UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PUBLICAÇÕES

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

IFUSP/P-676

MECÂNICA CLÁSSICA - SOBRE OS VÍNCULOS NÃO HOLÔNOMOS

S.F. Cortizo

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Dezembro/1987

MECÂNICA CLÁSSICA—SOBRE OS VÍNCULOS NÃO HOLÔNOMOS

S. F. Cortiso

Instituto de Física da Universidade de São Paulo,
São Paulo, Brasil

Resumo: É apresentada uma generalisação dos resultados obtidos em um trabalho anterior intitulado "Mecânica clássica—sobre a dedução das equações de Lagrange", de forma a incluir sistemas como os *corpos rígidos* e os vínculos *não holônomos*. Apresentamos também alguns resultados relacionados à *geometria de distribuições*, necessários ao estudo dos vínculos não holônomos.

(0) INTRODUÇÃO

Nosso objetivo é estender os resultados obtidos em um trabalho anterior[1] a uma classe mais geral de sistemas mecânicos e vínculos; de forma a incluir os *corpos rígidos*[2] e os *vínculos não holônomos* regulares[2].

Nas duas primeiras secções apenas generalisamos os resultados obtidos anteriormente, segundo a mesma linha de argumentação, o que nos fornece uma equação de movimento para sistemas sujeitos a vínculos não holônomos (corolário 2.15). O estudo dessa equação nos leva diretamente aos conceitos e resultados apresentados na terceira secção. Finalisamos (quarta secção) com a aplicação desses resultados à resolução de uma questão básica sobre essa equação de movimento.

CONVENÇÃO. Todos os objetos e aplicações aqui considerados serão supostos de classe C^∞. Além disso, vamos omitir as inclusões na composição de aplicações.

---

(1) SISTEMAS HOLÔNOMOS

A definição de *sistema de partículas* (ref. [1], def. 1.1) não inclui alguns sistemas mecânicos importantes, como é o caso dos *corpos rígidos*. Esses sistemas também não podem ser considerados como vínculos holônomos sobre um número finito de partículas pontuais (exemplo 1.3 adiante), devido à sua distribuição contínua de massa. O conceito de *sistema holônomo* (def. 1.1 abaixo) nos permite contornar essa dificuldade sem introduzirmos espaços de dimensão infinita (veja o exemplo 1.5 adiante).

1.1 Definição. *Um* **sistema holônomo** *é uma quadra* (Q, m, g, F) *onde*

(i) Q é uma uma variedade sem bordo, de dimensão finita;

(ii) m *e* g *são duas métricas riemannianas sobre* Q*; e*

(iii) $F: TQ \to TQ$ *é uma aplicação que preserva o ponto base, isto é:* $\tau_Q \circ F = \tau_Q$ *(onde* $\tau_Q: TQ \to Q$ *é o fibrado tangente à* Q*).*

1.2 Definição. *Se* (Q, m, g, F) *é um sistema holônomo então definimos sua* **energia cinética** $K: TQ \to \mathbb{R}$ *por* $K(v) = \frac{1}{2}m(v, v)$.

1.3 Exemplo. O conceito de *vínculo (holônomo)* (ref. [1], def. 2.2) sobre um *sistema de partículas* (ref. [1], def. 1.1) nos fornece vários exemplos de *sistemas holônomos.* Mais precisamente, se (Q, F_{vin}) é um vínculo (holônomo) sobre um sistema de partículas (N, g, M, F_{ext}) então a quadra $(Q, \overline{m}, \overline{g}, F = \|^g \circ (F_{vin} + F_{ext}))$ (com a notação da ref. [1]) é um sistema holônomo. Esse exemplo ilustra o significado dos diversos elementos —Q, m, g e F— em um sistema holônomo qualquer: Q é o *espaço de configurações*; m é a *métrica das massas*, que nos fornece a *energia cinética* do sistema (def. 1.2 acima); g é a *métrica espacial*, que nos fornece o *trabalho* $g(v, F)$ de uma força $f \in T_qQ$ sobre um estado $v \in T_qQ$ $(q \in Q)$; e F a *força* que atua sobre o sistema (veja o comentário 1.7 adiante).

1.4 Definição. *Dado um sistema holônomo* (Q, m, g, F)*, definimos o seu* **tensor de inércia** $I: TQ \to TQ$ *por* $g[X, I(Y)] = m(X, Y)$.

1.5 Exemplo (corpo rígido). Um *corpo rígido* ou qualquer sistema definido por um *vínculo holônomo* sobre um conjunto finito de partículas e corpos rígidos pode ser considerado um sistema holônomo. O estudo detalhado desses sistemas é demasiado longo e foge dos objetivos desse trabalho (pretendemos apresentá-lo em outra oportunidade), mas devemos ter em mente que esses sistemas estão incluídos na definição 1.1 acima; e portanto os vínculos (não necessariamente holônomos) que introduziremos na secção

seguinte (def. 2.1) descrevem praticamente todos os sistemas usualmente considerados na mecânica clássica (descrevem, por exemplo, todos os sistemas estudados no livro de Whittaker[2]).

O *tensor de inércia* definido em 1.4 acima está associado, nesse exemplo, ao objeto que descreve a distribuição de massa de um corpo rígido, e que usualmente recebe esse nome. No exemplo 1.3 o tensor I coincide com $\overline{M}$ (ref. [1], def. 2.9).

1.6 Proposição. *Seja* (Q, m, g, F) *um sistema holônomo e* $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ *uma curva sobre* Q. *Se* c *satisfizer a equação*

$$I \circ \nabla^m_v v = F \circ v\,,$$

onde $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \to TQ$ *é a velocidade da curva* c *e* ∇^m *a conexão riemanniana associada à métrica* m*, então*

$$\frac{d}{dt}(K \circ v) = g(v, F \circ v)\,.$$

Prova.

$$\frac{d}{dt}(K \circ v) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(v, v)\right] = m(v, \nabla^m_v v) = g(v, I \circ \nabla^m_v v) = g(v, F \circ v)\,. \quad \blacksquare$$

1.7 Comentário. A *equação de Lagrange* $I \circ \nabla^m_v v = F \circ v$ presente no enunciado da prop. 1.6 acima foi deduzida na ref. [1] (corolário 2.13) para os sistemas construídos segundo o exemplo 1.3. Pode ser demonstrado também que ela é equivalente à "equação de movimento" dos sistemas compostos por *corpos rígidos* (exemplo 1.5 acima) obtida da mecânica newtoniana. Usaremos portanto essa forma da equação de Lagrange como *lei de movimento* de um sistema holônomo qualquer.

A proposição 1.6 afirma então que se uma curva sobre Q satisfizer a *lei de movimento* $I \circ \nabla^m_v v = F \circ v$ então a variação temporal da *energia* *cinética* é igual ao *trabalho* $g(v, F\circ v)$ da força F sobre o sistema; o que demonstra que a interpretação dada no exemplo 1.3 para as métricas m e g vale para qualquer sistema holônomo.

