

IFUSP/P 560
B.I.F. - USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL



PUBLICAÇÕES

IFUSP/P-560

MODELO COLETIVO VIBRACIONAL PARA NÚCLEOS
PAR-PAR ESFÉRICOS

Manoel Tiago Freitas da Cruz
Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Dezembro/1985

E R R A T A

<u>Página</u>	<u>Correção</u>
12 - eq. 14	$\hat{y}_{\ell m}^*(\theta, \phi)$
13 - 1 ^a linha	onde as amplitudes $C_{\ell m}$
15 - eq. 26	é d Ω na última integral
18 - eq. 40	o último par de operadores b se escreve:
	$- (-)^{\tau} b_{\lambda \mu}^+ b_{\lambda, \mu + \tau}^- \}$
37 - eq. 100	a exponencial se escreve
	$\exp[i\omega(\vec{e}_z \cdot \vec{r} - t)]$
40 - eq. que precede à 108	colocar dv' na integral
40 - eq. 109	o estado inicial é i,0>
40 - última linha	A contagem de estados normalizados no cubo de aresta L
41 - elemento de matriz após a eq. 111	$\int \langle f j(\vec{r}') i \rangle \vec{e}_\tau^* e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}'} dv'$
41 - eq. 112	$\Sigma_{LM\pi}$
47 - eq. 134	M(M1,0)
47 - eq. 136	M(E2,0)
55 - tabela 4	colocar 12 sob 00 na 1 ^a coluna
58 - tabela 5	$t_{1/2}(2_1^+)(s)$
72 - linha após eq. 209	N ≥ 4

UNIVERSIDADE DE SAO PAULO

INSTITUTO DE FISICA

AGRADECIMENTOS

MODELO COLETIVO VIBRACIONAL PARA NÚCLEOS PAR-PAR ESFERICOS

Ao Prof. Dr. Iuda D.G. Vel Lejbman, pelas inestimáveis discussões durante a execução deste trabalho;

Aos Profs. Drs. Paulo R. Pascholati, Vito R. Vanin e Emerson J.V. Passos, pelo encorajamento a escrever;

À secretaria Maria de Lourdes Moraes, pelo trabalho impecável e extrema paciência;

MANOEL TIAGO FREITAS DA CRUZ

II^A ESCOLA DE VERÃO DE FÍSICA NUCLEAR EXPERIMENTAL

1985

I N D I C E

	Página	Página	
1 - Evidências de Movimentos Coletivos	1	6.3 - ^{122}Te	62
1.1 - Rotações.....	1	6.4 - ^{124}Te	65
1.2 - Vibrações.....		6.5 - ^{126}Te	66
2 - Construção do Modelo.....	5	7 - Interação entre os fonons como uma maneira de rela-	
2.1 - Hipóteses Necessárias.....	5	xar as regras de seleção.....	69
2.2 - Variáveis Coletivas $\alpha_{\lambda\mu}$ e a Hamiltoniana Clás-		8 - Conclusões.....	80
sica.....	7	Referências.....	83
2.3 - O Momento Angular da Oscilação de Multipolarida-			
de λ	12		
2.4 - O operador Hamiltoniano no Espaço de Fock.....	21		
3 - O Espectro Vibracional.....	24		
4 - Transições Eletromagnéticas.....	27		
4.1 - Interação Eletromagnética como Ferramenta no			
Estudo do Núcleo.....	27		
4.2 - Ondas Eletromagnéticas e Campos Multipolares..	28		
4.3 - Emissão de Radiação Eletromagnética.....	38		
4.4 - Elementos de Matriz e Probabilidades de Transi-			
ção dos Multipolos.....	40		
5 - Momentos Multipolares.....	43		
5.1 - Na Aproximação de Comprimento de Onda Longo...	43		
5.2 - No Contexto do Modelo Vibracional.....	50		
6 - Um Caso Concreto: os isótopos pares do telúrio, Z=52,			
$^{120-126}\text{Te}$	58		
6.1 - Parâmetros do Modelo para estes Núcleos.....	58		
6.2 - ^{120}Te	60		

MODELO COLETIVO VIBRACIONAL PARA NÚCLEOS PAR-PAR ESFÉRICOS

1 - Evidências de Movimentos Coletivos

1.1 - Rotações

Deformações (evidenciadas pelo momento de quadru-polo elétrico) ou formas de equilíbrio não esféricas, cujo valor é bem mais elevado do que o previsto pelo modelo de camadas em determinadas regiões, afastadas do fechamento de camada em prótons e/ou em nêutrons (números mágicos) sugerem a possibilidade de excitação dos graus de liberdade coletivos, associados à rotação do esferóide.

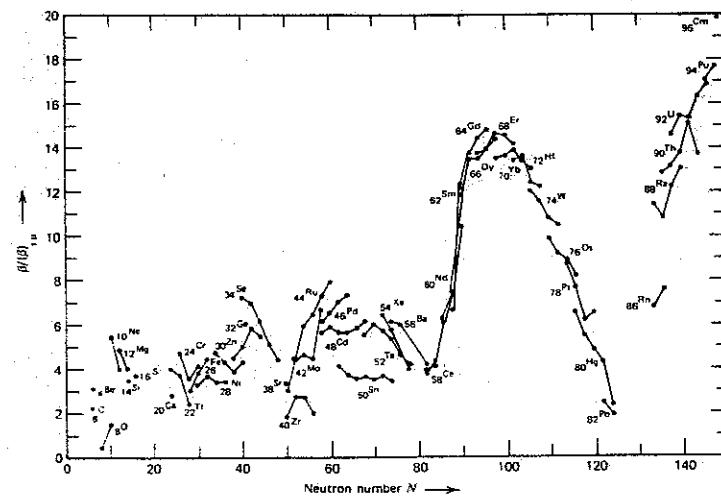


Figura 1 - Razão do valor adotado para β , o parâmetro de deformação quadrupolar obtido a partir das transições E2 para β_{sp} , o valor previsto pelo modelo de partícula única, em função do número de nêutrons (ref. 1, pág. 57).

Nessas mesmas regiões surgem estados nucleares ex

citados com energias entre 30 e 100 KeV, bem menores do que os 1 a 2 MeV, típicos de excitações intrínsecas (de partícula).

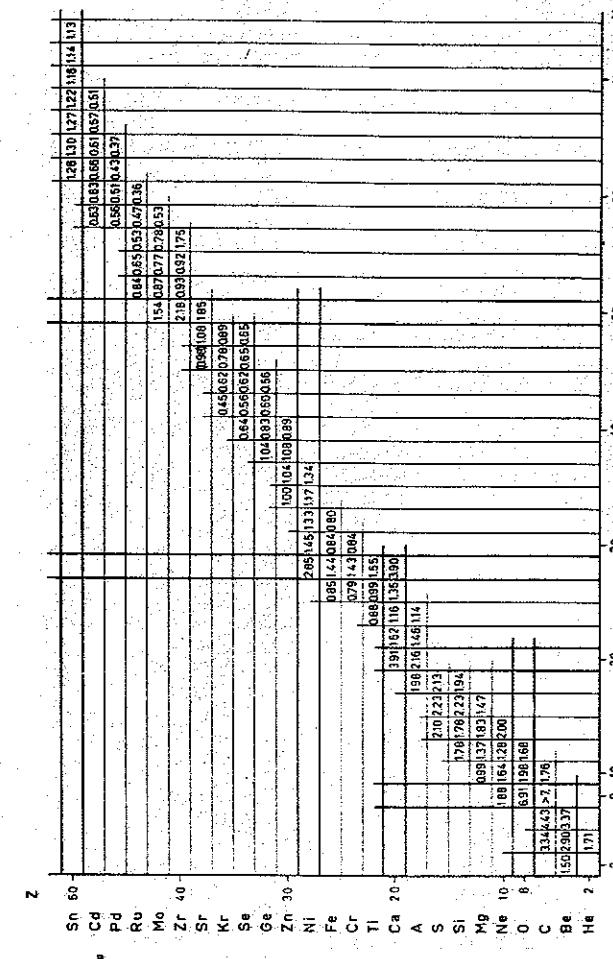
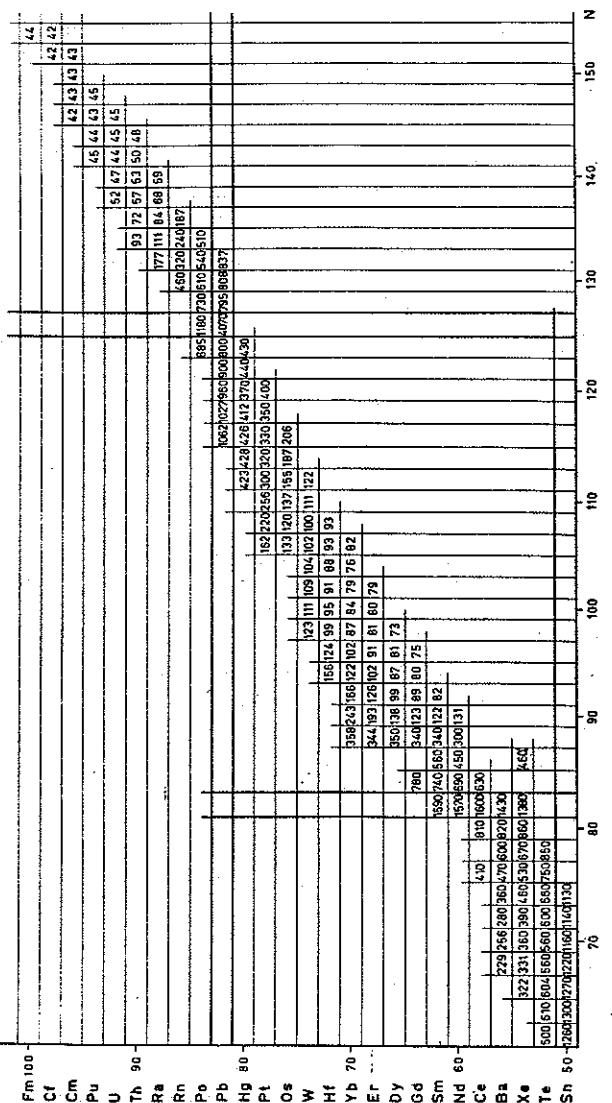


Figura 2a e b - Energia do primeiro estado excitado 2^+ dos núcleos par-par em função de N e Z. Na figura 2a os valores estão em MeV e na 2b em KeV (ref. 2, págs. 196-7).

2a.



2

Transições E2 entre os estados indicados acima têm em geral probabilidades bastante elevadas quando comparadas com as estimativas de Weisskopf (partícula), indicando fenômenos onde estão envolvidos vários nucleons. Este fato também é marcante nas regiões de núcleos ditos vibracionais.

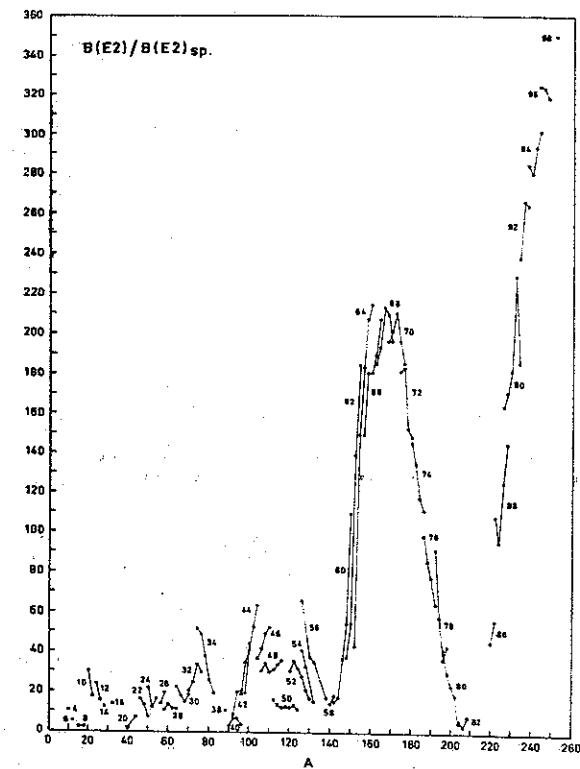


Figura 3 - Probabilidades de transição E2 conectando o estado fundamental e o primeiro estado excitado 2^+ em núcleos par-par em função de A. Verifique que parte da informação contida nesta figura foi utilizada na composição da figura 2 (ref. 3, pág. 48).

1.2 - Vibrações

Rotações têm uma acuidade de descrição melhor do que as vibrações, e um dos motivos é que as energias de excitação dos estados correspondentes às vibrações estão na faixa de 500 KeV a 1 MeV, o que significa que estes poderão misturar-se mais facilmente a possíveis excitações intrínsecas.

Velocidades de transição E2 elevadas em relação às estimativas de Weisskopf na região dos núcleos par-par esféricos, ou seja, ao redor das camadas fechadas.

O obedecimento de regras de espaçamento em energia pelos estados excitados do núcleo em estudo bem como de regras de intensidade e até de seleção para as transições eletromagnéticas entre estes estados são um elemento decisivo para a interpretação da dinâmica nuclear em termos de um ou outro modelo.

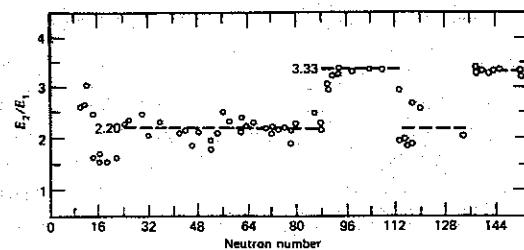


Figura 4 - Razão entre a energia do segundo estado excitado para o primeiro em função do número de nêutrons em núcleos par-par. O valor 3,33 corresponde à excitação rotacional e aquele de ~2 aos núcleos ditos vibracionais (ref. 1, pág. 480).

2 - Construção do Modelo

2.1 - Hipóteses Necessárias

A densidade nuclear é constante, ou seja, o núcleo tem compressibilidade muito baixa, tal que modos de movimento onde a densidade esteja sofrendo flutuações são associados a energias de excitação de algumas dezenas de MeV, fora da região que o modelo pretende descrever (estados mais baixos nucleares, até cerca de 2 MeV).

Base experimental: experimentos de espalhamento de elétrons e outras partículas sobre núcleos, indicando que o volume nuclear é proporcional ao número de nucleons. Isto indica que a energias da ordem da energia de ligação do nucleon não se observam efeitos de flutuação da densidade nuclear.

Uma indicação mais direta pode ser obtida do exame detalhado das características associadas ao modo respiratório (oscilações da densidade nuclear).

O valor adotado para a densidade nuclear é obtido do experimento:

$$\rho_0 \approx 1,72 \times 10^{38} \text{ nucleons/cm}^3$$

A superfície nuclear é bem definida, de modo que podemos considerar bem determinado o raio nuclear R e representá-lo num referencial com origem no centro do núcleo pela expressão:

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 [1 + \sum_{\lambda \mu} \alpha_{\lambda \mu}(t) Y_{\lambda \mu}^*(\theta, \phi)] \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

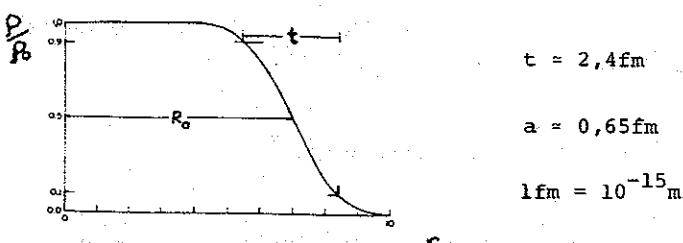
$$\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm \lambda \quad (1)$$

onde os $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos, a base ortogonal completa sobre a esfera de raio unitário, R_0 é o raio de equilíbrio da forma esférica e os $\alpha_{\lambda\mu}(t)$ são as coordenadas generalizadas que, dependentes do tempo, representam a oscilação da superfície nuclear.

Base experimental: ainda o espalhamento de elétrons e outras partículas pelo núcleo, onde o ajuste da seção de choque de espalhamento é conseguido através da elaboração de um modelo para a densidade nuclear, onde sua dependência com a distância ao centro do núcleo é dada por

$$\rho = \frac{R_0}{1 + \exp[(r - R)/a]} \quad (2)$$

onde R é o raio nuclear médio e a é a espessura da superfície nuclear. Um gráfico desta expressão é mostrado a seguir:



O resultado desse mesmo experimento para a determinação dos tamanhos nucleares produz a expressão do raio médio

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1,12 \text{ fm} \quad (3)$$

que para um núcleo com $A = 100$ produz

$$R = 5,2 \text{ fm} \quad (t \text{ significa } 46\% \text{ deste raio})$$

Destes números observamos que a validade desta hipótese é apenas aproximada, de modo que o que realmente decidirá sobre a eficácia deste modelo será a comparação com alguns casos da natureza, que faremos adiante.

2.2 - Variáveis Coletivas $\alpha_{\lambda\mu}$ e a Hamiltoniana Clássica

Na expressão (1) são exploradas convenientemente as propriedades dos harmônicos esféricos, de constituirem uma base sobre a esfera unitária. Dado que eles são completos e que os $Y_{\lambda\mu}$ para λ fixo se comportam sob rotação como as componentes de um tensor esférico de ordem ("rank") λ , a expressão (1) foi construída de maneira a representar corretamente o raio nuclear, que é um escalar (a expressão representa a soma de produtos escalares entre dois tensores de ordem λ). Consulte por exemplo a ref. 2, pág. 84 e a ref. 3, pág. 654). Da realidade de R decorre ainda que

$$\alpha_{\lambda\mu} = (-)^{\mu} \alpha_{\lambda, -\mu}^* \quad (4)$$

A expressão (1) também revela que os valores de equilíbrio dos $\alpha_{\lambda\mu}$ são zero, para os quais $R(\theta, \phi) = R_0$. Vemos então, que se desenvolvermos a dinâmica do modelo num formalismo de pequenas oscilações da superfície nuclear tais que o volume seja conservado (densidade constante), os $\alpha_{\lambda\mu}$ são já as coordenadas adequadas para a construção da Hamiltoniana.

