UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

PUBLICAÇÕES

IFUSP/P-545

SOBRE AS HIPÓTESES QUE SERVEM DE FUNDAMENTO À GEOMETRIA

Bernhard Riemann

Tradução de
Normando Celso Fernandes e Dimas da Cruz Oliveira

Comentários de
Normando Celso Fernandes

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Agosto/1985

BERNHARD RIEMANN

SOBRE AS HIPÓTESES QUE SERVEM DE FUNDAMENTO À GEOMETRIA

Tradução de

NORMANDO CELSO FERNANDES

e

DIMAS DA CRUZ OLIVEIRA

Comentários de NORMANDO CELSO FERNANDES

INSTITUTO DE FÍSICA DA USP

Agosto de 1985

À minha esposa VERA, cujo encontro fez renascer em mim o interesse pela vida e, conseqüentemente, pela ciência.

São Paulo, agosto de 1985

Normando Celso Fernandes

BERNHARD RIEMANN

SOBRE AS HIPÓTESES QUE SERVEM DE FUNDAMENTO À GEOMETRIA

"Pesquisas que partem de noções gerais, como as que foram realizadas aqui, podem servir somente para isto: impedir que um trabalho como este não seja entravado por visões muito estreitas, e que o progresso no conhecimento da dependência mútua das coisas não encontre um obstáculo nos preconceitos tradicionais".

B. Riemann

ÍNDICE

A P R E S E N T A Ç Ã O

Dando seqüência aos nossos estudos sobre alguns trabalhos fundamentais em geometria, iniciados com a publicação do Programa de Erlangen de Felix Klein, apresentamos aqui as "Hipóteses" de B. Riemann. A tradução do texto integral alemão foi feita sobre a edição contida no livro "Das Kontinuum und andere Monographien", da Chelsea Publ. Co., New York (1923), ed. H. Weyl. O trabalho de tradução foi feito em conjunto por Normando Celso Fernandes, professor do IFUSP e Dimas da Cruz Oliveira, professor de História da Escola Estadual de 1º Grau "Prof. Carlos Pasquale", São Paulo, S.P.. A revisão final foi feita por N.C. Fernandes. Também os comentários sobre o texto, bem como a bibliografia inserida ao final do mesmo, são de autoria e de responsabilidade de N.C. Fernandes.

Antes do texto do próprio Riemann, preferimos adicionar o prefácio escrito por H. Weyl no livro citado acima. Para o leitor mais interessado nos desenvolvimentos analíticos, recomendamos a leitura das explicações de H. Weyl contidas no mesmo livro, em seguida ao trabalho de Riemann.

Esperamos que esta publicação possa servir de instrumento de divulgação em português da monumental obra de Riemann. Que o estudioso de geometria, de relatividade, de física, de filosofia, etc., encontre aqui um ponto de referência para suas indagações futuras. Acreditamos que estes registros podem ter alguma importância na formação de nossos estudantes.

São Paulo, agosto de 1985

B. RIEMANN

"SOBRE AS HIPÓTESES QUE SERVEM DE FUNDAMENTO À GEOMETRIA"

Reeditado e explicado por H. Weyl

3ª Edição - Prefácio do Editor

A tese de livre-docência de Riemann "Sobre as hipóteses que servem de fundamento à geometria", por ele defendida em vista da sua habilitação na Faculdade de Filosofia de Göttingen, foi publicada pela primeira vez após sua morte, no volume 13 dos Ensaios da Sociedade de Ciências de Göttingen (Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bande 13 (1867)). Depois que Lobatchevsky e Bolyai, em princípio sem transcender a posição euclidiana e aliás, ao contrário, em estreita conexão com o modelo dos "Elementos" de Euclides, tinham desenvolvido uma Geometria lógica e conseqüente internamente, a qual repousava na negação ao invés de na aceitação do Postulado das Paralelas, o problema do espaço foi levantado nessa preleção de Riemann a partir dum ponto de vista novo e de validade universal. Aqui foi dado à geometria o mesmo impulso que Faraday e Maxwell realizaram no domínio da Física, especialmente da teoria do Eletromagnetismo, pela passagem da teoria da ação à distância para a do efeito de propagação: o princípio para compreender o mundo desde o seu comportamento no infinitamente pequeno chegou à realização. Da mesma motivação epistemológica surgem afinal de contas suas grandiosas conclusões no domínio da Teoria das Funções Analíticas assim como suas especulações físicas. É exatamente sobre este motivo que repousa a unidade percebida em toda a obra de Riemann, qualquer que seja a diversidade dos domínios por ele explorados.

Entretanto, as idéias que o grande matemático desenvolveu na conferência aqui novamente impressa, tornaram-se de amplo significado não somente para a Geometria, pois elas possuem hoje uma grande atualidade visto que, por meio delas, foi colocado o fundamento conceitual da Teoria da Relatividade Generalizada, por menos que o seu criador, Einstein, tenha sido influenciado por Riemann de maneira direta e consciente. Na verdade, as explorações do último parágrafo, transcendentes à matemática, apontam com surpreendente inteligibilidade - somos tentados a falar por adivinhação - na direção daquelas conseqüências físicas da teoria do espaço de Riemann tal como a Teoria da Gravitação de Einstein as tirou. Todavia, está claro que Riemann nada conhecia desta relação com a Gravitação, pois suas próprias tentativas de sondar a conexão da Luz, da Eletricidade, do Magnetismo e da Gravitação, que coincidem com a tese de livre-docência, não estão, de fato, em nenhuma relação com ela. Na época da habilitação, Riemann escreveu ao seu irmão: "... depois disto, eu me ocupei novamente da minha investigação sobre a conexão das leis fundamentais da física e me aprofundei de tal modo nisto que, quando o tema da tese me foi apresentado, não podia desembaraçar-me (completamente) daquela".

Os dois assuntos que então se agitavam em sua mente, cresceram agora em íntima conexão.

Desde a edição das obras de Riemann preparada por Dedekind e Weber, sua profunda tese de habilitação é geralmente acessível. Todavia, por estímulo da editora, eu me achei bastante disposto a preparar uma edição especial, pois parece-me de fato desejável que este escrito, também admirável obra-prima do ponto de vista da exposição, venha a cair no maior número possível de mãos e seja lido por todos que hoje voltam seu interesse para

a Teoria da Relatividade. Eu acrescentei um comentário: na primeira parte são realizados os cálculos analíticos apenas mencionados por Riemann; na segunda parte é relacionada a bibliografia posterior sobre o assunto; e na terceira parte é lançada a ponte para o moderno desenvolvimento realizado sob o signo da Teoria da Relatividade. Tendo em vista a legibilidade, foi escolhido um tipo tão grande quanto o do texto principal.

Para aquele que deseja conhecer tão somente os princípios fundamentais sem estudar os problemas em detalhe, aconselhamos insistentemente não deixar que o seu prazer na leitura seja perturbado pelas explicações formais. O sumário acrescentado à tese juntamente com as notas, são de Riemann.

Oxalá este escrito contribua ainda mais para sua forma atual, tal como ele já o fez em grande proporção desde o seu aparecimento, para estimular a vitalidade das idéias.

Nas anotações da segunda e terceira edições foram introduzidas somente modificações não essenciais.

Zurique, março de 1923

Hermann Weyl

B. RIEMANN

SOBRE AS HIPÓTESES QUE SERVEM DE FUNDAMENTO À GEOMETRIA

ÍNDICE

Como é sabido, a Geometria pressupõe como algo dado, tanto o conceito de espaço quanto as idéias fundamentais das construções do espaço. Ela fornece apenas as definições formais desses conceitos e idéias, enquanto que as determinações essenciais se apresentam sob a forma de axiomas. As relações entre esses dados primitivos permanecem na escuridão; não se sabe mesmo se estão necessariamente ligados entre eles ou se essa ligação é possível, a priori.

Desde Euclides até Legendre, para citar os mais célebres reformadores modernos da Geometria, esta obscuridade não foi dissipada nem pelos matemáticos nem pelos filósofos que dela se ocuparam. A razão disto é, sem dúvida, que o conceito geral de grandezas com múltiplas dimensões, que compreendem como caso par

ticular as grandezas espaciais, não constituiu objeto de nenhum estudo. Por conseguinte, eu me propus, antes de tudo, a tarefa de construir o conceito de uma grandeza com múltiplas dimensões, a partir dos conceitos gerais de grandeza*. Disso resultará que uma grandeza com múltiplas dimensões será suscetível de diferentes relações métricas e que o espaço** não será mais do que caso particular de uma grandeza tri-dimensional. Mas daí segue-se uma conseqüência necessária: os fundamentos da geometria não podem se deduzir dos conceitos gerais de grandeza, mas todas aquelas qualidades pelas quais o espaço se distingue das demais grandezas tri-dimensionais imagináveis somente podem ser extraídas da experiência. Daí surge o problema de investigar os fatos mais simples por meio dos quais as relações métricas do espaço podem ser determinadas; uma tarefa que, pela própria natureza do objeto, não fica perfeitamente determinada; pois podemos indicar vários sistemas de fatos simples que são suficientes para a determinação das relações métricas do espaço. O sistema mais importante, tendo em vista nossa finalidade, é o estabelecido por Euclides. Esses fatos, como todos os fatos possíveis, não são necessários***, mas têm somente certeza empírica; eles são hipóteses. Podemos, portanto, investigar sua probabilidade que, dentro dos limites da observação, é certamente muito grande e julgar a legitimidade de sua extensão para além dos limites da observação, tanto para o lado do infinitamente grande quanto para o lado do infinitamente pequeno.

---

*NT. - Ou seja, do conceito geral de uma grandeza, construir um ente mais complexo formado por diversas grandezas.

**NT. - Ele se refere ao nosso espaço comum (três dimensões).

***NT. - Deve-se entender "necessário a priori" no sentino kantiano.

I. CONCEITO DE UMA GRANDEZA n-DIMENSIONAL

Na medida em que eu busco agora, entre outras tarefas, solucionar o problema do desenvolvimento do conceito duma grandeza com dimensões múltiplas, ainda mais eu acredito poder reivindicar indulgência crítica, visto que sou pouco exercitado naqueles trabalhos de natureza filosófica cujas dificuldades consistem mais nos conceitos do que na construção e, além disso, salvo algumas indicações muito curtas que Gauss forneceu a respeito disso no segundo ensaio sobre os Resíduos Biquadrados*, bem como certas pesquisas filosóficas de Herbart, eu não dispunha de quaisquer trabalhos introdutórios.

§1. Os conceitos de grandeza só são possíveis quando se encontra uma noção geral antedecente que admite diferentes modos de determinação. Esses modos de determinação formam uma variedade** discreta ou contínua na medida em que acontece ou não uma passagem contínua de um modo para outro; em particular, esses modos de determinação se denominam, no primeiro caso, pontos e, no segundo caso, elementos da variedade. As noções cujos modos de determinação formam uma variedade discreta são tão abundantes que, pelo menos nas línguas cultas, pode-se encontrar sempre um conceito no qual tais modos estão contidos (e os matemáticos teriam por conseguinte o direito, na teoria das grandezas discretas, de postular sem hesitação a condição de que os objetos dados seriam tomados como de mesma espécie); por outro lado, as ocasiões para a formação de noções cujos modos de determinação formam uma variedade contínua são tão raros na vida comum que as posições dos objetos sensíveis e as cores são talvez as únicas situações simples, nas quais os modos de determinação formam uma variedade multi-dimensional. Ocasiões mais freqüentes para a formação e aperfeiçoamento desses conceitos se encontram somente nas Matemáticas mais elevadas*.

*NT. - Esse trabalho de Gauss foi publicado no "Göttingen Gelehrte Anzeige" e no livro do seu Jubileu.

**NT. - No texto é a primeira vez que aparece o termo Mannigfaltigkeit que em Gauss, op.cit., é descrito como Varietas. A noção de variedade considerada por Riemann ainda não tinha o sentido preciso que hoje encontramos em Geometria Diferencial e em Topologia. Alguns autores atribuem a Grassmann (Die Ausdehnungslehre, Berlim (1862)) a primeira introdução matemática mais rigorosa desse conceito tão fundamental para o desenvolvimento da Matemática de nossos dias.

