

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

# PUBLICAÇÕES

INSTITUTO DE FÍSICA  
CAIXA POSTAL 20516  
01498 - SÃO PAULO - SP  
BRASIL

IFUSP/P-611

ESPALHAMENTO CRÍTICO POR BOLHAS

N. Fiedler-Ferrari

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

H.M. Nussenzveig

Departamento de Física, Pontifícia Universidade  
Católica, Caixa Postal 38071, Rio de Janeiro,  
RJ, Brasil



Novembro/1986

N. Fiedler-Ferrari

Laboratório de Física de Plasmas,  
Instituto de Física, Universidade de São Paulo,  
Caixa Postal 20516, 01498 São Paulo, SP, Brasil

H.M. Nussenzveig<sup>(+)</sup>

Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica,  
Caixa Postal 38071, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

RESUMO

Aplica-se a teoria do momento angular complexo ao problema do espalhamento crítico de luz, no limite de altas frequências, por uma cavidade esférica (índice de refração  $N$  relativo ao meio externo  $< 1$  (e.g., bolha de ar na água). Este é um novo efeito de difração encontrado na região de transição em torno do ângulo de espalhamento crítico. O domínio de aplicação dos resultados é definido por  $(k_2 a)^{1/3} \gg 1$  e  $(1-N)^{1/2} (k_2 a)^{1/3} \gg 1$ , onde  $k_2$  é o número de onda da luz no meio infinito e  $a$  o raio da cavidade. As principais contribuições ao espalhamento na região crítica provêm de um "domínio crítico" próximo à incidência crítica. A solução é obtida pelo uso combinado da expansão de Debye para incidência subcrítica, e da transformação de Watson modificada, sem utilizar essa expansão, para incidência supracrítica. São obtidas as expressões para as contribuições dominantes na aproximação de ordem mais baixa. Em particular, o termo supracrítico de reflexão total é representado por um novo tipo de integral de difração.

<sup>(+)</sup>Trabalho parcialmente subvencionado pela FINEP, CNPq e CAPES.

1. INTRODUÇÃO

Vamos considerar o espalhamento, no limite de altas frequências, de uma onda eletromagnética monocromática plana de frequência  $\omega$  no vácuo por uma esfera homogênea, isotrópica, de constante dielétrica  $\epsilon_1$ , com índice de refração absoluto  $N_1$ , de raio  $a$ , imersa em um meio infinito com as mesmas características e com índice de refração absoluto  $N_2$  (constante dielétrica  $\epsilon_2$ ). Ambos os meios são supostos não magnéticos (permeabilidade magnética  $\mu = 1$ ) e transparentes ( $N_1$  e  $N_2$  reais à frequência  $\omega$ ). Assim

$$N = \frac{N_1}{N_2} \quad (1.1)$$

é o índice de refração da esfera relativa ao do meio.

Consideraremos neste trabalho o caso específico do espalhamento no qual o material de que é constituída a esfera é ópticamente menos denso que o meio envolvente, i.e.,  $N < 1$ . Trata-se do espalhamento de luz por uma cavidade esférica; exemplos típicos são o de bolhas de ar na água ( $N=0.75$ ) ou de bolhas de ar em vidro ( $N=0.60$ ).

O domínio de aplicação dos presentes resultados é definido por

$$\beta^{1/3} \gg 1, \quad (1-N)^{1/2} \beta^{1/3} \gg 1 \quad (1.2)$$

onde

$$\beta = k_2 a \quad (1.3)$$

é o parâmetro adimensional associado com o número de onda  $k_2$  da luz no meio infinito ( $=k_0 N_2$ , onde  $k_0$  é seu número de onda no vácuo).

Excluimos o caso  $N \ll 1$ , embora os resultados, com adaptações, possam ser parcialmente aplicados nessa situação.

No contexto da mecânica quântica  $N < 1$  corresponde<sup>1</sup> ao espalhamento de Schrödinger de partículas com energia  $E = k_2^2$  (em unidades  $\hbar = m = 1$ ) por uma barreira quadrada.

A solução exata do problema de espalhamento de luz por uma esfera é dada pela solução de Mie<sup>2</sup>. O campo fora da esfera é representado por uma série de harmônicos esféricos e funções de Bessel de índices semi-inteiros. Estas contribuições são chamadas ondas parciais e podem ser especificadas em termos de multipolos elétricos e magnéticos.

Entretanto, no limite de altas frequências, a série de Mie converge lentamente<sup>1</sup> e o número de termos que deve ser retido na série para se obter uma boa aproximação deve ser da ordem de  $\beta$ . No caso ótico valores típicos de  $\beta$  vão desde algumas dezenas a alguns milhares. O tempo de execução em computador é grosseiramente proporcional a  $\beta^2$  para uma largura fixa de ângulos<sup>3</sup>. Além disso, os resultados variam rapidamente com  $\beta$ ,  $N$  e com a direção, assim a disponibilidade de grandes computadores não resolve o problema de extrair a informação contida na série de Mie.

É com a finalidade de resolver este problema que se tem lançado mão das bem conhecidas<sup>4</sup> técnicas do momento angular complexo (MAC).

Para o espalhamento por uma esfera transparente, o programa foi inteiramente cumprido para índice de refração rela-

tivo  $N > 1$ , tanto no caso escalar<sup>1</sup> como no eletromagnetismo<sup>5,6</sup>, incluindo resultados satisfatórios para os problemas do arco-íris e da auréola.

Aplicações mais recentes da teoria de MAC ao espalhamento de Mie para  $N > 1$ , como a derivação do comportamento assintótico (frequências altas) das seções de choque médias de Mie para extinção, absorção e pressão de radiação<sup>7</sup>, a predição de oscilações da seção de choque de Mie na auréola ótica dianteira<sup>8</sup> e no espalhamento correspondente nuclear<sup>9</sup>, têm mostrado excelente concordância com a solução exata obtida pela somação numérica da série de Mie.

Um programa análogo ao desenvolvido para  $N > 1$  não foi possível para o espalhamento por uma cavidade esférica ( $N < 1$ ), embora várias tentativas utilizando a teoria de MAC<sup>10-16,1,17</sup> tivessem sido feitas.

Para  $N < 1$ , a região crítica, i.e., a vizinhança em torno do ângulo de espalhamento crítico

$$\theta_c = \pi - 2\theta_c = \pi - 2 \operatorname{sen}^{-1}(N) \quad (1.4)$$

( $\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}(N)$  é o ângulo de incidência crítica) é a que mais problemas causa e para a qual não há solução satisfatória.

No espalhamento por gotículas ( $N > 1$ ) a difração é importante para a descrição do arco-íris e das auréolas dianteira e traseira. Para bolhas ( $N < 1$ ), não existe arco-íris; entretanto, na região crítica a difração é importante por causa da mudança abrupta na amplitude da onda refletida quando o ângulo de incidência passa de  $\theta_i < \theta_c$  para  $\theta_i > \theta_c$ , resultante da variação rápida das refletividades próximo de  $\theta_c$ . A região crítica é

para  $N < 1$  o análogo da região de beirada para  $N > 1$ ; trata-se de uma região onde difração ocorre e, em princípio, muitas contribuições são importantes, sendo necessário selecionar aquelas que são realmente dominantes.

A mais recente proposta de solução para  $N > 1$  foi feita por Marston<sup>18-20</sup>. Trata-se de uma aproximação de ótica física ao longo das linhas da teoria clássica da difração. Essa aproximação reproduz razoavelmente as características das oscilações lentas presentes na solução exata de Mie; entretanto, na região crítica, a concordância quantitativa é péssima.

Neste trabalho apresentamos a solução para o problema do espalhamento de Mie na região crítica, utilizando a teoria de MAC. Os resultados para a intensidade de luz espalhada são obtidos na aproximação de ordem mais baixa, mostrando, quando comparados com a solução exata de Mie, muito boa concordância, para valores do parâmetro  $\beta$  a partir de algumas centenas, e tanto melhores quanto maior o valor deste parâmetro.

A idéia central neste trabalho é localizar e calcular as contribuições dominantes ao espalhamento na região crítica, as quais provêm de raios incidentes em um "domínio crítico" próximo à incidência crítica. Para incidência menor que a crítica, neste domínio, é usada a bem conhecida expansão de Debye<sup>1</sup>, para incidência maior que a crítica usam-se expressões sem esta expansão.

A seção 2 resume procedimentos importantes da teoria de MAC ao mesmo tempo que introduz as expressões que serão utilizadas posteriormente. Na seção 2E discute-se o análogo quântico do problema; esta discussão sugere a definição de um domínio crítico, em torno da incidência crítica, que tem interpretação

simples em termos do comportamento dos raios associados, e de onde provêm, para  $N > 1$ , as contribuições dominantes ao espalhamento crítico.

Na seção 3 faz-se o levantamento e a descrição sumária dos tratamentos anteriores, bem como de suas limitações.

Na seção 4 é apresentada a solução para o problema do espalhamento de Mie na região crítica. Na seção 4A são identificadas as contribuições mais importantes ao espalhamento. Nas seções que se seguem cada contribuição é considerada separadamente. Na seção 4B considera-se a contribuição dos raios com incidência subcrítica, porém no domínio crítico, que se refletem diretamente na superfície da cavidade; ela é representada por integrais incompletas de Fresnel-Fock. Na seção 4C são considerados os raios que, com incidência subcrítica, transmitem-se diretamente através da cavidade; tal contribuição é representada por funções de Fock generalizadas incompletas. Na seção 4D trata-se o efeito acumulado dos raios com incidência subcrítica que fazem uma ou mais reflexões internas; a expressão obtida é bastante complicada, contudo, o forte amortecimento presente no integrando é indício de que tal termo não contribui significativamente ao espalhamento. Na seção 4E é tratada, sem a utilização da expressão de Debye, a contribuição dos raios do domínio crítico com incidência supracrítica; este termo leva a um novo tipo de integral de difração, a integral de Pearcey-Fock. Com relação a esta contribuição é também interpretado um termo da fase desta integral em termos do deslocamento angular Goos-Hänchen obtido via conceito de deslocamento angular em espalhamento. Na seção 4F, embora não diretamente ligada ao espalhamento crítico, considera-se a contribuição dos raios com uma reflexão interna e que inci

dem no lado oposto do espalhador e que, devido a grande diferença de caminho ótico, interferem com os demais termos produzindo oscilações rápidas de pequeno período nas curvas de intensidade de luz espalhada; essa contribuição é fornecida pela aproximação WKB.

Na seção 5 discutem-se os resultados obtidos, bem como suas limitações e possíveis abordagens futuras.

## 2. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

### A. REPRESENTAÇÃO EXATA DAS AMPLITUDES DE ESPALHAMENTO (SOLUÇÃO DE MIE)

A solução exata de Mie<sup>2</sup> para as amplitudes de espalhamento quando uma onda eletromagnética plana incide sobre uma esfera homogênea de raio  $a$  e índice de refração  $N$  pode ser escrita como segue:

$$S_j(\beta, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \left[ S_{\ell}^{(j)}(\beta) - 1 \right] t_{\ell}(\cos \theta) + \left[ S_{\ell}^{(n)}(\beta) - 1 \right] p_{\ell}(\cos \theta) \right\}, \quad (n, j = 1, 2, n \neq j), \quad (2.1)$$

onde  $S_1(\beta, \theta)$  e  $S_2(\beta, \theta)$  são as amplitudes de espalhamento associadas com as polarizações perpendicular (ou magnética) e paralela (ou elétrica), respectivamente e  $\theta$  é o ângulo de espalhamento.

As funções angulares são definidas por

$$P_{\nu}(\cos \theta) = \frac{P_{\nu-1}(\cos \theta) - P_{\nu+1}(\cos \theta)}{\sin^2 \theta}, \quad (2.2)$$

$$t_{\nu}(\cos \theta) = -\cos \theta P_{\nu}(\cos \theta) + (2\nu+1) P_{\nu}(\cos \theta), \quad (2.3)$$

onde  $P_{\nu}(\cos \theta)$  é a função de Legendre do primeiro tipo (polinômio de Legendre quando  $\nu = \ell$  é um inteiro). As funções  $S_{\ell}^{(j)}(\beta)$  são elementos da matriz  $S$  associados com multipolos magnéticos ( $j=1$ ) e elétricos ( $j=2$ ), de ordem  $\ell$ , respectivamente. Eles são dados por

$$S_{\ell}^{(j)}(\beta) = -\frac{\zeta_{\ell}^{(2)}(\beta)}{\zeta_{\ell}^{(1)}(\beta)} \left\{ \frac{[2\beta] - N\eta_j[\alpha]}{[1\beta] - N\eta_j[\alpha]} \right\}, \quad (j=1, 2), \quad (2.4)$$

onde

$$\eta_1 = 1, \quad \eta_2 = N^{-2}, \quad \alpha = k_1 a = k_0 N_1 a = N\beta \quad (2.5)$$

e em analogia com o caso escalar definimos

$$\begin{aligned} [z] &= \frac{\psi_{\ell}'(z)}{\psi_{\ell}(z)}, \\ [jz] &= \frac{\zeta_{\ell}^{(j)'}(z)}{\zeta_{\ell}^{(j)}(z)}, \quad (j=1, 2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_{\ell}(x) &= \left[ \frac{\pi x}{2} \right]^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x), \\ \zeta_{\ell}^{(j)}(x) &= \left[ \frac{\pi x}{2} \right]^{\frac{1}{2}} H_{\ell+\frac{1}{2}}^{(j)}(x), \quad (j=1, 2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo  $\psi_{\ell}$  a função de Ricatti-Bessel,  $\zeta_{\ell}^{(1,2)}$  as funções de Ricatti-Hankel,  $J_{\ell+\frac{1}{2}}$  a função de Bessel de ordem semi-inteira e  $H_{\ell+\frac{1}{2}}^{(1,2)}$  as funções de Hankel de primeira e segunda espécies, respectivamente.