(2) VÍNCULOS

Vamos introduzir agora a definição de *vínculo* sobre um sistema holônomo.

2.1 Notação. *Se Q é uma variedade, vamos considerar uma* **distribuição** *M sobre Q (no sentido de Frobenius) simultaneamente como uma subvariedade de TQ ($M\subset TQ$), e como um* **fibrado vetorial** *$\tau_Q|_M: M\to Q$ sobre Q (que representaremos simplesmente por $M\to Q$). Diremos que uma curva $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to Q$ é* **tangente à** *M se a imagem de sua velocidade $v:(-\varepsilon,\varepsilon)\to TQ$ estiver contida em M, e nesse caso consideraremos v com função a valores em $M\subset TQ$.*

2.2 Definição. *Um* **vínculo** *sobre um sistema holônomo (Q,m,g,F_{ext}) é um par (M,F_{vin}) onde*

(i) $M\subset TQ$ é uma distribuição sobre Q (não necessariamente de codimensão 1); e

(ii) $F_{vin}: M\to TQ$ uma aplicação que preserva o ponto base ($\tau_Q\circ F_{vin} = \tau_Q|_M$), e tal que para qualquer $v_0\in M$ exista uma curva $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to Q$ tangente à M com $v(0)=v_0$ e

$$I\circ\nabla^m_v v = (F_{vin}+F_{ext})\circ v\,.$$

Se (M,F_{vin}) for um vínculo então diremos que F_{vin} é uma **reação vincular** *sobre M.*

2.3 Definição. *Se $M\subset TQ$ é uma distribuição e h uma métrica riemanniana sobre Q ($h\in\{g,m\}$), definimos $\|^h: TQ\to M$ pela projeção ortogonal —segundo h— de T_qQ sobre M_q ($q\in Q$) e $\perp^h: TQ\to TQ$ pela projeção (segundo h) de T_qQ sobre $M_q^\perp\subset T_qQ$ ($q\in Q$). Em outras palavras, os vetores $\|^h(X)$ e $\perp^h(X)$ são as componentes paralela e normal a M_q (respec.) do vetor $X\in T_qQ$, segundo a métrica h.*

2.4 Notação. *Se M é uma distribuição sobre uma variedade Q, representaremos por $\Gamma(M)$ o conjunto dos* **campos vetoriais sobre** *Q* **tangentes à** *M (secções do fibrado vetorial $M\to Q$), e por $\tilde\Gamma(M)$ o conjunto dos endomorfismos fibrados de $M\to Q$; isto é:*

$$\tilde\Gamma(M) = \{X: M\to M \mid \tau_Q\circ X = \tau_Q|_M\}\,.$$

2.5 Teorema. *Seja (Q,m,g,F_{ext}) um sistema holônomo e $M\subset TQ$ uma distribuição sobre Q. Para cada campo $X\in\tilde\Gamma(M)$ existe uma e uma única reação vincular $F_{vin}: M\to TQ$ tal que $\|^g\circ F_{vin} = X$.*

2.6 Corolário. *Se (Q,m,g,F_{ext}) é um sistema holônomo e $M\subset TQ$ uma distribuição sobre Q então existe uma e uma única reação vincular F_{vin} sobre M tal que $\|^g\circ F_{vin}=0$.*

2.7 Definição. *Chamaremos de* **reação vincular d'Alembertiana** *sobre $M\subset TQ$ aquela determinada pelo corolário 2.6 acima. Diremos também que (M,F_{vin}) é um* **vínculo d'Alembertiano** *se F_{vin} for a reação d'Alembertiana sobre M; isto é, se $\|^g\circ F_{vin}=0$.*

2.8 Notação. *Se (Q,h) é uma variedade riemanniana ($h\in\{g,m\}$) e $M\subset TQ$ uma distribuição sobre Q então designaremos por $\bar h$ a métrica riemanniana definida sobre o fibrado vetorial $M\to Q$ pela inclusão $i: M\to$*

TQ; e por $i^*: T^*Q \to M^*$ o "pull-back" de covetores pela inclusão $i: M \to TQ$, onde $M^* \to Q$ é o fibrado vetorial dual à $M \to Q$ ($M^* = \bigcup_{q\in Q} M_q^*$). Além disso, vamos indicar por $h^\flat: TQ \to T^*Q$ e $h^\sharp: T^*Q \to TQ$ (respec. $\overline{h}^\flat: M \to M^*$ e $\overline{h}^\sharp: M^* \to M$) as aplicações definidas por $[h^\flat(X)](Y) = h(X,Y)$ e $h^\sharp = (h^\flat)^{-1}$ (respec. $[\overline{h}^\flat(X)](Y) = \overline{h}(X,Y)$ e $\overline{h}^\sharp = (\overline{h}^\flat)^{-1}$).

A notação seguinte será utilizada na prova do lema 2.20 e nas secções seguintes.

2.9 Notação (em coordenadas locais). *Dada uma variedade Q, vamos denotar por (q^i) ($i = 1,\ldots,dim\ Q$) um sistema genérico de* **coordenadas locais** *sobre Q, e por $(q^i, \dot{q}^j)$ o sistema de coordenadas locais induzido em TQ. Dada uma distribuição $M \subset TQ$ sobre Q, representaremos por $\Gamma|_U(M)$ o conjunto das secções de $M \to Q$ restritas a um aberto $U \subset Q$:*

$$\Gamma|_U(M) = \{X: U \to M \mid \tau_Q \circ X = id_U\},$$

e por (X_α) ($\alpha = 1, 2, \ldots, rank\ M$) um **referencial local tangente à** M *(isto é, $X_\alpha \in \Gamma|_U(M)$ são campos vetoriais linearmente independentes que geram $M_q \subset T_qQ$ em todos os pontos q de um aberto $U \subset Q$).*

Se (q^i) e (X_α) estão definidos sobre um mesmo aberto $U \subset Q$ então definimos $X_\alpha^i: U \to \mathbb{R}$ (daqui por diante índices latinos $i, j, k, \ldots$ percorrerão os valores $1, 2, \ldots, dim\ Q$ e índices gregos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ os valores $1, 2, \ldots, rank\ M$) por $X_\alpha = X_\alpha^i \partial_i$ (soma em i), onde $\partial_i = (\partial/\partial q^i) \in \mathfrak{X}(U)$.

