

IFUSP/P 638
B.L.F. - USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PUBLICAÇÕES

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

IFUSP/P-638



27 JUL 1987

MECÂNICA CLÁSSICA - SOBRE A DEDUÇÃO DAS
EQUAÇÕES DE LAGRANGE

S.F. Cortizo

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Abril/1987

MECÂNICA CLÁSSICA—SOBRE A DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LAGRANGE

S. F. Cortizo

Instituto de Física da Universidade de São Paulo,
São Paulo, Brasil

Resumo: É apresentada uma dedução das equações de Lagrange a partir das Leis de Newton. Procuramos seguir de perto a dedução original de J.-L. Lagrange (que utiliza o Princípio de d'Alembert), porém dentro de um formalismo matemático atualizado, que nos fornece resultados inéditos.

(0) INTRODUÇÃO

A mecânica clássica tem passado, nas últimas décadas, por um processo de reformulação de suas bases matemáticas (compare, por exemplo, o livro de Whittaker^[2] com o de Abraham e Marsden^[3]).

Nosso objetivo é estender essa reformulação à dedução das equações de Lagrange contida no livro^[1] do próprio J.-L. Lagrange.

Esse livro é, sob o ponto de vista histórico, a obra inaugural da mecânica analítica, posteriormente desenvolvida por Hamilton, Jacobi, Poisson e outros. Ainda hoje esse trabalho de Lagrange é importante, pois é através dele que relacionamos os conceitos básicos da mecânica clássica — espaço, tempo, massa, força— com aqueles presentes nas formulações analíticas (mecânica lagrangeana e hamiltoniana).

Nosso programa é o seguinte: na secção (1) resumimos as noções básicas da mecânica newtoniana em algumas definições e proposições. Na secção (2) introduzimos o conceito de vínculo (holônomo) sobre um sistema de partículas e classificamos as várias reações vinculares através do teorema 2.5, que nos fornece três corolários importantes: o primeiro (2.6) é a nossa versão para o princípio de d'Alembert; o segundo (2.13) estabelece as equações de Lagrange (na sua forma anterior à introdução do potencial de força^[4]); e o terceiro é uma expressão para a reação vincular que dispensa o uso dos multiplicadores de Lagrange. E finalmente, a secção (3) analisa o caso das forças conservativas, que é o ponto de partida para a formulação da mecânica lagrangeana.

(1) MECÂNICA NEWTONIANA

Reunimos abaixo alguns conceitos elementares da mecânica newtoniana — espaço euclídeano, massas pontuais e campos de forças— em uma definição adequada aos nossos propósitos.

CONVENÇÃO. Todos os objetos e aplicações aqui considerados serão supostos de classe C^∞ .

1.1 Definição. Chamaremos de SISTEMA DE PARTÍCULAS uma quadra (N, g, M, F) tal que:

(i) (N, g) é um espaço euclidiano—isto é, uma variedade afim N , de dimensão finita, munida de uma métrica riemanniana g invariante por translações afins;

(ii) $M:TN \rightarrow TN$ é um tensor sobre N , simétrico, definido positivo—segundo g —e invariante por translações afins; e

(iii) $F:TN \rightarrow TN$ é uma aplicação não necessariamente tensorial mas que preserva o ponto base ($\pi_N \circ F = \pi_N$, onde $\pi_N:TN \rightarrow N$ é o fibrado tangente à N).

1.2 Proposição. Se (N, g, M, F) é um sistema de partículas então o tensor m definido por $m(X, Y) = g[X, M(Y)]$ é uma métrica euclidiana sobre N .

Prova. Basta lembrar que M é g -simétrico, definido positivo, e invariante por translações afins. ■

1.3 Definição. Dado um sistema de partículas (N, g, M, F) , definimos $K:TN \rightarrow \mathbb{R}$ por $K(v) = \frac{1}{2}m(v, v)$.

1.4 Proposição. Seja (N, g, M, F) um sistema de partículas e $c:(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ uma curva sobre N . Se representarmos a velocidade e aceleração de c por $v:(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TN$ e $a:(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TN$ (respec.), então:

(i) $\frac{d}{dt}(M \circ v) = M \circ a$; e ainda

(ii) se $F \circ v = M \circ a$ então $\frac{d}{dt}(K \circ v) = g(v, F \circ v)$.