A partir das amplitudes de espalhamento  $S_j(\beta, \theta)$  é possível obter todos os observáveis físicos na zona de radiação. As intensidades espalhadas para as duas polarizações são dadas por

$$I_j(\beta, \theta) = |S_j(\beta, \theta)|^2, \quad (j = 1, 2), \quad (2.8)$$

e

$$\delta(\beta, \theta) = \arg[S_1(\beta, \theta)] - \arg[S_2(\beta, \theta)] \quad (2.9)$$

determina o estado de polarização da luz espalhada. Outras quantidades de interesse são fornecidas na literatura<sup>21,22,5</sup>.

Uma representação alternativa para  $S_j(\beta, \theta)$  pode ser obtida em termos das funções

$$p_\ell(-\cos\theta) = (-)^{\ell+1} p_\ell(\cos\theta) \quad (2.10)$$

$$t_\ell(-\cos\theta) = (-)^{\ell} t_\ell(\cos\theta), \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

Usando estas expressões obtemos

$$S_j(\beta, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} (-)^{\ell} \left\{ \left[ S_\ell^{(j)}(\beta) - 1 \right] t_\ell(-\cos\theta) - \left[ S_\ell^{(n)}(\beta) - 1 \right] p_\ell(-\cos\theta) \right\}, \quad (n, j = 1, 2, n \neq j) \quad (2.11)$$

Ambas as representações, (2.1) e (2.11) são equivalentes e regulares para valores físicos de  $\ell$  (reais) em todo domínio angular. Entretanto quando o momento angular  $\ell$  é estendido

para valores complexos (o que será feito neste trabalho), a representação (2.1) torna-se singular em  $\theta = \pi$ , e para (2.11) isto ocorre em  $\theta = 0$ . Como conclusão, fora das direções para frente e para trás ambas as representações podem ser utilizadas.

Para  $\theta$  longe de  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  a contribuição de  $t_\ell$  é dominante sobre a de  $p_\ell$  em (2.1) e (2.11); nesta situação  $S_1(\beta, \theta)$  ( $S_2(\beta, \theta)$ ) é dominado por contribuições de multipolo magnético (elétrico).

B. A TRANSFORMAÇÃO DE WATSON MODIFICADA

Com a finalidade de extrair as informações contidas nas séries de ondas parciais, no limite de altas frequências ( $\beta^{1/3} \gg 1$ ), lançamos mão das técnicas de MAC.

A idéia central destes métodos é reescrever a série de ondas parciais como uma integral no plano- $\lambda$ , onde

$$\lambda = \ell + \frac{1}{2} \quad (2.12)$$

é agora tomado como uma variável complexa ("momento angular complexo"), de tal forma que o caminho de integração possa ser deformado neste plano. Assim procedendo, as contribuições dominantes, no limite de altas frequências, podem ser concentradas em um pequeno número de pontos críticos: pontos de sela reais (associados a raios de ótica geométrica); pólos de Regge ou de Regge-Debye (os resíduos associados podem ser interpretados em termos de ressonâncias e em alguns casos ondas superficiais); pontos de sela complexos (associados a "trajetórias complexas" (efeito do tipo tunelamento)). Maiores detalhes sobre essas técnicas são en

contrados na literatura<sup>4</sup>.

A melhor forma de generalizar o momento angular a valores complexos com a finalidade de tratar problemas de espalhamento é através de um procedimento denominado transformação de Watson modificada<sup>1,23</sup>. Este procedimento é baseado na aplicação da fórmula de soma de Poisson

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell + \frac{1}{2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-)^m \int_0^{\infty} f(\lambda) \exp(2im\pi\lambda) d\lambda, \quad (2.13)$$

onde a função interpolatriz  $f(\lambda)$  reduz-se a  $f(\ell + \frac{1}{2})$  nos valores físicos de  $\lambda$ . O termo  $m=0$  em (2.13) corresponde a aproximar a soma por uma integral<sup>24</sup>. Termos com  $m \neq 0$  são associados com caminhos que envolvem  $|m|$  o centro da esfera.

A aplicação da fórmula de soma de Poisson (2.13) às expressões (2.1) e (2.11) fornece

$$S_j(\beta, \theta) = \hat{S}_j(\beta, \theta) + \frac{1}{2} [\sigma_1(\beta) - 1] \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.14)$$

$$S_j(\beta, \theta) = \hat{S}_j(\beta, \theta) - (-1)^j \frac{1}{2} \sigma_2(\beta) \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (j=1,2), \quad (2.15)$$

onde os fatores

$$\sigma_1(\beta) = \frac{4N \exp[2i(N-1)\beta]}{\{(N+1)^2 - (N-1)^2 \exp(4i\alpha)\}}, \quad (2.16)$$

$$\sigma_2(\beta) = \left(\frac{N-1}{N+1}\right) \exp(-2i\beta) - \sigma_1(\beta), \quad (2.17)$$

provém da adição e subtração em (2.1) e (2.11) de um termo fictício  $\ell=0$ , de forma a aplicar (2.13), e

$$\hat{S}_j(\beta, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-)^m \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 1 - S^{(j)}(\lambda, \beta) \right] t_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) + \left[ 1 - S^{(n)}(\lambda, \beta) \right] p_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \right\} \exp(2mi\pi\lambda) d\lambda, \quad (2.18)$$

$$\hat{S}_j(\beta, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-)^m \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 1 - S^{(j)}(\lambda, \beta) \right] t_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) - \left[ 1 - S^{(n)}(\lambda, \beta) \right] p_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) \right\} \exp[i(2m+1)\pi\lambda] d\lambda, \quad (2.19)$$

$$(n, j = 1, 2, \quad n \neq j),$$

onde

$$S^{(j)}(\lambda, \beta) = S_{\ell}^{(j)}(\beta), \quad (j=1,2), \quad (2.20)$$

com  $\lambda = \ell + \frac{1}{2}$ .

### C. A EXPANSÃO DE DEBYE

Uma forma bastante conveniente de representar a interação da onda incidente com o espalhador esférico é através da expansão de Debye<sup>4</sup>.

Nesta expansão a interação de cada onda multipolar esférica com o espalhador é quebrada em uma série infinita de interações com a superfície (cada onda sofre reflexões internas sucessivas na superfície e no centro da esfera que simula um refletor perfeito).

A expansão de Debye para os elementos da matriz-S se escreve<sup>5</sup>

$$S_{\lambda}^{(j)}(\beta) = S_0^{(j)}(\lambda, \beta) + U^{(j)}(\lambda, \beta) \times \left\{ \sum_{p=1}^P [\rho_j(\lambda, \beta)]^{p-1} + \frac{[\rho_j(\lambda, \beta)]^P}{1 - \rho_j(\lambda, \beta)} \right\}, \quad (j=1,2), \quad (2.21)$$

onde  $\lambda = \ell + \frac{1}{2}$ ,

$$\rho_j(\lambda, \beta) = \frac{H_{\lambda}^{(1)}(\alpha)}{H_{\lambda}^{(2)}(\alpha)} R_{11}^{(j)}(\lambda, \beta), \quad (2.22)$$

$$S_0^{(j)}(\lambda, \beta) = \frac{H_{\lambda}^{(2)}(\beta)}{H_{\lambda}^{(1)}(\beta)} R_{22}^{(j)}(\lambda, \beta), \quad (2.23)$$

$$U^{(j)}(\lambda, \beta) = T_{21}^{(j)}(\lambda, \beta) \frac{H_{\lambda}^{(1)}(\alpha) H_{\lambda}^{(2)}(\beta)}{H_{\lambda}^{(2)}(\alpha) H_{\lambda}^{(1)}(\beta)} T_{12}^{(j)}(\lambda, \beta), \quad (2.24)$$

$T_{rs}^{(j)}(\lambda, \beta)$  e  $R_{rs}^{(j)}(\lambda, \beta)$  ( $r, s=1,2$ ) são respectivamente os coeficientes esféricos de transmissão e reflexão entre a região 1 (dentro da esfera) e a região 2 (fora da esfera) (apêndice B).

A correspondente expansão de Debye das amplitudes de espalhamento é

$$S_j(\beta, \theta) = S_{j0}(\beta, \theta) + \sum_{p=1}^P S_{jp}(\beta, \theta) + R_j^{(P+1)}(\beta, \theta), \quad (2.25)$$

onde  $S_{j0}$  é associado com reflexão direta na superfície da esfera,  $S_{jp}$ , o p-ésimo termo da expansão de Debye, é associado com transmissão depois de (p-1) reflexões internas na superfície, e

$R_j^{(P+1)}(\beta, \theta) = \sum_{p=P+1}^{\infty} S_{jp}(\beta, \theta)$  corresponde às ondas que sofrem P ou mais reflexões internas. Embora a expansão de Debye seja convergente<sup>1</sup>, a velocidade desta convergência pode ser lenta em determinados domínios do parâmetro de impacto, o que compromete, nestes casos, sua utilização de forma eficiente.

Podemos agora substituir (2.21) em (2.14) e (2.15) (ou aplicar a cada um dos termos de (2.25) a mesma transformação que levou de (2.1) e (2.11) a (2.14) e (2.15), respectivamente. O resultado desta operação é aplicar a fórmula de soma de Poisson a cada um dos termos da expansão de Debye (observe-se que previamente deve ser feita a expansão de Debye dos termos fictícios  $\ell = 0$ , entretanto isto é trivial).

Para a representação (2.1), obtém-se para cada um dos termos de (2.25):

$$S_{j0}(\beta, \theta) = \tilde{S}_{j0}(\beta, \theta) - \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.26)$$

$$S_{jp}(\beta, \theta) = \tilde{S}_{jp}(\beta, \theta) + [1 - (-)^p] \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{N}{(N+1)^2} \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{p-1} \times \exp[2i(N-1)\beta] \exp[2i(p-1)\alpha], \quad p > 1, \quad (2.27)$$

$$R_j^{(P+1)}(\beta, \theta) = \tilde{R}_j^{(P+1)}(\beta, \theta) + \sum_{p=P+1}^{\infty} [1 - (-)^p] \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{N}{(N+1)^2} \times \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{p-1} \exp[2i(N-1)\beta] \exp[2i(p-1)\alpha], \quad (j=1,2), \quad (2.28)$$

onde



$$\begin{aligned} \hat{S}_{j0}(\beta, \theta) = & \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 1 - S_0^{(j)}(\lambda, \beta) \right] t_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \right. \\ & \left. + \left[ 1 - S_0^{(n)}(\lambda, \beta) \right] p_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \right\} \exp(2mi\pi\lambda) d\lambda, \quad (2.29) \\ & (n, j = 1, 2, n \neq j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{jp}(\beta, \theta) = & -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \left\{ U^{(j)}(\lambda, \beta) \left[ \rho_j(\lambda, \beta) \right]^{p-1} t_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \right. \\ & \left. + U^{(n)}(\lambda, \beta) \left[ \rho_n(\lambda, \beta) \right]^{p-1} p_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \right\} \exp(2mi\pi\lambda) d\lambda, \quad (2.30) \\ & (n, j = 1, 2, n \neq j), \quad p \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_j^{(P+1)}(\beta, \theta) = & -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \left\{ U^{(j)}(\lambda, \beta) \frac{[\rho_j(\lambda, \beta)]^P}{1 - \rho_j(\lambda, \beta)} t_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \right. \\ & \left. + U^{(n)}(\lambda, \beta) \frac{[\rho_n(\lambda, \beta)]^P}{1 - \rho_n(\lambda, \beta)} p_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \right\} \exp(2mi\pi\lambda) d\lambda, \quad (2.31) \\ & (n, j = 1, 2, n \neq j) \end{aligned}$$

Procedendo de forma similar para a representação (2.11) obtemos

$$S_{j0}(\beta, \theta) = \hat{S}_{j0}(\beta, \theta) - (-1)^j \frac{(N-1)}{2(N+1)} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-2i\beta), \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} S_{jp}(\beta, \theta) = & \hat{S}_{jp}(\beta, \theta) - (-1)^j \left[ 1 - (-1)^P \right] \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{N}{(N+1)^2} \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{p-1} \\ & \times \exp[2i(N-1)\beta] \exp[2i(p-1)\alpha], \quad p \geq 1, \quad (2.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_j^{(P+1)}(\beta, \theta) = & \hat{R}_j^{(P+1)}(\beta, \theta) - \sum_{p=P+1}^{\infty} (-1)^j \left[ 1 - (-1)^P \right] \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ & \times \frac{N}{(N+1)^2} \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{p-1} \exp[2i(N-1)\beta] \exp[2i(p-1)\alpha], \quad (j = 1, 2), \quad (2.34) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{S}_{j0}(\beta, \theta) = & -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 1 - S_0^{(j)}(\lambda, \beta) \right] t_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) \right. \\ & \left. - \left[ 1 - S_0^{(n)}(\lambda, \beta) \right] p_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) \right\} \exp[i(2m+1)\pi\lambda] d\lambda, \quad (2.35) \\ & (n, j = 1, 2, n \neq j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{jp}(\beta, \theta) = & \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \left\{ U^{(j)}(\lambda, \beta) \left[ \rho_j(\lambda, \beta) \right]^{p-1} t_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) \right. \\ & \left. - U^{(n)}(\lambda, \beta) \left[ \rho_n(\lambda, \beta) \right]^{p-1} p_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) \right\} \\ & \times \exp[i(2m+1)\pi\lambda] d\lambda, \quad (n, j \neq 1, 2, n \neq j), \quad p \geq 1, \quad (2.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_j^{(P+1)}(\beta, \theta) = & \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \left\{ U^{(j)}(\lambda, \beta) \frac{[\rho_j(\lambda, \beta)]^P}{1 - \rho_j(\lambda, \beta)} \right. \\ & \left. \times t_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) - U^{(n)}(\lambda, \beta) \frac{[\rho_n(\lambda, \beta)]^P}{1 - \rho_n(\lambda, \beta)} p_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) \right\} \\ & \times \exp[i(2m+1)\pi\lambda] d\lambda, \quad (n, j = 1, 2, n \neq j). \quad (2.37) \end{aligned}$$

D. OS PÓLOS DE REGGE E OS PÓLOS DE REGGE-DEBYE PARA  $N < 1$ 

O procedimento que fornece a localização aproximada no plano- $\lambda$  dos pólos de Regge e de Regge-Debye para  $N < 1$ , no limite de altas frequências, é bastante similar àquele utilizado para  $N > 1$  nos casos escalar<sup>1</sup> e eletromagnético<sup>5</sup>. Nesta seção interpretam-se apenas os resultados. Considera-se, para melhor compreensão, o limite  $N \ll 1$  (i.e.,  $\beta \gg \alpha \gg 1$ ) que corresponde a uma região esférica envolvida por um meio óticamente denso ou quânticamente a uma barreira de potencial bastante alta.