Uma parte duma variedade, separada do resto por uma marca ou por um limite se chama um quantum (plur. quanta). A comparação entre os quanta, do ponto de vista da quantidade, se dá da seguinte maneira: no caso das grandezas discretas, pela contagem, no caso das grandezas contínuas, pela medida. O medir consiste na superposição das grandezas a serem comparadas; o medir consiste, portanto, dum modo de usar uma grandeza como um padrão para a outra. Na ausência desse meio, duas grandezas só podem ser comparadas quando uma é parte da outra e ainda assim só se pode distinguir o mais e o menos e não o quanto. As investigações que podem ser feitas nesse caso formam uma divisão geral da ciência das grandezas na qual as grandezas são consideradas como não podendo existir independentemente da posição e como não exprimíveis em termos de uma unidade, mas como regiões duma variedade. Tais investigações se tornaram uma necessidade para várias partes da matemática, especialmente para a teoria das funções analíticas com muitos valores; e a falta das referidas pesquisas é talvez um motivo crucial pelo qual o célebre teorema de ABEL e

*NT. - No Brasil não há um termo consagrado para o que Riemann chama de Matemática Superior (hohere Mathematik). Em inglês se usa Higher Mathematics e em francês Hautes Mathématiques.

os desenvolvimentos de LAGRANGE, de PFAFF e de JACOBI permaneceram tanto tempo infecundos no desenvolvimento da teoria geral das equações diferenciais. Dentro desse ramo geral da teoria das grandezas extensas, onde não supomos nada além do que já está contido no conceito dessas grandezas, será necessário salientar dois pontos para preencher o objetivo presente: o primeiro irá tornar nítida a formação do conceito de variedade de muitas dimensões, o segundo se refere à redução das determinações de lugar numa variedade às determinações de quantidade e é esse último ponto que irá ressaltar claramente o caráter essencial de uma extensão n-dimensional.

§2. Considerando um conceito cujos modos de determinação formam uma variedade contínua*, se passamos, segundo um procedimento determinado, dum modo de determinação a outro**, os modos de determinação percorridos formarão uma variedade estendida num só sentido, cujo caráter essencial será de que, nessa variedade, só podemos, partindo dum ponto, avançar dum modo contínuo em duas direções, para frente e para trás. Imaginemos agora que esta variedade se transporte, por sua vez, sobre uma outra variedade completamente distinta, e isso ainda por um procedimento determinado, isto é, de tal forma que cada um de seus pontos se transporte para um determinado ponto da outra variedade; o conjunto dos modos de determinação assim obtido formará uma variedade de duas dimensões***. Obtém-se, de modo semelhante, uma va-

*NT. - Por exemplo, as determinações sucessivas das posições dum móvel em uma dimensão.

**NT. - Por meio de uma função, atribuindo um número a cada determinação.

***NT. - Em geometria diferencial, uma região de superfície se considera simplesmente como uma multiplicidade ∞^2, em correspondência biunívoca com o par de números (u,v) de um certo campo e pode-se mesmo dizer que se considera como superfície esse mesmo ∞^2 de pares de números. Esse procedimento pode ser generalizado para grupos de 3 ou mais números, até n.

riedade de três dimensões, se se concebe que uma variedade de duas dimensões se transporta de um modo determinado sobre uma outra completamente distinta, e fica fácil de ver como essa construção se generaliza. Se, ao invés de considerar o conceito como determinável, considera-se seu objeto como variável*, pode-se designar essa construção como a composição duma variabilidade de n+1 dimensões por meio duma variabilidade de n dimensões e duma variabilidade de uma só dimensão**.

§3. Agora eu vou indicar, inversamente, como uma variabilidade cujo campo é dado, pode ser decomposta em uma variabilidade de uma dimensão e uma variabilidade de dimensão menor. Imagina-se para este objetivo uma porção variável de uma variedade de uma dimensão, contada a partir dum ponto fixo inicial, de tal modo que os valores da mesma (porção) sejam comparáveis uns com os outros - porção esta que para cada ponto da variedade dada possui um valor determinado que varia continuamente com o ponto; ou, com outras palavras, toma-se dentro da variedade uma função contínua da posição que, entretanto, não é constante ao longo de uma parte dessa variedade. Todo sistema de pontos para os quais a função assume um valor constante, constitui, portanto, uma variedade de dimensão menor que a variedade dada. Essas variedades se transformam continuamente umas nas outras com a mudança da função; pode-se admitir, portanto, que uma dentre essas variedades engendra as outras, e isso pode acontecer, falando generica-

*NT. - O espaço-tempo de Newton, com dimensão (3+1) pode ser pensado como uma ilustração desse raciocínio, onde o tempo funciona como objeto variável.

**NT. - Preferimos manter a nomenclatura estabelecida por Riemann de Veränderlichkeit = Variabilidade. Podemos pensar na variabilidade como um parâmetro numérico que não tem necessariamente o caráter cartesiano de uma distância. Sendo um referencial numérico, podemos substituí-lo por uma função desse mesmo parâmetro.

mente, de tal modo que cada ponto duma variedade se transforma num determinado ponto de outra. Os casos de exceção, cujo estudo aliás é importante, podem ser omitidos aqui. Assim, a determinação de posição numa dada variedade é reduzida a uma determinação de grandeza (quantidade) e a uma determinação de posição numa variedade de dimensão menor*. Agora é fácil mostrar que esta variedade possui n-1 dimensões quando a variedade dada possui n dimensões. Por meio da repetição deste processo n vezes, a determinação de posição numa variedade de n dimensões se reduzirá então a n determinações de grandeza (quantidade), quando este raciocínio for possível**. Existem entretanto, variedades nas quais a determinação de posição não exige um número finito, mas sim uma série infinita ou uma variedade contínua de determinações de grandeza. Tais variedades são, por exemplo, as constituídas pelas determinações possíveis de uma função para um dado domínio, as formas possíveis de uma figura espacial e assim por diante.

II. RELAÇÕES MÉTRICAS DAS QUAIS UMA VARIEDADE n-DIMENSIONAL É SUSCETÍVEL, COM A HIPÓTESE DE QUE AS LINHAS POSSUEM UM COMPRIMENTO INDEPENDENTE DA POSIÇÃO E, POR CONSEGUINTE, TODA LINHA É MENSURÁVEL POR INTERMÉDIO DE OUTRA LINHA

Depois que o conceito de uma variedade n-dimensional foi construído e verificado que o seu verdadeiro caráter consiste na propriedade de que a determinação de posição nela pode ser reduzida a n determinações de grandeza, chega-se ao segundo problema exposto acima, um estudo sobre as relações de medida das quais uma tal variedade é suscetível, e sobre as condições suficientes para a determinação dessas relações de medida. Essas relações de medida só podem ser estudadas em noções abstratas de grandeza, e as dependências duma relação com outra somente podem ser representadas por fórmulas. Sob certas condições, entretanto, elas são decomponíveis em relações que, tomadas separadamente, são capazes de representação geométrica; e assim torna-se possível exprimir geometricamente os resultados calculados. Assim, para chegar a um terreno sólido, ainda que não podendo evitar nas fórmulas considerações abstratas, pode-se ao menos representar os resultados do cálculo em forma geométrica. Os fundamentos para ambas as tarefas estão contidos no célebre ensaio de Gauss sobre as superfícies curvas*.

*NT. - Ao invés de variedade de dimensão menor, pode-se pensar em outro sentido - "einer minderfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit" uma variedade menos complexa.

**NT. - É importante frisar esse condicionamento ao possível.

§1. As determinações métricas requerem uma independência das grandezas em relação à posição, independência essa que pode se realizar de várias maneiras; a hipótese que se apresenta em primeiro lugar e da qual vou tratar aqui é a de que o comprimento das linhas é independente de suas posições e, por conseguinte, toda linha é mensurável por meio de outra linha. A fixação de posição sendo reduzida à fixação de grandezas, e a posição dum ponto numa variedade n-dimensional sendo expressa conseqüentemente por meio de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a determinação duma linha se fará com o fornecimento dessas grandezas como funções duma variável. Em seguida, o problema é estabelecer uma expressão matemática para o comprimento das linhas; para este fim as grandezas x têm de ser consideradas como exprimíveis em termos de

*NT. - O citado trabalho de Gauss é "Disquisitiones generales circa superfícies curvas".

certas unidades. Eu vou tratar desse problema somente sob certas limitações e me atendo primeiramente àquelas linhas para as quais as razões entre os acréscimos dx das variáveis x correspondentes variam de um modo contínuo; pode-se em seguida conceber as linhas como decompostas em elementos, sendo que dentro desses elementos as razões entre as quantidades dx podem ser tomadas como constantes e a tarefa se reduz depois a isto: estabelecer para cada ponto uma expressão geral do elemento linear ds que começa nesse ponto, expressão essa que conterá as grandezas x e as grandezas dx. Eu admito agora, em segundo lugar, que o comprimento do elemento linear, abstração feita de grandezas de segunda ordem, continua inalterado, quando todos os pontos desse elemento sofrem um mesmo deslocamento infinitésimo, o que implica ao mesmo tempo que se todas as grandezas dx crescem segundo uma mesma proporção, o elemento linear também vai variar segundo essa proporção. Admitidas essas hipóteses, o elemento linear poderá ser uma função homogênea qualquer de primeiro grau das grandezas dx, que permanecerá inalterada quando todas as grandezas dx trocarem de sinal, e na qual as constantes arbitrárias serão funções contínuas das grandezas x. Para encontrar os casos mais simples, eu procuro em primeiro lugar uma expressão para as variedades de n-1 dimensões as quais em todas as partes se distanciam igualmente do ponto inicial do elemento linear*, isto é: eu procuro uma função contínua da posição que distingue as variedades umas das outras. Essa função deverá ou crescer ou decrescer em todas as direções a partir da origem; eu assumo que ela cresce em todas as direções e que portanto, ela tem um mínimo na origem. É preciso então, se seus quocientes diferenciais de primeira e segunda ordem são finitos, que a diferencial de primeira ordem se anule, e que a de segunda ordem não se torne nunca negativa; eu admitirei que ela permanece sempre positiva. Esta expressão diferencial de segunda ordem permanece então constante quando ds permanece constante e cresce quadraticamente, quando as grandezas dx e, por conseguinte, também ds variam todas juntas numa mesma proporção; ela é portanto = constante x ds^2 e então ds é igual à raiz quadrada duma função inteira homogênea do segundo grau, sempre positiva, das grandezas dx e na qual os coeficientes são funções contínuas das grandezas x. Para o espaço ordinário, se exprimimos as posições dos pontos em coordenadas retangulares, temos $ds = \sqrt{\Sigma (dx)^2}$; portanto o espaço está contido neste caso mais simples. O próximo caso mais simples abrangeria as variedades nas quais o elemento linear seria escrito como a raiz quarta duma expressão diferencial do quarto grau. A investigação mais abrangente dessas classes mais gerais de variedades não exigiria na verdade quaisquer princípios essencialmente diferentes, mas seria bastante morosa e lançaria pouca nova luz relativamente à teoria do espaço, tanto mais porque os resultados não se deixam expressar geometricamente; por conseguinte eu me limito às variedades nas quais o elemento linear será expresso pela raiz quadrada de uma expressão diferencial de segundo grau. Pode-se transformar uma tal expressão numa outra semelhante, na medida em que se substitui as n variáveis independentes por funções de n novas variáveis independentes. Por este caminho, entretanto, não se poderá transformar qualquer expressão em outra qualquer; pois a expressão contém $n(n+1)/2$ coeficientes, os quais são funções arbitrárias das variáveis independentes; pela introdução de novas variáveis, poder-se-á, entretanto, chegar somente a n relações e igualar somente n dos coeficientes a grandezas

*NT. - Deve-se pensar num sistema com simetria radial. Weyl introduz o nome de "Zentralkoordinatem".

dadas. Os $n(n-1)/2$ coeficientes restantes ficam então completamente determinados pela própria natureza da variedade a ser representada, e assim a determinação de suas relações métricas exige $n(n-1)/2$ funções de posição. Assim, as variedades para as quais o elemento linear pode ser reduzido à forma $\sqrt{\Sigma(dx)^2}$, como o plano e o espaço, constituem um caso particular das variedades que estudamos aqui; elas merecem talvez um nome especial e eu portanto nomearei com precisão aquelas variedades nas quais o quadrado do elemento linear equivale à soma dos quadrados das diferenciais independentes; eu as chamarei de variedades planas. Para poder agora passar em revista as diferenças essenciais de todas as variedades suscetíveis de serem representadas na forma suposta, é necessário eliminar as diferenças que provêm do modo de representação, o que será alcançado pela seleção das grandezas variáveis segundo um determinado princípio.