Prova. O item (i) decorre da invariância de M pelas translações afins e o (ii) da definição de K :

$$\frac{d}{dt}(K \circ v) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m(v, v) \right] = m(v, a) = g(v, M \circ a) = g(v, F \circ v) \quad \blacksquare$$

O significado dessas definições e proposições pode ser melhor entendido à luz do exemplo abaixo (1.5). Em geral, se (N, g, M, F) é um sistema de partículas, chamamos N de espaço de configurações (do sistema), M de tensor de massa (pois leva uma velocidade $v \in TN$ à quantidade de movimento $M(v) \in TN$), F de campo de forças (dependentes da posição e da velocidade do sistema), e K de energia cinética (total do sistema). Nesses termos a proposição 1.4(ii) afirma que se um movimento c do sistema satisfaz a Lei de Newton ($F \circ v = M \circ a$) então a variação temporal da energia cinética é igual ao trabalho $g(v, F \circ v)$ da força F sobre o sistema.

1.5 Exemplo. Se na definição 1.1 tomarmos:

(i) $(N, g) = \mathbb{R}^{3n}$ munido de sua métrica usual;

(ii) $M(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, m_1 \vec{v}_1, \dots, m_n \vec{v}_n)$, onde m_1, m_2, \dots, m_n são constantes reais positivas; e

(iii) $F:\mathbb{R}^{6n} \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$ uma aplicação de TN em TN ($T\mathbb{R}^{3n} \simeq \mathbb{R}^{6n}$) tal que $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \mapsto (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$;

então (N, g, M, F) será um sistema de partículas, no qual:

$$K(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i\|^2,$$

e, para qualquer curva $c:(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$:

$$(F \circ v = M \circ a) \iff (\vec{f}_i = m_i \vec{a}_i, \quad i = 1, \dots, n).$$

A proposição 1.2 mostra que estamos considerando duas métricas simultaneamente sobre N (que são diferentes, a menos que M seja a identidade), isso é inevitável e as duas métricas (g e m , segundo a nossa notação) não devem ser confundidas: a primeira — g , que chamaremos de métrica espacial— nos fornece o trabalho $g(v, f)$ de uma força $f \in T_x N$ sobre um estado $v \in T_x N$ ($x \in N$); e a segunda — m , que chamaremos de métrica das massas— nos fornece a energia cinética $K(v)$ do sistema quando ele se encontra em um estado $v \in TN$ ($K(v) = \frac{1}{2}m(v, v)$).

(2) SISTEMAS DE PARTÍCULAS VINCULADOS

Vamos introduzir agora a definição de vínculo (holônomo) sobre um sistema de partículas, mas necessitamos antes de alguma notação.

2.1 Notação. Seja (N, g) um espaço euclidiano, $Q \subset N$ uma subvariedade (sem bordo) de N , e $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ uma curva sobre Q . Designaremos por $TN|Q$ a união dos $T_q N$, com $q \in Q$; e por $\pi': TN|Q \rightarrow Q$ o fibrado vetorial definido de maneira óbvia. Vamos omitir nas composições as inclusões ($i: Q \rightarrow N$, $Ti: TQ \rightarrow TN$, $i': TQ \rightarrow TN|Q$, $i'': TN|Q \rightarrow TN$, etc) e, além disso, vamos indicar por $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TQ$ e $a: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TN|Q$ a velocidade e a aceleração (respec.) de uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q \subset N$.

2.2 Definição. Um par (Q, F_{vin}) é um VÍNCULO sobre um sistema de partículas (N, g, M, F_{ext}) se:

(i) $Q \subset N$ for uma subvariedade sem bordo de N (não necessariamente de codimensão 1); e

(ii) $F_{vin}: TQ \rightarrow TN|Q$ uma aplicação que preserva o ponto base ($\pi' \circ F_{vin} = \pi_Q$), e tal que para qualquer $v_0 \in TQ$ exista uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ com $v(0) = v_0$ e $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$.