Se h é uma métrica riemanniana sobre Q, definimos

$$h_{ij} = h(\partial_i, \partial_j), \qquad h_{\alpha\beta} = \overline{h}(X_\alpha, X_\beta) = h_{ij} X_\alpha^i X_\beta^j,$$

$$h^{ij} \ \text{por} \ h^{ij} h_{jk} = \delta_k^i, \qquad h^{\alpha\beta} \ \text{por} \ h^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha,$$

$$\|_i^\alpha \ \text{por} \ \|(\partial_i) = \|_i^\alpha X_\alpha, \qquad \perp_j^i \ \text{por} \ \perp(\partial_j) = \perp_j^i \partial_i, \ \text{e}$$

$$\Gamma_{ij}^k \ \text{por} \ \nabla^h{}_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

É claro que

$$\|_i^\alpha = h^{\alpha\beta} X_\beta^j h_{ji}, \qquad \perp_j^i = \delta_j^i - X_\alpha^i \|_j^\alpha, \ \text{e}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} h^{kl} (\partial_i h_{lj} + \partial_j h_{il} - \partial_l h_{ij}),$$

onde $\partial_i = \partial/\partial q^i$ (vamos utilizar também $\partial_\alpha = X_\alpha^i \partial/\partial q^i$).

2.10 Lema. *Se (Q, h) é uma variedade riemanniana ($h \in \{g, m\}$) e $M \subset TQ$ uma distribuição sobre Q então:*

(i) Para todo campo $Z \in \tilde{\Gamma}(M)$ e todo vetor $v_0 \in M$, existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ tangente à M com $v(0) = v_0$ e

$$\|^h \circ \nabla_v^h v = Z \circ v.$$

(ii) Existe uma aplicação $\Delta^h: M \to TQ$ (que preserva o ponto base: $\tau_Q \circ \Delta^h = \tau_Q|_M$) tal que, para toda curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ tangente à M,

$$\perp^h \circ \nabla_v^h v = \Delta^h \circ v.$$

Prova. (i) Na notação em coordenadas locais introduzida em 2.9 uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset Q$ é tangente à M se e somente se existem $v^\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ com $\dot{q}^i(t) = X_\alpha^i v^\alpha(t)$, e nesse caso

$$\ddot{q}^i(t) = \frac{d}{dt}(X_\alpha^i v^\alpha) = X_\alpha^i \dot{v}^\alpha + (\partial_j X_\alpha^i) \dot{q}^j v^\alpha = X_\alpha^i \dot{v}^\alpha + (\partial_\delta X_\varepsilon^i) v^\delta v^\varepsilon.$$

Uma tal curva satisfaz $\|^h \circ \nabla_v^h v = Z \circ v$ se e somente se

$$\|_i^\alpha (\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k) = Z^\alpha(q, v),$$

onde $Z^\alpha(q,v)$ são as componentes do vetor $Z(q,v) \in M_q$ no referencial local (X_α).

Substituindo $\dot{q}$ e $\ddot{q}$ por v e $\dot{v}$ na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}\|_i^\alpha(\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k) &= \|_i^\alpha\left[X^i_\beta\dot{v}^\beta + (\partial_\delta X^i_\varepsilon)v^\delta v^\varepsilon + \Gamma^i_{jk}X^j_\delta X^k_\varepsilon v^\delta v^\varepsilon\right] \\ &= \dot{v}^\alpha + \|_i^\alpha(\partial_\delta X^i_\varepsilon + \Gamma^i_{jk}X^j_\delta X^k_\varepsilon)v^\delta v^\varepsilon,\end{aligned}$$

a existência de uma curva $c:(-\varepsilon,\varepsilon) \to Q$ tangente à M com $v(0) = v_0$ e $\|^h \circ \nabla^h_{\dot{v}} v = Z \circ v$ decorre então da integrabilidade (local) do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias em (q,v):

$$\begin{cases} \dot{q}^i = X^i_\alpha v^\alpha \\ \dot{v}^\alpha = Z^\alpha(q,v) - \|_i^\alpha(\partial_\delta X^i_\varepsilon + \Gamma^i_{jk}X^j_\delta X^k_\varepsilon)v^\delta v^\varepsilon. \end{cases}$$

(ii) A aplicação que associa a cada par $X, Y \in \Gamma|_U(M)$ o campo

$$\perp^h \circ \nabla^h{}_X Y \in \mathfrak{X}(U)$$

é tensorial pois, para quaisquer $X, Y \in \Gamma|_U(M)$ e qualquer $f: Q \to \mathbb{R}$,

$$\perp^h \circ \nabla^h{}_X(fY) = \perp^h\left[f(\nabla^h{}_X Y) + (Xf)Y\right] = f(\perp^h \circ \nabla^h{}_X Y).$$

Basta então definirmos $\Delta^h(X) = \perp^h \circ \nabla^h{}_X X$, para todo $X \in M$. ■

2.11 Definição. *Seja (Q,m,g,F_{ext}) um sistema holônomo e $M \subset TQ$ uma distribuição. Além das métricas $\overline{g}$ e $\overline{m}$ induzidas em $M \to Q$ segundo 2.8, definimos o tensor $\overline{I}: M \to M$ por $\overline{I} = \|^g \circ (I|_M)$.*

2.12 Lema. *Nas condições da definição 2.11 acima, e com a notação introduzida em 2.8, temos que*

(i) $\overline{I} = \overline{g}^\sharp \circ \overline{m}^\flat$ (portanto $\overline{I}$ é inversível); e

(ii) $\|^g \circ I = \overline{I} \circ \|^m$.

Prova. Lembrando que $\|^g = \overline{g}^\sharp \circ i^* \circ g^\flat$ temos, para o item (i),

$$\begin{aligned}\overline{I} &= \|^g \circ (I|_M) \\ &= \overline{g}^\sharp \circ i^* \circ g^\flat \circ (I|_M) \\ &= \overline{g}^\sharp \circ i^* \circ (m^\flat|_M) \\ &= \overline{g}^\sharp \circ \overline{m}^\flat,\end{aligned}$$

e para o item (ii):

$$\begin{aligned}\|^g \circ I &= \overline{g}^\sharp \circ i^* \circ g^\flat \circ I \\ &= \overline{g}^\sharp \circ i^* \circ m^\flat \\ &= \overline{g}^\sharp \circ (\overline{m}^\flat \circ \overline{m}^\sharp) \circ i^* \circ m^\flat \\ &= (\overline{g}^\sharp \circ \overline{m}^\flat) \circ \|^m \\ &= \overline{I} \circ \|^m. \quad ■\end{aligned}$$

2.13 Lema. *Se (Q,m,g,F) é um sistema holônomo e $M \subset TQ$ uma distribuição sobre Q então:*

(i) Para todo campo $Y \in \widetilde{\Gamma}(M)$ e todo vetor $v_0 \in M$, existe uma curva $c:(-\varepsilon,\varepsilon) \to Q$ tangente à M com $v(0) = v_0$ e

$$\|^g \circ I \circ \nabla^m_{\dot{v}} v = Y \circ v.$$

(ii) Para toda curva $c:(-\varepsilon,\varepsilon) \to Q$ tangente à M, temos que

$$\perp^g \circ I \circ \nabla^m_{\dot{v}} v = I \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ \left(\|^g \circ I \circ \nabla^m_{\dot{v}} v\right),$$

onde $\Xi: M \to TQ$ é o tensor definido por $\Xi = (I \circ \overline{I}^{-1} - id_M)$.