§2. Para esta finalidade, imagina-se que, a partir dum ponto dado, constrói-se um sistema formado pelas linhas de mais curta distância* que passam pelo ponto; depois, a posição de um ponto indeterminado poderá ser determinada pela direção inicial da geodésica sobre a qual ele se encontra e pela sua distância, sobre a mesma, do ponto inicial; portanto, pode ser expressa por meio das razões dx^0 das quantidades dx sobre essa geodésica, e por meio do comprimento s dessa linha. Introduz-se agora, ao invés de dx^0, as expressões lineares $d\alpha$ formadas por essas grandezas, e tais que o valor inicial do quadrado do elemento linear seja igual à soma dos quadrados dessas expressões, de tal forma que as variáveis independentes sejam a grandeza s e

*NT. - Linhas de mais curta distância = geodésicas. No original "kürzesten Linien".

as razões das quantidades $d\alpha$; e substituímos finalmente os $d\alpha$ por grandezas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que lhes sejam proporcionais, e cuja soma dos quadrados seja igual a s^2. Ao se introduzir estas grandezas, o quadrado do elemento linear para valores infinitamente pequenos de x será igual a $\Sigma\, dx^2$; o termo de ordem seguinte nesse quadrado será igual a uma função homogênea de segundo grau das $n(n-1)/2$ grandezas $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1), (x_1 dx_3 - x_3 dx_1), \ldots$, portanto um infinitésimo de quarta ordem; de tal modo que obtemos uma grandeza finita dividindo esse termo pelo quadrado do triângulo infinitamente pequeno* cujos vértices correspondem aos sistemas de valores $(0,0,\ldots)$, $(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, $(dx_1,dx_2,dx_3,\ldots)$ das variáveis. Esta grandeza conserva o mesmo valor enquanto as grandezas x e dx estiverem contidas nas mesmas formas lineares binárias, ou enquanto as duas geodésicas, desde o valor 0 até os valores x e desde o valor 0 até os valores dx, permanecerem no mesmo elemento superficial. A grandeza acima só depende da posição e da orientação do elemento superficial. Esse termo evidentemente será igual a 0 quando a variedade representada é plana, isto é, quando o quadrado do elemento linear é redutível a $\Sigma\, dx^2$, e ele pode, conseqüentemente, ser considerado como a medida de quanto a variedade se afasta da planaridade** nesse ponto e nessa direção superficial. Multiplicando-o por $-\frac{3}{4}$, ele se torna igual à quantidade que Gauss chamou de medida da curvatura*** duma superfície. Para determinar as relações métricas duma variedade n-dimensional, suscetível duma representação suposta acima, viu-se que são necessárias $n(n-1)/2$ funções de posi-

*NT. - "Das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks" deve ser entendido como o "quadrado da área do triângulo infinitésimo".

**NT. - Ebenheit = planaridade. Segue o original.

***NT. - Hoje em dia usa-se mais comumente apenas o termo <u>curvatura</u>. Ver Cartan ref. (16), Chap. VII.

ção; se então são dadas, em cada ponto, as medidas da curvatura segundo $n(n-1)/2$ direções superficiais, pode-se determinar por seu intermédio as relações métricas da variedade, desde que entre esses valores não existam identidades, relações essas que efetivamente não existem de modo geral. As relações métricas das variedades nas quais o elemento linear é representado pela raiz quadrada duma expressão diferencial do segundo grau podem assim se exprimir duma maneira totalmente independente da escolha das grandezas variáveis. Um caminho muito semelhante para este mesmo fim se deixa trilhar também quando se trata de variedades nas quais o elemento linear é representado por uma expressão menos simples, por exemplo pela raiz quarta de uma expressão diferencial do quarto grau. Assim, para falar de um modo geral, o elemento linear não se deixaria mais reduzir à forma da raiz quadrada de uma soma de quadrados de expressões diferenciais e, por conseguinte - na expressão do quadrado do elemento linear - o afastamento da planaridade seria um infinitésimo de segunda ordem enquanto que, nas variedades consideradas precedentemente, esse afastamento seria um infinitésimo de quarta ordem. Essa propriedade dessas últimas variedades pode ser denominada talvez de planaridade nas partes infinitesimais. Mas a propriedade mais importante dessas variedades para o presente objetivo e, talvez a única que motivou seu estudo até aqui é, entretanto, esta: ela consiste no fato de as relações métricas das variedades de duas dimensões poderem ser representadas geometricamente pelas das superfícies e das relações métricas das variedades de um número maior de dimensões poderem se reduzir àquelas das superfícies contidas nelas. Isso carece ainda duma breve explicação.

§3. No modo de conceber as superfícies, imiscui-se sempre, ao lado das relações métricas intrínsecas, para as quais só

temos que considerar os comprimentos dos caminhos traçados sobre essas superfícies, a idéia da posição de pontos situados fora da superfície. Pode-se, entretanto, fazer abstração das relações métricas externas na medida em que se faz com que essas superfícies sofram variações tais que os comprimentos das linhas situadas sobre elas permaneçam invariáveis, isto é, quando se supõe as linhas flexíveis sem extensão, e se considera ao mesmo tempo como sendo de mesma espécie as superfícies assim obtidas. Assim, por exemplo, superfícies cilíndricas ou cônicas quaisquer serão vistas como equivalentes a um plano, porque elas podem ser vistas como formadas pela simples curvatura do plano, suas relações métricas intrínsecas permanecendo inalteradas e todas proposições concernentes a essas relações métricas como continuando a subsistir. Portanto toda planimetria é mantida. Por outro lado, elas são essencialmente não equivalentes à esfera, que não pode se transformar num plano sem sofrer extensão. Segundo a investigação precedente, as relações métricas intrínsecas duma grandeza bi-dimensional, para a qual o elemento linear se escreve como a raiz quadrada duma expressão diferencial de segunda ordem, o que acontece com as superfícies, são caracterizadas em cada ponto por uma medida da curvatura. Agora, em se tratando de superfícies, o significado evidente desta medida de curvatura se oferece: que ela é, neste ponto, o produto das duas curvaturas da superfície, ou ainda, que o produto das duas curvaturas por um triângulo infinitésimo formado pelas geodésicas é igual à metade do excesso da soma dos ângulos desse triângulo, medidas essas efetuadas sobre os raios*. A primeira definição suporia o postulado de que o

*NT. - Uma forma alternativa mais compreensível dessa afirmação seria "a curvatura é, nesse ponto, o produto das duas curvaturas da superfície ou, multiplicada pela área de um pequeno triângulo geodésico, ela é igual ao excesso esférico do mesmo". Um comentário mais amplo desse ponto é oferecido na parte das notas explicativas.

produto de dois raios de curvatura permanece inalterado com a simples flexão duma superfície, enquanto que na segunda, a suposição é de que no mesmo lugar, o excesso da soma dos ângulos dum triângulo infinitésimo é proporcional à área do triângulo*. Para dar um significado mais concreto à medida de curvatura duma variedade de n dimensões num dado ponto e, segundo uma direção superficial dada, que passa por esse ponto, tem-se que partir deste raciocínio: uma geodésica, partindo dum ponto, fica completamente determinada quando se fornece sua direção inicial. Deste modo, obter-se-á uma superfície determinada se forem prolongadas as direções iniciais que saem conjuntamente dum ponto dado e situadas sobre o elemento superficial dado, e esta superfície terá, no ponto dado, uma medida de curvatura determinada, que é ao mesmo tempo a medida de curvatura da variedade de n dimensões no ponto dado e segundo a direção superficial dada.

§4. Agora, antes que a aplicação ao espaço seja feita, algumas considerações sobre as variedades planas em geral são necessárias, isto é, sobre aquelas variedades nas quais o quadrado do elemento linear é representável por uma soma de quadrados das diferenciais completas.

Numa variedade plana de n dimensões, a medida da curvatura é nula em qualquer ponto e em qualquer direção; entretanto, de acordo com a discussão anterior, para determinar as relações métricas é suficiente saber que elas são nulas em qualquer ponto segundo $n(n-1)/2$ direções superficiais para as quais as medidas de curvatura são independentes umas das outras. As variedades para as quais a medida de curvatura é igual a 0 em to-

*NT. - Em trigonometria esférica, a soma dos ângulos de um triângulo excede dois ângulos retos.

dos os pontos, podem ser consideradas como um caso particular das variedades cuja medida de curvatura é constante para todos os pontos. A característica comum dessas variedades com medida de curvatura constante também pode ser expressa assim: as figuras nelas contidas se movimentam sem sofrer extensões (dilatações). Pois é evidente que as figuras não poderiam se mover nessas variedades, com translações e rotações arbitrárias, se a medida de curvatura não fosse a mesma em cada ponto e em todas as direções. Mas, por outro lado, as relações métricas da variedade são completamente determinadas pela medida de curvatura; então as relações métricas a partir de um ponto e em todas as direções são exatamente as mesmas que a partir de um outro ponto e, por conseguinte, pode-se, partindo desse ponto, executar as mesmas construções, donde se segue que nas variedades para as quais a medida de curvatura é constante, pode-se dar às figuras uma posição arbitrária qualquer. As relações métricas dessas variedades dependem somente do valor da medida de curvatura e, quanto à representação analítica, nota-se que ao designar-se esse valor por α pode-se dar à expressão do elemento linear a forma

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma\, dx^2} \quad .$$

§5. A consideração das superfícies com medida de curvatura constante pode servir para esclarecer os estudos precedentes por meio dum exemplo geométrico. É fácil de ver que as superfícies cuja medida de curvatura é constante e positiva podem sempre se aplicar sobre uma esfera cujo raio é igual à unidade dividida pela raiz quadrada da medida de curvatura; mas, para poder visualisar a variedade completa dessas superfícies, dá-se a uma das superfícies a forma de uma esfera e às outras a forma de superfícies de revolução tocando a esfera segundo o equador. As superfícies de medida de curvatura maior que a da esfera tocariam então a esfera interiormente, e assumiriam uma forma semelhante à parte exterior duma superfície anular, a mais afastada possível do eixo dessa superfície. Elas podem ser aplicadas sobre zonas de esferas tendo raios menores, mas recobririam essas zonas mais que uma vez. As superfícies com medidas de curvatura menores são obtidas a partir de esferas com raios maiores, cortando um fuso delimitado por dois grandes semi-círculos e unindo entre elas as secantes. A superfície de medida de curvatura nula seria uma superfície cilíndrica tendo por base o equador; as superfícies de medida de curvatura negativas tocariam esse cilindro exteriormente, e teriam uma forma semelhante à da parte interior duma superfície anular, dirigida para o eixo. Concebendo-se estas superfícies como o lugar onde pode se mover um segmento superficial, da mesma maneira como o espaço é o lugar onde se movem os corpos, o segmento superficial se moverá sem se estender sobre todas essas superfícies. As superfícies com medida de curvatura positiva poderão sempre receber uma forma tal que os segmentos superficiais possam, além do mais, se mover sobre elas sem flexão, e essa forma será a de uma esfera; mas isso não ocorre mais no caso de superfícies com medida de curvatura negativa. Além dessa propriedade dos segmentos superficiais serem independentes da posição, a superfície com medida de curvatura nula possui ainda a propriedade da direção ser independente da posição, propriedade que não existe mais para as outras superfícies.

III. APLICAÇÕES AO ESPAÇO

§1. Após estes estudos sobre a determinação das relações métricas duma grandeza de n dimensões, pode-se agora indicar as condições suficientes e necessárias para a determinação das relações métricas do espaço, quando se admite como hipótese que as linhas são independentes da posição, e que o elemento linear é exprimível como a raiz quadrada duma expressão diferencial de segundo grau, isto é, que o espaço é uma grandeza plana nas suas partes infinitesimais.

Primeiramente, estas condições podem ser expressas de tal modo que a medida de curvatura seja igual a 0 em qualquer ponto nas três direções de superfície e, por conseguinte, as relações métricas do espaço fiquem determinadas se a soma dos ângulos de um triângulo for, em qualquer lugar, igual a dois ângulos retos.

Mas supondo-se, em segundo lugar, como Euclides, uma existência independente da posição, não somente para as linhas, mas ainda para os corpos, segue-se daí que a medida de curvatura é constante para todos os pontos e então, a soma dos ângulos fica determinada para todos os triângulos, quando ela é determinada para um deles.

Finalmente, em terceiro lugar, poder-se-ia, ao invés de admitir o comprimento das linhas como independente da posição e da direção, pressupor também uma independência do seu comprimento e da sua direção em relação à posição. Segundo esta concepção, as variações ou as diferenças de lugar seriam grandezas complexas, exprimíveis por intermédio de três unidades independentes.

§2. No decorrer das considerações apresentadas, foram primeiramente distingüidas as relações de extensão ou partição e as relações de medida e encontrou-se que, para mesmas relações de extensão, podia-se conceber diferentes relações métricas; foram, em seguida, procurados os sistemas simples de fixações métricas, por meio dos quais as relações métricas do espaço são completamente determinadas e então, todas as proposições referentes a essas relações decorrem como conseqüências necessárias. Agora resta debater como, em que grau e até onde essas hipóteses são confirmadas pela experiência. Com respeito a isso, existe entre as relações simples de extensão e as relações métricas uma diferença essencial: nas primeiras, onde os casos possíveis formam uma variedade discreta, os resultados da experiência não são, em verdade, jamais completamente certos mas também não são inexatos; enquanto que nas segundas, onde os casos possíveis formam uma variedade contínua, toda determinação da experiência permanece sempre inexata, por maior que possa ser a probabilidade de sua exatidão aproximada. Esta circunstância será importante quando se tentar estender as determinações empíricas além dos limites da observação tanto para o infinitamente grande quanto para o infinitamente pequeno; pois as relações métricas, para estas últimas, podem evidentemente tornar-se mais e mais inexatas, o que não acontece para as primeiras.