Vamos examinar o significado dos diferentes modos λ de oscilação:

$\lambda = 0$: modo monopolar (2^λ -polo), uma vez que $V_{\infty}(\theta, \phi) = (4\pi)^{-1/2}$ constante, vemos que variações temporais em α_{00} representam variações do volume da esfera e portanto de sua densidade, que neste estágio não são considerados como um modo de movimento importante.

$\lambda = 1$: modo dipolar, como mostra a figura, os $\alpha_{1\mu}$ quando pequenos causam apenas um deslocamento do núcleo como um todo (translação do centro de massa) sem alteração de sua forma. Não representa portanto uma oscilação da superfície.

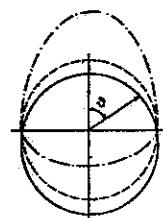


Figura 6 - Modo $\lambda = 1$ para diversas escolhas do $\alpha_{1\mu}$.

$\lambda = 2$: modo quadrupolar, este é o primeiro modo realmente dotado de significado na representação das oscilações da superfície. A figura mostra que ele representa a ida da superfície nuclear por formas que partem da esférica e passam por elipsoides de revolução ou não, com diversas orientações.

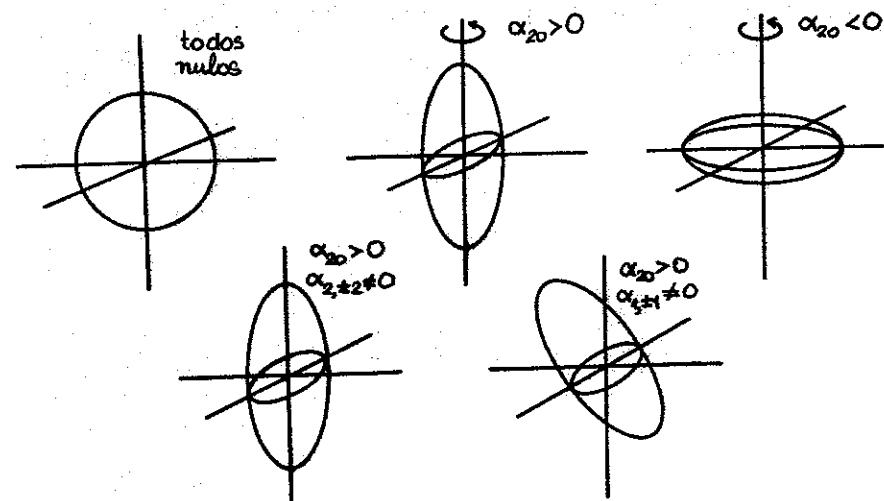


Figura 7 - Modo $\lambda = 2$ para diversas escolhas dos $\alpha_{2\mu}$.

$\lambda = 3$: modo octupolar. Há evidências de estados nucleares correspondendo a vibrações de octupolo do núcleo, mas em número bastante menor do que aqueles com $\lambda = 2$.

Paramos por aqui o nosso exame dos λ por dois motivos importantes:

- modos com $\lambda > 3$, sucessivamente crescente são cada vez menos importantes do ponto de vista experimental, pela escassez e mesmo ausência de evidências claras de sua presença;
- existe também um limite superior para os λ , λ_{\max} . Isto pode ser compreendido quando observamos que para a aplicação deste modelo, o que foi feito foi

"borrar" A nucleons (Z prótons + N neutrons) para compor um fluido, cuja superfície fosse capaz de executar oscilações. O limite na oscilação é determinado pela própria granulidade dessa superfície imaginada, quando retomamos a imagem de A nucleons: a oscilação de maior frequência admissível corresponderia à situação em que um nucleon da superfície estaria oscilando em oposição de fase em relação à oscilação de seus vizinhos mais próximos.

Vamos tratar as oscilações associadas a $\lambda = 2$, as vibrações quadrupolares da superfície nuclear.

A Hamiltoniana, construtível a partir do formalismo de pequenas oscilações, tem o aspecto

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \dot{\alpha}_{\mu}^* \dot{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} V_{\mu\nu} \alpha_{\mu}^* \alpha_{\nu} \quad (5)$$

onde novamente buscamos, utilizando as coordenadas apropriadas para a descrição das pequenas oscilações, construir H em termos do produto de tensores de ordem 2. observe que deixamos de representar o índice $\lambda (=2)$.

O primeiro termo à direita em (5) representa a energia cinética da oscilação e o segundo a energia potencial. Os coeficientes $T_{\mu\nu}$ e $V_{\mu\nu}$ envolvidos são respectivamente os parâmetros iniciais e de restauração do movimento.

Para que o objeto construído em (5) seja um escalar como é razoável para a Hamiltoniana, necessitamos exigir que $\mu = \nu$ nas duas somatórias.

Fazendo ainda as simplificações $V_{\mu\mu} = C$, constan-

te independente de μ e $T_{\mu\mu} = B$, nas mesmas condições, obtemos

$$H = \frac{1}{2} B \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{\mu}|^2 + \frac{1}{2} C \sum_{\mu} |\alpha_{\mu}|^2 \quad (6)$$

A Lagrangeana associada a (6) é

$$L = T - V = \frac{1}{2} B \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{\mu}|^2 - \frac{1}{2} C \sum_{\mu} |\alpha_{\mu}|^2 \quad (7)$$

de modo que podemos encontrar o momento canonicamente conjugado à coordenada α_{μ} , que chamaremos π_{μ} :

$$\pi_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_{\mu}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_{\mu}} = B \dot{\alpha}_{\mu}^* = (-)^{\mu} B \dot{\alpha}_{-\mu} \quad (8)$$

Reescrevendo a Hamiltoniana em termos das coordenadas e momentos

$$H = \frac{1}{2B} \sum_{\mu} |\pi_{\mu}|^2 + \frac{1}{2} C \sum_{\mu} |\alpha_{\mu}|^2 \quad (9)$$

Esta Hamiltoniana representa um sistema de osciladores harmônicos desacoplados, mas exatamente cinco deles no caso de oscilações de quadrupolo, correspondendo a $\mu = -2, -1, 0, +1$ e $+2$. A frequência de oscilação é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{B}} \quad (10)$$

2.3 - O Momento Angular da Oscilação de Multipolaridade λ

Ainda seguindo o caminho da Mecânica Clássica, o momento angular associado à oscilação de multipolaridade λ pode ser calculado através da soma dos momentos angulares elementares

$$\vec{L}^\lambda = \int_{\text{volume nuclear}} \vec{r} \times d\vec{p} = \int_{\text{volume nuclear}} \vec{r} \times (\rho dm \vec{v}) = \int_{\text{volume nuclear}} \rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}) d^3 r, \quad (11)$$

onde o superscrito λ indica que a superfície nuclear, representada pela equação (1) sofre oscilações rotuladas por um único λ .

Supondo que o fluxo do material nuclear é irrotacional, obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{v}_x \quad (12)$$

onde $x(\vec{r})$ é o potencial de velocidades. Utilizando a hipótese inicial de núcleo incompressível, ou seja, que a densidade nuclear é constante, igual a ρ_0 e a equação de continuidade para o movimento do material nuclear, obtemos

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = (\cancel{\rho_0}) \cdot \vec{v} + \rho \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (13)$$

o que implica que $x(\vec{r})$ satisfaz à equação de Laplace,

$$v_x^2 = 0$$

$$\text{com solução } x(\vec{r}) = \sum_{\ell m} C_{\ell m} r^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (14)$$

onde as constantes $C_{\ell m}$ são obtidas ao aplicarmos a condição de contorno sobre \vec{v} na superfície nuclear, de que sua componente radial deve ser igual a $\dot{R}(\theta, \phi, t)$ com θ e ϕ fixos.

A velocidade radial é dada por

$$v_r = -\frac{\partial x}{\partial r} = -\sum_{\ell m} \ell C_{\ell m} r^{\ell-1} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi), \quad (15)$$

ao passo que $\dot{R}(\theta, \phi)$ vale

$$\dot{R}(\theta, \phi) = R_0 \sum_{\mu} \dot{a}_{\lambda \mu} Y_{\lambda \mu}^*(\theta, \phi). \quad (16)$$

Igualar (15) a (16) tomando apenas os termos de ordem zero nos $a_{\lambda \mu}$ equivale substituir $r^{\ell-1} = R_0^{\ell-1}$ em (15) e notamos que $\ell = \lambda$ e $m = \mu$

$$C_{\ell m} = C_{\lambda \mu} = -\frac{1}{\lambda} R_0^{2-\lambda} \dot{a}_{\lambda \mu} \quad (17)$$

$$\text{produzindo } x = -\frac{1}{\lambda} R_0^{2-\lambda} r^\lambda \sum_{\mu} \dot{a}_{\lambda \mu} Y_{\lambda \mu}^*(\theta, \phi). \quad (18)$$

Podemos agora retornar à expressão (11) para o momento angular

$$\vec{L}^\lambda = - \left[\rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v}_x d^3 r = \frac{\rho_0}{\lambda} R_0^{2-\lambda} \sum_{\mu} \dot{a}_{\lambda \mu} \left[\int_0^{R(\lambda)(\theta, \phi)} r^{\lambda+2} dr \right] \left[d\Omega (\vec{r} \times \vec{v}) Y_{\lambda \mu}^* \right] \right] \quad (19)$$

onde foram usados os fatos de que a densidade nuclear é constante igual a ρ_0 e de que o operador diferencial $\vec{r} \times \vec{v}$

só age sobre as coordenadas angulares¹, sendo possível a integração em dr primeiro:

$$\hat{L}^\lambda = \frac{\rho_o R_o}{\lambda} \sum_{\mu} \hat{a}_{\lambda\mu} \left[\int \frac{d\Omega}{(\lambda+3)} [1 + \sum_{\mu'} \alpha_{\lambda\mu'} Y_{\lambda\mu'}^*(\theta, \phi)]^{\lambda+3} (\vec{r} \times \vec{v}) Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right] \quad (20)$$

observando que

$$\vec{r} \times \vec{v} = i \hat{L} \quad (21)$$

onde \hat{L} é o operador momento angular da Mecânica Quântica, escrevemos

$$\hat{L}^\lambda = i \frac{\rho_o R_o}{\lambda} \sum_{\mu} \hat{a}_{\lambda\mu} \left[\int \frac{d\Omega}{(\lambda+3)} [1 + \sum_{\mu'} \alpha_{\lambda\mu'} Y_{\lambda\mu'}^*(\theta, \phi)]^{\lambda+3} \hat{L} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right] \quad (22)$$

Usando agora a expansão binomial

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2, \quad x \ll 1 \quad (23)$$

$$e^{\hat{L}} Y_{\lambda\mu}^* = (-)^{\mu} \hat{L} Y_{\lambda,-\mu} = (-)^{\mu} \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \hat{Y}_{\lambda\lambda,-\mu} \quad (24)$$

$$\text{onde } \hat{Y}_{\lambda\lambda,-\mu} = \sum_{m\tau} \langle \lambda m | \tau | \lambda, -\mu \rangle Y_{\lambda m}(\theta, \phi) \hat{e}_\tau, \quad \tau = 0, \pm 1 \quad (25)$$

observe a eq. (21), a seguir e comentário que a sucede.

obtemos

$$\hat{L}^\lambda \approx i \frac{\rho_o R_o}{\lambda} \sum_{\mu m\tau} \hat{a}_{\lambda\mu} (-)^{\mu} \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \langle \lambda m | \tau | \lambda, -\mu \rangle \hat{e}_\tau$$

$$+ \left[\int \frac{d\Omega}{\lambda+3} Y_{\lambda m} + \sum_{\mu'} \alpha_{\lambda\mu'} \int d\Omega Y_{\lambda\mu'}^* Y_{\lambda m} \right] \quad (26)$$

onde (23) foi usada apenas até 1^a ordem nos $\alpha_{\lambda\mu}$; $\hat{Y}_{\lambda\lambda,-\mu}$ são os esféricos harmônicos vetoriais, \hat{e}_τ são os versores esféricos usuais,

$$\hat{e}_0 = \hat{k}, \quad \hat{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{i} \pm i\hat{j}) \quad \text{e} \quad (27)$$

o termo $\langle \lambda m | \tau | \lambda, -\mu \rangle$ é um coeficiente de Clebsch-Gordan.

A primeira integral à direita de (26) vale $\frac{\sqrt{4\pi}}{\lambda+3} \delta_{\lambda 0} \delta_{m 0}$, o que se anula, pois $\lambda \neq 0$. A segunda integral vale $\delta_{\mu' m}$, o que restringirá a soma em m:

$$\hat{L}^\lambda \approx i \frac{\rho_o R_o}{\lambda} \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \sum_{\mu\mu'\tau} (-)^{\mu} \hat{a}_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu'} \langle \lambda\mu' | \tau | \lambda, -\mu \rangle \hat{e}_\tau \quad (28)$$

Fazendo uso de (8) podemos escrever o momento angular coletivo como

$$\hat{L}^\lambda = i \frac{\rho_o R_o}{\lambda} \frac{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}}{B} \sum_{\mu\mu'\tau} \pi_{\lambda, -\mu} \alpha_{\lambda\mu'} \langle \lambda\mu' | \tau | \lambda, -\mu \rangle \hat{e}_\tau \quad (29)$$

Usando agora um resultado não demonstrado aqui, mas que pode ser visto por exemplo na ref. 3 Apêndice 6-A:

a energia cinética devida ao fluxo irrotacional do material nuclear tem um parâmetro de massa que, para oscilações de multipolaridade λ , é dado por

$$B = B_\lambda = \frac{1}{\lambda} \rho_0 R_0^5, \quad (30)$$

que substituído em (29) produz para a componente esférica de L^λ o valor

$$L_\tau^\lambda = i\sqrt{\lambda(\lambda+1)} \sum_{\mu\mu} \pi_{\lambda,-\mu} \alpha_{\lambda\mu} <\lambda\mu|l\tau|\lambda,-\mu> \quad (31)$$

Procederemos à quantização desta componente, simetrizando antes o produto

$$\pi_{\lambda,-\mu} \alpha_{\lambda\mu}, \text{ substituindo-o por } \frac{1}{2}(\pi_{\lambda,-\mu} \alpha_{\lambda\mu} + \alpha_{\lambda\mu} \pi_{\lambda,-\mu}) \quad (32)$$

isto porque os operadores que passarão a representar estes observáveis não são comutativos na Mecânica Quântica, valendo seu comutador

$$[\hat{a}_{\lambda\mu}, \hat{\pi}_{\lambda,-\mu}] = i \delta_{\lambda\lambda} \delta_{\mu\mu}, \quad (33)$$

onde estamos utilizando unidades naturais, com $\hbar = c = 1$.

Nestes termos, a equivalente quântica de (31) se escreve

$$\hat{L}_\tau^\lambda = \frac{i}{2} \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \sum_{\mu\mu} (i\delta_{\mu,-\mu} + 2\hat{\pi}_{\lambda,-\mu} \hat{a}_{\lambda\mu}) <\lambda\mu|l\tau|\lambda,-\mu> \quad (34)$$

Seguindo agora a mesma prescrição proposta por Bohr, e que leva a Hamiltoniana à sua representação no espaço de Fock das excitações vibracionais, os fonons (ref. 12)

$$\hat{a}_{\lambda\mu} = -i^{-\lambda} \sqrt{\frac{1}{2B_\lambda \omega_\lambda}} [b_{\lambda\mu}^+ + (-)^{\lambda+\mu} b_{\lambda,-\mu}], \quad (35)$$

$$\hat{\pi}_{\lambda\mu} = -i^{\lambda-1} \sqrt{\frac{B_\lambda \omega_\lambda}{2}} [b_{\lambda\mu} - (-)^{\lambda+\mu} b_{\lambda,-\mu}^+]$$

O operador $b_{\lambda\mu}^+$ ($b_{\lambda\mu}$) é o operador de criação (aniquilação) de um quantum de excitação vibracional (fonon). Estes operadores gozam de propriedades ilustradas na seção (2.4), das quais utilizaremos as seguintes:

a. $|0\rangle$ é o vácuo de excitações ou estado fundamental no espaço de Fock.

b. $b_{\lambda\mu}^+ |0\rangle = |n_{\lambda\mu} = 1\rangle$ é o estado de um fonon, associado aos números $\lambda\mu$.

c. $[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda,-\mu}^+] = \delta_{\lambda\lambda} \delta_{\mu\mu}$, é o único comutador não nulo entre estes operadores e seu valor decorre do comutador fundamental, a equação (33).

d. $|n_{\lambda\mu} = 1\rangle = |\lambda\mu\rangle$ é a identidade entre o estado de um fonon $\lambda\mu$ e o estado correspondente (de um corpo) no espaço de Hilbert usual da Mecânica Quântica, rotulado pelos números $\lambda\mu$.

O produto $\hat{\pi}_{\lambda,-\mu} \hat{a}_{\lambda\mu}$, presente em (34) vale

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{\lambda,-\mu} \hat{a}_{\lambda\mu} = & \frac{i}{2} [b_{\lambda,-\mu} b_{\lambda\mu}^+ + (-)^{\lambda+\mu} b_{\lambda,-\mu} b_{\lambda,\mu}^+] \\ & - (-)^{\lambda-\mu} b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda\mu}^+ - (-)^{-\mu+\mu} b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda,-\mu}] \end{aligned} \quad (36)$$

18.

temos então

$$\begin{aligned} \hat{L}_\tau^\lambda &= \frac{1}{2} \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \sum_{\mu\mu'} \{ -\delta_{\mu\mu'} b_{\lambda,-\mu} b_{\lambda,\mu}^+ + (-)^{\lambda+\mu} b_{\lambda,-\mu} b_{\lambda,\mu}^+ \\ &- (-)^{\lambda-\mu} b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda\mu}^+ - (-)^{-\mu+\mu'} b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda,-\mu'} \}. \\ &\quad \langle \lambda\mu' | \lambda\tau | \lambda, -\mu \rangle \end{aligned} \quad (37)$$

Para que o coeficiente de Clebsh-Gordan não se anule, devemos ter

$$\mu' = -\mu - \tau \quad (38)$$

e usando a relação

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle = (-)^{j_2+m_2} \sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_1+1}} \langle j_3 -m_3 j_2 m_2 | j_1 -m_1 \rangle \quad (39)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{L}_\tau^\lambda &= \frac{1}{2} \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \sum_{\mu} \{ -\cancel{\delta_{\mu-\tau, -\mu}} + \cancel{\delta_{-\mu, -\mu-\tau}} + b_{\lambda, -\mu-\tau}^+ b_{\lambda, -\mu} \\ &+ (-)^{\lambda-\mu-\tau} b_{\lambda, -\mu} b_{\lambda, \mu+\tau} - (-)^{\lambda-\mu} b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda, -\mu-\tau}^+ - (-)^\tau b_{\lambda\mu}^+ b_{\mu, \mu+\tau}^+ \} \\ &\quad \cdot \langle \lambda\mu | \lambda(\mu+\tau) | \lambda, -\mu \rangle (-)^{\tau+1} \end{aligned} \quad (40)$$

onde utilizamos também o valor do comutador $[b, b^+]$ da propriedade c, para o primeiro par de operadores b, b^+ à direita em (37).