Prova. Para provar (i) utilizamos o lema anterior (2.12(ii)):

$$\|^g \circ I \circ \nabla_v^m v = \bar{I} \circ \|^m \circ \nabla_v^m v\,,$$

portanto $\|^g \circ I \circ \nabla_v^m v = Y \circ v$ é equivalente a

$$\|^m \circ \nabla_v^m v = (\bar{I}^{-1} \circ Y) \circ v\,,$$

e então aplicamos o lema 2.10(i) com $h = m$ e $Z = (\bar{I}^{-1} \circ Y)$.

Para provarmos o item (ii) basta lembrarmos que $\|^h + \perp^h = id_{TQ}$ $(h \in \{g, m\})$; logo

$$\begin{aligned}\perp^g \circ I \circ \nabla_v^m v &= (id_{TQ} - \|^g) \circ I \circ (\perp^m + \|^m) \circ \nabla_v^m v \\ &= (I - \|^g \circ I) \circ (\perp^m \circ \nabla_v^m v + \|^m \circ \nabla_v^m v) \\ &= (I - \bar{I} \circ \|^m) \circ (\Delta^m \circ v + \|^m \circ \nabla_v^m v) \\ &= I \circ \Delta^m \circ v + (I - \bar{I}) \circ \|^m \circ \nabla_v^m v \\ &= I \circ \Delta^m \circ v + (I \circ \bar{I}^{-1} - id_M) \circ (\bar{I} \circ \|^m \circ \nabla_v^m v) \\ &= I \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|^g \circ I \circ \nabla_v^m v)\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

2.14 Prova (do teorema 2.5). Vamos demonstrar inicialmente a unicidade de uma reação vincular F_{vin} tal que $\|^g \circ F_{vin} = X$, onde $X \in \tilde{\Gamma}(M)$ é um campo dado. Se $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ é uma curva tangente à M que obedece $I \circ \nabla_v^m v = (F_{ext} + F_{vin}) \circ v$ então

$$\|^g \circ I \circ \nabla_v^m v = \|^g \circ F_{vin} \circ v + \|^g \circ F_{ext} \circ v\,, \text{ e} \tag{1}$$

$$\perp^g \circ I \circ \nabla_v^m v = \perp^g \circ F_{vin} \circ v + \perp^g \circ F_{ext} \circ v\,, \tag{2}$$

levando o lema 2.13(ii) na equação (2):

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = I \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|^g \circ I \circ \nabla_v^m v) - \perp^g \circ F_{ext} \circ v\,,$$

pela equação (1):

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = I \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|^g \circ F_{vin} \circ v + \|^g \circ F_{ext} \circ v) - \perp^g \circ F_{ext} \circ v\,,$$

lembrando agora que $\|^g \circ F_{vin} = X$, e que para qualquer $v_0 \in M$ existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ com $v(0) = v_0$ e $I \circ \nabla_v^m v = (F_{ext} + F_{vin}) \circ v$, concluímos que

$$\perp^g \circ F_{vin} = I \circ \Delta^m + \Xi \circ (X + \|^g \circ F_{ext}) - \perp^g \circ F_{ext}\,. \tag{3}$$

Essa expressão para a componente normal de F_{vin} demonstra sua unicidade.

Para provarmos a existência, suponha dado $X \in \tilde{\Gamma}(M)$ e defina

$$F_{vin} = X + \perp^g \circ F_{vin}\,,$$

com $\perp^g \circ F_{vin}$ dado por (3). Esta F_{vin} é uma reação vincular pois, para qualquer $v_0 \in M$, existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ tangente à M que satisfaz $v(0) = v_0$ e

$$\|^g \circ I \circ \nabla_v^m v = (X + \|^g \circ F_{ext}) \circ v$$

(lema 2.13(i) com $Y = X + \|^g \circ F_{ext}$).

Essa curva c também satisfaz a equação (2) acima (basta inverter a dedução de (3) a partir de (2)), e as equações (1) e (2) garantem juntas que

$$I \circ \nabla_v^m v = (F_{vin} + F_{ext}) \circ v\,. \quad \blacksquare$$

2.15 Corolário. *Se (M, F_{vin}) é um vínculo sobre um sistema holônomo (Q, m, g, F_{ext}) então uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ tangente à M satisfaz a equação $I \circ \nabla_v^m v = (F_{vin} + F_{ext}) \circ v$ se e somente se*

$$i^* \circ \left[m^\flat \circ \nabla_v^m v - g^\flat \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v\right] = 0\,.$$

Prova. Na demonstração anterior (prova 2.14) foi estabelecida a equivalência entre as equações $I \circ \nabla_v^m v = (F_{vin} + F_{ext}) \circ v$ e

$$\|^g \circ I \circ \nabla_v^m v = \|^g \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v\,,$$

basta então lembrarmos que $\|^g = \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ g^\flat$ e $I = g^\sharp \circ m^\flat$. $\blacksquare$

2.16 Corolário. *Para qualquer reação vincular F_{vin} temos que*

$$\perp^g \circ F_{vin} = I \circ \Delta^m + \Xi \circ \|^g \circ (F_{vin} + F_{ext}) - \perp^g \circ F_{ext}.$$

Em particular, para qualquer reação vincular d'Alembertiana,

$$F_{vin} = I \circ \Delta^m + \Xi \circ \|^g \circ F_{ext} - \perp^g \circ F_{ext}.$$

Prova. A primeira expressão é exatamente a equação (3) deduzida na demonstração 2.14, e a segunda decorre trivialmente da definição de reação d'Alembertiana (2.7). ∎

Sobre o corolário 2.15 veja o comentário 2.20 adiante.

Não vamos explorar aqui as conseqüências do corolário 2.16; mas é fácil ver que os comentários feitos no trabalho anterior sobre o resultado correspondente (ref. [1], cor. 2.14) se aplicam a essa situação mais geral (bem como a prop. 2.15 da ref. [1]). Em particular, as expressões dadas no corolário 2.16 acima dispensam o uso dos *multiplicadores de Lagrange* na determinação da reação vincular, mesmo que o vínculo considerado seja não holônomo.

Para encerrar essa secção, vamos considerar rapidamente o caso das forças externas *conservativas* (proposições 2.18 e 2.19), e apresentar, em coordenadas locais (comentário 2.20), as várias formas da *equação de movimento* obtida em 2.15.