Na extensão das construções do espaço ao infinitamente grande, é necessário distinguir ilimitação e infinitude; o primeiro pertence às relações de extensão, o segundo às relações métricas. Que o espaço seja uma variedade ilimitada de três dimensões, é uma hipótese que é empregada em toda concepção do mundo exterior, segundo a qual o domínio das percepções reais se completa a cada instante e as possíveis posições de um objeto procurado são construídos e que se vê constantemente confirmada por essas aplicações. A propriedade do espaço ser ilimitado possui uma certeza empírica maior do que qualquer experiência exterior. Mas daqui não resulta absolutamente que o espaço seja infinito; ao contrário; supondo-se a independência dos corpos com a posição (e portanto se é atribuída ao espaço uma medida de curvatura constante), o espaço seria necessariamente finito, ainda que essa medida de curvatura tivesse um valor positivo muito pequeno. Ao prolongar-se todas as geodésicas que partem dum dado elemento de superfície, obtém-se uma superfície ilimitada de curvatura constante, isto é, uma superfície que numa variedade plana de três dimensões assumiria a forma de uma esfera, sendo conseqüentemente finita.

§3. As questões sobre o infinitamente grande são inúteis para a explicação da natureza. Mas tudo se passa diferentemente com as questões sobre o infinitamente pequeno. É sobre a exatidão com a qual nós seguimos os fenômenos no infinitamente pequeno que repousa essencialmente nosso conhecimento sobre suas relações causais. Os progressos dos últimos séculos no conhecimento da mecânica dependem quase que somente da exatidão da construção que se tornou possível graças à invenção do cálculo infinitesimal e aos princípios simples descobertos por Arquimedes, por Galilei e por Newton, dos quais se serve a física moderna. Mas nas ciências naturais, onde ainda faltam princípios simples para tais construções, para se conhecer o nexo causal, os fenômenos que ocorrem no microcosmos são seguidos tão rigorosamente quanto permite o microscópio. As questões sobre as relações métricas no infinitamente pequeno não são então questões supérfluas.

Se supomos que os corpos existem independentemente das posições, a curvatura será constante em todos os pontos e, a par tir dos resultados de observações astronômicas, a medida de curvatura não pode ser diferente de zero; ou, de qualquer maneira, o recíproco da curvatura seria uma área que, comparada com ela, o alcance de nossos telescópios seria desprezível. Mas se essa independência dos corpos com a posição não existe, não podemos tirar conclusões partindo de relações métricas do grande, e indo para relações métricas do infinitamente pequeno; neste caso a medida de curvatura em cada ponto pode ter um valor arbitrário em três direções, desde que a medida de curvatura total de cada porção mensurável do espaço não difira sensivelmente de zero. Ainda relações mais complicadas podem existir se supusermos que o elemento linear seja exprimível como a raiz quadrada de uma diferencial quádrica. Neste caso parece que as noções empíricas sobre as quais as determinações métricas do espaço são fundadas, ou seja, a noção de um corpo sólido e de um raio de luz, cessam de serem válidas para o infinitamente pequeno. É, portanto, lícito supor que as relações métricas do espaço no infinitamente pequeno não estão de acordo com as hipóteses da geometria, e é o que seria necessário efetivamente admitir, se desse modo se pudesse obter uma explicação mais simples dos fenômenos.

A questão da validez das hipóteses da geometria no infinitamente pequeno está ligada à questão dos fundamentos das relações métricas do espaço. Neste último problema, que podemos ainda encarar como pertencendo à doutrina do espaço, encontramos uma aplicação da ressalva precedente que, numa variedade discreta, o princípio das relações métricas já está contido no conceito dessa variedade, enquanto que, numa variedade contínua, esse princípio deve vir de fora. É preciso então, ou que a realidade sobre a qual está fundamentado o espaço forme uma variedade discreta, ou que o fundamento das relações métricas seja procurado

fora da variedade, nas forças de ligação que agem sobre ela.

As respostas a essas questões somente podem ser obtidas partindo do modo de conceber os fenômenos, concepção essa justificada pela experiência e que Newton tomou por base, efetuando sobre essa concepção modificações sucessivas exigidas pelos fatos que ela não podia explicar. Pesquisas que partem de noções gerais, como as que foram realizadas aqui, podem servir somente para isto: impedir que um trabalho como este não seja entravado por visões muito estreitas, e que o progresso no conhecimento da dependência mútua das coisas não encontre um obstáculo nos preconceitos tradicionais.

Isto nos conduz ao domínio de outra ciência, ao domínio da física, dentro da qual o objeto do presente trabalho não permite que entremos hoje.

SUMÁRIO

PLANO DE PESQUISA

I) CONCEITO DE UMA GRANDEZA n-DIMENSIONAL

§1. Variedades contínuas e discretas. As partes determinadas duma variedade são chamadas de quanta. Divisão da teoria das grandezas contínuas nas teorias:

(1) Teoria das simples relações de extensão, na qual não há a suposição de que as grandezas sejam independentes das posições;

(2) Teoria das relações métricas, na qual essa independência deve ser suposta.

§2. Geração do conceito duma variedade de uma, de duas, ..., de n dimensões.

§3. Redução da determinação de posição, numa dada variedade, a determinações de quantidades. Caráter essencial duma variedade de n dimensões.

II) RELAÇÕES MÉTRICAS DAS QUAIS UMA VARIEDADE n-DIMENSIONAL É SUSCETÍVEL, COM A HIPÓTESE DE QUE AS LINHAS POSSUEM UM COMPRIMENTO INDEPENDENTE DA POSIÇÃO E, POR CONSEGUINTE, TODA LINHA É MENSURÁVEL POR INTERMÉDIO DE OUTRA LINHA

§1. Expressão para o elemento linear. Considera-se como planas as variedades nas quais o elemento linear é exprimível como a raiz quadrada duma soma de quadrados de diferenciais completas.

§2. Estudo das variedades de n dimensões, nas quais o elemento linear pode ser representado pela raiz quadrada duma expressão

diferencial do segundo grau. Medida do afastamento da planaridade (medida de curvatura) num ponto dado e segundo uma direção superficial dada. Para a determinação de suas relações métricas, sob certas restrições, é necessário e suficiente que se de dê arbitrariamente em cada ponto a medida de curvatura segundo $n(n-1)/2$ direções superficiais.

§3. Explicação geométrica.

§4. As variedades planas (nas quais a medida de curvatura é nula em todos os pontos) podem ser consideradas como um caso particular das variedades cuja medida de curvatura é constante. Estas podem ainda ser definidas pela propriedade de que as grandezas de n dimensões nelas contidas são independentes das posições (mobilidade dessas grandezas sem dilatação).

§5. Superfícies de medida de curvatura constante.

III) APLICAÇÃO AO ESPAÇO

§1. Sistemas de fatos suficientes para a determinação das relações métricas do espaço, tais como supostos pela geometria.

§2. Até que ponto é provável a legitimidade dessas determinações empíricas, quando se sai dos limites da observação para entrar no infinitamente grande?

§3. Até que ponto essa legitimidade é provável para o infinitamente pequeno? Conexão dessa questão com a interpretação dos fenômenos naturais.*

*OBSERVAÇÃO DO PRÓPRIO RIEMANN - "O §3 do Capítulo III deve ser remanejado e reescrito."

COMENTÁRIOS

NORMANDO CELSO FERNANDES

Sem dúvida, o nosso século tem testemunhado o surgimento de algumas teorias que, dentro do domínio da Física interpretada como ciência da natureza, representam verdadeiras revoluções epistemológicas. Assim, na virada do século, Planck[1] lançava as bases da Teoria Quântica, cuja universalidade parece inquestionável. Pouco após, Einstein[2] estremecia os alicerces da dominadora mecânica de Newton com o lançamento da Teoria da Relatividade Restrita. Onze anos depois, o próprio Einstein[3] incorporava, num formalismo extremamente avançado para a época, a gravitação numa teoria geométrica do espaço-tempo demoninada Teoria da Relatividade Generalizada (Teoria da Gravitação). Esta teoria, considerada por alguns autores como uma das mais perfeitas obras do espírito humano, lançava a idéia audaciosa da possibilidade da geometrização completa das teorias físicas. A tentação oferecida pela possibilidade da fusão Física-Geometria começou a tomar conta dos espíritos dos mais importantes cientistas, mesmo estando estes ocupados com problemas onde a gravitação não comparecia[4]. Mas teria Einstein extraído do nada o germe explosivo das novas concepções? Provavelmente não. A visão geométrica einsteiniana teve suas origens nas considerações de outro gênio – B. Riemann. É sobre o trabalho fundamental do grande geômetra alemão do século passado que iremos tecer algumas considerações. As nossas observações devem ser tomadas mais como as opiniões de um estudioso de alguns aspectos da obra de Riemann do que como a análise profunda de um especialista. Nós não teríamos a pretensão de exaurir numa seqüência de alguns comentários

a potencialidade do raciocínio riemanniano por acharmos que a riqueza do conjunto de idéias exposto por Riemann estravasa de muito a teoria da Relatividade Generalizada e deve ainda, no futuro, servir de base a novas concepções do universo. Mesmo as modernas teorias de campos e partículas elementares baseadas tanto em modelos do tipo Yang-Mills como de outros "gauges" encontram embasamento em raciocínios riemannianos. Aqui, um chamamento é muito importante. Nas nossas afirmações não são dirigidas críticas a Einstein. Apenas achamos que a ênfase einsteiniana se centra na Teoria da Gravitação e também na sua possível unificação com o eletromagnetismo de Maxwell. Isso, por si só, já representa uma conquista insuperável. As teorias de Einstein evidentemente não poderiam ser perfeitas apesar de constituirem um esforço sublime tanto no sentido da elevação das idéias quanto no sentido do esclarecimento dos postulados fundamentais.

Entrando na parte de comentários sobre a obra de Riemann propriamente dita, é natural que se procure uma linha de raciocínio coerente para a abordagem dos mais diferentes aspectos geométricos sugeridos pelo eminente matemático. Não pretendendo repetir a profunda análise desenvolvida por Weyl[5], a quem remetemos o leitor, onde todas as implicações analíticas são esmiuçadas e completadas, preferimos seguir uma linha conceitual, procurando nos escorar, quando possível, na seqüência histórica. Não sabemos se iremos ser bem sucedidos, dadas a amplidão dos temas e a complexidade das idéias envolvidas, motivo pelo qual, parodiando o próprio Riemann, solicitamos a indulgência do leitor. Na impossibilidade de esgotar completamente, mesmo alguns tópicos específicos do trabalho, preferimos que estes fiquem como temas de pesquisas e aprofundamentos ulteriores.

No final do século passado vários livros e monografias foram escritos, tanto no sentido de rever o trabalho de Riemann, como no de completá-lo. A nosso ver, um livro que sintetiza vários aspectos com bastante profundidade é o clássico de G. Veronese[6]. Esse livro será tomado como ponto de partida para os nossos comentários. Na página VIII da sua introdução, Veronese afirma:

"As ciências formais são para nós exatas, as experimentais são mais exatas quanto mais simples e intuitivos são os axiomas propriamente ditos, sobre os quais elas se apoiam, e quanto mais rapidamente esses axiomas podem substituir seus objetos mediante formas abstratas e podem se desenvolver com o método dedutivo. A ciência experimental mais exata é a geometria, pois os objetos exteriores ao pensamento, que servem para a determinação dos axiomas, vêm substituídos na nossa mente por formas abstratas e então as verdades dos objetos se demonstram por meio da combinação das formas já obtidas independentemente do que vem de fora".