Se (Q, F_{vin}) for um VÍNCULO então diremos que F_{vin} é uma REAÇÃO VINCULAR sobre Q .

Nosso objetivo corrente é classificar todas as possíveis reações vinculares sobre uma subvariedade Q em termos de sua capacidade de realizar trabalho sobre o sistema (teorema 2.5). Vamos necessitar de mais algumas definições.

2.3 Definição. Se (N, h) é um espaço euclidiano ($h \in \{g, m\}$) e $Q \subset N$ uma subvariedade (sem bordo) de N , definimos $\parallel^h: TN|Q \rightarrow TQ$ pela projeção ortogonal —segundo h — de $T_q N$ sobre $T_q Q$ ($q \in Q$) e $\perp^h: TN|Q \rightarrow TN|Q$ pela projeção (segundo h) de $T_q N$ sobre $(T_q Q)^\perp \subset T_q N$ ($q \in Q$). Em outras palavras, os vetores $\parallel^h(X)$ e $\perp^h(X)$ são as componentes paralela e normal a $T_q Q$ (respec.), do vetor $X \in T_q N$, segundo a métrica h .

2.4 Notação. Se Q é uma variedade, representaremos por $\tilde{X}(Q)$ o conjunto dos campos vetoriais sobre Q (secções de $\pi_Q: TQ \rightarrow Q$), e por $\tilde{\tilde{X}}(Q)$ o conjunto dos campos vetoriais dependentes da velocidade sobre Q , isto é:

$$\tilde{\tilde{X}}(Q) = \{X: TQ \rightarrow TQ \mid \pi_Q \circ X = \pi_Q\}.$$

Enunciamos a seguir o teorema central dessa apresentação.

2.5 Teorema (Classificação das Reações Vinculares). Seja (N, g, M, F_{ext}) um sistema de partículas e $Q \subset N$ uma subvariedade de N (não necessariamente de codimensão 1). Para cada campo $X \in \tilde{\tilde{X}}(Q)$ existe uma, e uma única reação vincular $F_{vin}: TQ \rightarrow TN|Q$ tal que $\parallel^g \circ F_{vin} = X$.

2.6 Corolário (Princípio de d'Alembert). Se (N, g, M, F_{ext}) é um sistema de partículas e $Q \subset N$ uma subvariedade de N , então existe uma, e uma única reação vincular F_{vin} sobre Q tal que $\parallel^g \circ F_{vin} = 0$.

Segundo a proposição 1.4, o trabalho de uma força $f \in T_q N$ sobre um deslocamento virtual $v \in T_q Q$ é igual a $g(v, f)$, assim uma reação vincular F_{vin} não realiza trabalho, para qualquer deslocamento virtual do sistema se, e somente se $\parallel^g \circ F_{vin} = 0$. De forma mais geral, o teorema 2.5 mostra que uma reação vincular está determinada por sua componente tangencial —segundo a métrica g — à subvariedade Q , isto é, por sua componente apta a realizar trabalho sobre o sistema.

Observe que o teorema 2.5 classifica todas as reações vinculares, inclusive aquelas associadas às várias formas de atrito e forças viscosas (dependentes ou não da velocidade), que ficam determinadas pela sua componente que efetivamente dissipa energia do sistema.

O restante dessa secção será dedicado à prova do teorema 2.5 (que depende de uma seqüência de lemas) e de alguns outros resultados correlacionados.

2.7 Notação. Se (N, h) é um espaço euclidiano ($h \in \{g, m\}$) e $Q \subset N$ uma subvariedade de N então designaremos por \bar{h} a métrica riemanniana definida por inclusão sobre Q ; e por $i^*: T^*N|_Q \rightarrow T^*Q$ o "pull-back" de covetores pela inclusão $i: Q \rightarrow N$. Além disso, em uma variedade M ($M \in \{N, Q\}$) munida de uma métrica riemanniana h ($h \in \{g, m, \bar{g}, \bar{m}\}$), representaremos por $h^\flat: TM \rightarrow T^*M$ e $h^\sharp: T^*M \rightarrow TM$ as aplicações definidas por $[h^\flat(X)](Y) = h(X, Y)$ e $h^\sharp = (h^\flat)^{-1}$ (abaixamento e levantamento (respec.) de índices segundo a métrica h).

