. Podemos definir o relacionamento entre M e M' dizendo que M' é uma função f de M : $M' = f(M)$. A especificação da função (aplicação) f define, então, uma transformação projetiva (uma projetividade), isto é, dado o ponto M, sempre saberemos determinar o ponto $M' = f(M)$. É claro que a noção de projetividade pode ser generalizada para outros elementos projetivos fundamentais. Se tivermos, por exemplo, dois planos projetivos α e α' no espaço projetivo, podemos determinar uma aplicação F tal que $\alpha' = F (\alpha)$ e, assim por diante. O problema da determinação das funções que definem todas as projetividades é um problema resolvido mas, sua reprodução aqui nos levaria a uma extensão muito grande desta nota. Recomendamos ao leitor a consulta ao livro já citado de Efimov (3), onde encontramos as expressões analíticas das projetividades.

Uma outra noção fundamental da geometria projetiva que ressalta ainda mais as diferenças dela com relação à euclidiana, é fornecida pelo chamado princípio de dualidade. Para ilustrar mais claramente esse princípio, vamos tomar como nosso espaço projetivo, o plano projetivo. Nessa geometria projetiva bi-dimensional, só temos dois elementos fundamentais: o ponto e a reta. Uma análise dos fundamentos da geometria projetiva mostra que a cada proposição formulada para um elemento (ponto) existe uma proposição dual para o outro elemento (reta). Em outras palavras, se formulamos um teorema para um tipo de elemento (um ponto, por exemplo), existirá um teorema dual para o outro elemento (reta) de maneira que se trocarmos pontos por retas e retas por pontos no enunciado dos teoremas, do ponto de vista lógico, o conteúdo será o mesmo. Um exemplo simples esclarece a noção inusitada de dualidade projetiva que não existe em geometria euclidiana. Chamamos os pontos do plano projetivo de elementos de primeira espécie e as retas de elementos de segunda espécie. Propomos então o teorema : " dois elementos de primeira espécie sempre definem um e somente um elemento comum de segunda espécie ". Traduzindo isso em linguagem usual, teríamos dois teoremas duais :

1) " Por dois pontos distintos só passa uma reta "
2) " Duas retas distintas sempre se cortam num único ponto "

Obviamente, o segundo teorema será o dual do primeiro se consideramos agora as retas como elementos de primeira espécie e os pontos como os de segunda espécie. As adaptações dos

enunciados são imediatas.

É importante notar que os pontos e as retas da geometria euclidiana não são elementos duais. Assim, no plano euclidiano da geometria elementar sempre podemos afirmar que " por dois pontos distintos passa uma e uma só reta " mas, a afirmativa dual " duas retas sempre têm um ponto comum ", não forma sentido. As retas podem ser paralelas e, portanto, não se cortam em nenhum ponto.

O princípio de dualidade projetiva também vale para o espaço projetivo tri-dimensional e aí, a geometria projetiva pode ser formulada em termos de proposições para uma dada espécie de elementos ou para os elementos duais. O resultado lógico é o mesmo. É claro que para objetos geométricos concretos, as proposições duais expressam, em geral, fatos concretos diferentes. No espaço, tendo provado um determinado teorema projetivo, podemos formular o teorema dual se substituímos as palavras de acordo com o esquema

ponto $\longrightarrow$ plano
reta $\longrightarrow$ reta
plano $\longrightarrow$ ponto

A validez do teorema será estabelecida pelo princípio de dualidade.

Cremos que a exposição sucinta que fizemos do princípio de dualidade já serve para o leitor ter uma idéia do que Klein quer dizer quando ele, ou leva em conta transformações por dualidade ou não as considera. Ele tinha em mente as expressões analíticas (em termos de coordenadas) do princípio de dualidade (grupos de transformações).

Neste ponto, interrompemos nosso discurso geométrico propriamente dito, para tecermos algumas considerações especulativas em Física. Há muitos anos, Schönberg (6) fazia uma sugestão que, a nosso ver, merece uma meditação mais profunda. Dizia ele que, talvez fosse o caráter dual-projetivo que estivesse se manifestando no enunciado do Princípio de Complementaridade de Bohr. O aspecto corpuscular de uma partícula estaria relacionado com o ponto projetivo enquanto que o aspecto ondulatório (onda plana para a partícula livre) estaria relacionado com o plano projetivo. Esta é uma observação que ganha contornos mais nítidos se raciocinamos no espírito da dualidade projetiva : ponto $\leftrightarrow$ plano. Outros aspectos de caráter projetivo parecem também estar presentes na Mecânica Quântica (7). Uma linha de raciocínio bastante importante é desenvolvida por Jauch (8).