Colocada da maneira como colocamos, parece que essa citação, que resume bem o espírito da época, ou é uma opinião pessoal desse autor ou tem alguma ligação direta com Riemann. Para nós, nenhuma das alternativas reflete toda a verdade. Ela encarna apenas a ambiência reinante ao final do século passado, que envolvia o espírito da geometria do espaço. Na verdade, a origem empírica da geometria espacial que já era reconhecida por Gauss[7] e por Grassmann[8], talvez tenha sido discutida pela primeira vez por Lobatchevsky[9]. No entanto, pode-se dizer que foi a experiência que forneceu aos geômetras da antigüidade um certo número de noções primitivas, de axiomas ou de postulados fundamentais

que foram tomados por eles como base da ciência geométrica. A superabundância dessas noções e conceitos foi reduzida ao mínimo por Euclides nos seus Elementos. Mas, apesar do sentimento universal acerca dos Elementos, uma idéia devia fatalmente surgir um dia: o que poderia acontecer se um dos postulados de Euclides não fosse rigorosamente válido ou se pudesse ser substituído por um mais geral? Por volta de 1813 vários geômetras, quase que simultaneamente tiveram essa intuição e, atacando mais de perto o postulado V de Euclides (o das paralelas), chegaram a conceber uma doutrina que pode ser chamada de anti-euclidiana, ou de geometria astral e finalmente de não-euclidiana[10]. Mesmo antes da data citada, inúmeras tentativas tinham sido feitas, no sentido de, ou negar o postulado ou chegar a prová-lo como conseqüência dos outros postulados. O próprio Gauss, a partir de 1792 ocupou-se desse problema chegando à convicção de que o célebre postulado não estava contido na noção clássica de linha reta e que, abandonando-o, podia-se estabelecer uma geometria mais geral que a de Euclides e ainda perfeitamente rigorosa. A partir de 1813 Gauss parecia perder toda a hesitação e começava a conceber um projeto de exposição da nova geometria. No entanto, talvez por temer a incompreensão, Gauss nada publica.

De 1815 em diante, começam a surgir resultados sobre a nova geometria, independentes do postulado V. Na Universidade de Kazan, Rússia, Nicolas Lobatchevsky e em Temesvár, Hungria, Jean Bolyai, independentemente, apresentam conclusões importantes. J. Bolyai, numa carta a seu pai, Wolfgang Bolyai (que fora seu primeiro mestre) anuncia que "havia descoberto coisas maravilhosas e que as havia tirado do nada". Os seus resultados constituíram um único trabalho que acabou sendo publicado como um apêndice a um tratado escrito pelo pai. Depois disso (1832), J.

Bolyai segue a carreira militar e abandona as pesquisas geométricas.

Por outro lado, Lobatchevsky, com perseverança e fibra incomuns, continua seu trabalho incessante. Abandonado sozinho na luta, não se deixa esmorecer e continua a defender a nova teoria. Durante um quarto de século seus trabalhos vão aparecendo. Realmente um mundo novo aparecia, onde a soma dos ângulos de um triângulo, em oposição a Euclides, podia ser menor do que dois ângulos retos. Essa soma também podia variar. Esses resultados abriam uma nova visão e davam lugar à pergunta: qual das duas geometrias, a de Euclides ou a nova é verificada experimentalmente no espaço físico? Surgia assim a noção de uma geometria física. Lobatchevsky tentava encontrar um embasamento físico de suas hipóteses, olhando para medidas astronômicas. Os resultados não foram animadores. Mas nem por isso a importância epistemológica da postura científica dos fundadores das geometrias não-euclidianas deixa de ser fundamental. A atitude decisivamente empirista em face à geometria, atitude essa que se confrontava com o posicionamento kantiano, abria uma nova visão científica, perfeitamente de acordo com a citação acima de Veronese.

Neste ponto, sem querer entrar numa polêmica filosófica, o que nos afastaria muito das finalidades deste panfleto, somente citamos alguns posicionamentos de alguns pensadores e deixamos ao leitor a tarefa de tirar conclusões. Alguns autores(11) situam os fundadores da nova geometria entre os filósofos positivistas. Outros(9), atribuem uma posição totalmente materialista a Lobatchevsky. Essa, a nosso ver, é uma questão profunda cuja resposta apresenta implicações gnoseológicas bastante grandes. Se por um lado, no começo do século XIX o positivismo avançava bastante suas fronteiras, convém notar que a obra básica de Comte só surgia em 1840(12), enquanto que, por outro lado, na mesma época, cristalizavam-se os fundamentos do materialismo dialético(13). Essa análise deve ser completada por especialistas. Nós, adotando talvez uma atitude conciliatória entre os dois posicionamentos e não querendo fugir do tema central a que nos propusemos, preferimos ver Lobatchevsky como um quebrador de preconceitos. Aqui uma ressalva é fundamental. Kant, como todo gênio, se por um lado, na Crítica da Razão Pura sustenta a validez absoluta de todos os postulados de Euclides, por outro lado, depois(14) parecia não ser contrário à idéia da existência de várias geometrias.

Como uma observação final desta parte dos comentários, vamos mencionar a crítica ao chamado postulado do plano de Euclides: "uma reta que tem dois pontos comuns com um plano, pertence a esse plano". O próprio Gauss reconhecia uma imperfeição nesse enunciado pois ele contém a definição do plano completo. Essa definição contém mais do que o necessário para a definição de uma superfície. Ela envolve tacitamente um teorema que deve ser demonstrado. A demonstração dessa proposição, dentro do esquema euclidiano, requer a introdução de um espaço com mais de três dimensões, o qual podemos construir sem, no entanto, dele fazer uma observação direta. Situações como essa que, mesmo dentro da geometria elementar, exibiam a falta de uma maior base científica para a geometria, levaram Grassmann(8) a afirmar: "Quando um axioma pode ser omitido sem a introdução dum novo, isso deve ser feito ainda que às custas duma transformação completa da ciência, pois com uma tal omissão a ciência, na sua essência, ganha em simplicidade".

RIEMANN

Sentindo a nebulosidade que envolvia os fundamentos da geometria, nos quais a noção de espaço, as primeiras proposições, as construções mais simples, eram consideradas como dados a priori, sem questionar a eventual independência e a compatibilidade dos axiomas, Riemann impõe à Geometria uma visão nova, original e profunda.

Cumpre ressaltar que Riemann é o primeiro geômetra que, analisando profundamente as bases da geometria, rompe os vínculos com a geometria de Euclides. Para isso ele parte, desde o início, de noções analíticas e de propriedades diferenciais do espaço.

Como já no começo Riemann chama a atenção para a conceituação de variedade (Mannigfaltigkeit) vamos tentar aqui expor um pouco da teoria desses entes(15). A noção geral de variedade é bastante difícil de ser definida com precisão(16). Uma superfície fornece a idéia duma variedade bi-dimensional. Se tomamos, por exemplo, a superfície de uma esfera ou de um toro, podemos decompor essa superfície num número finito de partes de tal modo que exista uma representação biunívoca de cada uma dessas partes sobre uma região simplesmente conexa do plano euclidiano. Seguindo Cartan(16) podemos precisar ainda mais essa noção, chamando de P_0 um ponto qualquer da variedade, definindo nas vizinhanças de P_0 um sistema de coordenadas (u,v) tal que: se (u_0,v_0) são as coordenadas de P_0, existe um número positivo r que satisfaz a seguinte propriedade. Todo sistema de números (u,v) satisfazendo à desigualdade

$$(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 < r^2$$

constitui um sistema de coordenadas de um ponto e de um só ponto vizinho de P_0 sobre a variedade. A recíproca deve ser válida: numa vizinhança suficientemente pequena de P_0, todo ponto P tem coordenadas que satisfazem essa desigualdade.

As superfícies da esfera e do toro são variedades bi-dimensionais sem fronteira. Um cilindro de revolução, um parabolóide hiperbólico são variedades bi-dimensionais abertas (com fronteira no infinito). Uma folha de um cone de revolução, excluindo-se o vértice, constitui uma variedade com uma fronteira no infinito e uma fronteira à distância finita (o vértice). O volume interior a uma esfera constitui uma variedade aberta tri-dimensional, a fronteira sendo a superfície esférica. Se tomamos esse volume e a ele adicionamos a superfície esférica, temos uma variedade tri-dimensional fechada.

Em geometria diferencial, uma região de superfície é simplesmente uma multiplicidade ∞^2, em correspondência biunívoca contínua com os pares de números (u,v) de um certo campo. Pode-se mesmo dizer que a própria superfície é constituída por esses ∞^2 pares de números para os quais vale a fórmula para o elemento linear $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + C\,dv^2$ que define a distância ds entre dois elementos infinitamente vizinhos(17). Dessa expressão se calcula o comprimento de um arco finito por meio da integração. Nessa multiplicidade ∞^2, variando a expressão do elemento linear ds, isto é, variando as funções E, F e G de (u,v), vamos ter uma variação da determinação métrica (Massbestimmung) ou, brevemente, da métrica. Esse procedimento pode ser repetido para grupos de 3, 4, n números, levando a multiplicidades $\infty^3, \infty^4, \ldots, \infty^n$ e temos, portanto, espaços de 3, 4, ..., n dimensões, esses também podendo apresentar infinitas métricas.

Pode-se igualar o elemento linear à raiz quadrada duma forma diferencial das n variáveis ou a uma expressão conveniente de outra forma. Essas possibilidades Riemann também deixa em aberto. A métrica euclidiana do espaço ordinário é somente uma dentre essas infinitas possibilidades, no caso tri-dimensional. Ela é a mais simples, mas a certeza que nós lhe atribuímos, ainda que seja difícil decidir por outra nos limites dos nossos campos de observação, só pode ter um caráter empírico. Aqui já se vê o quão fundamental é a posição filosófica de Riemann, ao se apoiar no comportamento infinitesimal para a definição de entes matemáticos.

Então, já na introdução Riemann admite a possibilidade de infinitas geometrias: a geometria do nosso espaço tri-dimensional usual deve ser distingüida das outras geometrias das infinitas variedades tri-dimensionais somente por meio de dados experimentais.

Antes de prosseguirmos a análise sobre outros aspectos do trabalho de Riemann, gostaríamos de nos deter um pouco neste ponto. Dentro do espírito riemanniano, o número n de dimensões fica em aberto. Uma variedade genérica 4-dimensional também seria passível das mesmas considerações. Pois são justamente essas variedades que constituem o substratum das teorias relativísticas. É claro que a distinção do espaço físico 4-dimensional das demais variedades 4-dimensionais não pode ser feita por métodos diretos de observação. No caso de 2 ou 3 dimensões, mesmo Lobatchevsky em outro contexto, tentou encontrar justificativas baseadas em dados astronômicos para sua geometria. Em 1911 Einstein teve a grande idéia de associar a geometria do espaço-tempo quadri-dimensional com a matéria. As leis e axiomas que surgiam dessa as-

sociação é que iriam permitir que a escolha da métrica fosse a melhor possível. A determinação empírica entrava via gravitação e seus efeitos. Isso sem falar na determinação anterior contida nas equações de Maxwell e na relatividade restrita. Mas como nesse caso a geometria é plana, a presença das idéias de Riemann não aparece tão nitidamente. Convém lembrar que, quando para os físicos, mesmo o número 4 de dimensões se mostrou insuficiente, foram por eles consideradas variedades com 5 ou mais dimensões. Como exemplo, temos o modelo de Einstein-Kaluza-Klein que nos dias de hoje está reaparecendo, fantasiado de um modo ou de outro, mas com bastante vigor. Sobre este e outros aspectos iremos retornar mais tarde, inclusive sobre a nota de rodapé colocada pelo próprio Riemann no seu sumário, quando diz que aquele parágrafo do Capítulo III deve ser reescrito e rearranjado. O que será que ele tinha em mente?

Mas voltemos ao que diz Veronese no apêndice histórico do seu livro. Se o leitor estranhar nossa insistência em citar Veronese, vale a pena esclarecer que esse geômetra, além da autoridade de que desfrutava na época, era autor de um sistema geométrico próprio com várias unidades de medida e no livro citado apresenta o estudo completo de uma variedade 4-dimensional dentro da chamada geometria geral.

Ele critica Riemann por algumas obscuridades e indeterminações, chegando mesmo a afirmar que Riemann deveria transformar radicalmente os primeiros parágrafos por inteiro.

Em primeiro lugar, é criticada a definição obscura de grandeza oferecida por Riemann. De fato Riemann diz "Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Grössen" (superposição das grandezas a serem comparadas) e também que a medida requer "ein Mittel die eine

Grösse als Massstab auf die andere fortzutragen" (um modo de usar uma grandeza como um padrão para a outra). Veronese clama então pelo fato de Riemann, sem dar nenhuma explicação, adotar o conceito de movimento de corpos rígidos em variedades puramente abstratas.