Os integrandos de  $\hat{S}_j(\beta, \theta)$  e  $\hat{S}_j(\beta, \theta)$  em (2.14) e (2.15), respectivamente, são funções meromorfas de  $\lambda$  com pólos simples, denominados, em conformidade com a literatura, pólos de Regge.

Pelas expressões (2.4) e (2.20) os pólos são as raízes de

$$[1\beta] = \eta_j N[\alpha] \quad , \quad (j=1,2) \quad , \quad (2.38)$$

para valores fixos de  $\beta$ .

A representação esquemática dos polos de Regge para  $\beta \gg \alpha \gg 1$  é mostrada na Fig. 1a.

Esses pólos dividem-se em dois tipos: aqueles próximos do eixo real (classe I) e os localizados próximos às linhas de Stokes da representação assintótica de  $H_\lambda^{(1)}(\beta)$  (classe II).

Como no caso  $N > 1$ <sup>1,5</sup>, os pólos classe II têm o comportamento típico daqueles associados a ondas superficiais e são praticamente insensíveis ao comportamento do potencial na região interna (desde que  $N$  não seja próximo da unidade), dependendo fun

damentalmente da forma geométrica da superfície. São em número infinito à frequência (energia) finita.

Os pólos de classe I estão associados a ressonâncias acima do topo da barreira, são em número finito no primeiro quadrante, diferindo do caso  $N > 1$  pelo fato de que ocorrem ressonâncias estreitas (vida média longa) inclusive a baixos valores do momento angular. Associam-se com o "interior" do potencial. Óticamente eles correspondem a modos livres de vibração da esfera dielétrica<sup>25</sup>. A interpretação em termos do análogo quântico do problema será feita na seção 2E.

Os pólos de classe I contidos no domínio  $|\lambda - \alpha| < \alpha^{1/3}$  correspondem a peculiares modos livres de vibração da cavidade. A interpretação cuidadosa dos resíduos calculados nestes pólos<sup>17,26</sup> no caso escalar mostrou que eles representam a situação limite de ondas que incidem próximas mas abaixo do ângulo crítico, são transmitidas quase tangencialmente, internamente refletidas muitas vezes, e emergem em um ângulo próximo do crítico, amortecendo-se exponencialmente, devido a essa mesma emissão, à medida que se propagam. Em analogia com o caso acústico<sup>27</sup> utilizamos a designação modos de galeria de sussurros generalizados para estes modos.

Os pólos de classe II próximos de  $\lambda = \beta$  estão associados, através de seus resíduos, a ondas com incidência rasante que, viajando externamente à cavidade, radiam tangencialmente à medida que se propagam, amortecendo-se com um fator proporcional à parte imaginária dos respectivos polos.

Os pólos no plano- $\lambda$  para cada termo de Debye em (2.25) são denominados pólos de Regge-Debye<sup>1</sup>. Eles têm a mesma posição para todos os termos de Debye, entretanto sua ordem varia de ter

mo para termo; eles são de ordem  $(p+1)$  para o  $p$ -ésimo termo de Debye.

Segue de (2.21) e das expressões para os coeficientes esféricos de reflexão e transmissão (apêndice B) que os pólos de Regge-Debye são as raízes no plano complexo  $\lambda$  de

$$[1\beta] = n_j N[2\alpha] \quad , \quad (j=1,2) \quad , \quad (2.39)$$

para valores fixos de  $\beta$ .

A representação esquemática dos pólos de Regge-Debye é mostrada na Fig. 1b.

Em contraste com a distribuição de pólos de Regge, não há muitos polos próximos do eixo real; isto decorre do fato que a expansão de Debye é uma representação em termos de interações superficiais.

Os pólos de Regge-Debye nos primeiro e terceiro quadrantes são muito próximos daqueles encontrados para a esfera impenetrável<sup>23</sup>, podendo, os próximos de  $\lambda = \beta$ , ser também associados a ondas superficiais excitadas por raios com incidência rasantíssima com um fator de amortecimento proporcional às suas partes imaginárias. Os pólos nos segundo e quarto quadrantes não ocorriam para a esfera impenetrável, e para  $N > 1$  os resíduos neles calculados davam contribuição desprezível; o comparecimento destes polos é inteiramente devido à expansão de Debye.

#### E. ANÁLOGO QUÂNTICO PARA $N < 1$

Para discutir o espalhamento crítico em termos da teoria de MAC é conveniente utilizar a bem conhecida analogia<sup>1</sup> com o espalhamento de Schrödinger de partículas com energia  $E = k_2^2$

(em unidades  $h = m = 1$ ) por um potencial quadrado

$$V(r) = V_0 \quad (0 \leq r < a) \quad , \quad = 0 \quad (r > a) \quad . \quad (2.40)$$

O índice de refração associado é

$$N^2 = 1 - (V_0/E) \quad , \quad (2.41)$$

de tal forma que  $N < 1$  corresponde a uma barreira quadrada ( $V_0 > 0$ ).

O potencial efetivo para movimento radial é

$$V_{\text{ef}}^\lambda(r) = V(r) + \frac{\lambda^2}{r^2} \quad , \quad (2.42)$$

onde o último termo representa a barreira centrífuga.

Para  $N < 1$ ,  $V_{\text{ef}}^\lambda(r)$  representa um degrau de potencial em forma de cúspide como mostrado na Fig. 2.

O momento angular crítico

$$\lambda_c = \alpha \quad (2.43)$$

associado com incidência crítica corresponde a um nível de energia  $E$  no topo do degrau, situação em que o ponto A se encontra sobre a linha de ordenada  $E$ . Do ponto de vista da ótica geométrica a caústica fica na superfície da esfera e se tem uma onda superficial estimulada por incidência crítica.

Para  $N < 1$  existe um domínio crítico

$$\alpha - O(\alpha^{1/3}) \leq \lambda \leq \alpha + O(\alpha^{1/3}) \quad , \quad (2.44)$$

que corresponde a valores do momento angular  $\lambda(\ell)$  tais que o

ponto A está em uma faixa estreita em torno da ordenada correspondente à energia E (fixa).

O domínio crítico (2.44) é para  $N < 1$  o análogo do domínio de beirada<sup>1</sup> (em torno do momento angular de beirada  $\lambda_e = \beta$ ) para  $N > 1$ . Neste último caso os raios deste domínio constituem a contribuição principal à auréola<sup>4</sup>, para  $N < 1$  as contribuições dominantes ao espalhamento crítico na teoria de MAC provém todas do domínio crítico.

Para raios incidentes no domínio crítico inferior

$$0 \leq \lambda_c - \lambda \leq \alpha^{1/3}, \quad (2.45)$$

o ponto A se encontra próximo, porém abaixo da linha de ordenada E. Assim o ponto de retorno radial no interior da esfera encontra-se muito próximo de sua superfície, correspondendo a raios que sofrem reflexão interna (múltipla) quase total, estando a caústica associada igualmente próxima da superfície da esfera.

No domínio crítico superior

$$0 \leq \lambda - \lambda_c \leq \alpha^{1/3}, \quad (2.46)$$

o ponto A se encontra próximo porém acima da linha de ordenada E, nessa situação a profundidade de penetração por tunelamento para dentro da esfera é ainda muito maior que o comprimento de onda; como consequência, as ondas evanescentes geradas por reflexão total propagam-se como ondas superficiais, viajando internamente ao longo da superfície (modos de galeria de sussurros).

### 3. LIMITAÇÕES DOS TRATAMENTOS ANTERIORES

Na literatura há duas linhas principais para tratar o problema considerado neste artigo: pela utilização da teoria de MAC e através de métodos da teoria clássica da difração.

Para  $N < 1$ , os tratamentos utilizando a teoria de MAC falham devido a dois problemas.

A expansão de Debye introduz pólos nos segundo e quarto quadrantes, aos quais não é possível associar um significado físico plausível<sup>17</sup> ou evitá-los quando a transformação de Watson modificada é aplicada<sup>26</sup>.

Por outro lado, no ângulo de observação  $\theta = \theta_t$ ,  $\lambda = \lambda_c = \alpha$  é um ponto de acumulação, no plano- $\lambda$ , de pontos de sela associados com diferentes termos da expansão em reflexões múltiplas de Debye, e o cálculo deve, em princípio, estender-se a todos os termos desta série na vizinhança do ângulo crítico, o que é problemático.

Várias tentativas foram feitas no sentido de contornar estes problemas: evitando a contribuição dos pólos "não-físicos"<sup>10,14</sup>; propondo uma somação sobre os pólos de Regge originais<sup>15,16</sup>; considerando a contribuição dos pólos "não-físicos", mas atribuindo-lhes um significado incorreto<sup>1</sup>. Contudo essas propostas mostraram-se todas insuficientes para resolver o problema.

Ainda utilizando a teoria de MAC, Ludwig<sup>17</sup>, para  $\theta < \theta_t$  e suficientemente longe de  $\theta_t$ , propôs incluir  $O(\beta^{1/4})$  contribuições de pontos de sela e igual número de contribuições de pólos de Regge; tal representação seria muito difícil de calcular na prática. Além disso, a região em torno do espalhamento crítico foi excluída de seu tratamento. Fiedler-Ferrari<sup>26</sup>, par-

tindo do trabalho de Ludwig, simplificou-o e incluiu uma proposta para abordagem do espalhamento próximo do ângulo crítico, a qual exige, contudo, maior elaboração.

Na aproximação de ótica geométrica, Davis<sup>28</sup> obteve uma distribuição angular da intensidade de luz espalhada que apresenta uma abrupta diminuição quando o ângulo de espalhamento  $\theta$  excede  $\theta_t$ . Além disso, esta distribuição mostra uma cúspide em  $\theta = \theta_t$ , resultado da aproximação abrupta das refletividades de Fresnel à unidade no ângulo de incidência crítica  $\theta_c$ .

Cálculos exatos de Mie<sup>3</sup> mostram um comportamento oscilatório da intensidade de luz espalhada na região de reflexão total próxima de  $\theta_t$  ( $\theta \leq \theta_t$ ). Essas franjas de difração foram também observadas experimentalmente<sup>18</sup>.

Uma "aproximação de ótica física" nas linhas da teoria clássica da difração foi proposta por Marston em uma série de artigos<sup>18-20</sup> (existe um resumo dos resultados obtidos<sup>29</sup>). A contribuição de reflexão superficial é tratada por um procedimento similar ao da teoria de Airy do arco-íris: uma aproximação do tipo Kirchhoff é aplicada à distribuição de amplitude ao longo de uma frente de onda virtual refletida. Em vista da aproximação abrupta à reflexão total, as refletividades são aproximadas por funções de grau. Esta "beirada de refletividade" dá origem a uma distribuição angular de intensidade espalhada similar a uma figura de difração de Fresnel de uma beirada retilínea, a qual explicaria as franjas de difração.

Entretanto, a distribuição angular real<sup>18</sup> difere da de Fresnel: a amplitude das oscilações aumenta à medida que vamos além de  $\theta_t$ . Este reforço foi explicado por Marston<sup>19</sup> através da interferência com raios diretamente transmitidos devidos

a incidência abaixo da crítica.

Sobreposta às oscilações lentas discutidas, os cálculos exatos de Mie<sup>3</sup> mostram uma estrutura fina representada por oscilações rápidas de amplitude relativamente menor. Estas oscilações resultam da interferência de contribuições "near-side" e "far-side" (usamos aqui a terminologia do espalhamento nuclear<sup>30</sup>) provenientes principalmente de raios que sofrem uma reflexão interna (raio 2' na Fig. 3). Essa estrutura fina não está relacionada com o espalhamento crítico, assim ela deve ser subtraída ou deve-se fazer uma média sobre essas oscilações de forma a isolar efeitos de espalhamento puramente crítico.