Voltemos agora ao problema proposto no início destes comentários : como definir uma geometria. Segundo Klein, a geometria projetiva é uma disciplina destinada ao estudo das propriedades das figuras e das grandezas ligadas a essas figuras que são invariantes em relação a qualquer transformação projetiva. Podemos, portanto, definir a geometria projetiva como a geometria dos grupos projetivos.

Agora, falta apenas uma definição do grupo projetivo. Vamos apresentar sua representação como um grupo de transformações. Para isso, necessitamos definir um sistema projetivo de coordenadas. Vamos partir do sistema cartesiano e começamos estudando a reta projetiva. Coordenadas no plano e no espaço

são obtidas como extensões óbvias. Quando estabelecemos um sistema de coordenadas na reta, atribuimos valores para as coordenadas de qualquer ponto, com exceção de um : o ponto no infinito. Vamos introduzir coordenadas para esse ponto também. Seja a uma reta projetiva. M será um ponto qualquer de a com coordenada x . Definimos dois números x_1 e x_2 , que não se anulam simultaneamente, como coordenadas homogêneas de M se a razão x_1 / x_2 for igual a x : $x_1 / x_2 = x$. O ponto no infinito terá coordenadas x_1 e x_2 , com $x_2 = 0$. Como as coordenadas homogêneas se apresentam como razões, vemos que ρx_1 e ρx_2 representam o mesmo ponto x e daí inferimos que cada ponto da reta projetiva admite um número infinito de pares de coordenadas homogêneas. Essa arbitrariedade na escolha de ρ permite que normalizemos os números x_1 e x_2 convenientemente. Assim, podemos escolher os seguintes valores representativos dos pontos: $x = 0 = (0, 1)$; $x = \infty = (1, 0)$; $x = 1 = (1,1)$. A escolha desses pontos fixa inteiramente o sistema de coordenadas homogêneas da reta projetiva. Em geral, adota-se a seguinte nomenclatura para esses três pontos que fixam as coordenadas homogêneas da reta projetiva : $A_1 = A_1(0,1)$; $A_2 = A_2(1,0)$ e $E = E(1,1)$. Procedendo de modo análogo, obtemos os pontos básicos no plano projetivo (3) : $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$ e $E(1,1,1)$. No espaço projetivo, temos : $A_1(1,0,0,0)$, $A_2(0,1,0,0)$, $A_3(0,0,1,0)$, $A_4(0,0,0,1)$ e $E(1,1,1,1)$.

Vamos agora resolver um problema no plano projetivo que vai servir para caracterizar de maneira analítica uma transfor mação projetiva . Sejam dois planos α e α'. Em ambos planos introduzimos sistemas de coordenadas projetivas homogêneas. Em α escolhemos um ponto $M(x_1 , x_2 , x_3)$. Em α' um ponto $M'(x'_1 , x'_2 , x'_3)$. Dizemos que M' corresponde a M segundo uma transformação projetiva se as coordenadas homogêneas satisfazem as equações

$$\rho' x'_1 = c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3$$
$$\rho' x'_2 = c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + c_{23} x_3$$
$$\rho' x'_3 = c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + c_{33} x_3$$

onde $\rho' \neq 0$ é um número qualquer. Podemos escrever $M' = L (M)$ e chamamos a transformação de linear. Como as coordenadas são homogêneas, a escolha de ρ' não afeta a localização do ponto M'. A transformação linear fica, então, caracterizada pela matriz $C = | c_{ik} |$. Ela será biunívoca, isto é, a cada M corresponde um único M' se $\det C \neq 0$. Essas transformações admitem as inversas : $M = L^{-1} (M')$. Além do mais, podemos considerar 3 pontos M, M' e M'' e definir $M' = L_1(M)$, $M'' = L_2(M')$ e $M'' = L(M)$. Como a transformação é linear, chegamos à conclusão que $M'' = L_2 L_1 (M) = L (M)$, donde $L_2 L_1 = L$ e vale a lei de composição de grupo. Então, o conjunto das transformações projetivas forma um grupo, chamado de grupo projetivo. No caso do grupo projetivo plano, o número de parâmetros é 8 (oito razões entre os c_{ik}). Não há restrições sobre os c_{ik} . Apenas $\det | c_{ik} | \neq 0$. Para exprimir o grupo projetivo no espaço, apenas necessitamos introduzir uma coordenada homogênea a mais. O número de parâmetros é 15 , com $\det | c_{ik} | \neq 0$.