Em seguida, diz Veronese, "ele parte das idéias de continuidade e do discreto sem definí-las (I, §1), mas admite tacitamente depois como conhecidos tanto o contínuo numérico como a continuidade das funções em geral (II, §2)". Aqui, sem deixarmos de dar razão a Veronese, preferimos atribuir à genialidade intuitiva de Riemann o enunciado dessas noções. Genialidade também manifesta quando ele supõe a variedade unidimensional (einfache ausgedehnte Mannigfaltigkeit) como sendo distingüida pelo fato de que partindo de um elemento (ponto) é possível um avanço (Fortgang) contínuo segundo dois sentidos (Seiten), para a frente e para trás. Ele nem definia o que queria dizer com <u>sentido</u>, nem com <u>para a frente</u> (vowärts), nem com <u>para trás</u> (rückwärts) numa tal variedade. Essas definições, bem como a prova de que toda variedade unidimensional é <u>orientável</u>, só vieram a aparecer bem depois de sua morte, graças aos trabalhos de Hausdorff, Dedekind e outros[18]. Em (I, §3) ele fala duma porção variável (veränderliches Stück) de uma variedade unidimensional sem mencionar o que é entendido por <u>porção</u>. Depois de mostrar como é gerada uma variedade n-dimensional, demonstra que um elemento dessa variedade fica determinado por <u>n</u> grandezas contínuas independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$ e também a recíproca, de que <u>n</u> grandezas $x_1, x_2, \dots, x_n$ determinam um único elemento da variedade. Ele supõe então claramente uma correspondência contínua entre os elementos da variedade e o contínuo aritmético: a uma variação infinitésima do elemento da variedade corresponde uma variação infinitésima do contínuo $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Esta pode ser tomada como a <u>primeira hipótese de Riemann</u>. No capítulo II ele escreve explicitamente que o verdadeiro caráter (wesentliches Kennzeichen) duma variedade n-dimensional é a determinação de um elemento seu (posição) por meio de <u>n</u> grandezas (coordenadas). Aqui, por acharmos que o assunto é demasiadamente importante, vamos nos deter um pouco mais. Por mais intuitiva que possa parecer a fixação do número de dimensões duma variedade, especialmente para o físico, que adota esse número como sendo o número de parâmetros necessários para a determinação de cada elemento do sistema em estudo, um cuidado a mais deve ser tomado[19].

Uma descoberta fundamental feita por G. Cantor estremeceu por algum tempo a confiança depositada em tal definição; e se pudemos restaurar essa confiança, ainda que de modo já um pouco diverso, foi graças à introdução da noção de <u>continuidade</u> na definição do número de dimensões. G. Cantor[20] demonstrou que se pode estabelecer uma correspondência pontual biunívoca entre um quadrado e um intervalo duma reta, ou seja, entre o plano e a reta. A partir dessa correspondência, podia-se determinar a posição dum ponto M dum plano P a partir da posição <u>m</u> sobre uma reta D que correspondia ao plano P. Então, a posição do ponto M no plano P podia ser determinada por <u>um único</u> parâmetro, ou seja, a abcissa do ponto <u>m</u> sobre a reta D. Ora, intuitivamente o espaço do plano é um espaço mais rico que o espaço duma reta. E a análise de Cantor provava que esses espaços tinham exatamente o mesmo número de pontos: dando nomes diferentes a cada ponto da reta (a aritmética fornecia esses nomes a partir dos números reais), esses nomes eram suficientes para designar sem ambigüidade todos os pontos do plano. Com isso, o plano era rebaixado à categoria dum espaço unidimensional. Obviamente os matemáticos não podiam aceitar uma conclusão tão oposta à nossa intuição. Vamos agora citar uma frase de M. Fréchet(19) que situa bem esse impasse mas que pode ser colocada como um posicionamento gnoseológico face a outras situações em ciência: "A atitude dos matemáticos com relação ao problema de Cantor nos mostra mais uma vez que eles obedecem, muitas vezes inconscientemente a esta lei: se é preciso desconfiar da intuição no estabelecimento da prova, é a intuição e não a lógica que deve nos guiar na direção a ser seguida nas nossas pesquisas. Entre duas definições, uma delas, vaga, intuitiva, fornecida pela experiência; a outra precisa e rigorosa, é à primeira que devemos nos amarrar, se as conseqüências da segunda mostram que ela não se limita a dar uma forma matemática precisa à primeira, se ela a altera de modo essencial".

Para achar a solução do impasse de Cantor não foi preciso procurar demais: a correspondência de Cantor era biunívoca, mas ela não era bicontínua e nem mesmo contínua. Quando o ponto m percorria a sua reta D, sempre no mesmo sentido, o ponto correspondente M no plano P efetuava uma dança caótica, saltando <u>instantaneamente</u> de um ponto de P a outro ponto completamente afastado do primeiro. O plano P ficava totalmente revirado pela correspondência: não era mais um plano e sim um caos de pontos. Certa vez ouvimos um matemático se referir ao "plano satânico de Cantor". Para maiores detalhes sobre essas transformações não contínuas, remetemos a O. Chisini(21).

A definição do número de dimensões, depois dessas discussões, passou a ser um tema importante de pesquisa. Poincaré formulava uma hipótese topológica que permitia a passagem de n a n+1 dimensões. O importante é que sempre o número de dimen-

sões seria um número inteiro. Hausdorff(22), ainda que de modo menos intuitivo que o de Poincaré, admitia uma escala contínua de número de dimensões. Olhando pela primeira vez, este parece ser um problema puramente acadêmico. No entanto, os físicos vão mais além. Recentemente, Giambiagi(23), no contexto da teoria de campos, verifica que alguns resultados surpreendentemente bons são encontrados quando o número que representa as dimensões duma variedade pode assumir valores contínuos como um parâmetro. Esse conceito bastante contraintuitivo deve merecer a atenção de alguns pesquisadores numa profunda revisão da definição de dimensionalidade. Por enquanto, vamos citando Poincaré(24): "Se um resultado tem um valor, esse aparece quando se verifica que elementos conhecidos há muito tempo, mas até então tidos como esparsos e estranhos, podem ser relacionados. O resultado novo introduz subitamente a ordem onde havia uma aparência de desordem. Ele deve também nos fornecer uma visão de conjunto desses elementos e os papéis que eles desempenham nesse conjunto".

Na sua primeira hipótese, Riemann não supõe a necessidade da continuidade da correspondência entre os elementos da variedade e os sistemas de valores do contínuo $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dessa maneira, o número de coordenadas reais independentes e contínuas que servem para a determinação única e completa dos elementos duma variedade n-dimensional, pode ser reduzido a um número arbitrário de parâmetros. No entanto, as conseqüências ulteriores nos levam a crer que Riemann tinha a intuição dessa continuidade.

<u>A segunda hipótese de Riemann</u> diz respeito à independência do comprimento de linha com a posição e ele mesmo diz que "toda linha é mensurável por intermédio de outra linha". Para a

determinação da linha, Riemann admite que as coordenadas de seus pontos devem ser funções de uma variável (parâmetro). Essas funções devem ser tais que as linhas representadas por elas sejam mensuráveis por uma qualquer dessas funções. Essa hipótese não mantém a rigidez e sim a conservação do comprimento da linha.

A terceira hipótese de Riemann impõe que o comprimento de um elemento não varia, a menos de infinitésimos de ordem superior, quando todos os pontos do elemento sofrem um deslocamento infinitesimal, ou quando as coordenadas x_i recebem incrementos infinitesimais.

A quarta hipótese de Riemann impõe que o elemento linear ds seja essencialmente positivo; seja nulo somente quando se anularem simultaneamente todas as diferenciais dx_i e permaneça inalterado quando todas as diferenciais trocam de sinal.

Agora já temos nas mãos os ingredientes necessários para o tratamento do caso mais simples considerado por Riemann: colocamos o quadrado ds^2 do elemento linear igual a uma forma diferencial quadrática nos x_i: $ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k$, com os coeficientes a_{ik} sendo, na região considerada, funções reais, finitas e contínuas dos x_i. São também funções deriváveis. Supõe-se também que a forma seja sempre definida e positiva para evitar que o elemento linear tenha comprimento nulo ou imaginário. A fixação desta determinação métrica depende da escolha das funções $a_{ik}(x)$. Como temos uma forma binomial, deveríamos ter n^2 funções possíveis, mas impondo já uma simetria, teremos $\binom{n+1}{2} = n(n+1)/2$ funções. Mas podemos ainda reduzir esse número, escolhendo n funções independentes arbitrárias. Então, na verdade, temos que determinar $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ funções de posição para fixar a métrica. Escolhendo essas funções, podemos calcular

o comprimento de um arco finito de uma linha por meio da integração, colocando a expressão da linha em forma paramétrica. Podemos então formar as equações diferenciais para as linhas de mais curta distância (kürzesten Linien) que serão as geodésicas. Cada linha geodésica fica determinada, dadas as coordenadas de um ponto pelo qual ela passa e sua direção nesse ponto, isto é, fornecendo um grupo de valores simultâneos dos x_i e das relações mútuas das diferenciais primeiras nesse ponto. Vamos ilustrar este raciocínio com uma interpretação cinemática bastante simples. Um ponto que se move sobre uma superfície somente sob o efeito duma velocidade inicial (não há força) descreve uma geodésica dessa superfície, com velocidade constante. Vamos generalizar um pouco esta afirmação[25]. Vamos supor um sistema de pontos, todos com a mesma massa e cada um com uma dada velocidade inicial. Sobre esse sistema não estão agindo forças. Se representamos esse sistema analiticamente por meio das coordenadas de Lagrange, o movimento será uma geodésica de um espaço S. Nesse espaço, o comprimento de arco se identifica com o próprio tempo. Resumindo, a sucessão das posições do sistema com o correr do tempo será a sucessão das posições de um ponto sobre uma geodésica de S.

Depois desta ilustração, vamos voltar ao problema das geodésicas e ver como Riemann define curvatura. Como vimos, uma linha geodésica fica determinada quando se fornece as coordenadas de um ponto pelo qual ela passa e a direção que é especificada pelas razões entre as diferenciais nesse ponto. Como início, vamos adotar o procedimento de Riemann do capítulo I, §3. Num dado ponto (x) da variedade, as direções que saem desse ponto[26] constituem uma multiplicidade ∞^{n-1}. Chamamos de "feixe de direções" àquelas que correspondem a incrementos das coordenadas do tipo $dx_i = \lambda d_1 x_i + \mu d_2 x_i$, com λ, μ parâmetros homogêneos e d_1 e d_2 diferenciais correspondentes a duas direções arbitrárias a partir do ponto (x). As ∞^1 geodésicas que passam pelo ponto (x) segundo as ∞^1 direções de um feixe formam uma superfície agora como variedade ∞^2, que terá um elemento linear que será função das coordenadas da variedade original, desde que escrevamos essas coordenadas em função dos dois parâmetros da variedade ∞^2 de geodésicas. A curvatura α desta superfície no ponto (x), que se deduz do elemento linear em duas variáveis, é chamada por Riemann de medida de curvatura, ou simplesmente curvatura do espaço no ponto (x) segundo a orientação considerada. Analiticamente, a curvatura pode ser expressa como a razão entre duas formas quadráticas das variáveis

$$p_{ik} = \frac{d_1 x_i}{ds} \cdot \frac{d_2 x_k}{ds} - \frac{d_1 x_k}{ds} \frac{d_2 x_i}{ds}$$

que são as coordenadas de Grassmann da orientação. É interessante notar que as coordenadas de Grassmann, que aqui são introduzidas apenas como um modo de exprimir a curvatura, começaram, nos últimos anos, a exercer um papel fundamental para as teorias de Superespaços e Grande Unificação[27]. A equivalência entre essas coordenadas antisimétricas e o formalismo dos bivetores e a álgebra exterior pode ser vista em Cartan[16].

Antes de passarmos a outras considerações sobre a métrica, achamos oportuno aqui dar uma imagem geométrica simples da curvatura riemanniana que não nos aparece bastante explícita no próprio texto. Essa interpretação é baseada no famoso teorema de Gauss sobre a soma dos ângulos de um triângulo geodésico numa variedade qualquer[16].

Consideremos sobre uma superfície o ciclo formado por um triângulo geodésico infinitesimal a b c. Vamos considerar o plano tangente ao vértice a. Desenvolvendo esse triângulo sobre o plano tangente, vamos obter um triângulo retilíneo A B C a, sendo que, por enquanto $a \equiv A$, aproximadamente. O lado AB pelo qual começamos o desenvolvimento é tangente ao lado ab do triângulo geodésico. Para fazer com que o lado AC fique tangente ao lado ac, é preciso girar a direção de AC (fechar o triângulo retilíneo) de um ângulo $\alpha\Delta\sigma$, onde α é a curvatura e $\Delta\sigma$ é a área do triângulo geodésico. Ora, no desenvolvimento, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são conservados. Dessa maneira, o ângulo $\hat{A}$ do triângulo retilíneo fica, portanto, sendo igual a $\pi - \hat{B} - \hat{C}$. Transportando para o triângulo geodésico, encontramos então:

$$\pi - \hat{b} - \hat{c} + \alpha\Delta\sigma = \hat{a}$$

donde, segue-se o teorema de Gauss

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} - \pi = \alpha\Delta\sigma \quad .$$

No caso particular da esfera de raio R, o primeiro membro, que expressa o excesso angular esférico é, efetivamente igual à área do triângulo dividida por R^2 (para a esfera $\alpha = 1/R^2$). A curvatura de Riemann num ponto qualquer duma superfície (ou dum espaço riemanniano qualquer bi-dimensional) pode, portanto, ser definida como o limite da razão $(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} - \pi)/\Delta\sigma$ onde $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ são os ângulos dum triângulo geodésico infinitesimal da área $\Delta\sigma$, tendo o ponto a coincidindo com o ponto escolhido.