Agora nos interessa fazer o cálculo do valor esperado de \hat{L}_τ^λ entre os estados de 1 fonon $|\lambda m'\rangle$ e $|\lambda m\rangle$:

19.

$$\begin{aligned} \langle \lambda m' | \hat{L}_\tau^\lambda | \lambda m \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \sum_{\mu} \{ \langle \lambda m' | b_{\lambda, -\mu-\tau}^+ b_{\lambda, -\mu} | \lambda m \rangle (-)^{\tau+1} - \\ &- (-)^{\lambda-\mu} \langle \lambda m' | b_{\lambda, -\mu} b_{\lambda, \mu+\tau} | \lambda m \rangle + (-)^{\lambda-\mu+\tau} \langle \lambda m' | b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda, -\mu-\tau}^+ | \lambda m \rangle + \\ &+ \langle \lambda m' | b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda, \mu+\tau} | \lambda m \rangle \} \langle \lambda\mu | \lambda(\mu+\tau) | \lambda(\mu+\tau) \rangle \end{aligned} \quad (41)$$

Devido à estrutura dos elementos da matriz em (41) só serão não nulos o primeiro e o quarto à sua direita, valendo

$$\begin{aligned} \langle \lambda m' | \hat{L}_\tau^\lambda | \lambda m \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \{ (-)^{\tau+1} \delta_{m, -\mu} \delta_{m', -\mu-\tau} \\ &+ \delta_{m, \mu+\tau} \delta_{m', \mu} \} \langle \lambda\mu | \lambda(\mu+\tau) | \lambda(\mu+\tau) \rangle \end{aligned} \quad (42)$$

ou

$$\langle \lambda m' | \hat{L}_\tau^\lambda | \lambda m \rangle = \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \langle \lambda m' | \lambda m \rangle \quad (43)$$

para $\tau = 0$

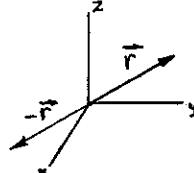
$$\langle \lambda m' | \hat{L}_0^\lambda | \lambda m \rangle = \langle \lambda m' | \hat{L}_z^\lambda | \lambda m \rangle = m \delta_{mm'}^2 \quad (44)$$

As equações (43) e (44) têm um significado bastante importante: os fonons associados às oscilações de superfície de multipolaridade λ têm um momento angular

² para obter este resultado veja, por exemplo a ref. 4, pág. 76, tabela 2³, para o valor de $\langle j_1 m_1 | j_1 m_1 \rangle$.

igual a λ em unidades de \hbar , ou seja, os rótulos $|\lambda m\rangle$ que associamos aos estados de um fonon significam fisicamente o valor do momento angular (λ) e de sua componente z(m).

Uma característica também importante é a paridade associada aos fonons de multipolaridade λ . Para isso podemos examinar o comportamento de $R(\theta, \phi)$ sob operação



de paridade: o comportamento de um vetor-posição \vec{r} sob operação de paridade é tal que ele se torna $-\vec{r}$, e simbolicamente, chamando de P ao operador de paridade, temos

Figura 8

$$P \vec{r} P^{-1} = -\vec{r} \text{ ou } P(r, \theta, \phi) P^{-1} = (r, \pi - \theta, \phi + \pi) \quad (45)$$

Vemos então que

$$P R(\theta, \phi) \vec{e}_r P^{-1} = P(R, \theta, \phi) P^{-1} = (R, \pi - \theta, \phi + \pi) \quad (46)$$

o que faz concluir que $R(\theta, \phi)$ deve ser um invariante por reflexão valendo então que

$$R(\theta, \phi) = PR(\theta, \phi) = R(\pi - \theta, \phi + \pi) \quad (47)$$

ou seja:

$$R_0 [1 + \sum_{\lambda \mu} \alpha_{\lambda \mu} Y_{\lambda \mu}^*] = R_0 [1 + \sum_{\lambda \mu} P \alpha_{\lambda \mu} P^{-1} P Y_{\lambda \mu}^*] \quad (48)$$

é fácil mostrar que³ a paridade dos $Y_{\lambda \mu}$ é dada por $(-)^{\lambda}$,

ou seja

$$P Y_{\lambda \mu} = (-)^{\lambda} Y_{\lambda \mu} \quad (49)$$

colocando (49) em (48) sai

$$P \alpha_{\lambda \mu} P^{-1} = (-)^{\lambda} \alpha_{\lambda \mu} \quad (50)$$

ou seja, a paridade dos fonons é dada por $(-)^{\lambda}$, pois os operadores $b(b^+)$ obedecerão à mesma regra dada por (50).

O caso que passaremos a tratar, sendo aquele das vibrações quadrupolares, ou seja $\lambda = 2$ implica então que tais vibrações estão associadas a fonons de momento angular $\lambda = 2$ e paridade positiva.

2.4 - O Operador Hamiltoniano no Espaço de Fock

A Hamiltoniana clássica dada pela equação (9) pode agora ser quantizada, com a mesma prescrição usada na seção anterior, produzindo o operador Hamiltoniano no espaço de Fock, mais confortável de se trabalhar. Para isso escrevemos o operador \hat{H} ainda em termos dos operadores

$\hat{\pi}_{\lambda \mu}$ e $\hat{a}_{\lambda \mu}$, $\lambda = 2$:

$$\hat{H} = \frac{1}{2B} \sum_{\mu} \hat{\pi}_{\mu}^+ \hat{\pi}_{\mu}^- + \frac{C}{2} \sum_{\mu} \hat{a}_{\mu}^+ \hat{a}_{\mu}^- \quad (51)$$

a substituição das expressões (35) produz (deixamos de apresentar λ)

$$\hat{H} = \omega \sum_{\mu} (b_{\mu}^+ b_{\mu}^- + 1/2) \quad (52)$$

um resultado bastante conhecido. Para chegarmos a isto foi

³ basta usar a expressão $Y_{\lambda \mu}(\theta, \phi) = e^{i \mu \phi} (-)^{\mu} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \frac{(\lambda-\mu)!}{(\lambda+\mu)!} \cdot \sin^{\mu} \theta \frac{\partial^{\mu}}{\partial \cos^{\mu} \theta} P_{\lambda}(\cos \theta)$ lembrando que $(\cos \theta \rightarrow -\cos \theta, \sin \theta \rightarrow \sin \theta)$ e $e^{i \mu \phi} \rightarrow (-)^{\mu} e^{i \mu \phi}$ sob reflexão espacial e que os polinômios de Legendre $P_{\ell}(x)$ têm paridade $(-)^{\ell}$, $P_{\ell}(-x) = (-)^{\ell} P_{\ell}(x)$.

usado o fato de que o único comutador não nulo entre os operadores b_μ , b_μ^+ vale

$$[b_\mu, b_\mu^+] = \delta_{\mu\nu}, \quad (53)$$

como consequência do comutador fundamental (33).

Estes operadores tem um conjunto de propriedades que apresentamos a seguir.

A base, para a representação dos estados é aquela em que os rótulos são os números de fonons dos diversos μ ($\lambda = 2$ fixo). Nesta base existe o vácuo de excitação, o estado de zero fonons,

a. $|0\rangle = \text{vácuo} = |00000\rangle = |n_{-2} = 0, \dots, n_2 = 0\rangle$

b. $b_\mu^+|0\rangle = |n_\mu = 1\rangle$

c. esquecendo o índice μ , $b^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ ⁴

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

d. $b^+b|n\rangle = n|n\rangle$

e. define-se então o operador número de fonons, com número quântico μ

$$\hat{n}_\mu = b_\mu^+ b_\mu \quad (54)$$

e o total: $\hat{N} = \sum_\mu \hat{n}_\mu \quad (55)$

faço aqui a suposição que estes resultados são já bem conhecidos, a partir da solução do oscilador harmônico quântico. Consulte por exemplo a ref. 5, capítulo I, item I.6.

(54) e (55) permitem reescrever (52) como

$$\hat{H} = \omega \sum_\mu (\hat{n}_\mu + 1/2) = \omega (\hat{N} + 5/2) \quad (56)$$

A base pode então ser representada no espaço de Fock de forma explícita,
⁵

$$|n_{-2}, n_{-1}, n_0, n_1, n_2\rangle \text{ ou abreviada } |N\rangle.$$

O momento angular e paridade destes fonons de quadrupolo é

$$J^\pi = 2^+,$$

caso seja interessante representar os estados de maneira acoplada em momento angular, escrevemos

$$|N(2^+)^N_{IM}\rangle = |NIM\rangle$$

que significa que temos N fonons de momento angular e paridade 2^+ acoplados dando o momento angular total I , paridade positiva e componente $z = M$.

⁵ a primeira representação ocorrerá na forma desacoplada em momento angular, e a segunda na forma acoplada.

3 - O Espectro Vibracional

Vemos que os autovalores de \hat{H} em (56) são dados por

$$E = E_N = (N + 5/2)\omega \quad (57)$$

Igualmente espaçados então serão os autoestados, com energias iguais a

$$E_0 = 5/2\omega, E_1 = 7/2\omega, E_2 = 9/2\omega, \dots \text{ tal que } E_N - E_{N-1} = \omega. \quad (58)$$

Quanto ao momento angular total e paridade destes estados, este será 0^+ para o estado fundamental (zero fonons) e 2^+ para o estado de um fonon, que fica ω acima do fundamental em energia. Haverá vários estados de dois fonons, todos degenerados à energia 2ω acima do estado fundamental, sendo que seu momento angular depende de como podemos acoplar dois momentos angulares 2 produzindo o estado $|2IM\rangle$. O mesmo tipo de consideração deve ser feito para $N > 3$.

Está claro por construção que este modelo vibracional quadrupolar só é capaz de produzir estados de paridade positiva.

Retornando à questão dos momentos angulares possíveis, nos restringiremos à conta para os estados $N = 2$, apresentando apenas o resultado para alguns N superiores.

De forma geral, o que queremos fazer é acoplar os estados $|12\mu\rangle$ e $|12\mu'\rangle$ para obter $|2(2)^2 IM\rangle$. Isto se faz com o uso dos coeficientes de Clebsch-Gordan $\langle 2\mu 2\mu' | IM \rangle$ onde efetuamos a combinação linear dos estados de um fonon.

$$|2(2)^2 IM\rangle = A_I \sum_{\mu(\mu')} \langle 2\mu 2\mu' | IM \rangle |12\mu\rangle |12\mu'\rangle. \quad (59)$$

onde A_I é uma constante de normalização. Se fosse apenas isto, diríamos que os momentos angulares possíveis são

$$|2-2| \leq I \leq 2+2 \text{ ou seja } I = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (60)$$

Sucede que a relação de comutação

$$[b_\mu^+, b_\mu^+] = 0 \text{ ou } b_\mu^+ b_\mu^+ - b_\mu^+ b_\mu^+ = 0, \quad (61)$$

significando $b_\mu^+ b_\mu^+ = b_\mu^+ b_\mu^+$ que as funções de onda vibracionais devem ser simétricas pela troca de fonons. As relações de comutação apresentadas para os operadores b são típicas de bosons, implicando nesta simetria definida para as funções de onda. Se aplicarmos esta condição à função de onda (59) obtemos:

$$\sum_{\mu(\mu')} \langle 2\mu 2\mu' | IM \rangle |12\mu\rangle |12\mu'\rangle = \sum_{\mu(\mu')} \langle 2\mu' 2\mu | IM \rangle |12\mu'\rangle |12\mu\rangle \quad (62)$$

fazendo uso da relação

$$\langle 2\mu 2\mu' | IM \rangle = (-)^{2+2-I} \langle 2\mu' 2\mu | IM \rangle = (-)^I \langle 2\mu' 2\mu | IM \rangle \quad (63)$$

vemos que as únicas funções de onda que possuirão esta simetria são aquelas onde I é par. Eliminamos então $I = 1$ e $I = 3$ em (60) e os momentos angulares possíveis se restringem a $I = 0, 2$ e 4 , paridade $+$. Existe então um triplo de estados de 2 fonons, localizado à energia de 2ω ($2\mu\mu'$), com os momentos angulares discutidos aqui.

Limitamo-nos a apresentar uma tabela de quantos esta-

dos de momento angular I , para N fonons (retirada da ref. 3, pág. 347).

Tabela I - Número de estados com N quanta de quadrupolo e momento angular total I .

		I												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N \ I	0	1												
0	1													
1		1												
2	1		1											
3	1		1	1										
4	1		2		2	1	1							
5	1		2	1	2	1	2	1	1					
6	2		2	1	3	1	3	1	2	1	1			

Nesta tabela fica evidente uma característica que não é só deste mas também de outros modelos coletivos, que é o de não se conseguir reproduzir estados com $J^T = 1^+$. Este fato é decorrente essencialmente das simetrias a que devem satisfazer as funções de onda coletivas.

Esquematicamente, o diagrama de níveis produzido por este modelo vibracional é

$$3\hbar\omega \quad N = 3 \quad 0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 6^+$$

$$2\hbar\omega \quad N = 2 \quad 0^+, 2^+, 4^+$$

$$\hbar\omega \quad N = 1 \quad 2^+$$

$$0 \quad N = 0 \quad 0^+$$

(E) (N) (J^T)

Figura 9 - Esquema de níveis de um núcleo vibracional.

4 - Transições Eletromagnéticas⁶

4.1 - Intereração Eletromagnética como Ferramenta no Estudo do Núcleo

A interação eletromagnética é uma ferramenta poderosa para a compreensão da estrutura nuclear pois

- 1) ela é a melhor compreendida das quatro interações fundamentais;
- 2) sua intensidade é suficientemente alta para que existam efeitos observáveis a partir da distribuição de cargas e correntes nucleares e baixa o suficiente em relação à interação forte de modo a permitir o uso da teoria de perturbações para a sua descrição;
- 3) não há outra interação para a qual podemos investigar experimentalmente tanto os campos clássicos como os quanta a eles associados.

O estudo dos núcleos através da interação eletromagnética pode ser feito de vários modos:

- 1) estudo dos campos eletromagnéticos na emissão e absorção de radiação gama nuclear;
- 2) estudo do espalhamento de partículas carregadas carregadas, como elétrons, mísseis e o fenômeno de excitação;

⁶ esta parte foi fortemente baseada na ref. 1, cap. VIII, ref. 6, caps. I a III e ref. 7, caps. IX e XVI.

tação coulombiana;

- 3) estudo da penetração de leptons carregados no núcleo, como em átomos miônicos e efeitos de penetração na conversão de elétrons (conversão interna).

Nosso estudo se concentrará nas previsões do modelo coletivo vibracional para o item (1) acima.

4.2 - Ondas Eletromagnéticas e Campos Multipolares

Os campos eletromagnéticos $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{B}(\vec{r},t)$ devem satisfazer às equações de Maxwell, que para uma distribuição de cargas $\rho(\vec{r},t)$ e correntes $\vec{j}(\vec{r},t)$ dadas, são

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 4\pi\vec{j}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\quad (64)$$

$$(m = m_e = c = 1, q_e = -e, e^2 = \alpha).$$

A equação de continuidade, que representa a conservação da carga é consequência de (64)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (65)$$

As equações (64) podem ser reduzidas e desacopladas pela introdução do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r},t)$ e escalar $\phi(\vec{r},t)$, tais que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{e} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi. \quad (66)$$

Como sabemos, \vec{A} e ϕ não são determináveis de modo único via estas equações, mas é possível a escolha de diversos "cali-

bres" para se trabalhar. Aquele mais conveniente para a quantização do campo eletromagnético é o dito calibre de Coulomb ou de radiação, dado por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (67)$$

Nestas circunstâncias, \vec{A} é um campo solenoide puro e este calibre selecionará as soluções de (64) que tenham caráter transversal. Neste calibre, as equações para \vec{A} e ϕ são

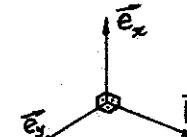
$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi\vec{j}^t, \quad \vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho. \quad (68)$$

$\vec{j}^t(\vec{r},t)$ é a parte da corrente com divergência nula.

No vácuo, tanto $\vec{j}(\vec{r},t)$ como $\rho(\vec{r},t)$ são nulos, que permite escrever para $\vec{A}(\vec{r},t)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (69)$$

A solução da equação de onda para \vec{A} (2ª das eqs. 69) pode ser escrita na forma de uma onda plana com vetor de propagação \vec{k} e polarização linear (direção do campo elétrico) na direção \vec{e}_x ou \vec{e}_y .



$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= \vec{e}_x \cdot \exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega t)] \\ \text{ou } \vec{A}(\vec{r},t) &= \vec{e}_y \cdot \exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega t)]\end{aligned}\quad (70)$$

com $\vec{p} = \omega \vec{k}$, $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{k}$ e $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{k}| = 1$.