A aproximação de ótica física de Marston está em acordo razoável com as características gerais das oscilações lentas presentes na solução exata, como pode ser visto na Fig. 4; entretanto, na vizinhança de  $\theta_t$ , o acordo quantitativo é pobre, especialmente para  $\theta > \theta_t$ .

Vários fatores contribuem para este resultado: a aproximação de degrau usada para as refletividades, que resulta em desprezar a contribuição das reflexões superficiais devido à incidência abaixo da crítica; a utilização dos coeficientes de transmissão de Fresnel, ao invés de considerar-se a curvatura da superfície (obviamente importante próximo da incidência crítica); e, o tratamento incorreto da contribuição dos raios totalmente refletidos, o que corresponde a tratar de forma aproximada o deslocamento angular no processo de espalhamento (conforme seção 4E).

#### 4. AMPLITUDES DE ESPALHAMENTO PRÓXIMAS DO RAIOS CRITICAMENTE REFLETIDO

##### A. ASPECTOS GERAIS DO PROCEDIMENTO

Apresentamos aqui nossa solução para o espalhamento na região crítica

$$\begin{aligned} \epsilon > 0 : \quad \epsilon &= O(\beta^{-1/3}) \\ \epsilon < 0 : \quad |\epsilon| &= O(\beta^{-1/2}) \\ \epsilon &= \frac{1}{2} (\theta_t - \theta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde o parâmetro  $\epsilon$  mede a direção de espalhamento relativamente à do espalhamento crítico. Reflexão total ocorre para ângulos de incidência  $\theta_i > \theta_c$  (i.e., para  $\theta < \theta_t$  ( $\epsilon > 0$ )). Para ângulos de incidência  $\theta_i < \theta_c$  (ou seja, para  $\theta > \theta_t$  ( $\epsilon < 0$ )) ocorre reflexão parcial. Nestes termos (4.1) é uma região de transição (assimétrica) em torno do espalhamento crítico (Fig. 5). A definição (4.1) adotada para a região será justificada a posteriori, ao longo desta seção.

Conforme assinalamos antes, as contribuições dominantes ao espalhamento crítico provêm do domínio crítico (2.44).

As contribuições dominantes do domínio crítico inferior (2.45) são os termos de Debye de reflexão direta e transmissão direta ( $p=1$ ). Para os termos associados a uma ou mais reflexões internas ( $p \geq 2$ ) obtém-se uma única expressão que representa o efeito somado destes; entretanto, a contribuição associada é desprezível no limite de altas frequências considerado e para valores típicos do índice de refração. Os principais efeitos

novos estão contidos no termo supracrítico de reflexão total, proveniente do domínio crítico superior (2.46); utilizam-se para o cálculo deste termo as expressões originais, sem a expansão de Debye. A contribuição "far-side" associada a raios uma vez internamente refletidos, a qual é a principal responsável pelas oscilações na estrutura fina, é dada pela aproximação WKB<sup>1,5</sup>.

No limite de altas frequências (1.2) a região crítica (4.1) é estreita e conseqüentemente  $\epsilon$  é pequeno. As contribuições à essa região que provêm do domínio crítico (2.44) são de raios com incidência próxima à crítica; assim, o parâmetro  $\delta = \theta_i - \theta_c$ , que mede o desvio do ângulo de incidência relativamente ao crítico é pequeno. Algumas das expressões que obtemos para as contribuições do domínio crítico são expressões em séries de potências de  $\delta$  (ou variável correspondente) onde apenas os termos de ordem mais baixa foram levados em conta; são portanto tanto melhores quanto mais próximo se estiver da direção do raio criticamente refletido ( $\epsilon = 0$ ).

No domínio crítico a aproximação dos coeficientes de reflexão e transmissão pelos de Fresnel para uma superfície plana não é boa; tais coeficientes são escritos levando-se em conta a curvatura da superfície (Apêndice B).

A direção  $\theta = \theta_t$  ( $\epsilon = 0$ ) é um contorno de sombra para os sucessivos termos de Debye. Assim,  $\epsilon > 0$  ( $\theta < \theta_t$ ) é uma região de sombra para o termo subcrítico de reflexão direta. Já  $\epsilon < 0$  ( $\theta > \theta_t$ ) é uma região de sombra para os termos de transmissão direta ( $p=1$ ), multi-reflexão interna ( $p \geq 2$ ), e de reflexão total.

As contribuições ao espalhamento crítico são obtidas na forma de integrais sobre o eixo real do plano de MAC, as quais podem ser facilmente calculadas numericamente. Nos termos de

Debye será considerado apenas parte do alcance dos respectivos pontos de sela (aquela que se encontra no domínio crítico inferior); tratam-se, portanto, de expressões que representam apenas parte da contribuição do respectivo termo de Debye. O mesmo ocorre com o termo de reflexão total, onde considera-se apenas a parte do alcance do ponto de sela que se encontra no domínio crítico superior (a outra parte do alcance está considerada nos termos de Debye associados ao domínio crítico inferior).

**B. TERMO SUBCRÍTICO DE REFLEXÃO DIRETA**

Para valores de interesse do índice de refração relativo a região crítica (4.1) se encontra longe das direções dianteira e traseira. Assim, pode-se utilizar a representação (2.1) ou (2.11), conforme a conveniência.

Procedendo como Khare<sup>5</sup>, parte-se de (2.32) e (2.35) levando em conta a propriedade de reflexão

$$S_0^{(j)}(-\lambda, \beta) = \exp(-2i\pi\lambda) S_0^{(j)}(\lambda, \beta), \quad (j=1,2), \quad (4.1)$$

para obter o termo dominante

$$S_{j0}(\beta, \theta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \left\{ S_0^{(j)}(\lambda, \beta) t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) + S_0^{(n)}(\lambda, \beta) p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) \right\} d\lambda, \quad (4.2)$$

(n, j = 1, 2, n ≠ j)

onde as funções  $t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(i)}(\cos \theta)$  e  $p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(i)}(\cos \theta)$ , (i = 1, 2), são defini-

das no Apêndice A.

A contribuição dominante ao termo subcrítico de reflexão direta segue de (4.2) com algumas modificações.

Inicialmente, o limite superior de integração é interrompido no extremo superior  $\lambda = \alpha + i\epsilon = \lambda_c + i\epsilon$  do domínio crítico inferior, sem prejuízos adicionais, já que o restante do domínio de integração para este termo, bem como para os demais termos de Debye, será incluído no termo supracrítico de reflexão total. A contribuição dominante na região crítica provém da vizinhança de  $\lambda = \lambda_c$ ; assim, trazemos o caminho de integração para o eixo real no domínio crítico inferior, onde se encontra o ponto de sela associado. Longe da vizinhança do ponto de sela a fase de (4.2) oscila rapidamente e a contribuição à integral é desprezível. O ponto  $\lambda'$  onde o caminho de integração encontra o eixo real é necessariamente à direita do pólo em  $\lambda = +1/2$  das funções angulares. À esquerda de  $\lambda'$  o caminho de integração está abaixo e longe do pólo de Regge-Debye mais próximo do eixo real no segundo quadrante (Fig. 6).

Na região considerada  $p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(i)}(\cos \theta)$  é  $O(\lambda^{-1} \sin^{-1} \theta)$  quando comparada com  $t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(i)}(\cos \theta)$  (Apêndice A). Como conseqüência, no limite de altas frequências, o segundo termo do lado direito de (4.2) é desprezível em comparação ao primeiro e as amplitudes de espalhamento para polarizações 1 e 2 são respectivamente dominadas por multipolos elétricos e magnéticos.

Finalmente podemos escrever para a contribuição dominante ao termo subcrítico de reflexão direta  $S_{j0}^<(\beta, \theta)$

$$S_{j0}^<(\beta, \theta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\lambda_c} \frac{H_{\lambda}^{(2)}(\beta)}{H_{\lambda}^{(1)}(\beta)} R_{22}^{(j)}(\lambda, \beta) \times t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) d\lambda, \quad (j=1,2), \quad (4.3)$$

onde foi usada a definição (2.23) para  $S_0^{(j)}(\beta)$ , e os extremos de integração representam o caminho indicado na Fig. 6.

Substituindo em (4.3) as expansões assintóticas de Debye para as funções de Hankel (Ref. 27, Apêndice A), os coeficientes de reflexão externa  $R_{22}^{(j)}(\lambda, \beta)$  pelas suas expressões válidas no domínio crítico (Apêndice B),  $t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta)$  pela sua expansão assintótica válida no domínio  $\epsilon < \theta < \pi - \epsilon$ ,  $|\lambda|\epsilon \gg 1$ ,  $|\lambda| \gg 1$  (Apêndice A), e definindo a variável

$$v = \left[ \frac{2}{\beta \sin(\theta/2)} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \lambda - \beta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (4.4)$$

obtemos

$$S_{j0}^<(\beta, \theta) = e^{\frac{3i\pi}{4}} \left[ \frac{N \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\pi \sin\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \beta \exp\left\{ -2i\beta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \\ \times \int_{-\infty}^{z=0} \left[ \frac{1 + e^{-i\frac{\pi}{6}} \frac{N\gamma' \eta_j}{M} \ln' \text{Ai}\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}} z\right)}{1 - e^{-i\frac{\pi}{6}} \frac{N\gamma' \eta_j}{M} \ln' \text{Ai}\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}} z\right)} \right] \\ \times \exp(-iv^2) dv, \quad (j=1,2), \quad (4.5)$$

sendo

$$\gamma' = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/3} = \left(\frac{2}{\lambda c}\right)^{1/3}, \quad (4.6)$$

$$z = \gamma' \left[ \left( \beta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{\frac{1}{2}} v + \beta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \alpha \right], \quad (4.7)$$

$$M = (1 - N^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.8)$$

Ai a função de Airy e  $\ln'$  designa derivada logarítmica em relação ao argumento. O extremo superior da integral em (4.5) é dado pela solução da equação  $z=0$ .

Desta forma, a contribuição dominante ao termo subcrítico de reflexão direta (4.5) é dada por uma integral incompleta de Fresnel-Fock, contendo somente parte do alcance do ponto de sela de reflexão direta.

Na região crítica (4.1),  $\epsilon$  é pequeno; para  $\epsilon < 0$ , segue de (4.7) que

$$z \sim \gamma' \left[ \sqrt{M\beta} v - M\beta |\epsilon| \right] \quad (4.9)$$

Uma vez que a contribuição dominante à integral (4.3) provém de  $z \sim 0$ , (4.9) fornece

$$v \sim \sqrt{M\beta} |\epsilon| \quad (4.10)$$

Para  $v \gg 1$  a fase oscila rapidamente em (4.5) não resultando contribuição significativa à integral. O inverso ocorre para  $v \lesssim 1$ . Usando (4.10) esta última condição se escreve

$$|\epsilon| \lesssim \beta^{-\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

para  $\epsilon < 0$ .

A expressão (4.11) acima define a região de transição onde a contribuição do termo de reflexão direta é ainda bem representada por (4.5) em  $\epsilon < 0$  (região iluminada para este termo). Além desse limite, deve ser usada a aproximação WKB. A região  $\epsilon > 0$  é uma região de sombra para este termo.



O termo subcrítico de reflexão direta calculado nessa seção não foi levado em conta na aproximação de Marston<sup>18</sup>, uma vez que as refletividades foram aproximadas por funções degrau.

C. TERMO SUBCRÍTICO DE TRANSMISSÃO DIRETA

Partimos agora de (2.33) e (2.36) com  $p = 1$ . As contribuições dominantes neste caso são

$$\begin{aligned} \hat{S}_{j1}(\beta, \theta) = & -\frac{1}{2} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \left\{ U^{(j)}(\lambda, \beta) t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) \right. \\ & \left. + U^{(n)}(\lambda, \beta) p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) \right\} d\lambda, \quad (n, j = 1, 2, n \neq j). \end{aligned} \quad (4.12)$$

O termo subcrítico de transmissão direta  $S_{j1}^<(\beta, \theta)$  é obtido de (4.12) com modificações e justificativas análogas às feitas para  $S_{j0}^<(\beta, \theta)$ . Resultando

$$\begin{aligned} S_{j1}^<(\beta, \theta) = & -\frac{1}{2} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\lambda_c} \frac{H_\lambda^{(1)}(\alpha) H_\lambda^{(2)}(\beta)}{H_\lambda^{(2)}(\alpha) H_\lambda^{(1)}(\beta)} T_{21}^{(j)}(\lambda, \beta) T_{12}^{(j)}(\lambda, \beta) \\ & \times t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) d\lambda, \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde o caminho de integração é análogo ao do termo subcrítico de reflexão direta em (4.3).