2.17 Definição. *Um sistema holônomo (Q, m, g, F_{ext}) é* **conservativo** *se existe $V: Q \to \mathbb{R}$ tal que $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q$. Fixada uma das funções V, que chamaremos de* **energia potencial**, *definimos a* **energia total** *$E: TQ \to \mathbb{R}$ do sistema por $E = K + V \circ \tau_Q$.*

2.18 Proposição (conservação da energia). *Seja (Q, m, g, F_{ext}) um sistema holônomo conservativo com energia potencial V e energia total E. Se $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ satisfaz $I \circ \nabla_v^m v = F_{ext} \circ v$ então $\frac{d}{dt}(E \circ v) = 0$.*

Prova. Basta levarmos $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q$ à proposição 1.6:

$$\frac{d}{dt}(K \circ v) = g(v, F_{ext} \circ v) = g(v, -g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q \circ v) = -\frac{d}{dt}(V \circ c),$$

portanto

$$\frac{d}{dt}(E \circ v) = \frac{d}{dt}(K \circ v) + \frac{d}{dt}(V \circ c) = 0. \quad ∎$$

2.19 Proposição. *Seja (M, F_{vin}) um vínculo d'Alembertiano sobre um sistema holônomo conservativo (Q, m, g, F_{ext}) com energia potencial V. Uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ satisfaz $I \circ \nabla_v^m v = (F_{vin} + F_{ext}) \circ v$ se e somente se*

$$i^* \circ \left[m^\flat \circ \nabla_v^m v + dV \circ c \right] = 0.$$

Prova. Pelo corolário 2.15, basta demonstrarmos a equivalência entre a equação acima e

$$i^* \circ \left[m^\flat \circ \nabla_v^m v - g^\flat \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v \right] = 0,$$

o que é fácil pois $\|^g \circ F_{vin} = 0$ e $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q$ implicam em

$$\begin{aligned} g^\flat \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v &= -g^\flat \circ g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q \circ v \\ &= -dV \circ c. \quad ∎ \end{aligned}$$

2.20 Comentário. Em um referencial local (X_α) (notação 2.9), a equação

$$i^* \circ \left[m^\flat \circ \nabla_v^m v - g^\flat \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v \right] = 0$$

se escreve

$$X_\alpha^i \left[m_{ij}(\ddot{q}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{q}^k \dot{q}^l) - g_{ij}(F_{vin}^j + F_{ext}^j) \right] = 0,$$

onde Γ^i_{kl} são os símbolos de Christoffel da conexão riemanniana associada à métrica m. Essa equação é equivalente a

$$X^i_\alpha \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} - g_{ij}(F^j_{vin} + F^j_{ext}) \right] = 0,$$

onde $K = \frac{1}{2} m_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k$.

Nas condições da prop. 2.19 (força externa conservativa e reação vincular d'Alembertiana) a equação acima pode ser escrita como

$$X^i_\alpha \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} \right] = 0,$$

ou, definindo $L: TQ \to \mathbb{R}$ por $L = K - V \circ \tau_Q$,

$$X^i_\alpha \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right] = 0.$$

(3) GEOMETRIA DE DISTRIBUIÇÕES

Na secção precedente deduzimos (cor. 2.15) a equação

$$i^* \circ \left[m^\flat \circ \nabla^m_v v - g^\flat \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v \right] = 0$$

para um sistema holônomo sujeito a um vínculo (M, F_{vin}). Suponha que $M \subset TQ$ seja uma distribuição *integrável* (existe uma folheação $\mathcal{F}$ sobre Q tal que $M = T\mathcal{F}$) e considere uma *subvariedade integral* genérica $F \subset Q$, munida da métrica riemanniana $\overline{m}$ indusida de m por inclusão, e da conexão riemanniana $D^{\overline{m}}$ associada à $\overline{m}$. É claro que

$$i^* \circ m^\flat \circ \nabla^m_v v = \overline{m}^\flat \circ D^{\overline{m}}_v v,$$

de forma que a equação acima só depende da métrica $\overline{m}$ definida sobre as fibras de $M \to Q$, e não da métrica m definida sobre Q. Esse resultado

é importante, pois possibilita uma descrição "intrínseca" da mecânica do sistema vinculado.

Voltando ao caso não holônomo ($M \subset TQ$ não integrável) chegamos à seguinte questão:

O termo $i^* \circ m^\flat \circ \nabla^m_v v$ está determinado apenas pela métrica $\overline{m}$ definida sobre as fibras de $M \to Q$ ou depende também dos valores da métrica m calculada nos vetores não tangentes à M?

Para responder à essa pergunta (na próxima secção), vamos introduzir agora a definição de conexão sobre uma distribuição $M \to Q$, e estudar sua relação com as métricas riemannianas.

Vamos seguir de perto a definição de Koszul para conexões infinitesimais[3], que nos permite verificar rapidamente a tensorialidade dos objetos considerados.

3.1 Definição. *Seja Q uma variedade e $M \to Q$ uma distribuição sobre Q (não necessariamente de codimensão 1). Uma* **conexão** *sobre $M \to Q$ é uma aplicação D que associa a cada par $X, Y \in \Gamma|_U(M)$ de campos tangentes à M (definidos sobre o mesmo aberto $U \subset Q$) um terceiro campo tangente $D_X Y \in \Gamma|_U(M)$ (sobre o mesmo domínio $U \subset Q$), e que satisfaz, para quaisquer campos $X, Y, Z \in \Gamma|_U(M)$ e qualquer função $f: U \to \mathbb{R}$, as seguintes condições:*

(i) $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z;$

(ii) $D_{(X+Y)} Z = D_X Z + D_Y Z;$

(iii) $D_{(fX)} Y = f(D_X Y);$

(iv) $D_X(fY) = f(D_X Y) + (Xf)Y.$

3.2 Notação (em coordenadas locais). *Usando um referencial local* *tangente à M (notação 2.9, secção anterior) definimos $\Omega^\gamma_{\alpha\beta}: U \to \mathbb{R}$ por*

$$D_{X_\alpha} X_\beta = \Omega^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma .$$

Se $Y = Y^\alpha X_\alpha$ e $Z = Z^\alpha X_\alpha$ são campos tangentes à M, decorre das propriedades 3.1(i)–(iv) acima que

$$D_Y Z = Y^\beta \left[(\partial_\beta Z^\alpha) + \Omega^\alpha_{\beta\gamma} Z^\gamma \right] X_\alpha .$$

Pela representação de D em coordenadas locais (símbolos $\Omega^\alpha_{\beta\gamma}$ introduzidos na notação 3.2 acima) é fácil verificar seu caráter local; é fácil ver também que se M for uma distribuição integrável então uma conexão sobre $M \to Q$ é equivalente a uma família $\{D(F)\}$ de conexões, uma sobre cada subvariedade integral de M. Além disso, é claro que se $M = TQ$ então a definição 3.1 acima é equivalente à definição de conexão sobre a variedade Q.