Figura 10

Ondas com polarização circular podem ser obtidas pela construção dos versores de polarização circular

$$\vec{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y), \quad \vec{e}_0 = \vec{e}_z = \vec{k} \quad (71)$$

e as ondas planas se escrevem

$$\vec{A}_{p\tau} = C \vec{e}_\tau \exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega t)], \quad \tau = \pm 1 \quad (72)$$

onde $\tau = \pm 1$ é a helicidade das ondas de polarização circular. $\tau = +1(-1)$ corresponde a polarização circular direita (esquerda), C é uma constante de normalização. Normalizando $\vec{A}_{p\tau}$ com a condição de periodicidade no cubo de lado L obtemos

$$\vec{A}_{p\tau}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{L^3 \omega}} \vec{e}_\tau \exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega t)], \quad \tau = \pm 1 \quad (73)$$

onde foi exigido que no interior do cubo $\vec{A}_{p\tau} + \vec{A}_{p\tau}^*$ represente exatamente um fóton.

Um campo vetorial \vec{A} geral pode ser escrito como uma combinação linear das duas soluções (73)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{p\tau} [\vec{A}_{p\tau} a_{p\tau} + \vec{A}_{p\tau}^* a_{p\tau}^*] \quad (74)$$

onde $a_{p\tau}$ são os coeficientes da expansão.

Para um estudo das soluções em ondas esféricicas é interessante examinar como são as ondas esféricas escalares. Se a dependência temporal for harmônica⁷

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (75)$$

a equação de onda se torna a equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + \omega^2) \phi(\vec{r}) = 0 \quad (76)$$

e a solução em coordenadas esféricas pode ser escrita na

⁷ o que se consegue fazendo a análise de Fourier de uma dependência temporal qualquer.

forma

$$\hat{\phi}_{LM}(\vec{r}, t) = f_L(\omega r) Y_{LM}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad (77)$$

onde $Y_{LM}(\theta, \phi)$ é o harmônico esférico e $f_L(\omega r)$ pode ser qualquer uma das funções esféricas de ordem L a seguir

$j_L(\omega r)$, a função de Bessel esférica, representativa de uma onda estacionária, regular na origem.

$h_L^{(1)}(\omega r)$, a função de Hankel esférica de primeira espécie, representativa de uma onda esférica emergente.

$h_L^{(2)}(\omega r)$, a função de Hankel esférica de segunda espécie, representativa de uma onda esférica imergente.

O uso de j_L deve ser feito no interior da esfera de raio R , e é feito para a construção da solução interior de ϕ_{LM} . A solução exterior à esfera deve utilizar alguma das funções $h_L^{(i)}$.

Para obtermos a solução da equação de onda vetorial, podemos proceder à aplicação de um operador vetorial diferencial, \hat{U} sobre os ϕ_{LM} , que comute com o laplaciano, tal que

$$\hat{U}(\nabla^2 + \omega^2) \phi_{LM} = (\nabla^2 + \omega^2) \hat{U} \phi_{LM} = \vec{0} \quad (78)$$

de tal modo que $\hat{U} \phi_{LM}$ é a solução vetorial que procuramos.

A primeira idéia seria o gradiente, $\vec{\nabla}$, mas a pura e simples aplicação do gradiente a ϕ_{LM} produzirá um campo que não obedece a condição que expressa o calibre de radiação, (67). O potencial vetor gerado por esta operação tem então caráter longitudinal,

$$\vec{A}_{LM}^{\ell}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}\phi_{LM}(\vec{r}, t), \vec{\nabla} \times \vec{A}_{LM}^{\ell}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (79)$$

mas esta solução não nos interessa.

Um operador que pode satisfazer às duas condições (67) e (78) é o operador momento angular da Mecânica Quântica,

$$\vec{U} = \vec{L} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla} \quad (80)$$

que, é evidente por sua estrutura, tem $\vec{\nabla} \cdot \vec{L} = 0$. Como sabemos, \vec{L} só opera sobre as variáveis angulares θ e ϕ e tem as propriedades

$$\begin{aligned} L^2 Y_{LM} &= L(L+1)Y_{LM} \\ L_z Y_{LM} &= M Y_{LM} \end{aligned} \quad (81)$$

$$L_{\pm} Y_{LM} = (L_x \pm i L_y) Y_{LM} = \sqrt{(L \mp M)(L \pm M+1)} Y_{L, M \mp 1}$$

O potencial vetor \vec{A} assim construído tem o seguinte aspecto

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{LM}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{\nabla}\phi_{LM}(\vec{r}, t)}{\sqrt{L(L+1)}}. \quad (82)$$

Com a introdução dos harmônicos esféricos vetoriais

$$\hat{Y}_{JM}(\hat{r}) = \sum_m \langle \ell m | J M \rangle Y_{\ell m}(\hat{r}) \hat{e}_r, \hat{r} \equiv \hat{e}_r \quad (83)$$

que desfrutam da propriedade

$$\hat{L} Y_{\ell m}(\hat{r}) = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hat{Y}_{\ell m}(\hat{r}) \quad (84)$$

(82) pode ser reescrita

$$\vec{A}_{LM}(\vec{r}, t) = f_L(\omega r) \hat{Y}_{LLM}(\hat{r}) e^{-i\omega t} \quad (85)$$

Analisemos as características físicas desta solução. As equações (66) mostram que, no vácuo, \vec{E} tem a direção de $\partial \vec{A} / \partial t$, que para a dependência harmônica estipulada, é a própria direção de \vec{A} . Como é bem sabido, para regiões bastante afastadas da distribuição de carga e corrente, o que vemos é uma onda esférica, com uma certa distribuição angular em relação às fontes. Nestas circunstâncias, tanto \vec{E} como \vec{B} são transversais à direção de propagação (radial) como é de se esperar. Mais explicitamente, na região afastada ou zona de radiação⁸ não há diferença perceptível no comportamento dos campos, a não ser pela distribuição angular da radiação.

A próxima consideração é sobre o que acontece na região mais próxima às fontes, se (85) dá ou não conta de todos os comportamentos possíveis. A zona próxima é dita zona estática (estamos aqui utilizando já propriedades da aproximação de comprimentos de onda longos, consistente com a física que desejamos analisar, e que é explicada mais adiante) onde o aspecto dos campos, retirada a sua dependência temporal, é aproximadamente aquele de distribuições estáticas.

Do fato de que a estrutura de \vec{L} é aquela dada por (80) vemos que vale a equação entre operadores

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = 0 \quad (86)$$

⁸ consulte por exemplo a ref. 7, caps. IX e XVI.

Isto significa que o potencial vetor (85) será representativo de um campo elétrico transversal sempre, enquanto que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ terá componente transversal e radial, sucedendo que aquela radial decrescerá bem mais rapidamente do que a outra ao nos afastarmos das fontes.

Há neste ponto dois fatos a considerar:

a) a solução proposta (85) não abrange todas as situações possíveis;

b) afirmo sem demonstrar (consulte a ref. 7) que nestas circunstâncias o campo magnético na região estática é bastante conhecido: é aquele do 2^L -polo magnético estático, a menos do fator $e^{-i\omega t}$.

Por estes dois motivos a solução (85) é dita de natureza magnética e escrevemos

$$\hat{A}_{LM}^{(M)}(\vec{r},t) = f_L(\omega r) \hat{Y}_{LLM}(\hat{r}) e^{-i\omega t} \quad (87)$$

A solução que falta para a construção de uma solução geral é aquela que permite para o campo elétrico \vec{E} uma componente radial. Como vimos no caso anterior $\vec{\nabla} \times \vec{A}_{LM} = \vec{\nabla} \times \vec{L} \phi_{LM}$ tem esta natureza, ou seja, o operador

$$\vec{\nabla} \times \vec{L}$$

pode ser utilizado na sua construção. Neste caso

$$\hat{A}_{LM}'(\vec{r},t) = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{L} \phi_{LM}}{\omega \sqrt{L(L+1)}}, \quad (88)$$

onde agora \vec{E}' tem componentes radial e transversal e \vec{B}' , é construído como

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{L} \phi_{LM}}{\omega \sqrt{L(L+1)}} \quad (89)$$

onde, se usamos a identidade

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \vec{\nabla}^2 \vec{C} \quad (90)$$

e lembramos, para $\vec{C} = \vec{L} \phi_{LM}$, que $\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0$ e que \vec{L} comuta com o laplaciano, sai

$$\vec{B}' = - \frac{\vec{L} \vec{\nabla}^2 \phi_{LM}}{\omega \sqrt{L(L+1)}} = \frac{\omega \vec{L} \phi_{LM}}{\sqrt{L(L+1)}} \quad (91)$$

onde também usamos o fato de ϕ_{LM} satisfaz à eq. de Helmholtz (76).

Vemos que \vec{B}' será sempre transversal (compare com (82)). Neste caso o campo elétrico na região próxima se parece com aquele do 2^L -polo elétrico estático e a radiação é dita de natureza elétrica.

Resumindo as equações (87) e (88) para \hat{A}_{LM} e escrevendo (88) em termos dos harmônicos esféricos vetoriais temos:

$$\hat{A}_{LM}^{(M)}(\vec{r},t) = f_L(\omega r) \hat{Y}_{LLM}(\hat{r}) e^{-i\omega t} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{LM}^{(E)}(\vec{r},t) = & i \left(\frac{\sqrt{L+1}}{2L+1} f_{L-1}(\omega r) \hat{Y}_{L-1,LM}(\hat{r}) \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{L}}{2L+1} f_{L+1}(\omega r) \hat{Y}_{L+1,LM}(\hat{r}) \right) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (92)$$

Uma solução geral para o potencial vetor pode ser escrita

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{LM} [a_{LM}^{(E)} \vec{A}_{LM}^{(E)} + a_{LM}^{(M)} \vec{A}_{LM}^{(M)}] \quad (93)$$

Ainda de (82) e (88) vemos que os campos \vec{E} e \vec{B} em cada caso desfrutam da propriedade

$$\vec{E}_{LM}^{(M)} = -\frac{\partial \vec{A}_{LM}^{(M)}}{\partial t} = \frac{i\omega}{\sqrt{L(L+1)}} \vec{L}_{LM} \quad \vec{L}_{LM} = -i\vec{B}_{LM}^{(E)} \quad (94)$$

$$\vec{B}_{LM}^{(M)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{LM}^{(M)} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{L}_{LM}}{\sqrt{L(L+1)}} = i\vec{E}_{LM}^{(E)}$$

o que demonstra a troca de natureza entre os campos \vec{E} e \vec{B} em cada caso.

Quanto ao significado físico das soluções em ondas planas e em ondas esféricas, podemos calcular para a solução plana as grandezas

$$\vec{p} = \frac{1}{4\pi} \left[(\vec{E} \times \vec{B}) dv \right] \text{ momento linear} \quad (95)$$

cubo L^3

$$W = \frac{1}{8\pi} \left[(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) dv \right] \text{ energia} \quad (96)$$

cubo L^3

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi} \left[\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dv \right] \text{ momento angular} \quad (97)$$

cubo L^3

para a onda plana real normalizada, onde convencionamos que

$$\vec{A}_{p\tau} + \vec{A}_{p\tau}^*$$

representa exatamente um fôton na caixa cúbica de aresta L .⁹
O resultado não demonstrado aqui é

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \omega \vec{k} \\ W &= \omega \end{aligned} \quad (98)$$

$\vec{J} \cdot \vec{k} = \tau$ (para as ondas planas circularmente polarizadas).
Já as soluções multipolares não terão \vec{p} naquela forma acima, mas produzirão

$$W = \omega$$

$$|\vec{j}| = \sqrt{L(L+1)} \text{ ou } j^2 = L(L+1) \quad (99)$$

$$J_z = M$$

No que segue será útil a expansão da solução em onda plana em termos das soluções em multipolos esféricicos: uma onda plana de helicidade τ que se propaga pelo eixo z pode ser escrita

$$\begin{aligned} \vec{A}_{e_z \tau}(\vec{r}, t) &= \vec{e}_\tau \exp[i\omega(\vec{e}_z \cdot \vec{r} - \omega t)] = \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_L i^L \sqrt{2L+1} [\vec{A}_{L\tau}^{(E)}(\vec{r}, t) + \tau \vec{A}_{L\tau}^{(M)}(\vec{r}, t)] \end{aligned} \quad (100)$$

Esquecendo a normalização, se quisermos ainda expressar uma onda plana que se propaga numa direção qualquer, devemos executar a rotação que leva do eixo z para uma direção \vec{k} genérica:

⁹ de modo mais amplo, os campos físicos reais são dados por $\vec{A} + \vec{A}^*$.

$$\vec{A}_{pt}(\vec{r},t) = \vec{e}_\tau \exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega t)] = \\ = \sqrt{2\pi} \frac{i^L}{LM\pi} \sqrt{2L+1} \tau^{(L)} \vec{A}_{LM}^{(L)*} (\vec{e}_z + \vec{k}) \quad (101)$$

onde $\pi = E$, M , $\Lambda(E) = 0$, $\Lambda(M) = 1$ e $D_{Mt}^{(L)*}$ é o elemento de matriz de rotação associado ao momento angular L .

4.3 - Emissão de Radiação Eletromagnética

Na teoria quântica da radiação, o campo eletromagnético deve ser encarado como um sistema que interage com cargas e correntes. A Hamiltoniana pode ser escrita em termos de um conjunto de osciladores harmônicos desacoplados.

$$H_{rad} = \sum_{\vec{p}, \tau} \omega(\vec{p}) a_{pt}^+ a_{pt} \quad (102)$$

onde $a_{pt}^+ (a_{pt})$ cria (destrói) um fóton num estado definido \vec{p}_τ . O vetor de estado é caracterizado pelo número de fôtons n_{pt}^+ :

$$|n_{pt}^+\rangle,$$

existe o vácuo de fôtons $|0\rangle$ e a_{pt}^+ e a_{pt} gozam de propriedades similares àquelas dos operadores b_μ e b_μ^+ .

A Hamiltoniana completa teria a forma

$$H = H_{rad} + H_{mat} + H_{int} \quad (103)$$

onde H_{mat} é a Hamiltoniana do sistema material e H_{int} é a interação entre matéria e radiação, proporcionando uma transição entre $|i\rangle$ e $|f\rangle$, dois autoestados de H_{mat} .

Sabemos da Eletrodinâmica Clássica¹⁰ que o primeiro termo importante de interação entre o campo eletromagnético e uma distribuição de correntes é dado por

$$H_{int} = - \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) dv \quad (104)$$

Podemos demonstrar (104) para o caso não relativístico, onde a Hamiltoniana H em presença do campo eletromagnético $\vec{A}(\vec{r})$ se escreve

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\vec{p}_i - e_i \vec{A}(\vec{r}_i))^2 + V \quad (105)$$

ou

$$H = \left(\sum_i \frac{1}{2m_i} \vec{p}_i^2 + V \right) - \sum_i \frac{e_i}{m_i} \vec{p}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) + \sum_i \frac{e_i^2}{2m_i} \vec{A}^2(\vec{r}_i) \quad (106)$$

onde o termo entre parenteses é H_{mat} , a Hamiltoniana não perturbada do sistema material, o segundo termo pode ser escrito como

$$H_{int} = - \int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{A}(\vec{r}') dv' \quad (104)$$

onde, neste caso, a corrente é

$$\vec{j}(\vec{r}') = \sum_i \frac{e_i \vec{p}_i}{m_i} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \quad (107)$$

o termo em \vec{A}^2 é de ordem superior e estará associado a processos envolvendo dois fôtons, como ficará claro a seguir.

¹⁰ consulte por exemplo a ref. 7.

Este termo será desprezado.

4.4 - Elementos de Matriz e Probabilidades de Transição dos Multipolos

Para obtermos a prescrição quântica da equação (104), basta fazer o elemento de matriz de H_{int} entre os estados $|i,0\rangle$ e $|f,1_{pt}\rangle^{11}$, encarando agora $\hat{j}(\vec{r},t)$ como um operador e reescrevendo a expansão (74) da onda plana em estados de helicidade bem definida substituindo os coeficientes a_{pt}^* e a_{pt} pelos operadores de criação e aniquilação a_{pt}^+ e a_{pt} respectivamente.

$$\langle l_{pt}, f | H_{int} | i, 0 \rangle = \int \langle f | \hat{j}(\vec{r}') | i \rangle \underbrace{\langle l_{pt} | \hat{A}_{pt} a_{pt} + \hat{A}_{pt}^* a_{pt}^+ | 0 \rangle}_{\text{dando}} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \langle l_{pt}, f | H_{int} | i, 0 \rangle &= \underbrace{\langle l_{pt} | a_{pt}^+ | 0 \rangle}_{= 1} \int \langle f | \hat{j}(\vec{r}') | i \rangle \hat{A}_{pt}^*(\vec{r}') dv' e^{i\omega t} \quad (108) \end{aligned}$$

A regra de ouro da Mecânica Quântica^{11a} diz que a probabilidade de transição por unidade de tempo é

$$T(\vec{k})_{i \rightarrow f} d\Omega = 2\pi |\langle l_{pt}, f | H_{int} | i, 0 \rangle|^2 \frac{dn}{d\omega} \quad (109)$$

onde $dn/d\omega$ é o número de estados finais por intervalo de energia. A contagem de estados no cubo de aresta L (faça a

^{11a} consulte, por exemplo a ref. 8, cap. XVIII.