Substituímos agora em (4.13) as funções de Hankel  $H_\lambda^{(j)}(\beta)$ , os coeficientes de transmissão e a função angular, pelas suas expressões assintóticas como fora feito para  $S_{j0}^<(\beta, \theta)$ . Para as funções  $H_\lambda^{(j)}(\alpha)$ , ( $j = 1, 2$ ), utilizamos as expansões as-

sintóticas de Schöbe (Ref. 1, Apêndice A), uma vez que a contribuição principal à integral em (4.13) provém da vizinhança de  $\lambda = \lambda_c = \alpha$ . Assim procedendo obtemos

$$\begin{aligned} S_{j1}^<(\beta, \theta) = & -e^{\frac{i\pi}{12}} \left( \frac{1}{2\pi \text{sen} \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N\gamma' \eta_j}{\pi M} \\ & \times \int_{-\infty}^{\lambda_c} \frac{d\lambda \lambda^{\frac{1}{2}}}{[\bar{A}(\zeta)]^2} \exp \left\{ -2i \left[ (\beta^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda \cos^{-1} \left( \frac{\lambda}{\beta} \right) + \frac{\lambda \theta}{2} \right] \right\}, \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$\bar{A}(\zeta) = Ai \left( e^{-\frac{2i\pi}{3}} \zeta \right) \quad (4.15)$$

$$\zeta = \left( \frac{2}{\alpha} \right)^{1/3} (\lambda - \alpha) = \gamma' (\lambda - \lambda_c) \quad (4.16)$$

Procedendo como no caso escalar<sup>1</sup>, escolhemos um caminho de integração no plano  $\zeta$  de tal forma que a contribuição dominante provenha de  $|\zeta| \leq 1$ . Coerentemente os integrandos podem ser expandidos em torno de  $\lambda = \lambda_c$ . Isto nos leva ao resultado

$$\begin{aligned} S_{j1}^<(\beta, \theta) = & -2e^{\frac{i\pi}{4}} \left( \frac{\beta}{2\pi \text{sen} \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N^{3/2} \eta_j}{M} \\ & \times \exp \left[ -2i\beta(M - \epsilon n) \right] \bar{F}(S), \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde

$$S = \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{1/3} (0 - \theta_t) = -\frac{2\epsilon}{\gamma'} \quad (4.18)$$

e

$$\bar{f}(s) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\exp\{-iS\zeta\}}{\left[ \text{Ai}\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\zeta\right) \right]^2} d\zeta \quad (4.19)$$

O caminho de integração  $\Gamma$  vai de  $e^{-\frac{2i\pi}{3}} \infty$  a  $0$ .

É conveniente reescrever  $S_{j1}^<(\beta, \theta)$  em termos de uma integral sobre o eixo real. Introduzimos a variável

$$x = e^{\frac{2i\pi}{3}} \zeta \quad (4.20)$$

Em termos desta variável (4.17) fica

$$S_{j1}^<(\beta, \theta) = e^{-\frac{7i\pi}{12}} \left( \frac{\beta}{2\pi \text{sen}\theta} \right) \exp\left\{-2i\beta(M-\epsilon N)\right\} \frac{N^{3/2} n_j}{\pi M} \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[2e^{-\frac{i\pi}{6}} \frac{\epsilon}{\gamma} x\right]}{\left[ \text{Ai}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} x\right) \right]^2} dx, \quad (j=1,2) \quad (4.21)$$

A contribuição dominante ao termo subcrítico de transmissão direta é dada, portanto, por Funções de Fock Generalizadas e incompletas, contendo também apenas parte do alcance do ponto de sela.

A região de espalhamento crítico é uma região de transmissão de Fock entre os domínios de 0-raio e 1-raio para o termo de transmissão direta. Tipicamente a largura dessa região<sup>1</sup> é

$$\epsilon \lesssim \beta^{-1/3}, \quad (4.22)$$

com  $\epsilon > 0$ , região em que (4.21) é uma boa representação na região iluminada. A região  $\epsilon < 0$  é de sombra para o termo de transmissão direta.

A contribuição que calculamos nesta seção é a de interferência incluída na aproximação de ótica física de Marston<sup>19</sup>, onde ela foi calculada pelo método da fase estacionária (WKB). Entretanto na região crítica a aproximação WKB não é válida. A expressão (4.21) fornece essa contribuição calculada corretamente, levando-se em conta inclusive os efeitos da curvatura.

#### D. TERMO SUBCRÍTICO DE MULTI-REFLEXÃO INTERNA

Neste termo vamos considerar o efeito acumulado de todos os raios "near-side" que perfazem uma ou mais reflexões internas.

O ponto de partida é (2.34), e (2.37) com  $p=1$ .

Primeiro reescrevemos a somatória no segundo termo do lado direito de (2.34). Para isso usaremos a expansão de Debye de  $\sigma_1(\beta)$ , obtida a partir de (2.16) expandindo seu denominador em uma série geométrica de  $\bar{\omega} = (N-1)/\{(N+1)\exp(2i\alpha)\}$ . A diferença entre  $\sigma_1(\beta)$  e o termo  $p=1$  de sua expansão de Debye fornece a somatória em (2.34). Assim procedendo obtemos

$$R_j^{(2)}(\beta, \theta) = \hat{R}_j^{(2)}(\beta, \theta) + (-)^j \text{cosec}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \times \left\{ \frac{N \exp[2i(N-1)\beta]}{(N+1)^2 - (N-1)^2 \exp(4i\alpha)} + \frac{N \exp[2i(N-1)\beta]}{(N+1)^2} \right\}, \quad (4.23)$$

onde  $\hat{R}_j^{(2)}(\beta, \theta)$  continua sendo dado por (2.37) com  $P=1$ .

A contribuição dominante em (4.23) é

$$R_j^{(2)}(\beta, \theta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \left\{ U^{(j)}(\lambda, \beta) \frac{\rho_j(\lambda, \beta)}{1 - \rho_j(\lambda, \beta)} t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) \right. \\ \left. - U^{(n)}(\lambda, \beta) \frac{\rho_n(\lambda, \beta)}{1 - \rho_n(\lambda, \beta)} P_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \theta) \right\} d\lambda, \quad (4.24)$$

(n, j = 1, 2, n \neq j)

A contribuição dominante ao termo subcrítico de multi-reflexão  $S_{j, p \gg 2}^<(\beta, \theta)$  segue de (4.24), feitas as mesmas considerações que as concernentes aos outros termos. Temos

$$S_{j, p \gg 2}^<(\beta, \theta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\lambda_c} \left[ \frac{H_{\lambda}^{(1)}(\alpha)}{H_{\lambda}^{(2)}(\alpha)} \right]^2 \frac{H_{\lambda}^{(2)}(\beta)}{H_{\lambda}^{(1)}(\beta)} \\ \times \frac{T_{21}^{(j)}(\lambda, \beta) T_{12}^{(j)}(\lambda, \beta) R_{11}^{(j)}(\lambda, \beta)}{1 - \frac{H_{\lambda}^{(1)}(\alpha)}{H_{\lambda}^{(2)}(\alpha)} R_{11}^{(j)}(\lambda, \beta)} t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) d\lambda, \quad (j=1, 2), \quad (4.25)$$

onde o caminho de integração é o mesmo dos outros termos.

Substituímos agora em (4.2) as mesmas expansões assintóticas já utilizadas para  $S_{j1}^<(\beta, \theta)$ , obtendo a contribuição dominante ao termo subcrítico de multi-reflexão interna

$$S_{j, p \gg 2}^<(\beta, \theta) = e^{\frac{i\pi}{12}} \left[ \frac{N^2}{2\pi^3 \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma' \eta_j}{M} \int_{-\infty}^{\lambda_c} W_j(\zeta) \\ \times \exp \left\{ -2i \left[ (\beta^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda \cos^{-1} \left( \frac{\lambda}{\beta} \right) + \frac{\lambda \theta}{2} \right] \right\} \lambda^{1/2} d\lambda, \quad (j=1, 2), \quad (4.26)$$

onde

$$W_j(\zeta) = \frac{A(\zeta)}{\bar{A}(\zeta)} \frac{1}{e^{i\pi/3} \text{Ai}(\zeta) \bar{A}(\zeta) - \frac{N\gamma' \eta_j}{2\pi M}} \left\{ 1 - \frac{N\gamma' \eta_j}{M} \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{2\pi A(\zeta) \bar{A}(\zeta)} + 2ie^{i\frac{\pi}{3}} \frac{\bar{A}'(\zeta)}{\bar{A}(\zeta)} \right] + O((\gamma')^2) \right\}, \quad (j=1, 2), \quad (4.27)$$

e

$$A(\zeta) = \text{Ai} \left( e^{\frac{2i\pi}{3}} \zeta \right), \quad (4.28)$$

sendo  $\bar{A}$  dado por (4.15) e  $\zeta$  por (4.16).

Na medida em que a principal contribuição à integral provém da vizinhança do extremo superior da integral em (4.26), nós a escrevemos em termos da variável  $\zeta$  e expandimos o integrando em potências desta para obter

$$S_{j, p \gg 2}^<(\beta, \theta) = -\frac{e^{\frac{i\pi}{12}} \eta_j}{M} \left( \frac{N^3 \beta}{2\pi^3 \sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -2i\beta(M - \epsilon N) \right\} \int_0^{\infty} W_j(\zeta) \\ \times \exp \left\{ -i \left[ \frac{N^{2/3} \gamma'}{M} \left( N^{1/3} + \frac{N^{7/3}}{2M^2} - \frac{\beta^{-1/3}}{2^{2/3} M^2} \right) \zeta^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 2^{2/3} N^{1/3} \beta^{1/3} \epsilon \zeta \right] \right\} d\zeta, \quad (j=1, 2), \quad (4.29)$$

O integrando presente em (4.29) é uma função cuja en voltória, que passa pelas soluções de  $\text{Ai}(\zeta) = 0$ , diminui rapidamente à medida que nos afastamos de  $\zeta = 0$ . A estrutura compli

cada de (4.29) decorre do fato que nela estão sendo levado em conta todos os termos subcríticos de Debye (contendo somente parte do alcance dos respectivos pontos de sela) com  $p \geq 2$ ; contudo, o forte amortecimento do integrando de (4.29) é indício de que  $S_{j, p \geq 2}^<(\beta, \theta)$  não contribui significativamente à intensidade total da luz espalhada. Isto é de fato confirmado pelo cálculo numérico<sup>37</sup>.

#### E. TERMO SUPRACRÍTICO DE REFLEXÃO TOTAL

Utilizamos para o cálculo desta contribuição as expressões sem a expansão de Debye. Partindo de (2.15) e (2.19) e da propriedade de reflexão

$$S^{(j)}(-\lambda, \beta) = \exp(-2i\pi\lambda) S^{(j)}(\lambda, \beta), \quad (4.30)$$

válida para incidência maior que a crítica, obtemos para a contribuição dominante neste caso

$$\hat{S}_j(\beta, \theta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \left\{ S^{(j)}(\lambda, \beta) t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) + S^{(n)}(\lambda, \beta) \times p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) \right\} d\lambda, \quad (n, j = 1, 2, n \neq j). \quad (4.31)$$

A expressão (4.31) acima inclui a contribuição ao espalhamento na região crítica proveniente do domínio crítico inferior (2.45). Contudo, essa contribuição já foi levada em conta em (4.5), (4.21) e (4.29). Com a finalidade de considerar apenas a contribuição do domínio crítico superior (2.46), toma-se o limite superior em (4.31) em  $\lambda = \lambda_c + i\epsilon$ . Assim procedendo, o ca

minho de integração pode ser trazido para o eixo real já que não há pólos das funções angulares no novo domínio de integração.

Portanto, a contribuição dominante ao termo supracrítico de reflexão total  $S_j^>(\beta, \theta)$  se escreve

$$S_j^>(\beta, \theta) = \frac{1}{2} \int_{\lambda_c}^{\infty} \frac{H_{\lambda}^{(2)}(\beta)}{H_{\lambda}^{(1)}(\beta)} \left\{ \frac{[2\beta] - N\eta_j[\alpha]}{[1\beta] - N\eta_j[\alpha]} \right\} t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) d\lambda, \quad (j = 1, 2), \quad (4.32)$$

onde usamos (2.20), (2.4) e (2.7).

No domínio crítico superior

$$\begin{aligned} \beta[2\beta] &\approx -i(\beta^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \beta[1\beta] &\approx i(\beta^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \\ [\alpha] &\approx -\gamma' \ln' Ai(\zeta), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde nas duas primeiras expansões foram usadas as expansões assintóticas de Debye e na terceira a expansão assintótica de Schöbe.

Substituímos agora as (4.33) e as expansões assintóticas adequadas para  $H_{\lambda}^{(j)}(\beta)$  e  $t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta)$  em (4.32) para obter

$$\begin{aligned} S_j^>(\beta, \theta) &= e^{-\frac{i\pi}{4}} \left( \frac{1}{2\pi \sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\lambda_c}^{\infty} \exp \left\{ 2i \left[ (\beta^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda \cos^{-1} \left( \frac{\lambda}{\beta} \right) + \frac{\lambda\theta}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tan^{-1} \left( \frac{N\gamma' \beta \eta_j}{(\beta^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \ln' Ai(\zeta) \right) \right] \right\} \lambda^{1/2} d\lambda, \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Procedemos agora às seguintes mudanças de variáveis: primeiro, reescrevemos (4.34) em termos da variável  $\theta_i$  (ângulo de incidência) usando a relação  $\lambda = \beta \text{sen} \theta_i$ , depois, em termos da variável  $\delta = \theta_i - \theta_c$ . Na medida em que a contribuição dominante à integral provém da vizinhança de seu extremo inferior, onde  $\delta \ll 1$ , o integrando pode ser expandido em série de potências de  $\delta$  tomando-se apenas o termo dominante em cada expansão. Em particular, o argumento de  $\tan^{-1}$  em (4.34) é  $O(\beta^{-1/3}) \ll 1$  no limite de altas frequências, e  $\tan^{-1}$  pode ser aproximada pelo seu argumento.