Como no caso de uma conexão sobre uma variedade, o valor de $D_X Y$ em um ponto $q \in Q$ depende apenas do valor de Y ao longo de uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ tangente à X no ponto $q \in Q$. Podemos então calcular a *aceleração covariante* $D_v v$ de uma curva tangente à M e definir as *geodésicas* de $M \to Q$ por $D_v v = 0$; podemos definir também o *transporte paralelo de um vetor tangente à M ao longo de uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q$ tangente à M* e, conseqüentemente, a *derivada covariante* de qualquer tensor definido sobre $M \to Q$.

Não nos deteremos aqui nos detalhes dessas construções.

3.3 Proposição. *Se D é uma conexão sobre uma distribuição $M \to Q$ então existe um e um único tensor $Tor_D: M \oplus M \to TQ$ ($\oplus$ representa a soma de Whitney de fibrados vetoriais) tal que, para quaisquer campos $X, Y \in \Gamma|_U(M)$,*

$$Tor_D(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y] .$$

Prova. A unicidade é óbvia. Quanto à tensorialidade:

$$\begin{aligned} D_{(fX)}(gY) - D_{(gY)}(fX) - [fX, gY] &= fg(D_X Y) + f(Xg)Y \\ &\quad - gf(D_Y X) - g(Yf)X \\ &\quad - fg[X,Y] - f(Xg)Y + g(Yf)X \\ &= fg(D_X Y - D_Y X - [X,Y]) . \end{aligned}$$ ■

3.4 Definição. *Seja D uma conexão sobre uma distribuição $M \to Q$. Chamaremos de* **torção de D** *o tensor $Tor_D: M \oplus M \to TQ$ definido pela proposição 3.3 acima.*

3.5 Proposição. *Se D é uma conexão sobre uma distribuição $M \to Q$ então seu tensor de torção tem as seguintes propriedades:*

(i) Tor_D é antissimétrico; e

(ii) para qualquer par de campos $X, Y \in \Gamma|_U(M)$,

$$Tor_D(X,Y) + [X,Y] \in \Gamma|_U(M) .$$

Prova. Trivial. ■

3.6 Proposição. *Seja D uma conexão sobre uma distribuição $M \to Q$. Se D tem torção nula então M é integrável.*

Prova. Decorre do teorema de Frobenius se levarmos $Tor_D = 0$ na prop. 3.5(ii) acima. ■

Introduzimos abaixo o *tensor diferença* entre duas conexões sobre uma mesma distribuição (prop. 3.7), e estudamos sua relação com as torções e com as geodésicas dessas conexões (proposições 3.7–3.13).

3.7 Proposição. *Dadas duas conexões D e $\overline{D}$ sobre uma mesma distribuição $M \to Q$, existe um e um único tensor $B: M \oplus M \to M$ tal que, para quaisquer campos $X, Y \in \Gamma|_U(M)$,*

$$B(X,Y) = D_X Y - \overline{D}_X Y .$$

Chamaremos B de **tensor de diferença** *entre D e $\overline{D}$.*

Prova. Basta verificar a tensorialidade de $D_X Y - \overline{D}_X Y$ em relação à Y:

$$B(X, fY) = f(D_X Y) + (Xf)Y - f(\overline{D}_X Y) - (Xf)Y = fB(X,Y). \quad \blacksquare$$

3.8 Definição. *Nas condições da prop. 3.14 acima, definimos os tensores $[B], (B): M \oplus M \to M$ por $B = [B] + (B)$, com $[B]$ antissimétrico e (B) simétrico; isto é:*

$$[B](X,Y) = \frac{1}{2}\left(B(X,Y) - B(Y,X)\right) \quad e$$
$$(B)(X,Y) = \frac{1}{2}\left(B(X,Y) + B(Y,X)\right).$$

3.9 Notação (em coordenadas locais). *Utilisaremos, para qualquer símbolo $B^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (tensorial ou não), a seguinte notação:*

$$B^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \frac{1}{2}(B^{\alpha}_{\beta\gamma} - B^{\alpha}_{\gamma\beta}) \qquad e \qquad B^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = \frac{1}{2}(B^{\alpha}_{\beta\gamma} + B^{\alpha}_{\gamma\beta}).$$

3.10 Proposição. *Se D e $\overline{D}$ são duas conexões sobre uma mesma distribuição $M \to Q$ então*

$$[B] = \frac{1}{2}(Tor_D - Tor_{\overline{D}}).$$

Prova. Trivial. ■

3.11 Definição. *Dada uma conexão D sobre uma distribuição $M \to Q$, definimos seu* **spray geodésico** *$S \in \mathfrak{X}(M)$ (campo vetorial sobre M, considerada como uma variedade) pelo seguinte par de condições:*

(i) S é uma equação de segunda ordem sobre $M \to Q$, isto é:

$$T(\tau_Q|_M) \circ S = id_M ;$$

(ii) $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva integral de S se e somente se $\tau_Q \circ c$ for uma geodésica de D.

3.12 Notação (em coordenadas locais). *Se (X_α) é um referencial local tangente à $M \subset TQ$, definimos em 2.9 o sistema de coordenadas locais (q,v) introduzido sobre a variedade M por (X_α) e (q^i). Se $(\partial^{\circ}_i, \partial_\alpha)$ é o referencial local (sobre a variedade M) dos versores de (q,v) então o spray geodésico S de uma conexão D sobre $M \to Q$ se escreve $S = S^i \partial^{\circ}_i + S^\alpha \partial_\alpha$, com*

$$\begin{cases} S^i = X^i_\alpha v^\alpha \\ S^\alpha = -\Omega^{\alpha}_{(\delta\varepsilon)} v^\delta v^\varepsilon. \end{cases}$$

3.13 Proposição. *Duas conexões D e $\overline{D}$ sobre uma mesma distribuição $M \to Q$ têm o mesmo spray geodésico se e somente se $(B) = 0$; isto é, se e somente se o tensor diferença B entre elas for antissimétrico.*

Prova. Decorre da notação 3.12 acima e de $B^{\alpha}_{(\delta\varepsilon)} = \Omega^{\alpha}_{(\delta\varepsilon)} - \overline{\Omega}^{\alpha}_{(\delta\varepsilon)}$. ■

3.14 Proposição. *Duas conexões D e $\overline{D}$ sobre uma mesma distribuição $M \to Q$ são iguais se e somente se ambas têm o mesmo spray geodésico e a mesma torção.*

Prova. Basta considerar simultaneamente as proposições 3.10 e 3.13. ■

Decorre da prop. 3.15 abaixo que qualquer distribuição $M \to Q$ sobre Q admite uma conexão, se Q admitir uma métrica riemanniana.

3.15 Proposição. *Seja (Q,h) uma variedade riemanniana e $M \to Q$ uma distribuição. Se ∇^h é a conexão riemanniana sobre Q então a aplicação D^h definida, para quaisquer $X, Y \in \Gamma|_U(M)$, por*

$$D^h{}_X Y = \|^h \circ \nabla^h{}_X Y$$

é uma conexão sobre M.