A proposição seguinte é bem conhecida da geometria diferencial e será enunciada (sem prova) apenas para fixar notação.

2.8 Proposição. Se $Q \subset N$ é uma subvariedade de um espaço euclidiano (N, h) e $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow Q$ uma curva sobre Q , então —com v e a definidos como em 2.1— temos que:

- (i) $\|^\sharp \circ a = \nabla_v^\sharp v$, e
- (ii) $\perp^\sharp \circ a = \Delta^\sharp \circ v$,

onde ∇^\sharp é a conexão de Levi-Civita (sobre Q) associada a \bar{h} , e $\Delta^\sharp: TQ \rightarrow TN|_Q$ uma aplicação definida apenas pela métrica h e pela inclusão $Q \subset N$ (não depende da curva c).

2.9 Definição. Seja (N, g, M, F_{ext}) um sistema de partículas e $Q \subset N$ uma subvariedade de N . Além das métricas \bar{g} e \bar{m} induzidas em Q segundo 2.7, definimos o tensor $\bar{M}: TQ \rightarrow TQ$ por $\bar{M} = \|\bar{g}\| \circ (M|_{TQ})$.

2.10 Lema. Nas condições da definição acima (2.9), e com a notação introduzida em 2.7, temos que:

- (i) $\bar{M} = \bar{g}^\sharp \circ \bar{m}^\flat$, e
- (ii) $\|\bar{g}\| \circ (M|_{TN|Q}) = \bar{M} \circ \|\bar{m}\|$.

Prova. Lembrando que $\|\bar{g}\| = \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (g^\flat|_{TN|Q})$ temos, para o item (i):

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \|\bar{g}\| \circ (M|_{TQ}) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (g^\flat|_{TN|Q}) \circ (M|_{TQ}) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (m^\flat|_{TQ}) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ \bar{m}^\flat, \end{aligned}$$

e para o item (ii):

$$\begin{aligned} \|\bar{g}\| \circ (M|_{TN|Q}) &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (g^\flat|_{TN|Q}) \circ (M|_{TN|Q}) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (m^\flat|_{TN|Q}) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ (\bar{m}^\flat \circ \bar{m}^\sharp) \circ i^* \circ (m^\flat|_{TN|Q}) \\ &= (\bar{g}^\sharp \circ \bar{m}^\flat) \circ \|\bar{m}\| \\ &= \bar{M} \circ \|\bar{m}\| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.11 Lema. Se (N, g, M, F_{ext}) é um sistema de partículas, $Q \subset N$ uma subvariedade, e $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow Q$ uma curva sobre Q , então, mantendo a notação anterior, temos que:

- (i) $\|\bar{g}\| \circ M \circ a = \bar{M} \circ \nabla_v^\sharp v$, e
- (ii) $\perp^\sharp \circ M \circ a = M \circ \Delta^\sharp \circ v + \Xi \circ \bar{M} \circ \nabla_v^\sharp v$,

onde $\Xi: TQ \rightarrow TN$ é o tensor definido por $\Xi = (M \circ \bar{M}^{-1} - id_{TQ})$.

Prova. Para provarmos (i) basta utilizarmos o lema anterior (2.10(ii)):

$$(\|\bar{g}\| \circ M) \circ a = (\bar{M} \circ \|\bar{m}\|) \circ a = \bar{M} \circ (\|\bar{m}\| \circ a) = \bar{M} \circ \nabla_v^\sharp v.$$

Para provar o item (ii) lembramos que $\|^\sharp + \perp^\sharp = id_{TN|Q}$ ($h \in \{g, m\}$); logo:

$$\begin{aligned} \perp^\sharp \circ M \circ a &= (id_{TN|Q} - \|\bar{g}\|) \circ M \circ a \\ &= (M - \|\bar{g}\| \circ M) \circ (\perp^\sharp \circ a + \|\bar{m}\| \circ a) \\ &= (M - \bar{M} \circ \|\bar{m}\|) \circ (\Delta^\sharp \circ v + \nabla_v^\sharp v) \\ &= M \circ \Delta^\sharp \circ v + (M - \bar{M}) \circ \nabla_v^\sharp v \\ &= M \circ \Delta^\sharp \circ v + (M \circ \bar{M}^{-1} - id_{TQ}) \circ \bar{M} \circ \nabla_v^\sharp v, \end{aligned}$$

onde usamos que $\|\bar{m} \circ \Delta^m = 0$, $\|\bar{g}|_{TQ} = id_{TQ}$, e que existe \bar{M}^{-1} (o lema 2.10(i) nos garante que \bar{M} é inversível pois \bar{g}^{\sharp} e \bar{m}^{\flat} o são). ■