Geometricamente, pode-se imaginar que as $\binom{n}{2}$ funções de posição, das quais depende a métrica, sejam as curvaturas do espaço num ponto, segundo esse mesmo número de direções[16]. As direções são escolhidas de modo arbitrário. Assim, conhecidas para um ponto as $\binom{n}{2}$ curvaturas, ficam conhecidas as curvaturas também para as outras direções e, portanto, fica determina da a métrica inteira.

Um caso muito importante abordado por Riemann ocorre quando a curvatura α tem um valor constante para qualquer ponto e qualquer conjunto de direções. Esse é um espaço com curvatura constante. Para ele é possível a escolha de coordenadas x_i de tal forma que o elemento linear seja

$$ds^2 = \Sigma\, dx_i^2 / (1 + \alpha/4\, \Sigma x_i^2) .$$

É fácil de ver que para todas as variedades com curvatura constante e, também, para as superfícies com curvatura constante existe uma propriedade característica: duas regiões convenientes das variedades com curvatura constante podem ser aplicadas uma sobre a outra. Isto quer dizer que essas regiões podem ser superpostas por simples deformação desde que os comprimentos não se alterem. Elas são variedades isométricas. Para variedades n-dimensionais, essa superposição depende de $\binom{n+1}{2}$ parâmetros. Podemos, por exemplo, fazer coincidir 2 pontos arbitrários das regiões consideradas e nessas regiões definimos dois grupos arbitrários de $\binom{n}{2}$ direções mutuamente ortogonais. Isso equivale a dizer que numa variedade com curvatura constante as figuras podem se mover livremente, conservando distâncias e ângulos.

Dentre as variedades com curvatura constante, Riemann considera também o caso onde essa curvatura é nula em todos os pontos e segundo $\binom{n}{2}$ orientações genéricas. Essas são as variedades planas para as quais o elemento linear assume a forma $ds^2 = \Sigma\, dx_i^2$, como em geometria euclidiana.

Na derradeira parte de sua monografia, Riemann aplica os conceitos e os resultados obtidos anteriormente ao estudo

do espaço ordinário tri-dimensional. Aqui pode-se notar o quanto de especulativo e de intuição guiava o raciocínio riemanniano. É tal a riqueza de idéias apresentada nessa parte que sobre ela poderíamos nos alongar o quanto quiséssemos. No entanto, vamos nos restringir a alguns aspectos que, apesar de não apresentarem uma visão completa do profundo raciocínio de Riemann, pelo menos nos parecem pertinentes ao estudo da Física atual. Inicialmente, Riemann admite como dados experimentais:

a) que o espaço ordinário seja uma variedade tri-dimensional;
b) que a distância seja tal que o quadrado do elemento linear ds^2 possa se exprimir como uma forma diferencial quadrática definida positiva nos x_i. Essa hipótese equivale a admitir a validez da geometria euclidiana num domínio infinitesimal, onde os coeficientes a_{ik} podem ser tomados como constantes, o que acarreta a redução da forma diferencial a uma soma de quadrados;
c) que as figuras podem se mover livremente, isto é, que com um movimento podemos justapor dois pontos arbitrários e, com eles, dois triedros ortogonais arbitrários orientados com mesmo sentido, ligados aos dois pontos arbitrários.

A sua conclusão é óbvia: o espaço ordinário é uma variedade tri-dimensional com curvatura constante. Como a curvatura é expressa como o inverso do produto dos dois raios principais de curvatura $\alpha = 1/R_1 R_2$, ele admite, raciocinando sobre medidas astronômicas efetuadas sobre triângulos de grande extensão, que o valor absoluto da curvatura α não pode diferir sensivelmente de zero. Ficava muito difícil decidir com segurança o valor de $\alpha \lesseqgtr 0$. A hipótese $\alpha = 0$ conduzia à geometria euclidiana. Nessa geometria, o espaço ordinário seria uma variedade tri-dimensional plana. Para $\alpha < 0$, teríamos a geometria de

Lobatchevsky. Finalmente, para $\alpha > 0$, via-se o surgimento do que mais tarde passou a se chamar de geometria riemanniana. Nessa última geometria é que a distinção entre ilimitação e infinitude se torna essencial. Riemann observa que se $\alpha > 0$, o espaço se torna <u>ilimitado</u>, mas <u>finito</u>, o que ocorre, por exemplo, no caso da geometria sobre a esfera em duas dimensões. Para dar uma visão mais intuitiva, nessa geometria o papel desempenhado pelas "retas" seria substituído pelo de curvas fechadas, como das circunferências. Essa questão, que nos lembra o ponto de vista da geometria projetiva, permite uma abordagem bastante ampla da geometria riemanniana.

Mas o capítulo III das Hipóteses não se resume apenas na definição da nova geometria. A frase de abertura do §3: "As questões sobre o infinitamente grande são inúteis para a explicação da natureza", que viria a exercer grande influência sobre os pesquisadores subseqüentes a Riemann, desde Beltrami[28] até Einstein[2], abriu caminho a longas polêmicas, algumas das quais ainda em discussão. Vamos procurar nos fixar na Teoria da Relatividade Generalizada. Segundo V. Fock[29] desde que uma teoria universal da gravitação não cabe dentro do esquema de um espaço uniforme de Galilei (euclidiano ou pseudo-euclidiano), é necessário abandonar a uniformidade do espaço como um todo, adotando a uniformidade somente nas partes infinitesimais. No entanto, é preciso ter cuidado com a conceituação do espaço como um todo. Para construir uma teoria da gravitação ou para formular uma teoria física nos moldes da teoria de campos, o estudo local do espaço e do tempo mostra-se insuficiente. De um modo ou de outro, temos de caracterizar as propriedades do espaço como um todo, sendo este, pensado como uma região tão grande que nos seus contornos os campos podem se tornar desprezíveis. Isso deve ser feito

tendo em vista a unicidade das soluções dos problemas propostos. Esse raciocínio torna-se claro quando consideramos as equações dos campos como equações diferenciais parciais, as soluções das quais sendo únicas, somente quando condições iniciais, ou ao contorno, ou equivalentes, são fixadas. As equações de campos e as condições ao contorno estão ligadas de modo indissolúvel e as últimas não podem, de modo algum, ser consideradas menos importantes que as primeiras. Portanto, em problemas relacionados com o espaço como um todo, as condições ao contorno se referem a regiões distantes e sua formulação impõe um conhecimento das propriedades globais do espaço. Neste ponto, para não fugir ao nosso escopo de comentar a obra de Riemann, remetemos o leitor à literatura[30],[31].

"Mas tudo se passa diferentemente com as questões sobre o infinitamente pequeno", afirma, em seguida, Riemann. O que seria, para Riemann, a geometria do infinitamente pequeno? Ele mesmo admite como lícita a idéia de que as relações métricas do espaço no infinitamente pequeno não estão de acordo com as hipóteses da geometria. Desse desacordo poderia surgir uma explicação mais simples dos fenômenos. Para ele, mesmo as noções empíricas sobre as quais se fundamentam as relações métricas, como as definições de corpo sólido e de raio de luz, perderiam sua validez. Daqui, um crítico menos cuidadoso e mais apaixonado poderia deduzir uma clarividência de idéias relativísticas. Nesse plano hipotético também seria útil relembrar a frase de Leibniz[32]: "Toda grandeza matemática que decresce passa, antes de cessar de existir, por um estado particular tal que nada menor que ela existe; é o <u>átomo</u> dessa grandeza, que contém em substância, e no estado mais reduzido possível, toda a série de propriedades que a análise virá a deduzir em seguida". Sem procurarmos nos alongar mais sobre essas conjecturas, deixamos, entretanto, no ar a pergunta: até que ponto a conjunção dessas especulações influenciaram as modernas teorias de unificação de campos (do tipo Einstein-Kaluza-Klein) que chegam a incluir dimensões escondidas (ou "enroladas" dentro de um volume com as dimensões do comprimento de Planck)? É claro que a resposta a uma pergunta como esta é extremamente complexa e demandaria uma revisão de todo o desenvolvimento histórico da teoria de campos. Inúmeros caminhos foram seguidos, alguns com sucesso, outros não. Na seqüência, iremos alinhavar os traços fundamentais de algumas poucas linhas seguidas.

Outra frase de Riemann que nos chamou profundamente a atenção, pelo fato de estarmos envolvidos no momento com pesquisas similares(33), é a seguinte: "É sobre a exatidão com a qual nós seguimos os fenômenos no infinitamente pequeno que repousa essencialmente nosso conhecimento sobre suas relações causais". Essa afirmação, colocada assim de modo geral, parece contradizer à primeira vista o posicionamento kantiano sobre a causalidade(34):

"É, pois, sempre relativamente a uma regra segundo a qual são os fenômenos determinados em sua sucessão, quer dizer, tal como se dão, pelo estado precedente, que dou à minha síntese subjetiva (da apreensão) um valor objetivo; e só sob esta suposição é possível a mesma experiência de algo que sucede. Isto certamente parece contradizer todas as observações que sempre se fizeram sobre a marcha do nosso entendimento. Segundo aquelas observações, só pela percepção e comparação de muitos eventos que se verificaram sucessivamente de um modo uniforme, com fenômenos antecedentes, é que descobrimos uma regra, pela qual certos eventos seguem sempre a certos fenômenos e que estabelecemos o conceito de causa".

Nesta citação de Kant, fica bem clara a distinção epistemológica entre os dois empregos da palavra "regra". No primeiro sentido, a regra seria fixada "a priori" e dela decorreriam as observações que nos levariam ao nexo causal. No segundo sentido, a regra seria subtraída do conhecimento empírico. O próprio Kant(33), mais adiante, torna mais enfática a distinção:

"Nesse sentido, esse conceito seria puramente empírico e a regra (no segundo sentido) que dá, a saber, que tudo que sucede tem uma causa, seria tão contingente como a própria experiência; sua universalidade e sua necessidade seriam, pois, meramente fictícias, sem nenhum valor verdadeiro, porque não se fundam "a priori", mas na ilusão".

Neste ponto, para permanecermos numa atitude imparcial, devemos confessar que as afirmações de Riemann, por serem sucintas, não nos permitem concluir claramente seu posicionamento. Mas como a questão é altamente apaixonante, vamos formular algumas indagações, cujas respostas também ficam a cargo do leitor.

Vamos admitir, tentando colocar Riemann dentro do posicionamento kantiano, que a regra (no primeiro sentido) seja, por exemplo, a validez das equações diferenciais de Maxwell. Neste ponto, um chamamento é muito importante pois as equações de Maxwell, além de não dependerem da métrica, descrevem o campo eletromagnético que, no sentido de Faraday, se comporta como um autêntico campo, em oposição ao campo gravitacional(35). É claro que a nossa colocação do problema é imprecisa pois estão ausentes, por enquanto, as condições ao contorno e a definição do espaço como um todo. Nesse contexto restrito, poderiam as equações de Maxwell serem tomadas como "ilusões contingentes"? A resposta não é óbvia.

Mesmo com as limitações que impusemos, que expressam apenas uma faceta do problema, acreditamos que elas correspondem a leis da natureza e, portanto, dependendo de um complemento no enunciado do problema, os requisitos da definição kantiana seriam preenchidos. Voltemos a Kant:

"Mas se esta representação de uma regra que determina a série de eventos não pode obter a claridade lógica de um conceito de causa, senão quando a empregamos na experiência, o conhecimento desta regra, como condição da unidade sintética dos fenômenos no tempo, é o fundamento da própria experiência e, por conseguinte, a precede "a priori"".

Ora, não só o campo eletromagnético mas também a maioria das leis naturais que governam a evolução dos vários processos físicos, são escritas em termos de equações diferenciais. A forma destas, por seu turno, não depende das condições ao contorno. Por outro lado, a física normalmente serve-se da existência de integrais do movimento, e essa existência depende da definição do espaço como um todo(29). Vamos inserir uma pergunta sutil: o que seria empregar a regra na experiência, para Kant? Seria seguir os fenômenos no infinitamente pequeno, como diz Riemann ou haveria algo de mais profundo, como o conteúdo do teorema de Noether, que nos conduziria também às leis de conservação?(33) Nessa linha de raciocínio, o teorema de Noether pensado como resultado algébrico não tem a claridade lógica de um conceito de causa, mas quando usado para fornecer conservações parece completar as imposições kantianas.