Vamos comparar algumas geometrias e estabelecer, baseados

nas fórmulas de transformações projetivas, o que chamamos de hierarquia de geometrias. A matriz que caracteriza uma transformação projetiva plana é bem geral. A única restrição que colocamos é $\det C \neq 0$. Não jogamos com os valores dos c_{ik}.

Uma escolha particular importante ocorre quando colocamos $c_{31} = c_{32} = 0$. Uma transformação assim obtida denomina-se transformação afim e pertence ao grupo afim do plano. Dizemos que temos uma geometria do plano afim. Não restringimos o valor do determinante. O grupo afim plano possui 6 parâmetros. Só com a restrição imposta aos coeficientes c_{31} e c_{32} vemos que a geometria muda muito. Na geometria do plano afim (topologicamente o plano afim é equivalente ao plano euclidiano), a pontos ordinários sempre vão corresponder pontos ordinários. A pontos no infinito correspondem pontos no infinito. A noção de paralelismo no sentido euclidiano é restaurada. As noções de vetor, de equipolência entre dois vetores, de soma geométrica de dois vetores são afins; a noção de módulo de um vetor, entretanto, não é afim (9), e sim métrica. A teoria dos vetores livres, da sua equivalência, de sua redução a um vetor mais um binário, apesar da forma métrica da qual é habitualmente revestida, é uma teoria puramente afim. Estas observações, apesar de fugirem um pouco da tônica principal baseada no trabalho de Klein, se justificam dada a importância das transformações afins (lineares) nas teorias do espaço. Uma outra especialização pode ser efetuada sobre as matrizes do grupo afim. Podemos impor que o determinante de $| c_{ik} |$ só possa valer ± 1. Dessa maneira obtemos o chamado grupo afim unimodular. No plano, esse grupo terá 5 parâmetros independentes. Esse grupo já permite definir áreas de figuras planas (não definimos comprimentos mas definimos áreas). No espaço, teríamos a conservação de volumes. A sua importância, tanto em análise (teoria da integração), como em Física, é fundamental. A maior parte das leis físicas fornecem invariantes da geometria afim unimodular. A definição de trabalho em Mecânica, a lei dos gases, etc., são exemplos que, dum ponto de vista geométrico, interpretamos como objetos da geometria afim unimodular.

Como última ilustração desse raciocínio geométrico, impomos que as matrizes da transformação afim $\| c_{ik} \|$ satisfaçam a condição $\| c_{ik} \| \| c_{ik} \|' = I$, onde $\| c_{ik} \|'$ denota a transposta de $\| c_{ik} \|$ e I é a matriz identidade. Com essa restrição definimos o <u>grupo ortogonal</u> que, no plano, passa a ter 3 parâmetros. Na geometria do grupo ortogonal, já temos definida a noção de <u>distância</u> entre dois pontos. Ela é, portanto, a geometria elementar (euclidiana).

Vemos assim, com os exemplos citados, que o grupo mais amplo de transformações lineares é o <u>grupo projetivo</u> enquanto o mais restrito é o <u>ortogonal</u> . Do ponto de vista expresso no começo, a geometria projetiva passa a ser a mais pobre (menor número de invariantes) enquanto que a ortogonal fica sendo a mais rica (maior número de invariantes)

REFERÊNCIAS DA NOTA EXPLICATIVA

(1) - J. M. Souriau, Found. Phys., <u>13</u>, 133 (1983)

(2) - Neste ponto recomendamos, em especial, a leitura do prefácio de J. Dieudonné no livro " Le programme d' Erlangen ", Gauthier-Villars, Paris (1974)

(3) - Um livro excelente para esse estudo é " Higher Geometry ", por N. V. Efimov, Mir, Moscow (1980)

(4) - Uma imagem pictórica muito ilustrativa é encontrada, por exemplo, no livro " Lezioni di Geometria Proiettiva ", por F. Enriques, Zanichelli, Bologna (1926)

(5) - " Wave Propagation in Periodic Structures ", por L. Brillouin, Dover, N. York (1953)

(6) - M. Schönberg, comunicação pessoal

(7) - Esses aspectos gerais são mencionados num dos capítulos ainda não publicados do curso " Alguns Aspectos Matemáticos da Física Teórica ", por N. C. Fernandes (1984)

(8) - " Foundations of Quantum Mechanics ", por J. M. Jauch, Addison-Wesley, Reading (1968)

(9) - Para um estudo profundo do espaço afim e suas ligações com a teoria da gravitação recomendamos a leitura de " Sur les variétés a connexion affine et la Théorie de la Relativité Généralisée ", por E. Cartan, Ann. Éc. Norm., <u>40</u>, 325 (1923).