Estamos prontos para a demonstração do teorema 2.5, mas antes gostaríamos que o leitor comparasse o enunciado da proposição 2.8 com o do lema 2.11. Observe que em 2.11(i) projetamos ortogonalmente o vetor $M \circ a$ sobre TQ segundo a métrica g , mas obtemos como resultado \bar{M} aplicado na derivada covariante $\nabla_{\bar{v}}^{\bar{m}} v$ definida a partir da métrica \bar{m} (induzida em Q por m). Além disso, em 2.8(ii) a componente normal da aceleração $\perp^h \circ a$ estava determinada apenas pelo vetor velocidade v da curva nesse ponto, enquanto que em 2.11(ii) a componente normal (segundo g) de $M \circ a$ depende também da aceleração tangencial $\nabla_{\bar{v}}^{\bar{m}} v$ (a menos que Ξ se anule no ponto considerado, o que em geral não ocorre, conforme veremos adiante).

2.12 Prova (do teorema 2.5). Vamos demonstrar inicialmente a unicidade de uma reação vincular F_{vin} tal que $\|\bar{g} \circ F_{vin} = X$, onde $X \in \tilde{X}(Q)$ é um campo dado. Se $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ é uma curva que obedece $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$ então decompondo o vetor $M \circ a$ obtemos:

$$\|\bar{g} \circ M \circ a = \|\bar{g} \circ F_{vin} \circ v + \|\bar{g} \circ F_{ext} \circ v \quad (1)$$

$$\perp^g \circ M \circ a = \perp^g \circ F_{vin} \circ v + \perp^g \circ F_{ext} \circ v \quad (2)$$

levando o lema 2.11(ii) na equação (2):

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = M \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ \bar{M} \circ \nabla_{\bar{v}}^{\bar{m}} v - \perp^g \circ F_{ext} \circ v$$

pelo lema 2.11(i) vem que:

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = M \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|\bar{g} \circ M \circ a) - \perp^g \circ F_{ext} \circ v$$

a equação (1) nos garante então que:

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = M \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|\bar{g} \circ F_{vin} \circ v + \|\bar{g} \circ F_{ext} \circ v) - \perp^g \circ F_{ext} \circ v$$

lembrando agora que $\|\bar{g} \circ F_{vin} = X$, e que para qualquer $v_0 \in TQ$ existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ com $v(0) = v_0$ e $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$, concluímos que:

$$\perp^g \circ F_{vin} = M \circ \Delta^m + \Xi \circ (X + \|\bar{g} \circ F_{ext}) - \perp^g \circ F_{ext} \quad (3)$$

Essa expressão para a componente normal de F_{vin} demonstra sua unicidade.

Para provarmos a existência, suponha dado $X \in \tilde{X}(Q)$ e defina $F_{vin} = X + \perp^g \circ F_{vin}$, com $\perp^g \circ F_{vin}$, dado por (3). Esta F_{vin} é uma reação vincular pois, para qualquer $v_0 \in TQ$, existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ que satisfaz $v(0) = v_0$ e $\bar{M} \circ \nabla_{\bar{v}}^{\bar{m}} v = (X + \|\bar{g} \circ F_{ext}) \circ v$ (que além disso é única, se fixarmos um dos ε 's suficientemente pequenos); essa curva c também satisfaz a equação (2) acima (basta inverter a dedução de (3) a partir de (2)); e finalmente, as equações (1) e (2) garantem juntas que $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$. ■