Obtemos então finalmente

$$S_j^>(\beta, \theta) \approx e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{MN}{2\pi \text{sen} \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \beta \exp[-2i\beta(M - \epsilon N)] P_F(\bar{x}, \bar{y}), \quad (j=1,2), \quad (4.35)$$

onde

$$P_F(\bar{x}, \bar{y}) = \int_0^{\infty} \exp \left\{ -i \left[ u^2 - \bar{x}u - \left( \frac{\bar{y}}{\sqrt{2}} \right)^{4/3} \eta_j \text{Ai} \left( 2^{4/3} \frac{u}{\bar{y}^{2/3}} \right) \right] \right\} du, \quad (4.36)$$

com

$$\bar{x} = 2(\beta M)^{1/2} \epsilon, \quad (4.37)$$

$$\bar{y} = \frac{2^{3/2} N^{1/2}}{M^{3/4} \beta^{1/4}}, \quad (4.38)$$

$$u = (\beta M)^{1/2} \delta, \quad (4.39)$$

representa um novo tipo de integral de difração.

Se desprezarmos a variação do último termo no expoente de (4.36), substituindo-o por uma constante, obtemos uma integral de Fresnel, como na aproximação de ótica física<sup>19</sup>. Uma vez que  $y \propto \beta^{1/4}$ , o argumento da função de Airy em (4.36) é  $\gg 1$  para  $\beta \gg 1$ , exceto próximo de  $u=0$ , assim podemos utilizar a expansão assintótica

$$\text{Ai}(z) \approx -\sqrt{z}, \quad z \gg 1. \quad (4.40)$$

Isto corresponde ao "limite de superfície plana", no qual os efeitos de curvatura esférica são desprezados. Neste limite, com  $u=t^2$ , (4.36) fica

$$P_F(\bar{x}, \bar{y}) \approx 2 \int_0^{\infty} \exp[-i(t^4 - \bar{x}t^2 + \bar{y}t)] t dt. \quad (4.41)$$

A integral de Pearcey<sup>31</sup>, associada em termos da teoria de catástrofes àquela denominada de cúspide<sup>32</sup>, é dada por

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(t^4 + \bar{x}t^2 + \bar{y}t)] dt. \quad (4.42)$$

Então,  $\partial P / \partial \bar{y}$  está relacionada com  $P_F(\bar{x}, \bar{y})$  dada por (4.41)

Neste limite de superfície plana, o termo em  $y$  no expoente dá origem a um padrão do tipo Fresnel deslocado. Para cada raio com incidência acima da crítica este deslocamento corresponde ao deslocamento lateral Goos-Hänchen<sup>33</sup>.

No presente caso, nós temos o análogo esférico deste deslocamento o qual é um deslocamento angular Goos-Hänchen  $\Delta \theta$ . Um raio com ângulo de incidência  $\theta_i$  acima do ângulo crítico  $\theta_c$

tunela ao longo da superfície de um ângulo extra  $\Delta\Theta$  (Fig.7) como uma onda superficial interna (onda evanescente) antes de re-emergir no ângulo de reflexão.

Para obter  $\Delta\Theta$ , devemos utilizar o conceito de deslocamento angular em um processo de espalhamento<sup>34</sup>, o qual é análogo ao deslocamento temporal de Wigner<sup>35,36</sup> aplicado ao par conjugado momento angular e ângulo. Para um "pacote de ondas de momento angular" centrado em torno de  $\lambda_0$ , o deslocamento angular  $\Theta$  é dado por

$$\Theta = 2 \frac{d\eta(k, \lambda_0)}{d\lambda}, \quad (4.43)$$

onde  $\eta(k, \lambda)$  é o deslocamento de fase no espalhamento como uma função do momento angular (contínuo)  $\lambda$ . O efeito Goos-Hänchen aparece como um deslocamento angular adicional que surge do último termo em (4.36).

Segue de (4.43) com  $\eta(k, \lambda_0)$  dado pelo argumento de  $\tan^{-1}$  em (4.34) que

$$\Delta\Theta^{(j)} \approx - \frac{N\eta_j(\gamma')^2}{M} \left[ \ln' Ai(\zeta) \right]^2, \quad (j=1,2) \dots \quad (4.44)$$

Na região crítica  $|\zeta| \lesssim 1$ , logo  $\ln' Ai(\zeta) = 0(1)$  e  $\Delta\Theta^{(j)} = 0[(\gamma')^2]$ . Observe-se que  $\Delta\Theta < 0$ , logo está associado a um efeito atrativo do potencial efetivo, podendo ser interpretado em termos do análogo quântico do problema como resultante do efeito de penetração da barreira centrífuga.

A contribuição dominante à integral (4.36) provém da vizinhança do ponto de sela, que na aproximação de ordem mais bai

xa é  $\bar{u} \approx \bar{x}$ . Na região crítica  $\bar{u} \approx M^{3/2} \beta^{1/2} \epsilon \lesssim 1$ , logo usando (4.37) esta desigualdade se escreve

$$\epsilon \lesssim \beta^{-1/2}, \quad (4.45)$$

que define para  $\epsilon > 0$  a região de transição para o termo supra-crítico de reflexão total. A região  $\epsilon < 0$  é de sombra para este termo.

A região crítica delimitada em (4.1) segue diretamente das larguras de transição em torno do raio criticamente refletido associadas a cada termo crítico considerado, respectivamente (4.11) para  $\epsilon < 0$ , e (4.22) e (4.45) para  $\epsilon > 0$  (aqui tomamos a maior largura).

À nova integral de difração (4.36) propomos chamá-la de integral de Pearcey-Fock, por causa da sua conexão tanto com as funções generalizadas de Fock como com a integral de Pearcey.

#### F. TERMO "FAR-SIDE" COM UMA REFLEXÃO INTERNA

A contribuição dos raios "far-side" uma vez internamente refletido ( $p=2$ ) e que emergem na região crítica é dada pela aproximação WKB.

O cálculo desta contribuição está feita na literatura<sup>1,5</sup>. As amplitudes de espalhamento associadas são<sup>5</sup>

$$S_{j2}^{f.s.}(\beta, \theta) = i\beta \left( \frac{s_1}{\sin\theta} \right)^{1/2} \frac{(2Nc_1 c_2)^{3/2}}{(2c_1 - Nc_2)^{1/2}} \Delta_j \\ \times \exp \left[ 2i\beta(2Nc_2 - c_1) \right] \left[ 1 + 0(\beta^{-1}) \right], \quad (j=1,2), \quad (4.46)$$

onde

$$\Delta_1 = \frac{Nc_2 - c_1}{(Nc_2 + c_1)^3}, \quad (4.47)$$

$$\Delta_2 = \frac{c_2 - Nc_1}{(c_2 + Nc_1)^3}, \quad (4.48)$$

$$c_i = \cos W_i, \quad (4.49)$$

$$s_i = \sin W_i, \quad (i=1,2)$$

com  $W_1$  e  $W_2$  satisfazendo

$$\sin W_1 = N \sin W_2, \quad (4.50)$$

$$4W_2 - 2W_1 - \pi + \theta = 0, \quad (4.51)$$

#### G. RESULTADO PARA A INTENSIDADE DE LUZ ESPALHADA

Segue de (2.8) que a intensidade total de luz espalhada em um ângulo  $\theta$  de observação para um valor  $\beta$  do parâmetro adimensional de tamanho é dada pelo módulo ao quadrado da amplitude total de espalhamento  $S_j(\beta, \theta)$ .

Escrevemos

$$S_j(\beta, \theta) = S_j^{n.s.}(\beta, \theta) + S_j^{f.s.}(\beta, \theta), \quad (4.52)$$

onde  $S_j^{n.s.}(\beta, \theta)$  é a soma das amplitudes de espalhamento críticas "near-side" e  $S_j^{f.s.}(\beta, \theta)$  é a soma das amplitudes de espalhamento "far-side".

Em (4.52), em princípio, dão contribuição dominante para  $S_j^{n.s.}(\beta, \theta)$  os termos subcríticos de reflexão direta  $S_{j0}^<(\beta, \theta)$  (eq. (4.5)), de transmissão direta  $S_{j1}^<(\beta, \theta)$  (eq. (4.21)), de multi-reflexão interna  $S_{j,p \geq 2}^<(\beta, \theta)$  (eq. (4.29)) e o termo supracrítico de reflexão total  $S_j^>(\beta, \theta)$  (eq. (4.35)). Para  $S_j^{f.s.}(\beta, \theta)$  a contribuição dominante é a do termo "far-side" de uma reflexão interna (eq. (4.46)). Assim

$$S_j^{n.s.}(\beta, \theta) \approx S_{j0}^<(\beta, \theta) + S_{j1}^<(\beta, \theta) + S_{j,p \geq 2}^<(\beta, \theta) + S_j^>(\beta, \theta), \quad (4.53)$$

e

$$S_j^{f.s.}(\beta, \theta) \approx S_{j2}^{f.s.}(\beta, \theta), \quad (j=1,2) \quad (4.54)$$

Como assinalamos antes  $S_j^{f.s.}(\beta, \theta)$  é a principal responsável pelas oscilações rápidas na intensidade de luz espalhada, não estando relacionada com o espalhamento crítico. Assim, a intensidade associada ao espalhamento puramente crítico é dada por

$$I_j^{n.s.}(\beta, \theta) \approx |S_j^{n.s.}(\beta, \theta)|^2 \quad (4.55)$$

#### 5. CONCLUSÃO

O uso da teoria do momento angular complexo em problemas de espalhamento, na região de altas frequências, tem mostrado que a maior dificuldade reside na localização das contribui

ções dominantes e na obtenção de uma forma factível de se proceder ao cálculo destas contribuições.

Neste trabalho identificamos o "domínio crítico" como a região de onde provêm as contribuições dominantes à região crítica; estas foram representadas como integrais sobre o eixo real do plano do momento angular complexo, que podem ser facilmente calculadas numericamente.

O espalhamento crítico por uma cavidade esférica pôde ser compreendido em termos de três contribuições dominantes:

- 1) O termo subcrítico de reflexão direta, cuja representação é dada em termos de integrais incompletas de Fresnel-Fock, que constituem uma combinação do comportamento do tipo-Fock devido à refletividade crítica com efeitos do tipo-Fresnel devido ao ponto de sela em um dos extremos do intervalo de integração;
- 2) O termo subcrítico de transmissão direta, que é representado por integrais de Fock incompletas, constitui uma região de transição de Fock entre os domínios angulares de  $0/\text{raio}$  e  $1/\text{raio}$ , onde apenas parte do alcance do ponto de sela é incluído;
- 3) O termo supra-crítico de reflexão total representa o campo totalmente refletido e é dado em termos de uma nova integral de difração, a integral de Pearcey-Fock, relacionada com a integral de Pearcey, que por sua vez representa a catástrofe denominada de cúspide<sup>32</sup>, de codimensão 3. Nesta contribuição a identificação de um dos termos no expoente da integral de Pearcey-Fock conduziu à interpretação deste como representando tunelamento através de ondas evanescentes, levando ao análogo esférico do deslocamento lateral Goos-Hänchen.

Foram obtidos ainda dois outros termos: o termo subcrítico de multi-reflexão interna, que representa o efeito acumulado dos raios incidentes do lado adjacente do potencial e que sofrem uma ou mais reflexões internas (com contribuição desprezível na ordem de aproximação considerada<sup>37</sup>); e finalmente o termo associado aos raios que incidem no lado oposto e que perfazem uma reflexão interna, interferindo com os que incidem no lado adjacente e produzindo oscilações rápidas nas curvas para intensidade, não estando ligado ao espalhamento crítico.

Todas as contribuições foram obtidas em ordem mais baixa de aproximação.

O efeito combinado dos termos dominantes (termos subcrítico de reflexão e transmissão diretas, e termo supracrítico de reflexão total) foram comparadas<sup>37</sup> com a solução exata de Mie na região de espalhamento crítico, para  $\beta = 10^3$  e  $\beta = 10^4$ . Os resultados estão em muito boa concordância com a componente lenta da solução de Mie. A comparação<sup>37</sup> com os resultados de Marston, que usou uma aproximação de ótica física, permite localizar as limitações de uma tal aproximação.

A exemplo do tratamento para  $N > 1$ , neste trabalho foram usadas, representações transacionais, isto é, representações válidas em domínios angulares específicos. É de interesse obter-se uma representação uniforme para as amplitudes de espalhamento, fazendo-se uso de representações assintóticas uniformes para as funções especiais. Isto tornaria desnecessário utilizar diferentes representações em diferentes domínios angulares.

Obteve-se, para  $N > 1$ , a extensão do tratamento para índice de refração complexo, em conexão com problemas de ótica meteorológica<sup>7</sup>. O mesmo pode ser feito, com igual interesse, no



caso  $N < 1$ , sendo tal extensão imediata.

Extensões mais ambiciosas do tratamento incluiriam: espalhadores de diferentes formatos ou inomogêneos; aplicações, para índices de refração complexos, à física atômica e à física nuclear<sup>30</sup> (via potencial ótico), onde  $N < 1$  está associado a um potencial repulsivo; tratamento de potenciais com bordas arredondadas, e outras. Observe-se, contudo, que tais programas são de difícil execução; mesmo para  $N > 1$ , resolvido o caso escalar há mais de quinze anos, ainda não foi obtida uma representação uniforme.

Foi tratada neste trabalho a região na vizinhança do raio criticamente refletido. A solução do problema para as demais regiões angulares não apresenta dificuldades essenciais. Em particular, em um trabalho anterior<sup>26</sup> foi feita uma proposta que permanece válida.