¹¹ o primeiro é o estado nuclear inicial i e zero fóton e o segundo é o estado nuclear final f e 1 foton \vec{p}_t .

conta) produz

$$dn = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \omega^2 d\omega d\Omega \quad (110)$$

e usando \hat{A}_{pt} da eq. (73), normalizado no mesmo volume, obtemos

$$T(\vec{k})_{i \rightarrow f} d\Omega = \frac{\omega}{2\pi} \left| \int \langle f | \hat{j}(\vec{r}') | i \rangle \hat{e}_\tau^* e^{-ip_\tau \cdot \vec{r}'} dv' \right|^2 d\Omega \quad (111)$$

o elemento de matriz

$$\langle f | \int \hat{j}(\vec{r}') \hat{e}_\tau^* e^{-ip_\tau \cdot \vec{r}'} dv' | i \rangle$$

presente na probabilidade de transição por unidade de tempo pode ter separadas as suas componentes multipolares usando-se a expansão (101): o operador envolvido fica

$$\begin{aligned} \int \hat{j}(\vec{r}') \hat{e}_\tau^* e^{-ip_\tau \cdot \vec{r}'} dv' &= \sqrt{2\pi} \sum_{LM} i^{-L} \sqrt{2L+1} \tau^A(\pi) D_{M\tau}^{(L)} (\hat{e}_z \rightarrow \vec{k}) \\ &\times \int \hat{j}(\vec{r}') (-)^{M+1} \hat{A}_{L,-M}^{(\pi)}(\vec{r}') dv', \quad (112) \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade

$$\hat{A}_{LM}^{(\pi)*} = (-)^{M+1} \hat{A}_{L,-M}^{(\pi)}.$$

As integrais no lado direito de (112) são operadores que contém toda a informação básica sobre o sistema radiante. Elas são proporcionais ao adjunto hermitiano dos operadores de momento multipolar elétrico e magnético:

$$M(M, LM) = - \frac{i(2L+1)!!\sqrt{L(L+1)}}{\omega^L(L+1)} \int j(\vec{r}') \hat{A}_{LM}^{(M)}(\vec{r}') dv' \quad (113)$$

$$M(E, LM) = \frac{(2L+1)!!\sqrt{L(L+1)}}{\omega^L(L+1)} \int j(\vec{r}') \hat{A}_{LM}^{(E)}(\vec{r}') dv' \quad (114)$$

estes são tensores de rank L e paridade $(-)^{L+\Lambda(\pi)}$ ¹². Com esta definição podemos escrever o operador fundamental de transição:

$$\int j(\vec{r}') e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}'} dv' = \sqrt{2\pi} \sum_{LM} \frac{\sqrt{2L+1}(-i\omega)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{L+1}{L}} D_{M\tau}^{(L)}(\vec{e}_\tau \cdot \vec{k})$$

$$(M^+(E, LM) - i\tau M^-(M, LM)) \quad (115)$$

onde foi explicitada a soma em π , a natureza da radiação.

A equação (115) permite escrever, lançando mão do teorema de Wigner-Eckart (equação (154)), a probabilidade de transição para um fóton, emitido com momento linear \vec{p} , e helicidade τ segundo o ângulo sólido $d\Omega$.

Se a fonte de radiação tem orientação espacial aleatória, devemos fazer a média sobre todos os valores m_i da componente z do momento angular do estado inicial. Se, além disso, não examinamos para qual m_f se deu a transição, devemos somar sobre todos os m_f possíveis. Não medindo a polarização da radiação, devemos efetuar a soma sobre seus 2 valores possíveis.

¹² as propriedades de simetria de seus elementos de matriz são discutidas na ref. 6.

Após estas operações, o resultado que se obtém é

$$T_{j_i \rightarrow j_f} = \frac{8\pi}{2j_i+1} \sum_{L,\pi} \frac{\omega^{2L+1}}{[(2L+1)!!]^2} \frac{L+1}{L} |\langle j_f || M(\pi L) || j_i \rangle|^2 \quad (116)$$

onde $\langle j_f || M(\pi L) || j_i \rangle$ é o elemento de matriz reduzido do momento multipolar $M(\pi L)$ entre os estados nucleares de momento angular j_i inicial e j_f final.

Definindo a probabilidade de transição reduzida

$$B(\pi L, j_i \rightarrow j_f) = \frac{|\langle j_f || M(\pi L) || j_i \rangle|^2}{2j_i+1} \quad (117)$$

podemos escrever a probabilidade de transição como

$$T_{j_i \rightarrow j_f} = \sum_{L,\pi} \frac{8\pi \omega^{2L+1}}{[(2L+1)!!]^2} \frac{(L+1)}{L} B(\pi L, j_i \rightarrow j_f) \quad (118)$$

5 - Momentos Multipolares

5.1 - Na Aproximação de Comprimento de Onda Longo

O comprimento de onda da radiação γ nuclear de alguns MeV pode ser avaliado:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{MeV-fm}}{1 \text{MeV}} \approx 10^3 \text{fm} \quad (119)$$

A equação (3) fornece, por exemplo, o raio do núcleo estável mais pesado:

$$R = 1,12 \times (238)^{1/3} \approx 7 \text{ fm} \quad (120)$$

Nestas circunstâncias, é plenamente válida a aproximação dita de comprimento de onda longo para a radiação nuclear. Aproximação para a função $j_L(\omega r)$ é dada por

$$j_L(x) \approx \frac{x^L}{(2L+1)!!}, \quad x \ll 1 \quad (121)$$

com ela temos, para o multipolo magnético LM,

$$M(M,LM) = -\frac{i(2L+1)!! \sqrt{L(L+1)}}{\omega^L (L+1)} \int j(\vec{r}') \cdot \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} \hat{L} (\omega r')^L Y_{LM}(\hat{r}') dv'$$

e

$$M(M,LM) = \frac{-i}{(L+1)} \int j(\vec{r}') \cdot \hat{L} r' Y_{LM}(\hat{r}') dv' \quad (122)$$

e para o elétrico

$$M(E,LM) = \frac{(2L+1)!! \sqrt{L(L+1)}}{\omega^L (L+1)} \int j(\vec{r}') \frac{1}{\omega \sqrt{L(L+1)}} (\vec{v} \times \hat{L}) \frac{(\omega r')^L}{(2L+1)!!} Y_{LM}(\hat{r}') dv'$$

e

$$M(E,LM) = \frac{1}{\omega (L+1)} \int j(\vec{r}') \cdot \vec{v} \times \hat{L} r' Y_{LM}(\hat{r}') dv' \quad (123)$$

Os multipolos magnéticos podem ainda ser alterados a uma forma mais simples

$$M(M,LM) = -\frac{1}{L+1} \int j(\vec{r}') \cdot (\vec{r}' \times \vec{v}) r' Y_{LM}(\hat{r}') dv'$$

$$= \frac{1}{L+1} \int (\vec{r}' \times j(\vec{r}')) \cdot \vec{v} r' Y_{LM}(\hat{r}') dv'$$

A densidade de corrente $j(\vec{r}')$ consiste de duas partes,

$$\vec{j}(\vec{r}') = \vec{j}_c(\vec{r}') + \vec{j}_m(\vec{r}'),$$

onde $\vec{j}_c(\vec{r}')$ é a corrente de convecção ou a corrente oriunda das cargas em movimento no núcleo e $\vec{j}_m(\vec{r}')$ está associada à densidade de magnetização intrínseca:

$$\vec{j}_m(\vec{r}') = \vec{v} \times \vec{m}(\vec{r}') \quad (124)$$

Esta magnetização intrínseca resulta do momento magnético intrínseco dos nucleons.

Temos então

$$\begin{aligned} M(M,LM) &= \frac{1}{L+1} \int (\vec{r}' \times \vec{j}_c) \cdot \vec{v} r' Y_{LM}(\hat{r}') dv' \\ &\quad - \frac{1}{L+1} \int (\vec{v} \times \vec{m}) \cdot (\vec{r}' \times \vec{v}) r' Y_{LM}(\hat{r}') dv' \\ &= \frac{1}{L+1} \int (\vec{r}' \times \vec{j}_c) \cdot \vec{v} r' Y_{LM}(\hat{r}') dv' \\ &\quad - \frac{1}{L+1} \int \vec{m} \cdot \vec{v} \times (\vec{r}' \times \vec{v}) r' Y_{LM}(\hat{r}') dv' \end{aligned}$$

onde efetuamos uma integração por partes na integral envolvendo \vec{m} .

O operador da segunda integral pode ser escrito

$$\vec{v} \times (\vec{r}' \times \vec{v}) = -\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \vec{r}' + \vec{r}' \vec{v}^2 \quad (125)$$

como $r' Y_{LM}$ é a solução da equação de Laplace, temos

$$\vec{v} \times (\vec{r}' \times \vec{v}) r' Y_{LM} = - (L+1) \vec{v} r' Y_{LM} \quad (126)$$

que restituído à integral em questão produz

$$M(M, LM) = \left[\vec{m}(\vec{r}') + \frac{2}{L+1} \vec{m}_c(\vec{r}') \right] \cdot \vec{r}' r^L Y_{LM}(\hat{\vec{r}}') dv' \quad (127)$$

onde a densidade de magnetização equivalente causada pela corrente de convecção vale

$$\vec{m}_c(\vec{r}) = \frac{1}{2} [\vec{r} \times \vec{j}_c(\vec{r})] \quad (128)$$

Os momentos multipolares elétricos também se simplificam, se usarmos (126) em (123), para

$$M(E, LM) = \frac{i}{\omega} \int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{r}' r^L Y_{LM} dv' \quad (129)$$

Integrando por partes, o operador gradiente passa a agir sobre \vec{j} , $\vec{v} \cdot \vec{j}$, que pode ser substituída por $-\rho$ graças à equação de continuidade (65). A equação de movimento de Heisenberg

$$-i\dot{\rho} = [H, \rho] \quad (130)$$

permite escrever

$$\begin{aligned} \langle j_f m_f | M(E, LM) | j_i m_i \rangle &= \frac{1}{\omega} \langle j_f m_f | \int (\rho H - H\rho) r^L Y_{LM}(\hat{\vec{r}}') dv' | j_i m_i \rangle \\ &= \frac{E_i - E_f}{\omega} \langle j_f m_f | \int \rho r^L Y_{LM}(\hat{\vec{r}}') dv' | j_i m_i \rangle \quad (131) \end{aligned}$$

Consideramos então a existência do multipolo elétrico equivalente

$$M(E, LM) = \int \rho(\vec{r}') r^L Y_{LM} dv' \quad (132)$$

As equações (127) e (132) expressam os operadores dos momentos multipolares elétrico e magnético, na aproximação de comprimento de onda longo.

Propriedades eletromagnéticas intrínsecas dos estados nucleares estão associadas aos elementos de matriz diagonais dos operadores. Estas propriedades são

$$\begin{aligned} \text{momento de dipolo magnético } \mu &= \langle II | \mu_z | II \rangle \\ \text{momento de quadrupolo elétrico } eQ &= \langle II | eQ_{20} | II \rangle \quad (133) \end{aligned}$$

Uma comparação mostra que

$$M(M, 10) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \mu_z \quad (134)$$

A definição usual do momento de quadrupolo elétrico é

$$eQ = \langle II | \int \rho(\vec{r}') r'^2 (3\cos^2 \theta' - 1) dv' | II \rangle = \langle II | eQ_{20} | II \rangle \quad (135)$$

Outra comparação mostra que

$$M(E, 20) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} eQ_{20} \quad (136)$$

Para concluir esta seção, analisamos regras de seleção de momento angular e paridade para transições entre estados nucleares.

a) Momento angular

Como demonstrado, o momento angular carregado pela radiação multipolar π, LM é L , sua componente z é M de modo que, para a transição entre os estados $I_i m_i$ e $I_f m_f$, temos

$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f$$

$$M = m_i - m_f$$

É importante notar que a aproximação de comprimento de onda longo que permitiu substituir na solução interna $j_L(\omega r)$ por sua expressão para $\omega r \ll 1$, equação (121), implica que mesmo sendo possíveis as transições envolvendo todos os multipolos desde $L = |I_i - I_f|$ até $L = I_i + I_f$, os multipolos observáveis serão, no máximo, os dois mais baixos, com raras exceções onde são observados três deles. Isso se dá porque os elementos de matriz são proporcionais a $(\omega r)^L$ e as probabilidades a $(\omega r)^{2L}$, então o próximo multipolo $(L+1)$ é $(\omega r)^2$ menos intenso do que o anterior (L).

Uma maneira de escrever a probabilidade de transição total envolve as amplitudes de transição $\gamma(\pi L, j_i + j_f)$:

$$T_{j_i + j_f} = \sum_L |\gamma(\pi L, j_i + j_f)|^2 \quad (137)$$

onde $\gamma(\pi L, j_i + j_f)$ está automaticamente (eqs. 116 e 142) definida como

$$\gamma(\pi L, j_i + j_f) = i^{L+A(\pi)} \sqrt{\frac{8\pi \omega^{2L+1} (L+1)}{[(2L+1)!!]^2 L(2j_i+1)}} \langle j_f | M(\pi L) | j_i \rangle \quad (138)$$

O fator $i^{L+A(\pi)}$ está ligado à convenção de fase dos elementos de matriz (ref. 6). Esta forma é conveniente para que possamos escrever a razão de mistura multipolar $\delta(\pi L/\pi' L')$, largamente utilizada na análise de experimentos de distribuição e correlação angular,

$$\delta(\pi L/\pi' L') = \frac{\gamma(\pi L, j_i + j_f)}{\gamma(\pi' L', j_i + j_f)}. \quad (139)$$

$\delta(\pi L/\pi' L')$ evidencia a competição entre os multipolos mais intensos da transição.

Um fato essencial é que misturas multipolares $\delta(E2/M1)$ previstas pelo modelo de camadas seriam da ordem de 10^{-1} a 10^{-2} e o que se encontra (consulte a ref. 9 para uma compilação de valores) é $\delta \sim 10^0$ a 10^{-1} , indicando elevada sensibilidade a aspectos estruturais, como por exemplo efeitos de origem coletiva.

b) Paridade

Os estados nucleares têm paridade bem definida e se chamamos P ao operador que executa a reflexão espacial, podemos escrever para dois estados nucleares $|i\rangle$ e $|f\rangle$

$$P|i\rangle = P_i|i\rangle, \quad P_i, P_f = \pm 1 \quad (140)$$

$$P|f\rangle = P_f|f\rangle$$

Todo operador pode ser separado numa parte par e noutra ímpar sob operação de P sobre ele. Há os operadores que têm paridade definida.

$$PTP^{-1} = P_T T, \quad P_T = \pm 1 \quad (141)$$

O reflexo disto sobre os elementos de matriz é a existência, no caso dessas interações que conservam a paridade, de uma regra de seleção

$$\langle f | T | i \rangle = \langle f | P^{-1} P T P^{-1} P | i \rangle = P_i P_f P_T \langle f | T | i \rangle$$

portanto $P_i P_f P_T = 1$

(142)

A paridade dos momentos multipolares elétrico e magnético é

$$P(\text{EL}) = (-)^L$$
(143)

$$P(\text{ML}) = (-)^{L+1}$$

Isto, juntamente com (142), elucida por que propriedades dos estados não envolvem por exemplo momento de dipolo elétrico, pois haveria violação de paridade.

As equações (143) significam que para transições eletromagnéticas entre os estados i e f temos

$$P_i P_f = (-)^{L+1} \text{ para multipolos magnéticos}$$
(144)

$$P_i P_f = (-)^L \text{ para multipolos elétricos}$$

5.2 - No Contexto do Modelo Vibracional

O que fizemos até o momento foi uma elaborada aplicação das leis de Eletrodinâmica Clássica e da Mecânica Quântica, para a obtenção das probabilidades de transição entre estados nucleares. Estas probabilidades foram escritas em termos dos elementos de matriz reduzidos $\langle J_f | M(\pi L) | J_i \rangle$ desconhecidos. Os resultados até então obtidos podem ser resumidos a seguir

$$T(\pi L, j_i \rightarrow j_f) = \frac{8\pi^2 L^{2L+1} (L+1)}{[(2L+1)!]^2 L^{13}} B(\pi L, j_i \rightarrow j_f)$$
(145)

¹³ $B(\pi L, j_i \rightarrow j_f)$ é dado pela eq. (117).

Usando unidades tais que

$B(\text{EL})$ é dado em $e^2 \text{ fm}^{2L}$

e

$B(\text{ML})$ é dado em $(\frac{e\hbar}{2M_p c})^2 \text{ fm}^{2L-2}$,

temos T em s^{-1} dado por (E em MeV):

Tabela 2 - Probabilidades de transição em s^{-1} para diversas multipolaridades.

$$\begin{aligned} T(E1) &= 1,59 \times 10^{15} E^3 B(\text{EL}) \\ T(E2) &= 1,22 \times 10^9 E^5 B(\text{E2}) \\ T(E3) &= 5,67 \times 10^2 E^7 B(\text{E3}) \\ T(E4) &= 1,69 \times 10^{-4} E^9 B(\text{E4}) \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} T(M1) &= 1,76 \times 10^{13} E^3 B(\text{ML}) \\ T(M2) &= 1,35 \times 10^7 E^5 B(\text{M2}) \\ T(M3) &= 6,28 \times 10^0 E^7 B(\text{M3}) \\ T(M4) &= 1,87 \times 10^{-6} E^9 B(\text{M4}) \end{aligned} \quad (147)$$

Cabe-nos medir no laboratório estas probabilidades para a posterior determinação dos elementos de matriz citados. Por outro lado, nós fomos o mais longe que era possível neste desenvolvimento, sem fazer qualquer hipótese mais forte sobre ρ e j , ou seja, sem fazer uso de um MODELO NUCLEAR. Neste ponto, como estamos interessados nas propriedades eletromagnéticas dos núcleos vibracionais, este é o modelo que utilizaremos para a construção dos operadores multipolares, a partir das equações (127) e (132), de validade geral.

Vamos então explicitar o cálculo para os multipolo-

los elétricos. O último resultado obtido foi a eq. (132) que repetimos aqui

$$M(E,LM) = \int_0^R \rho(\vec{r}') r' Y_{LM}(\vec{r}') dv' \quad (132)$$

onde a integração se dá por todo o volume nuclear. Assumindo uma densidade nuclear de protons constante, igual a

$$\rho(\vec{r}') = \frac{Z_p}{A} = \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3} R_o^3} = \frac{3Ze}{4\pi R_o^3}, \quad (148)$$

temos

$$M(E,LM) = \int_0^{R_o} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{3Ze}{4\pi R_o^3} r' Y_{LM}(\theta',\phi') r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi' \quad (149)$$

efetuando a integral em dr' :

$$M(E,LM) = \frac{3Ze}{4\pi} \frac{R_o^L}{L+3} \int [1 + \sum_\mu \alpha_\mu Y_{2\mu}^*(\vec{r}')] L^{L+3} Y_{LM}(\vec{r}') d\Omega' \quad (150)$$

desenvolvendo o termo entre colchetes até primeira ordem nos α_μ 's, temos

$$M(E,LM) \approx \frac{3Ze}{4\pi} \frac{R_o^L}{L+3} \left\{ \underbrace{\int Y_{LM}(\vec{r}') d\Omega' + (L+3) \sum_\mu \alpha_\mu \int Y_{2\mu}^* Y_{LM} d\Omega'}_{\sqrt{4\pi} \delta_{L0} \delta_{M0}} \right\}$$

O termo com $L = 0$ não satisfaz à condição de transversalidade, e temos então que só há transições E2, com

$$M(E,2M) = \frac{3Ze}{4\pi} \frac{R_o^2}{2} \delta_M = \frac{3Ze}{4\pi} \frac{R_o^2}{2B_\omega} [b_M^+ + (-)^M b_{-M}] \quad (151)$$

Podemos também observar, da estrutura do operador que só há transições entre estados adjacentes em números de fôtons, ou seja, do estado N para $N' = N \pm 1$ e vemos também que com este operador não há momentos de quadrupolo não nulos para os estados nucleares.