2.13 Corolário (Equações de Lagrange). Se (Q, F_{vin}) é um vínculo sobre (N, g, M, F_{ext}) então $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ satisfaz $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$ se, e somente se:

$$\bar{m}^{\flat} \circ \nabla_{\bar{v}}^{\bar{m}} v = \bar{i}^* \circ g^{\flat} \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v.$$

Prova. Na demonstração anterior (prova 2.12) foi estabelecida a equivalência entre a equação $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$ e:

$$\bar{M} \circ \nabla_{\bar{v}}^{\bar{m}} v = \|\bar{g} \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v,$$

basta então lembrarmos que $\bar{M} = \bar{g}^{\sharp} \circ \bar{m}^{\flat}$ e $\|\bar{g} = \bar{g}^{\sharp} \circ \bar{i}^* \circ (g^{\flat}|_{TN(Q)})$. ■

2.14 Corolário. Para qualquer reação vincular F_{vin} temos que:

$$\perp^g \circ F_{vin} = M \circ \Delta^m + \Xi \circ (\|\bar{g} \circ (F_{vin} + F_{ext}) - \perp^g \circ F_{ext}.$$

Prova. A expressão acima é exatamente a equação (3) deduzida na demonstração 2.12. ■

O primeiro corolário (2.13) será discutido na próxima secção.

Sobre o corolário 2.14 temos dois comentários a fazer:

(1) A componente normal (segundo a métrica g) da reação vincular é usualmente descrita em termos dos “multiplicadores de Lagrange”, que são variáveis determinadas com o auxílio da equação de movimento. O corolário 2.14 nos fornece explicitamente $\perp^g \circ F_{vin}$ (que é equivalente aos multiplicadores) como função do estado $v \in TQ$ do sistema vinculado.

(2) O corolário 2.14 descreve a componente normal da reação vincular F_{vin} como a soma de três termos:

$$F_1 = M \circ \Delta^m$$

$$F_2 = \Xi \circ \|\!^g \circ (F_{vin} + F_{ext})$$

$$F_3 = -\perp^g \circ F_{ext}$$

A “interpretação” dos termos F_1 e F_3 é clara: F_1 é a força centrípeta—dependente da velocidade, da massa, e da curvatura de Q na direção do movimento— e F_3 é a parte da reação normal que compensa a componente da força externa que tende a retirar o sistema da restrição vincular $Q \subset N$. Esses dois termos são bem conhecidos de quem já estudou sistemas mecânicos simples (como o pêndulo plano vertical) pelos métodos da mecânica newtoniana.

A “origem” do termo F_2 já não é tão clara, uma vez que geralmente ele se anula em sistemas “simples” (no exemplo 1.5, se todas as massas m_i forem iguais então $F_2 = 0$; isso decorre trivialmente da proposição 2.15 abaixo). As várias reações vinculares sobre uma variedade diferem, em sua componente normal, exatamente pelo termo F_2 (que é o único que depende de $\|\!^g \circ F_{vin}$). A proposição seguinte estabelece as condições em que as várias reações vinculares sobre uma variedade têm o termo F_2 nulo em um ponto dado (e portanto coincidem nesse ponto), e o exemplo 2.16 apresenta um sistema mecânico simples em que $F_{vin} = F_2 \neq 0$.

2.15 Proposição. Seja (N, g, M, F_{ext}) um sistema de partículas, $Q \subset N$ uma subvariedade de N e $q \in Q$ um ponto qualquer de Q . As componentes

normais (segundo g) das diversas reações vinculares sobre Q coincidem todas no ponto q se, e somente se $T_q Q$ for invariante por $M|_{T_q N}$; isto é, se e somente se $M(T_q Q) \subset T_q Q$.