#### APÊNDICE A: FUNÇÕES ANGULARES E SEUS COMPORTAMENTOS ASSINTÓTICOS

O presente apêndice inclui boa parte dos resultados compilados por Khare<sup>5</sup> (Apêndice B).

Definimos, como no caso escalar<sup>23</sup>,

$$Q_v^{(j)}(\cos\theta) = \frac{1}{2} \left[ P_v(\cos\theta) - (-1)^j \frac{2i}{\pi} Q_v(\cos\theta) \right], \quad (j=1,2), \quad (A1)$$

onde  $P_v$  e  $Q_v$  são as funções de Legendre do primeiro e segundo tipo, respectivamente. Então temos

$$P_v(\cos\theta) = Q_v^{(1)}(\cos\theta) + Q_v^{(2)}(\cos\theta), \quad (A2)$$

e as funções  $t_v^{(j)}(\cos\theta)$  e  $p_v^{(j)}(\cos\theta)$ , utilizadas no presente trabalho são obtidas substituindo  $Q_v^{(j)}(\cos\theta)$  para  $P_v(\cos\theta)$  nas definições (2.2) e (2.3) de  $p_v(\cos\theta)$  e  $t_v(\cos\theta)$ , respectivamente. Assim procedendo resulta

$$p_v^{(j)}(\cos\theta) = \frac{[Q_{v-1}^{(j)}(\cos\theta) - Q_{v+1}^{(j)}(\cos\theta)]}{\sin^2\theta} \quad (A3)$$

e

$$t_v^{(j)}(\cos\theta) = -\cos\theta p_v^{(j)}(\cos\theta) + (2v+1) Q_v^{(j)}(\cos\theta). \quad (A4)$$

A partir das relações entre  $Q_v^{(j)}(\cos\theta)$  e  $P_v(\cos\theta)$  dadas em conexão com o caso escalar<sup>23</sup>, podem ser obtidas as relações que se seguem, as quais foram utilizadas na seção 4 para se escrever as contribuições dominantes em cada termo que contribui

na região crítica. Temos:

$$t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(-\cos\theta) = i e^{-i\pi\lambda} t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos\theta), \quad (A5)$$

$$p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(-\cos\theta) = -i e^{-i\pi\lambda} p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos\theta), \quad (A6)$$

$$t_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) = -(-1)^j i e^{(-)^j i\pi\lambda} t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta) + (-1)^j 2i \cos(\pi\lambda) t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta), \quad (A7)$$

$$p_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) = (-1)^j i e^{(-)^j i\pi\lambda} p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta) - (-1)^j 2i \cos(\pi\lambda) p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta), \quad (A8)$$

$$t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta) - e^{-2i\pi\lambda} t_{-\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta) = -e^{-i\pi\lambda} \tan(\pi\lambda) \times t_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos\theta), \quad (A9)$$

$$p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta) + e^{-2i\pi\lambda} p_{-\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta) = e^{-i\pi\lambda} \tan(\pi\lambda) \times p_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos\theta), \quad (A10)$$

todas valendo para  $j=1$  ou  $j=2$ .

As expansões assintóticas para  $t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta)$  e  $p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta)$  ( $j=1,2$ ) seguem daquelas para  $Q_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta)$  ( $j=1,2$ ) (cf. Ref. 23, Apêndice C, equações (C7)-(C11)).

Neste trabalho utilizamos apenas as expansões assintóticas válidas longe das direções para frente e para trás, já que a região crítica não se estende, nos casos considerados, a es

tas regiões. Nesta situação

$$\epsilon < \theta < \pi - \epsilon, \quad |\lambda| \epsilon \gg 1, \quad |\lambda| \gg 1 \quad (A11)$$

e valem as seguintes expansões assintóticas:

$$t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta) = \left(\frac{2\lambda}{\pi \operatorname{sen}\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[i \epsilon_j (\lambda\theta - \pi/4)\right] \left\{1 + \epsilon_j \frac{7i}{8} \times \frac{\cot\theta}{\lambda} + o(\lambda^{-2})\right\}, \quad (A12)$$

$$p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta) = -\frac{i}{\operatorname{sen}\theta} \epsilon_j \left(\frac{2}{\pi\lambda \operatorname{sen}\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[i \epsilon_j \left(\lambda\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right] \times \left\{1 + \epsilon_j \frac{3i}{8} \frac{\cot\theta}{\lambda} + o(\lambda^{-2})\right\} \quad (A13)$$

onde

$$\epsilon_j = (-1)^j, \quad (j=1,2). \quad (A14)$$

Observe-se que na região (A11)  $p_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta)$  é  $o(\lambda^{-1}(\operatorname{sen}\theta)^{-1})$  quando comparada com  $t_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(\cos\theta)$ .

**APÊNDICE B: EXPANSÕES ASSINTÓTICAS DOS COEFICIENTES ESFÉRICOS DE REFLEXÃO E TRANSMISSÃO NO DOMÍNIO CRÍTICO**

Os coeficientes esféricos de reflexão e transmissão entre a região 1 (dentro da esfera) e a região 2 (fora da esfera) são definidos (Ref. 5, Apêndice H) por

$$R_{11}^{(j)}(\lambda, \beta) = - \frac{[1\beta] - N\eta_j[1\alpha]}{[1\beta] - N\eta_j[2\alpha]}, \quad (B1)$$

$$R_{22}^{(j)}(\lambda, \beta) = - \frac{[2\beta] - N\eta_j[2\alpha]}{[1\beta] - N\eta_j[2\alpha]}, \quad (B2)$$

$$\begin{aligned} T_{21}^{(j)}(\lambda, \beta) &= 1 + R_{22}^{(j)}(\lambda, \beta) \\ &= \frac{[1\beta] - [2\beta]}{[1\beta] - N\eta_j[2\alpha]}, \quad (B3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12}^{(j)}(\lambda, \beta) &= 1 + R_{11}^{(j)}(\lambda, \beta) \\ &= N\eta_j \left( \frac{[1\alpha] - [2\alpha]}{[1\beta] - N\eta_j[2\alpha]} \right), \quad (j=1,2), \quad (B4) \end{aligned}$$

onde  $\eta_j$  é dado por (2.5) e foi empregada a notação definida em (2.6).

No domínio crítico (2.44) as expansões assintóticas de Debye (Ref. 23, Eq. (A16)) fornecem

$$\beta[1\beta] \approx i(\beta^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (B5)$$

$$\beta[2\beta] \approx -i(\beta^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (B6)$$

e as expansões assintóticas de Schöbe (Ref. 1, Eqs. (A1) e (A2)), seguida de uma expansão em série de potências de  $\gamma' = (2/\alpha)^{1/3}$ , fornecem

$$[1\alpha] = e^{-\frac{i\pi}{3}} \frac{A'}{A} \gamma' + \Delta(\gamma')^3 + 0((\gamma')^5), \quad (B7)$$

$$[2\alpha] = e^{\frac{i\pi}{3}} \frac{\bar{A}'}{\bar{A}} \gamma' + \bar{\Delta}(\gamma')^3 + 0((\gamma')^5), \quad (B8)$$

onde

$$\Delta = \left( \frac{\zeta^3}{60} - \frac{1}{10} \right) + e^{-\frac{i\pi}{3}} \frac{2\zeta}{15} \frac{A'}{A} - e^{-\frac{i\pi}{3}} \frac{\zeta^2}{60} \left( \frac{A'}{A} \right)^2, \quad (B9)$$

$$\bar{\Delta} = \left( \frac{\zeta^3}{60} - \frac{1}{10} \right) + e^{\frac{i\pi}{3}} \frac{2\zeta}{15} \frac{\bar{A}'}{\bar{A}} - e^{\frac{i\pi}{3}} \frac{\zeta^2}{60} \left( \frac{\bar{A}'}{\bar{A}} \right)^2, \quad (B10)$$

sendo  $\zeta$  definido em (4.16), e  $A=A(\zeta)$  e  $\bar{A}=\bar{A}(\zeta)$  dados, respectivamente, em (4.15) e (4.28).

A substituição de (B5)-(B8) nas expressões (B1) e (B2), seguida de uma expansão em série de potências de  $\gamma'$ , fornece para os coeficientes esféricos de reflexão no domínio crítico

$$R_{11}^{(j)}(\lambda, \beta) = -1 + X_j \gamma' + Y_j (\gamma')^2 + Z(\gamma')^3 + 0[(\gamma')^4], \quad (B11)$$

$$\begin{aligned} R_{22}^{(j)}(\lambda, \beta) &= 1 - K_j \gamma' - L_j (\gamma')^2 - T_j (\gamma')^3 + 0[(\gamma')^5], \\ &(j=1,2), \quad (B12) \end{aligned}$$

onde

$$X_j = \frac{N}{2\pi M} \frac{\eta_j}{AA} \quad (B13)$$

$$Y_j = \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}} \eta_j^2}{2\pi M^2} \frac{\bar{A}'}{A^2 A} \quad (B14)$$

$$Z_j = \frac{iN\eta_j}{M} \left[ \zeta^2 \left( e^{-\frac{i\pi}{3}} \left( \frac{\bar{A}'}{A} \right)^2 - e^{\frac{i\pi}{3}} \left( \frac{\bar{A}'}{A} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{2\zeta}{15} \left( e^{\frac{i\pi}{3}} \frac{\bar{A}'}{A} - e^{-\frac{i\pi}{3}} \frac{A'}{A} \right) \right] + \frac{N^3 \eta_j^3}{2\pi M^3} e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{\bar{A},2}{A \bar{A}^3} \quad (B15)$$

$$K_j = \frac{2iN\eta_j}{M} e^{\frac{i\pi}{3}} \frac{\bar{A}'}{A} \quad (B16)$$

$$L_j = \frac{2N^2 \eta_j^2}{M^2} e^{\frac{2i\pi}{3}} \left( \frac{\bar{A}'}{A} \right)^2 \quad (B17)$$

$$T_j = \frac{2iN}{M} \left( \eta_j \bar{A} + \frac{N\eta_j^3}{M} \left( \frac{\bar{A}'}{A} \right)^3 \right) \quad (B18)$$

Os coeficientes esféricos de transmissão na região crítica seguem de (B11) e (B12) desde que  $T_{12}^{(j)}(\lambda, \beta) = 1 + R_{11}^{(j)}(\lambda, \beta)$  e  $T_{21}^{(j)}(\lambda, \beta) = 1 + R_{22}^{(j)}(\lambda, \beta)$ .

Fora do domínio crítico, as expansões assintóticas dos coeficientes de reflexão e transmissão são dadas por Khare<sup>5</sup> (Apêndice A).

## REFERÊNCIAS

1. H.M. Nussenzveig, "High-Frequency Scattering by a Transparent Sphere. I. Direct Reflection and Transmission. II. Theory of of the Rainbow and the Glory", J. Math. Phys. 10, 82, 125 (1969).
2. G. Mie, "Beiträge Zur Optik trüber Medien, Speziell Kolloidaler Metallösungen", Ann. Physik 25, 377 (1908).
3. D.L. Kingsbury e P.L. Marston, "Mie Scattering near the Critical Angle of Bubble in Water", J. Opt. Soc. Am. 71, 358 (1981).
4. H.M. Nussenzveig, "Complex Angular Momentum Theory of the Rainbow and the Glory", J. Opt. Soc. Am. 69, 1068 (1979).
5. V. Khare, "Short-Wavelength Scattering of Electromagnetic Waves by a Homogeneous Dielectric Sphere", Tese de doutoramento, University of Rochester, New York (não publicada) (1975).
6. V. Khare e H.M. Nussenzveig, "Theory of Rainbow", Phys. Rev. Lett. 33, 976 (1974).
7. H.M. Nussenzveig e W.J. Wiscombe, "Efficiency Factors in Mie Scattering", Phys. Rev. Lett. 45, 1490 (1980).
8. H.M. Nussenzveig e W.J. Wiscombe, "Forward Optical Glory", Opt. Lett. 5, 455 (1980).
9. M.S. Hussein, H.M. Nussenzveig, A.C.C. Villari e J.L. Cardoso Jr., "The Optical Theorem and Forward Glory Effects in Heavy Ion Scattering", Phys. Lett. 114B, 1 (1982).
10. W. Franz e P. Beckmann, "Creeping Waves for Objects of Finite Conductivity", Trans. IRE, AP-4, 203 (1956).
11. P. Beckman e W. Franz, "Über die Greensche Function Transparenter Zylinder", Z. Naturforsch. 12a, 257 (1957).
12. W. Franz, Theorie der Beugung Elektromagnetischer Wellen, Springer-Verlag, Berlin (1957).