Surgiram então as regras de seleção para momento E2:

$$\Delta N = \pm 1 \quad \text{e} \quad eQ = 0 \quad (152)$$

O cálculo dos elementos de matriz do operador (151) dependem do conhecimento dos elementos de matriz dos operadores de criação e aniquilação, ditos coeficientes de parentesco fracional (ou fracionário). A tabela 3 que segue contém valores para alguns casos.

Na forma como escrevemos (151), temos

$$M(E,2M) = \frac{3Ze}{4\pi} \frac{R_o^2}{2B_\omega} [b_M^+ + (-)^M b_{-M}] = X [b_M^+ + (-)^M b_{-M}] \quad (153)$$

Usando o teorema de Wigner-Eckart (veja, por exemplo, a ref. 2)

$$\langle S I_2 M_2 | T_{\lambda\mu} | S I_1 M_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2I_2 + 1}} \langle I_1 M_1 \lambda\mu | I_2 M_2 \rangle \langle S I_2 | | T_\lambda | | S I_1 \rangle \quad (154)$$

onde o elemento de matriz com a barra dupla é dito reduzido. Obtemos então para o elemento de matriz de $M(E,2M)$ entre os estados $|N_i I_i M_i\rangle$ e $|N_f I_f M_f\rangle$:

$$\langle N_f I_f M_f | M(E,2M) | N_i I_i M_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2I_f + 1}} \langle I_i M_i 2M | I_f M_f \rangle \langle N_f I_f | | M(E2) | | N_i I_i \rangle \quad (155)$$

Tabela 3 - Elementos de matriz reduzidos do operador de aniquilação b_{2u} entre estados $|N\rangle$, onde N é o número de fôons e I é o momento angular total do estado (da ref. 10).

$N'I'$	NI	$\langle N'I' b_2 NI \rangle$	$N'I'$	NI	$\langle N'I' b_2 NI \rangle$
00	12	$\sqrt{5}$	32	44	$9\sqrt{2}/7$
12	20	$\sqrt{2}$	44		0
22		$\sqrt{10}$	33	42	$\sqrt{10}/3$
24		$3\sqrt{2}$	42		$-\sqrt{55}/6$
20	32	$\sqrt{7}$	44		$-2/\sqrt{3}$
22	30	$\sqrt{3}$	44		$-2\sqrt{143}/30$
32		$2\sqrt{5}/7$	45		$\sqrt{231}/10$
33		$-\sqrt{15}$	34	42	$\sqrt{22}/7$
34		$3\sqrt{11}/7$	42		$\sqrt{7}/2$
24	32	$6/\sqrt{7}$	44		$2\sqrt{5}/7$
33		$\sqrt{6}$	44		$-2\sqrt{91}/22$
34		$3\sqrt{10}/7$	45		$-3\sqrt{7}/6$
36		$\sqrt{39}$	46		$\sqrt{390}/11$
30	42	$2/\sqrt{6}$	36	44	$2\sqrt{13}/6$
42		$2\sqrt{11}/6$	44		$8/\sqrt{165}$
32	40	2	45		$2\sqrt{13}/5$
42		$3\sqrt{10}/7$	46		$\sqrt{182}/11$
42		0	48		$\sqrt{68}$

$$\frac{1}{\sqrt{2I_f+1}} \langle I_i M_i | 2M | I_f M_f \rangle \langle N_f I_f | | M(E2) | | N_i I_i \rangle = \frac{+X}{\sqrt{2I_f+1}} [\langle I_i M_i | 2M | I_f M_f \rangle$$

$$\times \langle N_f I_f | | b_2^+ | | N_i I_i \rangle + (-)^M \langle I_i M_i | 2, -M | I_f M_f \rangle \langle N_f I_f | | b_2 | | N_i I_i \rangle]$$

Lembrando que, para deexcitação $N_f = N_i - 1$ e usando $M = 0$, temos

$$\langle N_f I_f | | M(E2) | | N_i I_i \rangle = +X \langle N_f I_f | | b_2 | | N_i I_i \rangle \quad (156)$$

A probabilidade reduzida de transição, dada pela equação (117) produz, para algumas transições, os valores contidos na tabela 4 a seguir.

Tabela 4 - Probabilidade reduzida de transição E2, em unidades de X^2 , para algumas transições.

$N_f I_f$	$N_i I_i$	$B(E2; N_i I_i \rightarrow N_f I_f)$
(X^2)		
00	12	1
	20	2
	22	2
	24	2
20	32	$7/5$
	32	3
	33	$4/7$
	34	$15/7$
	36	$11/7$
24	32	$36/35$
	33	$6/7$
	34	$10/7$
	36	3

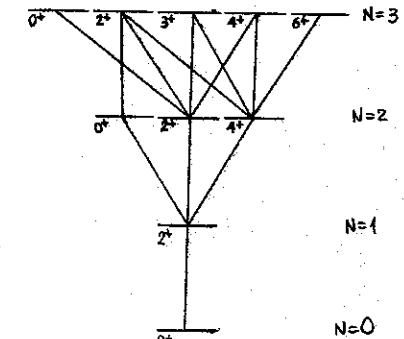


Figura 11 - Transições E2 possíveis indicadas

Quanto às propriedades magnéticas dos sistemas coletivos deduz-se facilmente uma regra de seleção que é de significação bastante ampla, tomando (127), podemos reescrevê-la, após integração por partes

$$M(M, LM) = - \int \vec{v} \cdot [\vec{m}(r') + \frac{2}{L+1} \vec{j}_c(\vec{r}')] r' L Y_{LM}(\vec{r}') dv' \quad (157)$$

usando (128)

$$M(M, LM) = - \int (\vec{v} \cdot \vec{m} + \frac{1}{L+1} \vec{v} \cdot (\vec{r}' \times \vec{j}_c)) r' L Y_{LM}(\vec{r}') dv' \quad (158)$$

Considerando-se que num núcleo par-par todas as partículas estão emparelhadas, $\vec{m} = \vec{0}$ (densidade de magnetização intrínseca), ao menos num sentido "macroscópico" no fluido de material nuclear. Quanto ao segundo termo dentro da integral produz

$$M(M, LM) = - \frac{1}{L+1} \int [\vec{j}_c \cdot \vec{v} \times \vec{r}' - \vec{r}' \cdot \vec{v} \times \vec{j}_c] r' L Y_{LM} dv' \quad (159)$$

sendo o $\vec{v} \times \vec{r}' \equiv \vec{0}$, se assumirmos um fluxo irrotacional do material nuclear, o operador se torna identicamente nulo, pois $\vec{v} \times \vec{j}_c \equiv \vec{0}$ também.

Partindo das hipóteses básicas que partimos e que são a pedra base dos diversos modelos coletivos, transições magnéticas entre quaisquer estados puramente coletivos são estritamente proibidas.

Imaginemos que um modelo coletivo nuclear pode ser definido como aquele onde a corrente elétrica é proporcional à corrente de transporte de matéria,

$$\vec{j}_c = g_R \frac{e}{m} \vec{j}_m$$

(160)

onde para um fluido nuclear que é mistura homogênea de neutrons e protons, a razão giromagnética coletiva vale

$$g_R = \frac{Z}{A} \approx 0,4 \quad (161)$$

Nesta estrutura, o momento de dipolo magnético é proporcional ao momento angular coletivo,

$$\vec{I} = g_R \vec{I} \quad (162)$$

Quanticamente estes objetos são operadores e como os estados nucleares têm bom momento angular, os únicos elementos de matriz não nulos são aqueles diagonais. Seu significado físico é o momento magnético dos estados nucleares. De (133)

$$\mu = \langle II | \mu_z | II \rangle = \langle II | g_R I_z | II \rangle = g_R I_z \quad (\Delta N = 0) \quad (163)$$

Um modo de relaxar essa regra de seleção é admitir a existência de graus de liberdade adicionais, como por exemplo o acoplamento de partículas ao núcleo vibracional (caroço) em estudo.

A imagem em termos de velocidades de transição e momentos estáticos é apresentada a seguir

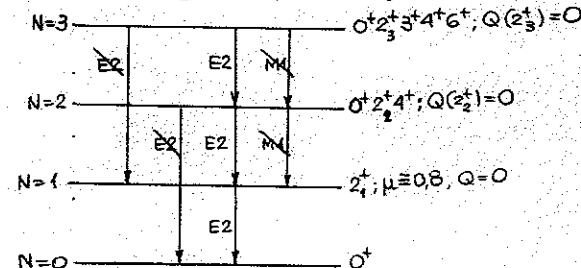


Figura 12 - Núcleo vibracional puro, suas transições e propriedades estáticas.

6 - Um Caso Concreto: os isótopos pares do telúrio, Z = 52

120-126 Te

6.1 - Parâmetros do Modelo para estes Núcleos

O que conhecemos em termos de níveis de energia, velocidades de transição e outras informações é mostrado na figura a seguir.

O modelo vibracional puro utiliza um conjunto de três parâmetros, a saber,

$E_2 = \hbar\omega_2$ → energia do fonon quadrupolar

$$X = \frac{3ZeR_o^2}{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2B\omega_2}} \rightarrow \text{coeficiente do multipolo E2}$$

g_R → razão giromagnética coletiva.

E_2 pode ser estimada a partir da energia do 1º estado 2^+ , X sai da meia-vida desse mesmo estado g_R pode sair de momentos de dipolo magnético medidos. Os dados de interesse se encontram na tabela que segue

Tabela 5 - $E(2_1^+)$, $t_{1/2}(2_1^+)$, $\mu(2_1^+)$ para $^{120-126}\text{Te}$, além de $\delta(2_2^+ \rightarrow 2_1^+, E2/M1)$ e Q. (dados de δ da ref. 9, outros dados da ref. 11).

A	$E(2_1^+)$ (MeV)	$t_{1/2}(2_1^+)$ (s^{-1})	$\mu(2_1^+)$ (μ_N)	δ	$Q(2_1^+)$ (b)
120	0,5604	$9,3 \times 10^{-12}$ (18)	+0,58(16)	-	-
122	0,5640	$7,6 \times 10^{-12}$ (8)	+0,62(6)	-3,48(4)	-0,46(5)
124	0,60272	$6,6 \times 10^{-12}$ (4)	+0,70(11)	-3,55(7)	-0,46(10)
126	0,66633	$4,41 \times 10^{-12}$ (48)	+0,62(16)	-5,6(5)	-0,20(9)

¹⁴ para este núcleo há dados de outras misturas:

$$\delta(4_2^- \rightarrow 4_1^+) = 0,03(3), \delta(2_3^+ \rightarrow 2_1^+) = 3,7^{+2,7}_{-1,6}, \delta(2_3^+ \rightarrow 2_2^+) = 1,30(14)$$

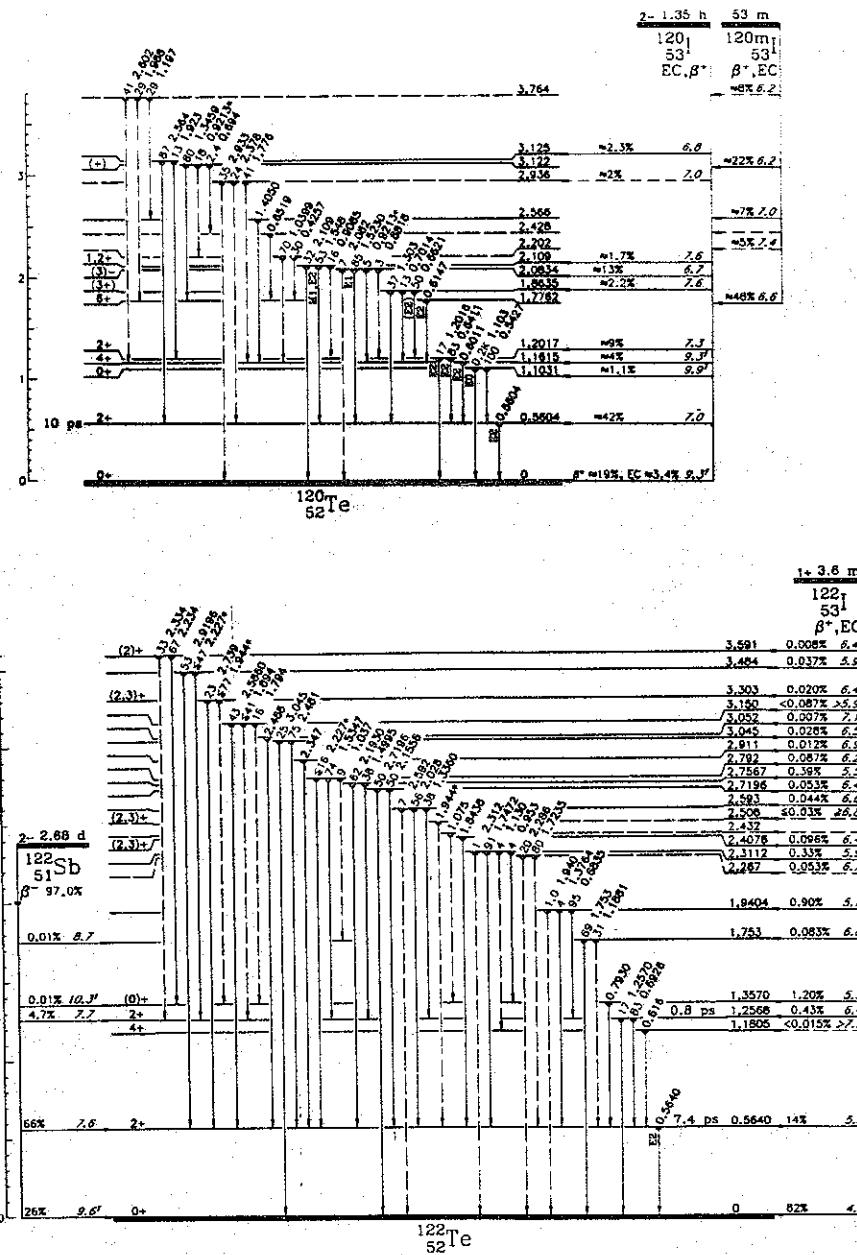
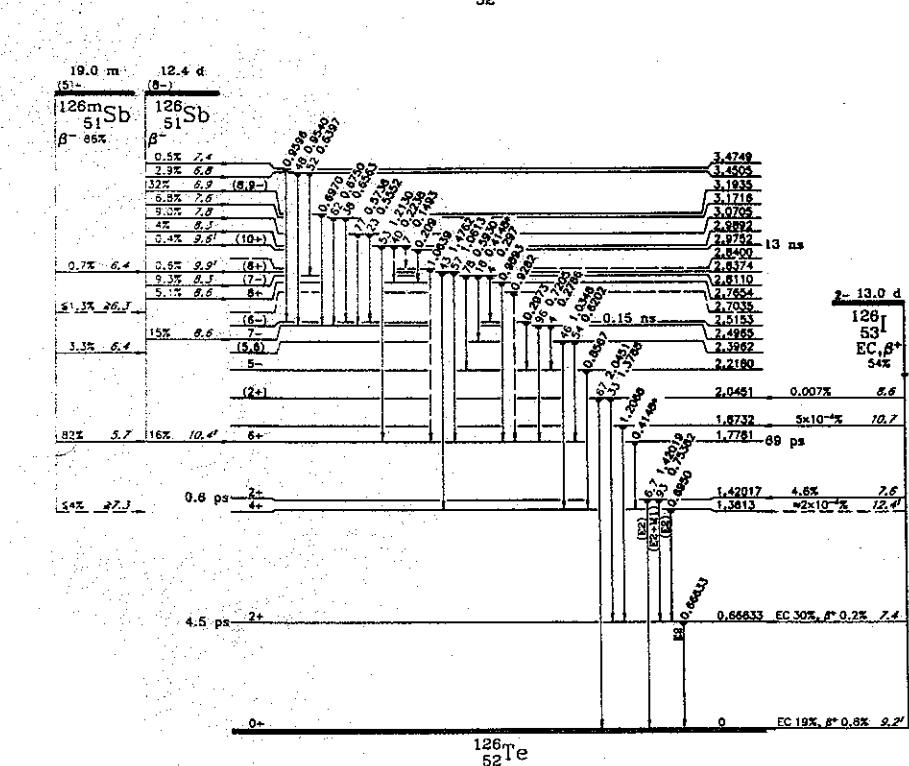
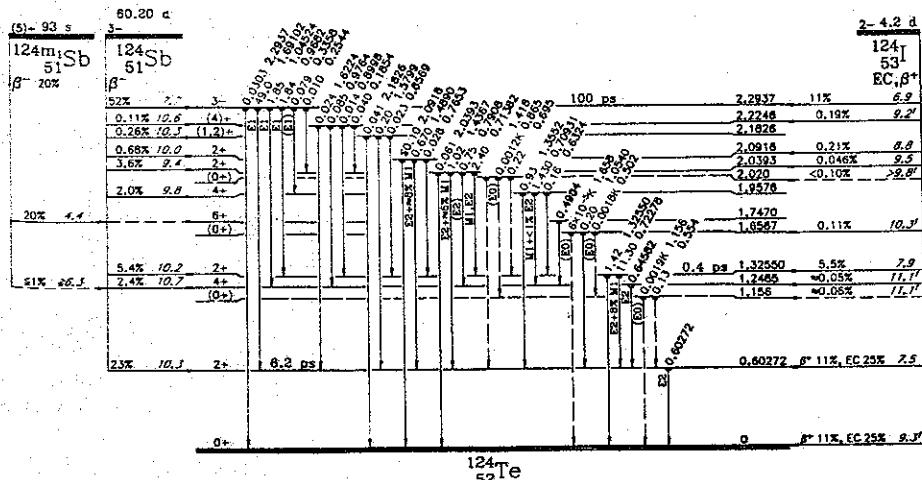


Figura 13 - Esquemas de níveis e de desintegração dos núcleos $^{120-126}\text{Te}$. Dados retirados da ref. 11.