Outro tema que se coloca em estreita correlação com esse raciocínio é o que envolve, a nosso ver, uma das dificuldades centrais da teoria do campo gravitacional de Einstein: como

é interpretada a causalidade por Einstein na sua Teoria da Relatividade Generalizada? Estaria a sua atitude (inspirada em Riemann) baseada somente em conceitos estritamente locais (princípio de equivalência)? Pode ser que uma resposta abrangente a essas perguntas se encontre no trabalho de Schönberg(36) onde a relação causal entre um par de eventos físicos passa a ser o fundamento físico da geometria de Riemann do espaço-tempo e da flecha do tempo. A gravitação é obtida a partir do campo físico de causalidade que também pode ser utilizado para desenvolver uma teoria de unificação. Nesse caso, a regra, cujo conhecimento se torna o fundamento da própria experiência, seria uma interpretação mais ampla do tensor $g_{\mu\nu}$ na formulação dos princípios variacionais. Alguns resultados mais concretos estão em vias de desenvolvimento por parte desse autor(37). Uma outra alternativa foi proposta recentemente por nós(38), que poderia fornecer a causalidade como um importante resultado geométrico da imposição de um esquema dinâmico bastante amplo.

Com esses derradeiros destaques esperamos ter aguçado a curiosidade do leitor para um aprofundamento da leitura do trabalho original. É óbvio que muito ainda deveria ser dito, mas essa já não seria uma tarefa nossa. O próprio Riemann nos oferece ao final do trabalho um Sumário, com o plano de pesquisa. No que se refere ao §3 do capítulo III (parágrafo final), como já dissemos, ele coloca a nota de rodapé que diz: "esse parágrafo deve ser remanejado e reescrito".

Ele nem remanejou nem reescreveu esse parágrafo. Essa tarefa acabou ficando para as gerações de cientistas e filósofos que o sucederam e que, se por um lado vieram enriquecer sobremaneira a literatura matemática, por outro, serviram para edi ficar algumas das mais brilhantes teorias físicas modernas. Mas o leitor que não se iluda. Se ele quiser, ainda vai encontrar na obra de Riemann uma fonte inesgotável de idéias que devem ser desenvolvidas.

Na impossibilidade de podermos reunir nestes breves comentários as contribuições mais importantes no seguimento do pensamento riemanniano, como as de Beltrami, Christoffel, Helmholtz, Klein, Lie e outros, enviamos o leitor à literatura já citada e, em especial a Misner, Thorne e Wheeler[22]. Porém, como consideramos fundamental o trabalho de um geômetra deste século, E. Cartan, vamos nos utilizar de algumas citações desse autor[39] [40] [41] [42] [43]. Na referência [39], ele diz:

"À primeira vista, a noção de grupo parece estranha à Geometria dos espaços de Riemann, pois estes não possuem a homogeneidade de nenhum espaço com grupo fundamental[44]. Entretanto, se um espaço de Riemann não possui uma homogeneidade absoluta, ele possui, contudo, uma espécie de homogeneidade infinitesimal; na vizinhança imediata de um dado ponto ele pode ser assemelhado a um espaço euclidiano. No entanto, se dois pequenos pedaços vizinhos de um espaço de Riemann podem ser assemelhados, cada um por sua vez, a pequenos pedaços de espaços euclidianos, os dois pequenos pedaços não mantêm ligações entre eles; eles não podem, sem nova convenção, ser vistos como pertencendo a um único espaço euclidiano. Dito de outra forma, um espaço de Riemann admite, na vizinhança de um ponto A, uma rotação ao redor desse ponto, mas uma translação mesmo considerada pelos efeitos que ela produz sobre uma região muito pequena do espaço, não forma sentido. Ora, é o próprio desenvolvimento da Teoria da Relatividade, atada à obrigação paradoxal de interpretar num e por meio dum Universo não homogêneo, os resultados de numerosas experiências feitas por observadores que crêem na homogeneidade desse Universo que permitiu saltar, em parte, o fosso que separava os espaços de Riemann do espaço euclidiano. O primeiro passo nesse sentido foi a obra de Levi-Civita, com a introdução da sua noção de paralelismo[45].

Cartan explorou bastante esse ponto de vista geométrico e estabeleceu também outro, algébrico-analítico, que exibia a grande semelhança existente entre os símbolos tensoriais de Riemann e a teoria dos grupos. Várias extensões foram feitas e ainda estão por serem completadas. Introduzindo a noção de torção, Cartan chegou às variedades com conexão afim mais gerais. O espaço de Riemann sem torção seria o espaço gravitacional de Einstein.

Outro resultado importante era reconhecido: era possível apoiar tanto o eletromagnetismo de Maxwell como a geometria diferencial em algumas identidades integrais simples. Imediatamente surgia a idéia de unir o campo gravitacional e o campo eletromagnético num só formalismo. Surgia com Weyl[46], se bem que num contexto bem diferente do atual, a idéia de "gauge" num espaço riemanniano que não possuía torção.

Nós, antes de encerrarmos estes comentários, gostaríamos de formular mais uma pergunta[47]: será que não seria um postulado gratuito admitirmos que existe um espaço no qual todas as propriedades físicas seriam interpretadas matematicamente?

Laplace já pensava nessa questão[47] [48]:

"Uma inteligência que, num certo instante, conhecesse todas as forças das quais a natureza é animada e a situação res pectiva dos seres que a compõe, se aliás ela fosse tão vasta para poder submeter esses dados à Análise, conseguiria embraçar na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e os dos átomos mais leves: nada seria incerto para ela e o futuro, como o passado, estaria presente a seus olhos".

Modernamente, "todas as forças das quais a natureza é animada" estão num espaço geométrico do qual pesquisamos a estrutura; é possível que dessa maneira só venhamos a obter imagens muito parciais. Enquanto aguardamos a resposta, vamos relembrar o que diz o Mestre(49):

"... somos apenas homens, de forma que nos basta aceitar nessas matérias uma aproximação aceitável, e que não devemos buscar além".

Para finalizar vamos relembrar que procuramos apresentar aqui uma análise simplificada das idéias de Riemann que, a nosso ver, mais destacam nas Hipóteses. O leitor pouco familiarizado com esse trabalho não fica isento de ter que consultar não só a nossa como também uma bibliografia mais ampla sobre o matemático de Hanover e meditar profundamente. As referências coletadas por nós podem servir como um guia nesse caminhar solitário de cada um.

São Paulo, agosto de 1985

REFERÊNCIAS

(1) M. Planck, Ann. d. Physik 4, 553 (1901), e também, M. Planck, "La conoscenza del mondo fisico", 3ª ed. Einaudi, Torino (1943).

(2) A. Einstein, "On the Electrodynamics of Moving Bodies", traduzido de "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", Ann. d. Physik, 17 (1905), ed. in "The Principle of Relativity", Dover.

(3) A. Einstein, "The Foundation of the General Theory of Relativity", traduzido de "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", ibid, Dover.

(4) Ver, por exemplo, J.M. Souriau, "Géométrie et relativité", Herman, Paris (1964).

(5) H. Weyl, comentários às Hipóteses, do livro "Das Kontinuum und andere Monographien", Chelsea, New York (1923).

(6) G. Veronese, "Fondamenti di Geometria", Padova (1891).

(7) Gauss, "Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel", Göttingen (1829).

(8) H. Grassmann, "Ausdehnungslehre", Leipzig (1844).

(9) Com respeito a esse tema polêmico, recomendamos a leitura de A.S. Smogorzhevsky, "Lobachevskian geometry", Mir, Moscou (1976). Os trabalhos de Lobatchevsky, em ordem cronológica, foram: "Exposição sucinta dos princípios da geometria" (1826), "Sobre os fundamentos da geometria" (1830), "Geometria imaginária" (1837), "Novos fundamentos da geometria" (1838), "Pesquisas geométricas sobre a teoria das paralelas" (1840), "Pangeometria" (1855).

(10) P. Barbarin, "La Géométrie non Euclidienne", Gauthier-Villars, Paris (1928).

(11) Por exemplo, G. Fano, "Enciclopedia delle Mathematiche Elementari", art. XXXVIII, Milano (1943).

(12) Léon Brunschvicg, "Les étapes de la Philosophie Mathématique", Presses Universitaires, 3r., Paris (1947).

(13) V.L. Lenin, "Materialisme et Empirocriticisme", Éditions Sociales, Paris (1948).

(14) I. Kant, "Gedanken der wahren Schätzung der lebedingen Kraft", Kant's Werke, vol. V, pg. 25 .

(15) Definições rigorosas e abrangentes tanto para Topologia como para a Geometria Diferencial são encontradas, por exemplo, em V. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Springer (1978); para variedades riemannianas, o clássico de Kobayashi & Nomizu. Um resumo fácil em português é encontrado em Normando C. Fernandes, "Alguns Tópicos Matemáticos de Física Teórica", parte I, IFUSP-Publicações (1984).

(16) E. Cartan, "Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann", Gauthier-Villars, Paris (1946).

(17) G. Darboux, "Leçons sur la théorie génerale des surfaces", Gauthier-Villars, Paris (1941).

(18) V. Rohlin & D. Fuchs, "Premier Cours de Topologie - Chapitres Géométriques", Mir, Moscou (1981).

(19) M. Fréchet, "Les espaces abstraits", Gauthier-Villars, Paris (1928).

(20) Ver, por exemplo, E. Borel, "Leçons sur la théorie des fonctions", 3ª ed., Gauthier-Villars, Paris (1928).

(21) O. Chisini, "Enciclopedia delle Matematiche Elementari", art. XXXIX, Hoepli, Milano (1943).

(22) F. Hausdorff, "Dimension und äusseres Mass", Math. Ann. 79, 157 e 351 (1918), e, também, F. Hausdorff, "Mengenlehre", 3rd. ed., Dover, New York (1950).

(23) J.J. Giambiagi, "Anais do Simpósio de Física Teórica em homenagem aos 70 anos de Mário Schönberg", IFUSP, São Paulo (1984).

(24) H. Poincaré, Rend. Circ. Mat. Palermo 28, 157 (1908).

(25) C. Misner, K. Thorne & J.A. Wheeler, "Gravitation", Freeman, San Francisco (1973).

(26) Ver, por exemplo, M. Postnikov, "Lectures in Geometry", Mir, Moscou (1982).

(27) N.C. Fernandes, "As álgebras de Grassmann-Schönberg e Grande Unificação", Preprint IFUSP (1984), a ser publicado em "Anais do Simpósio de Física Teórica em homenagem aos 70 anos de Mário Schönberg" (1985).

(28) E. Beltrami, Ann. Mat. Pura Appl. 2, 2 (1868), Opere Mat. 1, Milano (1902); ibid 2 (1904).

(29) V.A. Fock, "The theory of space time and gravitation", Pergamon, London (1959).

(30) S.W. Hawking & G.F.R. Ellis, "The large-scale structure of space-time", Cambridge (1973).

(31) S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", Wiley, New York (1972).

(32) J. Bonnel, "Les atomes et hypothèses dans la Géométrie", Gauthier-Villars, Paris (1899).

(33) N.C. Fernandes, "On a causal foundation of General Relativity", Preprint, IFUSP (1985).

(34) I. Kant, "Crítica da Razão Pura", Ediouro, Rio de Janeiro (1981).

(35) A.A. Logunov, ed., "Gravitation and Elementary Particle Physics", Mir, Moscou (1983).

(36) M. Schönberg, "Causality and Relativity", Rev. Bras. Fis. 7, 371 (1977).

(37) M. Schönberg, "Métodos Geométricos da Física", Curso de Pós Graduação, IFUSP (1984).

(38) A.L.L. Videira, A.L. Rocha Barros & N.C. Fernandes, "Geometry as an aspect of dynamics", Preprint, IFUSP (1984), aceito para publicação em Foundations of Physics (1985).

(39) E. Cartan, "La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle", L'Ens. Math. XXIV, 1 (1924).

(40) E. Cartan, "La théorie des groupes et la géométrie", L'Ens. Math. XXVI, 200 (1927).

(41) E. Cartan, "La géométrie des groupes des transformations", Jour. des Mathématiques, vol. 1 (1927).

(42) E. Cartan, "Sur les varietés à connexion affine et la Théorie de la Relativité Generalisée", Ann. Ecole Normale, XLI, 15 (1924).

(43) Esses trabalhos citados de Cartan estão reunidos na publicação de suas "Oeuvres Complétes", Gauthier-Villars, Paris (1952).

(44) Para a definição de grupo fundamental, bem como para a compreensão da visão algébrica da geometria, ver "O programa de Erlangen de Felix Klein", tradução e comentários por N. C. Fernandes, publicação IFUSP, São Paulo (1984).

(45) A noção de transporte por paralelismo foi se aprimorando, desembocando no que hoje se conhece como teoria geral de levantamento. Ver, por exemplo, E.H. Spanier, "Algebraic Topology", McGraw, New York (1966).

(46) H. Weyl, "Raum, Zeit, Materie", Springer, 5. auf., Berlin (1923).

(47) A. Buhl, num complemento da referência (10).

(48) Platão, "Timeu e Crítias ou a Atlântida", citação do tradutor N.P. Lima, Hemus, São Paulo (1981).