Prova. Pelo corolário 2.14 as componentes normais das várias reações vinculares coincidem todas no ponto $q \in Q$ se, e somente se $\Xi|_{T_q Q} = 0$; como $\Xi = (M \circ \bar{M}^{-1} - id_{TQ})$ (lema 2.11(ii)), esta condição é equivalente à $M|_{T_q Q} = \bar{M}|_{T_q Q}$, que é o mesmo que $M(T_q Q) \subset T_q Q$ (pela definição de $\bar{M} = \|\!^g \circ (M|_{TQ})$). ■

2.16 Exemplo. Considere o sistema de partículas definido por um par de pontos materiais de massas diferentes ($m_1 \neq m_2$), que se movem sobre uma reta, com uma mesma força constante (ao longo da reta) agindo sobre ambos:

(i) $(N, g) = \mathbb{R}^2$ munido de sua métrica euclidiana usual— $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ é a configuração em que as partículas estão dispostas a x^1 e x^2 (respec.) unidades de comprimento de uma origem fixada;

(ii) $M(x^1, x^2, v^1, v^2) = (x^1, x^2, m_1 v^1, m_2 v^2)$, onde m_1 e m_2 são constantes reais positivas e diferentes entre si; e

(iii) $F_{ext}(x^1, x^2, v^1, v^2) = (x^1, x^2, f, f)$, onde f é uma constante real não nula.

Considere agora a subvariedade Q de $N = \mathbb{R}^2$ definida pela condição de vínculo $x^1 - x^2 = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}_+$); que descreve, por exemplo, uma “haste ideal” (inextensível e sem massa) de comprimento ℓ ligada às partículas.

Os espaços tangentes à variedade Q (variedade das configurações vinculadas) não são, obviamente, invariantes por M ; e portanto as várias reações vinculares sobre Q não têm componentes normais (segundo g) todas coincidentes. Além disso as forças externas aplicadas nas partículas nos garantem que o termo F_2 (comentário (2) sobre o corolário 2.14) da componente normal da reação vincular determinada pelo princípio de d’Alembert é diferente de zero; e portanto, para essa reação:

$$F_1 = F_3 = 0 \quad \text{e} \quad F_{vin} = F_2 \neq 0.$$

(3) MECÂNICA LAGRANGEANA

Vamos considerar agora o vínculo de d'Alembert (aquele determinado pelo corolário 2.6) sobre uma subvariedade de um sistema de partículas cuja força externa é conservativa; isto é, derivada de um potencial V ^[5].

3.1 Proposição. *Seja (N, g, M, F_{ext}) um sistema de partículas e (Q, F_{vin}) um vínculo com $\|^\flat \circ F_{vin} = 0$. Se existe $V: N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \pi_N$ (onde $\pi_N: TN \rightarrow N$ é o fibrado tangente à N) então uma curva $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow Q$ satisfaz $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$ se, e somente se:*

$$\bar{m}^b \circ \nabla_v^{\bar{m}} v = -d\bar{V} \circ c, \text{ onde } \bar{V} = V|_Q.$$

Prova. Pelo corolário 2.13, basta demonstrarmos a equivalência entre a equação acima e:

$$\bar{m}^b \circ \nabla_v^{\bar{m}} v = i^* \circ g^b \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v,$$

o que é fácil, pois $F_{vin} = 0$ e $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \pi_N$ implicam em:

$$\begin{aligned} i^* \circ g^b \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v &= -i^* \circ g^b \circ g^\sharp \circ dV \circ \pi_N \circ v \\ &= -i^* \circ dV \circ c \\ &= -d\bar{V} \circ c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A condição obtida na proposição acima é equivalente à equação de Lagrange $X_L \in \mathcal{X}(TQ)$ para o sistema $(Q, L = K|_{TQ} - \bar{V} \circ \pi_Q)$. A prova dessa afirmação pode ser encontrada em Abraham e Marsden^[6], assim como as definições e resultados necessários para sua formulação precisa.

A correspondência estabelecida pela proposição acima (3.1) entre os formalismos newtoniano e lagrangeano para a mecânica clássica conclui o programa descrito na introdução.

Referências

- [1] J.-L. Lagrange: *Mécanique Analytique*, troisième édition, Mallet-Bachelier, Paris 1953.
- [2] E. T. Whittaker: *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, fourth edition, Dover, New York 1944.
- [3] R. Abraham and J. E. Marsden: *Foundations of Mechanics*, second edition, Benjamin-Cummings, Reading, Massachusetts 1982.
- [4] veja, por exemplo, a ref. [2], secções 26 (p. 34) e 28 (p. 39).
- [5] compare com a ref. [2], secção 27 (p. 38).
- [6] ref. [3], proposição 3.7.4 (p. 226).