13. P. Beckman, "Arwendung der Modifizierten Watson Transformation auf die Greensche Dyade für die Bengung an der Kugel", Z. Naturforsch. 12a, 960 (1957).
14. Y.M. Chen, "Diffraction by a Smooth Object. II. Diffraction by a Cylindrical Cavity", J. Math. Phys. 6, 1332 (1965).
15. P.L. Christiansen, Report no. 1, Laboratory of Applied Mathematical Physics, Technical Univeristy of Denmark, Lingby (1965).
16. R.D. Doolittle, H. Uberall e P. Uginčius, "Sound Scattering by Elastic Cylinders", J. Acoust. Soc. Am. 43, 1 (1968).
17. P. Ludwig, "Diffraction by a Circular Cavity", J. Math. Phys. 11, 1617 (1970).
18. P.L. Marston, "Critical Angle Scattring by a Bubble: Physical-Optics Approximation and Observations", J. Opt. Soc. Am. 69, 1205 (1979):.
19. P.L. Marston e D.L. Kingsbury, "Scattering by a Bubble in Water near the Critical Angle: Interference Effects", J. Opt. Soc. Am. 71, 192 (1981).
20. P.L. Marston, "Uniform Mie-Theoretic Analysis of Polarized and Cross-Polarized Optical Glories", J. Opt. Soc. Am. 73, 1816 (1983).
21. H.C. Van de Hulst, Light Scattering by Small Particles, Wiley, New York (1957).
22. M. Kerker, The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation, Academic Press, New York (1969).
23. H.M. Nussenzveig, "High-Frequency Scattering by an Impenetrable Sphere", Ann. Phys. (N.Y.) 34, 23 (1965).
24. K.W. Ford e J.A. Wheeler, "Semiclassical Description of Scattering", Ann. Phys. (N.Y.) 7, 259, 287 (1959).

25. P. Debye, "Der Lichtdruck auf Kugeln von Beliebigen Material", Ann. Physik Ser. (4)30, 57 (1909).
26. N. Fiedler-Ferrari, "Espalhamento por uma Cavidade Esférica", Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, não publicada (1980).
27. J. Walker, "The Amateur Scientist - Some Whispering-Gallery are Simple Sound Reflectors, but Others are More Mysterious", Scientist American 239, 4, 146 (1978).
28. G.E. Davis, "Scattering of Light by an Air Bubble in Water", J. Opt. Soc. Am. 45, 572 (1955).
29. P.L. Marston, D.S. Langley e D.L. Kingsbury, "Light Scattering by Bubbles in Liquids: Mie Theory, Physical-Optics Approximation, and Experiments", nos Proceedings of the 1981 IUTAM Symposium on the Mechanics and Physics of Bubbles in Fluids, L. van Wijngaarden, ed., Appl. Sci. Res. 38, 373 (1982).
30. W.E. Frahn, in: "Heavy-Ion Science", vol. 1, D.A. Bromley, ed., Plenum Press, New York (1982).
31. T. Pearcey, "The Structure of an Electromagnetic Field in the Neighborhood of a Cusp of a Caustic", Phil. Mag. 37, 311 (1946).
32. M.V. Berry e C. Upstill, in: "Progress in Optics", vol. 18, E. Wolf, ed., North-Holland, Amsterdam (1980).
33. F. Goos e H. Hänchen, "Ein neuer und Fundamentalere Versuch zur Total-reflexion", Ann. Phys. Lpz. (6)1, 333; Lötsch H.K.V. (1970). "Beam Displacement at Total Reflection: the Goos-Hänchen Effect", Optik 32, 116 (1947).
34. N. Fiedler-Ferrari e H.M. Nussenzveig, "Deslocamento Angular em Espalhamento. O Análogo Esférico do efeito Goos-Hänchen", em "Proceedings" do III Encontro Brasileiro de Partículas e Campos, 73, Sociedade Brasileira de Física, São Paulo (1981).

35. E.P. Wigner, "Lower Limit for the Energy Derivate of the Scattering Phase Shift", Phys. Rev. 98, 145 (1955).
36. H.M. Nussenzveig, "Time Delay in Quantum Scattering", Phys. Rev. D6, 1535 (1972).
37. N. Fiedler-Ferrari, Tese de Doutorado submetida à Universidade de São Paulo (1983); N. Fiedler-Ferrari e H.M. Nussenzveig, a ser publicado.

#### LEGENDAS DAS FIGURAS

- Fig. 1 - Representação esquemática dos pólos no plano- $\lambda$  para  $\beta \gg \alpha \gg 1$ .  $h$  e  $h'$ ,  $e$ ,  $h_1$  e  $h'_1$ , correspondem, respectivamente, às linhas de Stokes da representação assintótica de  $H_\lambda^{(1)}(\beta)$  e  $H_\lambda^{(2)}(\alpha)$ . (a) Pólos de Regge.  $\otimes$  - Pólos de classe I;  $\times$  - Pólos de classe II. (b) Pólos de Regge-Debye.
- Fig. 2 - Potencial efetivo para movimento radial visto por uma onda parcial  $l$ , para o espalhamento de partículas não relativísticas por uma barreira de altura  $V_0$  e raio  $a$  ( $N < 1$ ).  $E$  representa a energia (fixa) da partícula incidente.
- Fig. 3 - Para um ponto de observação  $P$  no semi-espaço superior na direção  $\theta$ , as contribuições 0 e 1 são do lado adjacente ("near-side"), a contribuição 2' é do lado oposto ("far-side"). A diferença de caminho ótico entre os raios "near-side" e "far-side" leva a interferências que produzem oscilações de pequeno período na intensidade de luz espalhada.
- Fig. 4 - Resultados de Kingsbury e Marston (Ref. 3) para comparação entre as intensidades de luz espalhada (ambas as polarizações) por uma bolha de ar na água ( $N = 0.75$ ) em função do ângulo de observação  $\theta$  obtidas pela aproximação de ótica-física (linha pontilhada) e somação numérica da solução exata de Mie. O parâmetro de tamanho é  $\beta = 10.000$ . O ângulo de espalhamento crítico  $\theta_t$  é indicado.

Fig. 5 - Geometria dos raios fora da cavidade, onde se mostra o raio criticamente incidente (L) e a região de transição (assimétrica) em torno do raio criticamente refletido (L');  $(\Delta\theta)_+ = O(\beta^{-1/3})$ ,  $(\Delta\theta)_- = O(\beta^{-1/2})$ .

Fig. 6 - Caminho de integração para o termo subcrítico de reflexão direta. O extremo superior de integração é  $\lambda = \lambda_c$ . O ponto  $\lambda'$  é necessariamente à direita do pólo em  $\lambda = +1/2$ . À esquerda de  $\lambda'$  o caminho de integração está abaixo e longe do pólo de Regge-Debye mais próximo do eixo real do segundo quadrante.

Fig. 7 - O raio OA, ao sofrer reflexão total, não é reemitido no mesmo ponto de incidência (como OAD); ele sofre um deslocamento angular  $\Delta$  para depois ser reemitido no mesmo ângulo de incidência (OABC). Trata-se do análogo esférico do efeito Goos-Hänchen.

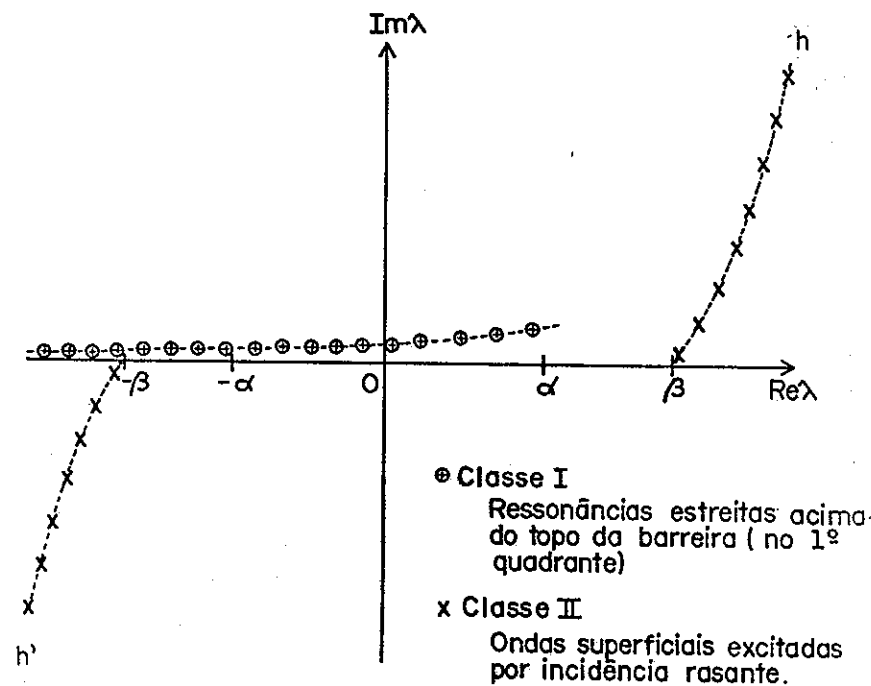


Fig.1 (a)

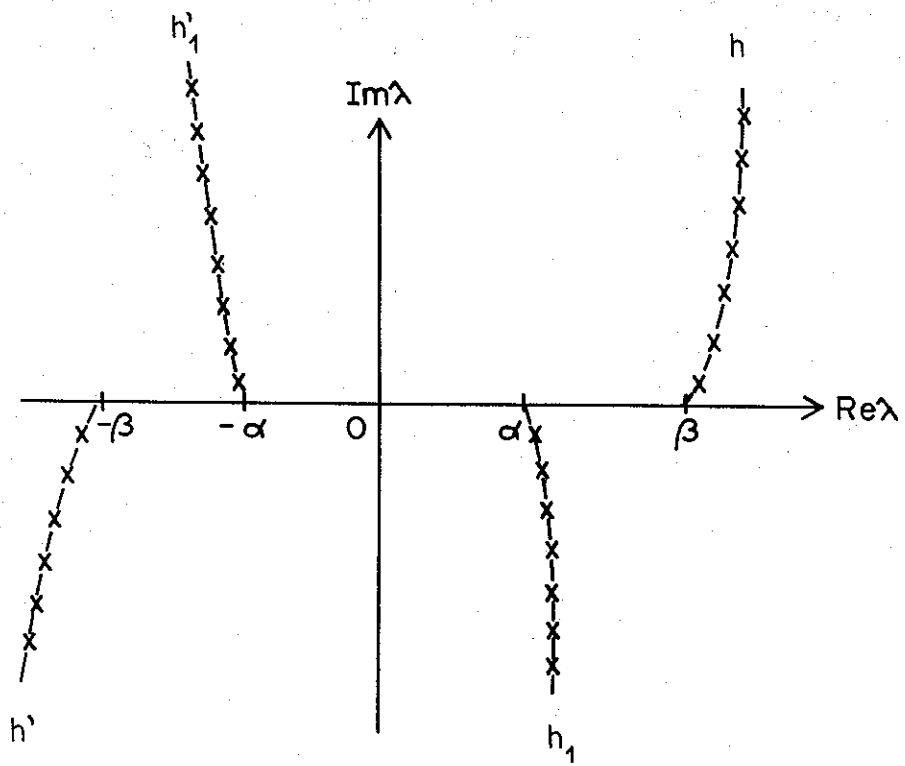


Fig. 1 (b)

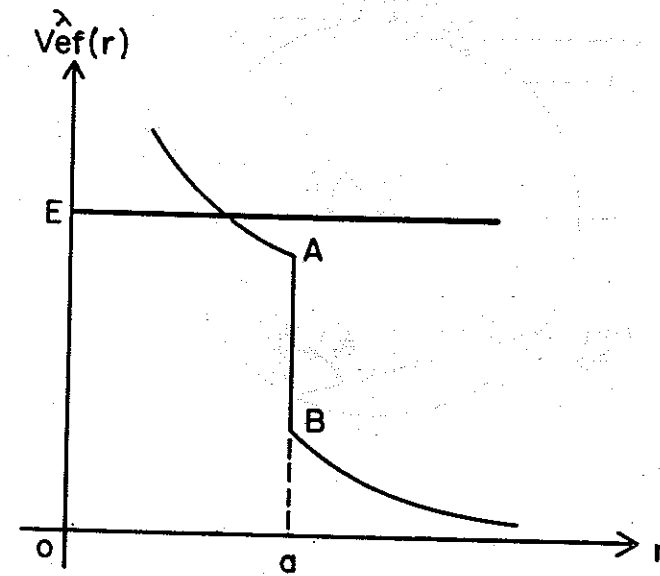


Fig. 2







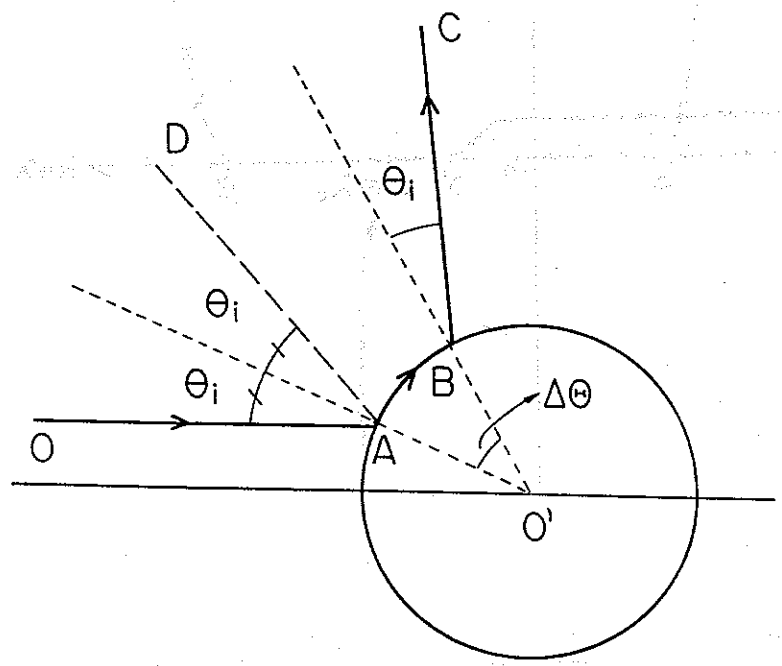


Fig. 7