Da tabela 2 temos,

$$T(E2) = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 1,22 \times 10^9 E^5 B(E2) \quad (164)$$

para E em MeV e B(E2) em $e^2 \text{fm}^4$. Tabelamos a seguir os valores obtidos para $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_f^+)$ e X.

Tabela 6 - Valores de B(E2) para a deexcitação do estado de um fonon e, para X, o coeficiente de M(E2). Tabelamos também $\sqrt{h/2B\omega}$ e g_R .

A	$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_f^+)$ ($e^2 \cdot \text{fm}^4$)	X (e. fm^2)	$\sqrt{h/2B\omega} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2C}}$ (adim.)	g_R (adim.)
120	$1,1 \times 10^3$	33	0,087	0,29
122	$1,3 \times 10^3$	36	0,094	0,31
124	$1,2 \times 10^3$	34	0,089	0,35
126	$9,81 \times 10^2$	31,3	0,0800	0,31

6.2 - ^{120}Te

O esquema de níveis e transições do ^{120}Te mostra dados que convém apontar. O triplo de dois fonons está presente, a energias não degeneradas, mais ou menos no dobro do valor de $E(2_1^+)$; existe a transição direta $2_2^+ \rightarrow 0_f^+$, embora com $B(E2) \ll B(E2)$ daquela $2_2^+ \rightarrow 2_1^+$ como calcularemos. Mede-se também uma transição E0 (não processada por emissão de foton) $0_2^+ \rightarrow 0_f^+$ fraca. A ausência dos membros que não o 6^+ do quintuplo de 3 fonons e presença de estados inesperados (como o 3^-) a energias em torno de 2 MeV indica que não devemos aplicar este modelo já nessa região de energias de excitação. A escassez de dados de meias-vidas

de níveis torna impossível o cálculo de valores absolutos de $B(E2)$ para a verificação das regras de intensidades da tabela 4.

As razões de ramificação das transições que saem do estado 2^+ de dois fonons permitem estabelecer o quanto é violada a regra de seleção que impede a transição direta $2_2^+ + 0_f^+ \rightarrow 2_1^+$:

$$\frac{T(E2; 2_2^+ + 0_f^+) \text{ } ^{15}}{T(E2; 2_2^+ + 2_1^+)} = \frac{17}{83} = \left(\frac{1,2016}{0,6411} \right)^5 \frac{B(E2; 2_2^+ + 0_f^+)}{B(E2; 2_2^+ + 2_1^+)} \quad (165)$$

o que produz:

$$\frac{B(E2; 2_2^+ + 0_f^+)}{B(E2; 2_2^+ + 2_1^+)} = 0,0088 \quad (166)$$

As razões de ramificação para as transições que deexcitam o estado de spin-paridade 3^+ , ambos duvidosos à energia de 1,864 MeV podem servir para a verificação se ele é um bom candidato ao estado 3^+ de 3 fonons, mesmo sendo um tanto intensa a transição $(3^+) \rightarrow 2_1^+$, que seria uma mudança de 2 fonons.

De novo na hipótese de transições E2 puras,

$$\frac{T(E2; 3^+ \rightarrow 4^+) \text{ } ^{15}}{T(E2; 3^+ \rightarrow 2_2^+)} = \frac{13}{50} = \left(\frac{0,7014}{0,6621} \right)^5 \frac{B(E2; 3^+ \rightarrow 4^+)}{B(E2; 3^+ \rightarrow 2_2^+)} \quad (167)$$

¹⁵ fizemos a hipótese de que a transição $2_2^+ + 2_1^+ \rightarrow 2_1^+$ é E2 pura devido à ausência de dados da mistura multipolar. Poderia usar $|\delta| \sim 3,5$.

dando

$$\frac{B(E2; 3^+ \rightarrow 4^+)}{B(E2; 3^+ \rightarrow 2_2^+) \text{ exp}} = 0,19 \quad (168)$$

$$\text{contra o valor teórico } \frac{B(E2; 3^+ \rightarrow 4^+)}{B(E2; 3^+ \rightarrow 2_2^+) \text{ teo}} = 0,40 \quad (169)$$

Quanto à transição direta deste estado para o 2_1^+ podemos calcular sua probabilidade reduzida relativa àquele para o 2_2^+ :

$$\frac{T(E2; 3^+ \rightarrow 2_1^+) \text{ } ^{15}}{T(E2; 3^+ \rightarrow 2_2^+)} = \frac{37}{50} = \left(\frac{1,303}{0,6621} \right)^5 \frac{B(E2; 3^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 3^+ \rightarrow 2_2^+)} \quad (170)$$

dando

$$\frac{B(E2; 3^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 3^+ \rightarrow 2_2^+)} = 0,025, \quad (171)$$

cerca do triplo da razão

$$B(2_2^+ + 0_f^+)/B(2_2^+ + 2_1^+).$$

6.3 - ^{122}Te .

Já no ^{122}Te , não há indicação clara para os spins dos estados de 3 fonons. O conhecimento da meia-vida do estado 2_2^+ a 1,26 MeV é uma informação de interesse em conjunto com o valor de $\delta(E2/M1)$ medido para a transição $2_2^+ + 2_1^+$, presente na tabela 5.

Da informação de $\delta(E2/M1)$ temos

$$\frac{T(E2; 2_2^+ + 2_1^+)}{T(M1; 2_2^+ + 2_1^+)} = \delta^2 = 12,1 \quad (172)$$

Da informação de meia-vida do estado 2_2^+ temos, com a razão de ramificação:

$$T(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) + T(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{0,83 \times \ln 2}{0,8 \times 10^{-12}} s^{-1} \quad (173)$$

Para as duas velocidades de transição temos

$$T(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 6,6 \times 10^{11} s^{-1}$$

$$T(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 5,5 \times 10^{10} s^{-1}$$

Usando (164) e a primeira das equações (147) temos

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{6 \times 10^{11}}{1,22 \times 10^9 (0,6926)^5} e^2 fm^4 \quad (175)$$

$$= 3,4 \times 10^3 e^2 fm^4$$

$$B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{5,5 \times 10^{10}}{1,76 \times 10^{13} \times (0,6926)^3} \left(\frac{eh}{2M_p c}\right)^2 \quad (176)$$

$$= 9,4 \times 10^{-3} \left(\frac{eh}{2M_p c}\right)^2$$

Do que calculamos antes vê-se que

$$\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_f^+)} = \frac{3,4 \times 10^3}{1,3 \times 10^3} = 2,6 \quad (\approx 2 \text{ da teoria}) \quad (177)$$

em concordância satisfatória com a teoria. A violação M1 não envolve uma probabilidade reduzida elevada (176) e a violação pela transição direta pode ser calculada:

$$T(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+) = \frac{0,17 \times \ln 2}{0,8 \times 10^{-12} s} = 1,22 \times 10^9 (1,257)^5 B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+) \quad (178)$$

dando

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+) = 38 e^2 fm^4 = 0,030 X^2 \quad (179)$$

ou seja, 3,0% daquilo que seria a "unidade coletiva" para as transições E2. Para aclarar as idéias aqui, a estimativa de Weisskopf¹⁶ para esta transição vale

$$B(E2)_W = 36 e^2 fm^4, \quad (180)$$

o que nos permite concluir que a transição coletivamente proibida tem todo o aspecto de se ter processado via processos de partícula.

Para comparação com (176) calculamos também $B(M1)_W$:

$$B(M1)_W = 3,2 \left(\frac{eh}{2M_p c}\right)^2, \quad (181)$$

onde vemos que a quantidade de M1 envolve uma transição fortemente depressionada, do tipo

$$B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 0,003 B(M1)_W, \quad (182)$$

de onde vemos que, mesmo para uma transição de partícula, há uma forte proibição para esta transição, evidenciando um obedecimento da regra de seleção coletiva a níveis bastante razoáveis, dado o caráter esquemático do modelo. Vale complementar pela alimentação & que o estado a 1,753 Mev seria 0^+ .

¹⁶ valor da velocidade de transição correspondente a uma transição de partícula única.

6.4 - ^{124}Te

Para o ^{124}Te temos apreciações similares, o triploto de 2 fonons está separado (não degenerado) e de novo temos o dado de meia-vida do estado 2_2^+ , possibilitando comparação das velocidades de transição.

$$\frac{T(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{T(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)} = \delta^2 = 12,6 \quad (183)$$

$$T(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) + T(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{11,30}{12,72} \frac{\ln 2}{0,4 \times 10^{-12} \text{s}} = 1,5 \times 10^{12} \text{s}^{-1} \quad (184)$$

Dando

$$T(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 1,4 \times 10^{12} \text{s}^{-1} \quad (185)$$

$$T(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 1,1 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$$

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{1,4 \times 10^{12}}{1,22 \times 10^9 (0,72278)^5} e^2 \text{fm}^4 = 5,8 \times 10^3 e^2 \text{fm}^4 \quad (186)$$

$$B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{1,1 \times 10^{11}}{1,76 \times 10^{13} (0,72278)^3} \left(\frac{e\hbar}{2M_C}\right)^2 = 1,6 \times 10^{-2} \left(\frac{e\hbar}{2M_C}\right)^2 \quad (187)$$

Comparando o $B(E2)$ obtido com aquele da transição

$2_1^+ \rightarrow 0_f^+$:

$$\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_f^+)^{\text{exp}}} = \frac{5,8 \times 10^3}{1,2 \times 10^3} = 4,8 \quad (> 2 \text{ da teoria}) \quad (188)$$

onde a razão obtida é surpreendentemente maior do que a prevista pela teoria.

Para a transição direta $2_2^+ \rightarrow 0_f^+$ temos

$$T(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+) = \frac{1,42}{12,72} \frac{\ln 2}{0,4 \times 10^{-12} \text{s}} = 1,9 \times 10^{11} \text{s}^{-1} \quad (189)$$

e

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+) = \frac{1,9 \times 10^{11}}{1,22 \times 10^9 \times (1,3255)^5} e^2 \text{fm}^4 = 38 e^2 \text{fm}^4 \quad (190)$$

e a situação anterior se repete pois as respectivas estimativas de Weisskopf são

$$B(M1)_W = 3,2 \left(\frac{e\hbar}{2M_C}\right)^2 \quad \text{e} \quad B(E2)_W = 37 e^2 \text{fm}^4 \quad (191)$$

6.5 - ^{126}Te

No caso do ^{126}Te o possível candidato 0^+ do triploto de dois fonons não está presente no estudo por desintegração, havendo entretanto um estado de spin e paridade desconhecidos, à energia de 1,520 MeV. Novamente a meia-vida do estado 2_2^+ é conhecida, podendo ser utilizada em conjunto com o dado de $\delta(E2/M1)$.

$$\frac{T(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{T(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)} = \delta^2 = 31 \quad (192)$$

$$T(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) + T(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 0,93 \times \frac{\ln 2}{0,6 \times 10^{-12} \text{s}} = 1,1 \times 10^{-12} \text{s}^{-1} \quad (193)$$

Dando

$$T(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 1,0 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

(194)

$$T(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 3,4 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{1,0 \times 10^{12}}{1,22 \times 10^9 (0,75382)^5} = 3,4 \times 10^3 e^2 \text{ fm}^4 \quad (195)$$

$$B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{3,4 \times 10^{10}}{1,76 \times 10^{13} (0,75382)^3} = 4,5 \times 10^{-3} \left(\frac{e\hbar}{2M_C} \right)^2 \quad (196)$$

A razão do $B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$ para $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_f^+)$ vale

$$\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_f^+)} = \frac{3,4 \times 10^3}{9,81 \times 10^2} = 3,5 \quad (\text{teoria} = 2) \quad (197)$$

Para a transição direta $2_2^+ \rightarrow 0_f^+$, temos:

$$T(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+) = \frac{0,067 \ln 2}{0,6 \times 10^{-12} \text{ s}} = 7,7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad (198)$$

é

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+) = \frac{7,7 \times 10^{10}}{1,22 \times 10^9 \times (1,42019)^5} = 1,1 \times 10^1 e^2 \text{ fm}^4 \quad (199)$$

Comparando $B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$ com sua estimativa de Weisskopf,

$$B(M1)_W = 3,2 \left(\frac{e\hbar}{2M_C} \right)^2, \quad B(M1) \ll B(M1)_W \quad (200)$$

$$B(E2)_W = 38 e^2 \text{ fm}^4 \quad B(E2) \approx 0,3(BE2)_W$$

As informações calculadas são sumarizadas na tabela 7 a seguir.

Tabela 7 - Sumário das propriedades calculadas a partir dos dados experimentais.

A	122	124	126	Teoria
$\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)_\text{exp}}{(e^2 \cdot \text{fm}^4)}$	$3,4 \times 10^3$	$5,8 \times 10^3$	$3,4 \times 10^3$	
$\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+)_\text{exp}}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_f^+)_\text{exp}}$	2,6	4,8	3,5	2,0
$\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+)_\text{exp}}{(e^2 \cdot \text{fm}^4)}$	38	38	11	0
$\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+)}{B(E2)_W}$	1,0	1,0	0,29	-*
$\frac{B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{(\mu_N^2)}$	$9,4 \times 10^{-3}$	$1,6 \times 10^{-2}$	$4,5 \times 10^{-3}$	0
$\frac{B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(M1)_W}$	$2,9 \times 10^{-3}$	$5,0 \times 10^{-3}$	$1,4 \times 10^{-3}$	-**

* transição de partícula.

** transição bem mais lenta do que a de partícula correspondente.

7 - Interação entre os fonons como uma maneira de relaxar as regras de seleção

Como vimos, quando presentes, todos os candidatos a triplete de dois fonons eram não degenerados além do fato de que existem momentos de quadrupolo estático não nulo e transições E2 entre estados onde $\Delta N > 1$, as transições que chamamos de diretas. Quanto à existência de transições M1 o problema é mais complexo.

A maneira de proporcionar uma ampliação do alcance do modelo pode ser, por exemplo, a introdução de anarmonicidades de base fenomenológica que venham ao encontro de nossos objetivos, ou seja, tornar possíveis os efeitos citados.

Tal anarmonicidade pode ser introduzida com o auxílio de um exame do procedimento adotado quando da construção do modelo. Nos preocupamos então com a escrita do operador Hamiltoniano como uma expansão nas coordenadas coletivas envolvendo, no máximo, o quadrado dessas coordenadas. A primeira proposta seria introduzir as partes da Hamiltoniana que envolvem $(\alpha_\mu)^3$ e $(\alpha_\mu)^4$ como produtos escalares de tensores esféricos formados com os próprios α_μ . A forma de produto escalar garantiria a invariância por rotação e reflexão necessárias à Hamiltoniana. Existem dois tensores de ordem 2 de bastante utilidade

$$Q_m^{(1)} = \alpha_m \quad (201)$$

dependente dos α à primeira potência e

$$Q_m^{(2)} = \frac{\sqrt{35}}{2} (-)^m \sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ m_1 & m_2 - m \\ \end{pmatrix} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \quad (202)$$

dependente dos α quadrado¹⁷. Verifique para sua satisfação, que a Hamiltoniana que utilizamos até o momento tem por energia potencial o produto escalar

$$Q^{(1)} * Q^{(1)}$$

Os termos cúbico e de quarta potência saem simplesmente da construção

$$H_3 + H_4 = v_3 Q^{(1)} * Q^{(2)} + v_4 Q^{(2)} * Q^{(2)} \quad (203)$$

onde

$$Q^{(i)} * Q^{(j)} = \sum_\mu (-)^\mu Q_\mu^{(i)} Q_{-\mu}^{(j)} \quad (204)$$

Uma forma de executar esta conta envolve obter explicitamente os $Q^{(2)}$. Usando os valores dos coeficientes 3j, obtemos

$$Q_0^{(2)} = 2\alpha_{-2}\alpha_2 + \alpha_{-1}\alpha_1 - \alpha_0^2,$$

$$Q_1^{(2)} = \sqrt{6} \alpha_{-1}\alpha_2 - \alpha_0\alpha_1 \quad (205)$$

$$\text{e } Q_2^{(2)} = 2\alpha_0\alpha_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1^2$$

¹⁷ veja por exemplo a ref. 13. As constantes à frente de $Q^{(2)}$ foram introduzidas por conveniência. Os símbolos entre parênteses são coeficientes 3j de Wigner.

$$\text{com } Q_{-\mu}^{(2)} = (-)^{\mu} Q_{\mu}^{(2)*}. \quad (206)$$

Nestas circunstâncias (203) fica

$$\begin{aligned} H_3 + H_4 &= V_3 [\alpha_0^2 (6\alpha_2 \alpha_{-2} + 3\alpha_1 \alpha_{-1} - \alpha_0^2) - \frac{3}{2} \sqrt{6} (\alpha_1^2 \alpha_{-2} + \alpha_2^2 \alpha_{-1})] \\ &\quad + V_4 [\alpha_0^2 (4\alpha_2 \alpha_{-2} - 4\alpha_1 \alpha_{-1} + \alpha_0^2) + 4(\alpha_1 \alpha_{-1} - \alpha_2 \alpha_{-2})^2]. \end{aligned} \quad (207)$$

o próximo passo é a substituição da primeira equação (35) para os α_{μ} em termos dos operadores de criação e aniquilação. Este é um trabalho tedioso, cujo resultado final é

$$\begin{aligned} H_3 + H_4 &= V_3 [2(02^+ - 2^+) + (01^+ - 1^+) + 2(0^+ - 22) + (0^+ - 11) \\ &\quad + 2(0^+ 2^+ 2) + 2(0^+ - 2^+ - 2) + 2(02^+ 2) + 2(0 - 2^+ - 2) - 2(0^+ 1^+ 1) \\ &\quad - 2(0^+ - 1^+ - 1) - 2(01^+ 1) - 2(0 - 1^+ - 1) - (0^+ 00^+) - (00^+ 0) + (0) + (0^+) \\ &\quad - \frac{\sqrt{6}}{2} [(-1 - 1 - 2^+) - 2(1^+ - 1 - 2^+) + (1^+ 1^+ 2) - 2(-11^+ 2) + (112^+)] \\ &\quad - 2(-1^+ 12^+) + (-1^+ - 1^+ - 2) - 2(1 - 1^+ - 2) \}] + \\ &\quad + V_4 [(0^+ 0^+ - 22) - (0^+ 0^+ - 11) + (002^+ - 2^+) - (001^+ - 1^+) + 2(0^+ 02^+ - 2^+) \\ &\quad + 2(0^+ 0 - 22) - 2(0^+ 01^+ - 1^+) - 2(0^+ 0 - 11) + 2(0^+ 02^+ 2) + 2(0^+ 0 - 2^+ - 2) \\ &\quad - 2(0^+ 01^+ 1) - 2(0^+ 0 - 1^+ - 1) + 11/2(0^+ 0) + (2^+ - 2^+) + (-22) - (1^+ - 1^+) \\ &\quad - (-11) + (2^+ 2) + (-2^+ - 2) - (1^+ 1) - (-1^+ - 1) + 11/4 + (0^+ 02^+ 2) \\ &\quad + (002^+ 2) + (0^+ 0^+ - 2^+ - 2) + (00 - 2^+ - 2) - (0^+ 0^+ 1^+ 1) - (001^+ 1) \\ &\quad - (0^+ 0^+ - 1^+ - 1) - (00 - 1^+ - 1) + 5/4(0^+ 0^+) + 5/4(00) + (0^+ 00^+ 0^+) \\ &\quad + 3/4(0^+ 000) + 3/2(0^+ 00^+ 0)]. \end{aligned} \quad (208)$$

onde V_3 e V_4 são proporcionais aos antigos V_3 e V_4 e um exemplo pode esclarecer a notação utilizada

$$2(0^+ - 1^+ 1) \approx 2b_0^+ b_{-1}^+ b_1^-$$

A estrutura da equação (208) mostra que estão envolvidos sempre um operador e seu conjugado hermitiano¹⁸, garantindo a hermiticidade de H . Como este termo extra será tratado em teoria de perturbação de 1^a ordem, foram retirados os termos que misturariam o estado de N fonons com aqueles $N \pm 3$ e $N \pm 4$, por estarem muito afastados energéticamente.