Prova. As condições 3.1(i)–(iii) são óbvias, quanto à 3.1(iv):

$$D^h{}_X(fY) = \|^h\left[f(\nabla^h{}_X Y) + (Xf)Y\right] = f(D^h{}_X Y) + (Xf)Y\,,$$

pois $\|^h$ é tensorial e $(Xf)Y \in \Gamma|_U(M)$. ■

3.16 Definição. *Se $M \to Q$ é uma distribuição sobre uma variedade riemanniana (Q,h), chamaremos a conexão ∇^h definida sobre $M \to Q$ pela prop. 3.15 acima de* **conexão induzida** *pela métrica h.*

3.17 Proposição. *Se $M \to Q$ é uma distribuição sobre uma variedade riemanniana (Q,h) e D^h sua conexão induzida então, para quaisquer $X, Y \in \Gamma|_U(M)$,*

$$Tor_{D^h}(X,Y) = -\perp^h \circ [X,Y]\,.$$

Prova.

$$\begin{aligned} Tor_{D^h}(X,Y) &= D^h{}_X Y - D^h{}_Y X - [X,Y] \\ &= \|^h \circ (\nabla^h{}_X Y - \nabla^h{}_Y X) - [X,Y] \\ &= -\left([X,Y] - \|^h \circ [X,Y]\right) \\ &= -\perp^h \circ [X,Y]\,. \end{aligned}$$ ■

3.18 Corolário. *Uma distribuição $M \to Q$ sobre uma variedade riemanniana (Q,h) é integrável se e somente se sua conexão induzida tem torção nula.*

Já havíamos visto na prop. 3.6 que se uma distribuição $M \subset TQ$ é não integrável então uma conexão D sobre $M \to Q$ deve necessariamente ter torção não nula. O corolário 3.18 acima mostra que se D for induzida por alguma métrica riemanniana então vale a recíproca; isto é, M integrável implica em $Tor_D = 0$.

3.19 Proposição. *Se $M \to Q$ é uma distribuição sobre uma variedade riemanniana (Q,h) e D^h sua conexão induzida então vale, para quaisquer $X, Y, Z \in \Gamma|_U(M)$, a seguinte condição:*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle D^h{}_X Y, Z\rangle + \langle Y, D^h{}_X Z\rangle, \quad \textit{onde} \quad \langle\ ,\ \rangle = h(\ ,\ )\,.$$

Prova. Temos, para todo par $A, B \in T_qQ$ $(q \in Q)$,

$$\langle \|^h(A), B\rangle = \langle A, \|^h(B)\rangle\,,$$

logo, para quaisquer $X, Y, Z \in \Gamma|_U(M)$,

$$\begin{aligned} \langle D^h{}_X Y, Z\rangle + \langle Y, D^h{}_X Z\rangle &= \langle \|^h \circ \nabla^h{}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \|^h \circ \nabla^h{}_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla^h{}_X Y, \|^h(Z)\rangle + \langle \|^h(Y), \nabla^h{}_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla^h{}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla^h{}_X Z\rangle \\ &= X\langle Y,Z\rangle\,, \end{aligned}$$

pois ∇^h é a conexão riemanniana associada à métrica h. ■

3.20 Definição. *Uma* **distribuição riemanniana** *é um par (M,h) onde $M \subset TQ$ é uma distribuição sobre uma variedade Q e h uma métrica riemanniana sobre o fibrado vetorial $M \to Q$.*

3.21 Teorema. *Seja (M,h) uma distribuição riemanniana sobre uma variedade Q e $A\colon M\oplus M\to TQ$ um tensor antissimétrico tal que, para quaisquer $X,Y\in\Gamma|_U(M)$, $A(X,Y)+[X,Y]\in\Gamma|_U(M)$. Existe uma e uma única conexão D sobre a distribuição M que satisfaz as seguintes condições:*

(i) Para quaisquer $X,Y,Z\in\Gamma|_U(M)$,

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle D_XY,Z\rangle+\langle Y,D_XZ\rangle,\quad \textit{onde}\quad \langle\ ,\ \rangle=h(\ ,\ ).$$

(ii) $Tor_D=A$.

Prova. Faremos a demonstração em um referencial local (X_α) tangente à M (notação 2.9). A unicidade nos garante que as construções locais coincidem nas intersecções dos domínios e que, portanto, a conexão está definida sobre $M\to Q$.

Aplicando (i) à soma

$$X_\delta\langle X_\alpha,X_\epsilon\rangle+X_\epsilon\langle X_\alpha,X_\delta\rangle-X_\alpha\langle X_\delta,X_\epsilon\rangle$$

obtemos

$$\begin{aligned}\partial_\delta h_{\alpha\epsilon}+\partial_\epsilon h_{\alpha\delta}-\partial_\alpha h_{\delta\epsilon}&=h_{\alpha\beta}\Omega^\beta_{\delta\epsilon}+h_{\epsilon\beta}\Omega^\beta_{\delta\alpha}+h_{\alpha\beta}\Omega^\beta_{\epsilon\delta}+h_{\delta\beta}\Omega^\beta_{\epsilon\alpha}\\&\quad-h_{\delta\beta}\Omega^\delta_{\alpha\epsilon}-h_{\epsilon\beta}\Omega^\beta_{\alpha\delta}+(h_{\alpha\beta}\Omega^\beta_{\delta\epsilon}-h_{\alpha\beta}\Omega^\beta_{\delta\epsilon})\\&=2h_{\alpha\beta}\Omega^\beta_{\delta\epsilon}+h_{\alpha\beta}\Omega^\beta_{[\epsilon\delta]}+h_{\epsilon\beta}\Omega^\beta_{[\delta\alpha]}+h_{\delta\beta}\Omega^\beta_{[\epsilon\alpha]},\end{aligned}$$

portanto

$$\Omega^\alpha_{\delta\epsilon}=\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(\partial_\delta h_{\beta\epsilon}+\partial_\epsilon h_{\beta\delta}-\partial_\beta h_{\delta\epsilon})+\Omega^\alpha_{[\delta\epsilon]}+h^{\alpha\beta}(h_{\delta\gamma}\Omega^\gamma_{[\beta\epsilon]}+h_{\epsilon\gamma}\Omega^\gamma_{[\beta\delta]}).\quad(1)$$

A condição (ii) e as hipóteses sobre A determinam $\Omega^\alpha_{[\delta\epsilon]}$ por

$$X^i_\alpha\Omega^\alpha_{[\delta\epsilon]}=\frac{1}{2}(A^i_{\delta\epsilon}+C^i_{\delta\epsilon}),\quad(2)$$

onde $A^i_{\delta\epsilon}$ e $C^i_{\delta\epsilon}$ são dados por $A(X_\delta,X_\epsilon)=A^i_{\delta\epsilon}\partial_i$ e $[X_\delta,X_\epsilon]=C^i_{\delta\epsilon}\partial_i$.