Para o tratamento completo por teoria de perturbações, o que necessitamos é do valor dos elementos de matriz

$$\langle N' v' I' M' | H_3 + H_4 | N v I M \rangle, \quad (209)$$

onde, devido ao fato de que para $N > 4$ existe mais de um estado de mesmo momento angular, veja a tabela 1, torna-se necessária a introdução de um número quântico adicional, v , que neste caso é a senhoridade¹⁹, que vem explicitar o esquema de acoplamento em cada caso. O número de senhoridade representa o número de fonons que não estão acoplados a momento angular zero. Os elementos de matriz (209) são, em última análise, elementos de matriz de produtos de operado-

¹⁸ onde isto não for aparente, basta utilizar as relações de comutação para verificação.

¹⁹ consulte por exemplo as refs. 14-16.

res de criação e aniquilação, podendo ser convertidos em somas de produtos de coeficientes de parentesco fracional, que são proporcionais aos elementos de matriz reduzidos desses mesmos operadores, dos quais alguns valores são apresentados na tabela 3.

Um exemplo da estrutura que se obtém é mostrado a seguir, para o caso do operador $b_{\alpha} b_{\beta}^+$

$$\langle N_f v_f I_f M_f | b_{\alpha} b_{\beta}^+ | N_i v_i I_i M_i \rangle =$$

$$= \sum_{vI} \frac{\langle I_i 028 | I_8 \rangle \langle I_{\alpha} 2, -\alpha | I_f 0 \rangle}{\sqrt{(2I+1)(2I_f+1)}} \langle N_f v_f I_f | b | N_v I \rangle \langle N_v I | b^+ | N_i v_i I_i \rangle$$

(210)

A correção às energias dos estados será dada pelos elementos diagonais de (209) enquanto as novas funções de onda serão dadas por

$$|N'v'I'M'\rangle_1 = \sum_{N'v'I'M'} \frac{|N'v'I'M'\rangle \langle N'v'I'M'| H_3 + H_4 |NvIM\rangle}{(N - N')\hbar\omega}$$

(211)

onde o apóstrofo no sinal de somatório significa que

$$N'v'I'M' \neq NvIM.$$

Os elementos de matriz resultantes foram calculados por computador e são apresentados a seguir à exceção dos parâmetros V_3 e V_4 , para os diversos momentos angulares.

Tabela 8 - Elementos de matriz H_3/V_3 ou H_4/V_4 necessários ao cálculo dos efeitos anarmônicos.

Nv	I = 0			I = 2		
	00	20	33	Nv	11	22
00	2,75	2,05548		11	9,75	2,64575
20	*	9,35	0,92582	22	*	8,46428
33	-	*	11,2357	31	*	26,4643
40	-	6,53879	0,699854	42	-	5,3033
53	-	-	7,16964	44	-	2,46704
				51	-	17,0
				55	-	-1,19463

Nv	I = 3		I = 4		I = 6	
	33	Nv	22	33	Nv	33
33	5,75	22	11,4357	0,304573	33	17,2824
53	3,94421	33	*	15,0175	44	-0,307823
		42	-6,81178	-3,04383	53	-10,278
		44	0,17808	2,05861	55	-1,04504
		53	-	-8,6695		
		55	-	0,136809		

* veja o elemento transposto.

Introduzindo os parâmetros $x_i = v_i/\hbar\omega$ as novas energias dos estados e funções de onda em teoria de perturbações de primeira ordem seguem abaixo (as funções de onda não estão normalizadas e os elementos de matriz das tabe-

As 8 foram truncados a apenas três dígitos.

Tabela 9 - Energias em relação ao estado fundamental.

NvI	$(E_{NvI}^{(1)} - E_{000}^{(1)})/\hbar\omega$
112	$7,00x_4 + 1$
200	$6,60x_4 + 2$
222	$5,71x_4 + 2$
214	$8,69x_4 + 2$
330	$8,49x_4 + 3$
312	$23,7x_4 + 3$
333	$5,75x_4 + 3$
334	$12,3x_4 + 3$
336	$14,5x_4 + 3$

Tabela 10 - Coeficientes que expressam as funções de onda perturbadas na base não perturbada.

NvT (0)	NvT (1)	000	200	330	112	222	312	NvT (0)	NvT (1)	333	224	334	336
000	1	1,03x ₄						333	1				
200	-1,03x ₄	1	0,926x ₃					533	-1,97x ₄				
330		-0,926x ₃	1					224		0,305x ₃			
400		-3,27x ₄	-0,700x ₄					334		1			
530		-3,59x ₄						424	3,41x ₄	3,04x ₃			
112			1	2,65x ₃	3,21x ₄			444		-0,089x ₄	-2,06x ₃		
222			-2,65x ₃	1	1,62x ₃			534		4,34x ₄			
312			-3,21x ₄	-1,62x ₃	1			554		-0,069x ₄			
422				-2,65x ₄	-3,29x ₃			336					1
442					-1,23x ₄	2,50x ₃		446					0,308x ₃
512						-8,50x ₄		536					5,15x ₄
552						0,595x ₄		556					0,525x ₄

O próximo passo é o cálculo das novas energias dos estados, $B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+)$, $B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$ e $Q(2_1^+)$. Há métodos sofisticados que procedem ao ajuste simultâneo de todos os parâmetros buscando minimizar as diferenças entre valores teóricos e aqueles obtidos do experimento, segundo critérios físicos e estatísticos. O cálculo que faremos aqui tem caráter apenas ilustrativo, sendo bem mais rudimentar.

Como esperado, a correção às energias só depende de x_4 . Veja para isso os comentários sobre a Hamiltoniana perturbativa, a equação (203), e também a tabela 9.

Para o momento de quadrupolo do estado 2_1^+ e a probabilidade reduzida da transição $2_2^+ \rightarrow 0_f^+$ obtemos

$$eQ(2_1^+) = 4,02 x x_3 (-3,16 + 5,43x_4) \text{ efm}^2 \quad (212)$$

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+) = 0,2 x^2 x_3^2 (5,93 + 0,558x_4)^2 \text{ e}^2 \text{fm}^4,$$

onde vemos que a parte dependente de x_4 é de ordem superior e se for desprezada estas propriedades dependerão apenas do parâmetro x_3 , simplificando o trabalho nesta aplicação esquemática. Desprezando x_4 as expressões (212) traduzem uma relação simples entre si

$$R_{\text{teo}} = \frac{e^2 Q^2 (2_1^+) (e^2 \text{fm}^4)}{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_f^+) (e^2 \text{fm}^4)} \approx 23, \quad (213)$$

produto do modelo e independente de qualquer parâmetro. Este valor pode ser comparado àqueles experimentais, mostrados a seguir

Tabela 11. - R_{exp}

A	R_{exp}
122	56
124	56
126	36

A comparação entre R_{teo} e R_{exp} evidencia uma limitação: não conseguiremos, com um único parâmetro (x_3) ajustar simultaneamente a probabilidade reduzida e o momento de quadrupolo que estamos analisando.

Quanto à quebra da degenerescência dos estados vibracionais, dependente apenas de x_4 , os cálculos mostram que a obtenção de um bom acordo com os valores experimentais é bastante difícil. Há indicações de que x_4 deveria depender de I, momento angular total e de N, número de fonons do estado, proporcionando assim deslocamentos diferentes para cada multipletos e para cada momento angular pertencente a este último. O resultado da aplicação das expressões da tabela 9 apenas para os elementos do triplete $N = 2$ são mostrados a seguir, onde fizemos $\hbar\omega = E(2_1^+)$ sem qualquer renormalização. São também tabelados os valores de x_3 obtidos dos dados experimentais, juntamente com as relações (212).

Tabela 12 - Valores de \bar{x}_3 obtidos a partir de $Q(2_1^+)$, $B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+ + 0_f^+)$ e sua média. Valores de \bar{x}_4 tomados como a média dos resultados das expressões da tabela 9 para $N = 2$.

A	x_3^Q	x_3^B	\bar{x}_3	\bar{x}_4
120	-	-	-	0,010
122	0,10	0,065	0,083	0,037
124	0,11	0,068	0,089	0,010
126	0,050	0,040	0,045	0,024

Para o cálculo de $B(M1)$ usa-se o operador (162).

Para $B(M1; 2_2^+ + 2_1^+)$ temos

$$B(M1; 2_2^+ + 2_1^+) = 38,7 g_R^2 \bar{x}_3^2 \bar{x}_4^2 (\text{mm})^2 \quad (214)$$

onde utilizamos o resultado (consulte por exemplo a ref. 2)

$$\langle I || \vec{I} || I \rangle = \sqrt{I(I+1)(2I+1)} \quad (215)$$

Utilizando os valores de g_R da tabela 6 além de \bar{x}_3 e \bar{x}_4 da tabela 12 obtemos

Tabela 13 - Valores de $B(E2)$, $B(M1)$ e $\delta(E2/M1)$ para a transição $2_2^+ + 2_1^+$, além de $Q(2_1^+)$.

A	$B(E2)$ ($e^2 \text{fm}^4$)	$B(M1)$ (mm^2)	$ \delta $	$Q(2_1^+)$ (b)
122	$2,6 \times 10^3$	$3,5 \times 10^{-5}$	5	-0,38
124	$2,3 \times 10^3$	$3,8 \times 10^{-6}$	160	-0,38
126	$2,0 \times 10^3$	$4,3 \times 10^{-6}$	130	-0,18

onde a expressão utilizada para $B(E2; 2_2^+ + 2_1^+)$ é

$$B(E2; 2_2^+ + 2_1^+) = 0,2 X^2 (3,16 - 5,43 \bar{x}_4)^2 \quad (216)$$

A comparação das informações acima com aquelas da tabela 7 mostra que a reprodução das propriedades magnéticas é bem mais difícil do que aquelas elétricas.

Observe que a primeira das equações (212) juntamente com a (216) estabelecem uma forma adicional de se obter \bar{x}_3 ,

$$R'_{\text{teo}} = \frac{e^2 Q^2 (2_1^+) (e^2 \text{fm}^4)}{B(E2; 2_2^+ + 2_1^+) (e^2 \text{fm}^4)} \approx 81 \bar{x}_3^2 \quad (217)$$

8 - Conclusões

Pela análise exploratória do modelo vibracional mais anarmonicidade efetuada na seção anterior conseguimos obter o desdobramento dos estados degenerados, um momento de quadrupolo não nulo para os estados com $I \neq 0$, transições M1 entre estados de mesmo spin e transições com $\Delta N=2$.

Não conseguimos entretanto o acerto simultâneo dos valores das diversas propriedades mencionadas, na forma como a anarmonicidade foi introduzida. Há diversas outras maneiras de fazê-lo sendo que sua eficácia não é substancialmente maior.

O desacordo mais forte se dá nas probabilidades reduzidas de transição M1, onde acreditamos que a estrutura do operador contribuiu para isso. De maneira geral, em todos os modelos a reprodução destas propriedades raramente é conseguida. Uma resposta pode ser obtida quando reto-

namos à imagem de partícula e lembramos que enquanto a adição de nucleons apresenta aspectos acumulativos para a densidade de carga e por conseguinte às propriedades elétricas, o mesmo não sucede com aquelas magnéticas, pois a adição de nucleons se dá na órbita ($n\ell jm$) e depois em sua inversa temporal proporcionando alternados cancelamentos. Este comportamento fica evidente na figura 14 que mostra o resultado de um cálculo com o modelo de camadas na região Si-Al, onde vemos valores para as transições E2 e M1 em função do tamanho da base de estados do modelo de camadas utilizada para o seu cálculo, expresso pela amplitude de truncamento. O efeito acumulativo sobre E2 e aquele oscilatório sobre M1 vem confirmar estas afirmações.

Uma limitação seria para as probabilidades M1 reside na estrutura extremamente simples do operador de transição, consequência de se considerar os estados puramente coletivos.

Convém ressaltar que há pontos fracos no modelo, como a consideração da superfície nuclear bem definida. Talvez efeitos de superfície sobre as propriedades magnéticas possam ser importantes.

Finalizando, natureza de "partícula" ou "coletiva" não são opostas ou imcompatíveis, como pode parecer. Isto significa que, dotado de todos os ingredientes necessários, o próprio modelo de camadas deve ser capaz de reproduzir movimentos coerentes de alguns nucleons, a característica coletiva. Isto pode ser parcialmente apreciado na figura 14.

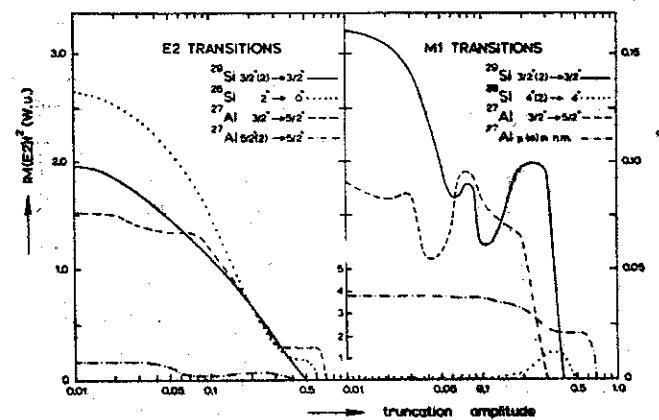
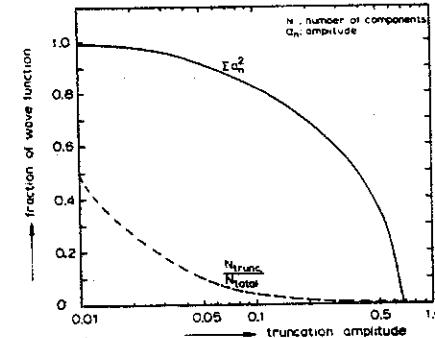


Figura 14 - Comportamento da normalização (a) e das probabilidades de transição E2 e M1 (b) com a amplitude de truncamento da função de onda. Cálculo com o modelo de camadas, ref. 17.

REFERÉNCIAS

1. A. de-Shalit e H. Feshbach, *Theoretical Nuclear Physics*, vol. I: *Nuclear Structure*, John Wiley & Sons, Inc. 1974.
2. A. Bohr e B.R. Mottelson, *Nuclear Structure*, vol. I, W.A. Benjamin, Inc., 1969.
3. A. Bohr e B.R. Mottelson, *Nuclear Structure*, vol. II, W.A. Benjamin, Inc., 1969.
4. E.U. Condon e G.H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, 1953.
5. A.F.R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica*, Notas de aula, 1977.
6. W.D. Hamilton, editor, *The Electromagnetic Interaction in Nuclear Spectroscopy*, North Holland Pub. Co. 1975.
7. J.D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica*, Guanabara Dois, tradução da 2a. edição.
8. E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc. 2a. edição, 1970.
9. J. Lange et al., *Rev. Mod. Phys.*, 54 (1982) 119 e 673.
10. B.J. Raz, *Phys. Rev.* 114 (1959) 1116.
11. C.M. Lederer et al., *Table of Isotopes*, John Wiley & Sons, Inc., 7a. edição, 1978.
12. A. Bohr, *Dan. Mat. Fys. Medd.* 26, nº 14 (1952).
13. K. Kumar e M. Baranger, *Nucl. Phys.* A92 (1967) 608.
14. G. Racah, *Phys. Rev.* 61 (1942) 186, 62 (1942) 438 e 63 (1943) 367.
15. B.F. Bayman e A. Lande, *Nucl. Phys.* 77 (1966) 1.
16. T. Kishimoto e T. Tamura, *Nucl. Phys.* A163 (1971) 100.
17. M.J.A. de Voigt et al., *Nucl. Phys.* A186 (1972) 365.