As expressões (1) e (2) obtidas acima demonstram a unicidade de $\Omega^\alpha_{\delta\epsilon}$.

Para provar a existência, defina os símbolos $\Omega^\alpha_{\delta\epsilon}$ pelas equações (1) e (2). Uma verificação direta de sua lei de transformação (por uma mudança de referencial) mostra que eles definem uma conexão. Além disso, está claro que essa conexão satisfaz as condições (i) e (ii) do enunciado. ∎

3.22 Comentário. Se M for uma distribuição integrável então é fácil ver que, dada uma conexão D sobre M, existe uma e uma única conexão $\overline{D}$ com o mesmo spray geodésico e torção nula (basta tomar $\overline{D}_XY=D_XY-\frac{1}{2}Tor_D(X,Y)$). Por outro lado, se a distribuição M for não integrável, então ela não admite conexões sem torção (prop. 3.6). Essa observação, juntamente com o teorema 3.21, nos indica qual o papel desempenhado pelo *tensor de torção* nesse contexto; a prop. 3.18 nos mostra porque esse papel não fica claro quando nos restringimos ao estudo da geometria de variedades e subvariedades.

(4) CONCLUSÃO

Vamos responder agora, com o auxílio dos resultados obtidos acima, a questão formulada no início da secção precedente:

Seja (M,F_{vin}) um vínculo sobre um sistema holônomo (Q,m,g,F_{ext}). O termo $i^*\circ m^\flat\circ\nabla^m_v v$ da equação deduzida em 2.15:

$$i^*\circ\left[m^\flat\circ\nabla^m_v v-g^\flat\circ(F_{vin}+F_{ext})\circ v\right]=0$$

está determinado apenas pela métrica $\overline{m}$ definida sobre as fibras de $M\to Q$ ou depende também dos valores da métrica m calculada nos vetores não tangentes à M?

É claro que

$$i^*\circ m^\flat\circ\nabla^m_v v=\overline{m}^\flat\circ D^m_v v,$$

onde D^m é a conexão sobre $M \to Q$ induzida pela métrica m (definição 3.16). Se M for integrável então $Tor_{D^m} = 0$ (cor. 3.18) e o teorema 3.21 nos garante que a conexão D^m está determinada apenas pela métrica $\overline{m}$ induzida sobre $M \to Q$. Por outro lado, segue da prop. 3.17:

$$Tor_{D^m}(X,Y) = -\perp^m \circ [X,Y]$$

e do teorema de Frobenius que se M for não integrável então D^m não pode ser "intrínseca"; isto é, não pode depender apenas da métrica induzida $\overline{m}$. Portanto, *a conexão D^m está determinada apenas pela métrica induzida $\overline{m}$ se e somente se a distribuição M for integrável.*

A expressão $D^m_v v$ não depende integralmente de D^m, mas apenas de seu spray geodésico $S \in \mathfrak{X}(M)$ (def. 3.11). Resta então uma última pergunta:

O spray geodésico da conexão induzida D^m depende apenas da métrica induzida $\overline{m}$?

Está claro que a resposta é afirmativa se M for integrável. Vamos provar agora que se M for não integrável então a resposta é negativa. Para tanto, considere a componete S^α do spray geodésico de D^m (notação 3.12 e prova do teorema 3.21):

$$S^\alpha(q,v) = -\Omega^\alpha_{(\delta\epsilon)} v^\delta v^\epsilon = -m^{\alpha\beta}(\partial_\delta m_{\beta\epsilon} - \frac{1}{2}\partial_\beta m_{\delta\epsilon} + 2m_{\delta\gamma}\Omega^\gamma_{[\beta\epsilon]})v^\delta v^\epsilon.$$

De $D^m = \|^m \circ \nabla^m$ vem que

$$\Omega^\gamma_{[\beta\epsilon]} = \frac{1}{2}\|^\gamma_j C^j_{\beta\epsilon}$$

(onde $C^j_{\beta\epsilon}$ são dados por $[X_\beta, X_\epsilon] = C^j_{\beta\epsilon}\partial_j$), logo

$$S^\alpha(q,v) = -m^{\alpha\beta}(\partial_\delta m_{\beta\epsilon} - \frac{1}{2}\partial_\beta m_{\delta\epsilon} + X^i_\delta m_{ij}\, C^j_{\beta\epsilon})v^\delta v^\epsilon.$$

Podemos supor que o referencial local (X_α) tangente à M é rígido; isto é, os símbolos $m_{\alpha\beta} = m(X_\alpha, X_\beta)$ não dependem do ponto base $(\partial_i m_{\alpha\beta} = 0)$; e então teremos:

$$m_{ij} X^i_\delta v^\delta\, C^j_{\beta\epsilon} v^\epsilon = -m_{\alpha\beta} S^\alpha(q,v)\,.$$

Essa expressão é equivalente a

$$m(V, [X_\beta, V])_q = -m_{\alpha\beta} S^\alpha(q,v)\,,$$

onde $V \in \Gamma|_U(M)$ é o campo vetorial tangente à M que tem por coordenadas, no referencial (X_α), as constantes v^α; e $q \in Q$ um ponto genérico. Como M é não integrável, existe um par $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}$ de campos no referencial (X_α) tal que $[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}]$ não é tangente à M no ponto $q \in Q$. Tomando $V = X_{\alpha_1}$ e $X_\beta = X_{\alpha_2}$ obtemos:

$$m(X_{\alpha_1}, [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1}])_q = -m_{\alpha\beta} S^\alpha(q,v), \quad \text{com } v^\alpha = \delta^\alpha_{\alpha_1}.$$

Essa equação nos mostra que, conhecendo spray geodésico $S \in \mathfrak{X}(M)$ da conexão D^m, podemos calcular o valor de $m(X,Y)_q$ para um par $X, Y \in T_qQ$ com $Y \notin M_q$ ($X = X_{\alpha_1}(q)$ e $Y = [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1}]_q$). Portanto, *o spray geodésico de D^m não é intrínseco, se M for não integrável.*

Concluímos então que:

O termo $i^* \circ m^\flat \circ \nabla^m_v v$ está determinado apenas pela métrica induzida $\overline{m}$ se e somente se a distribuição M for integrável.

Esse resultado é básico para o desenvolvimento de um formalismo lagrangeano (ou hamiltoniano) que descreva a dinâmica dos sistemas mecânicos sujeitos a vínculos não holônomos, que pretendemos apresentar em outra oportunidade.

Referências

[1] S. F. Cortizo: *Mecânica clássica—sobre a dedução das equações de Lagrange*, preprint do Instituto de Física da Universidade de São Paulo 1987.

[2] E. T. Whittaker: *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, fourth edition, Dover, New York 1944.

[3] N. J. Hicks: *Notes on differential geometry*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey 1965.