

IFUSP/P-717
B.I.F. - USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PUBLICAÇÕES

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

IFUSP/P-717

MECÂNICA ESTATÍSTICA DOS SÓLITONS DO HÉLIO
LÍQUIDO. I

25 AGO 1988



L.R. Evangelista e I. Ventura

Instituto de Física, Universidade de São paulo

Junho/1988

RESUMO

Este artigo e o seguinte apresentam uma teoria microscópica do ${}^4\text{He}$ líquido, baseada na existência de sólitons planares, que se movimentam em equilíbrio, no condensado do fluido. No interior de cada sóliton há a formação de uma nuvem de excitações térmicas do tipo estado ligado. A ação dos sólitons e das nuvens térmicas sobre os estados não ligados, que dão origem ao fluido normal, é aproximada por um campo médio, cujo valor depende do número de sólitons do sistema. As quasi-partículas ligadas, que vão constituir a nuvem térmica, são, por seu turno, descritas através de um cálculo auto-consistente. Devido ao movimento dos sólitons, o estado de menor energia, da dinâmica das quasi-partículas da nuvem térmica, é um pacote de onda instantâneo, em repouso com relação ao laboratório. Há um gap de energia entre esse pacote instantâneo e os modos normais ligados ao sóliton. Mas, como o pacote instantâneo é o estado fundamental do sistema, então condensa um segundo campo clássico, proporcional à sua função de onda, que vai interagir com o campo do condensado, e que também vai ser um envelope coerente, que envolve os estados da nuvem térmica, estabilizando-a. Para minimizar a energia livre do fluido normal, o sistema tem que formar espontaneamente um número definido de sólitons, de forma a baixar o campo médio, até nivelá-lo com a energia do pacote instantâneo. A teoria se baseia na teoria de muitos corpos de Bogoliubov, e produz uma descrição muito boa para o Hélio líquido. Há um fenômeno de saturação da nuvem térmica, que dá origem a um ponto λ nas proximidades de 2°K . O condensado existe tanto na fase superfluida, como no líquido normal, acima do ponto λ . A superfluidez, realizada pelo

MECÂNICA ESTATÍSTICA DOS SÓLITONS DO HÉLIO LÍQUIDO. I

L.R. Evangelista* e I. Ventura

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

C.P. 20516, 01498 São Paulo, SP, Brasil

*Afastado da Universidade Estadual de Maringá (PR) para a pós-graduação na Universidade de São Paulo.

movimento não dissipativo dos sólitons, só é apreciável no intervalo $\sim 1.3^{\circ} - 2^{\circ}\text{K}$. Obtém-se uma boa descrição para o espectro das quasi-partículas, a partir de primeiros princípios. O calor específico do superfluido, calculado microscopicamente, pode ser escrito em termos de um gap térmico efetivo $C \sim e^{-\Delta_0/T}$, onde $\Delta_0 \sim 6^{\circ} - 9^{\circ}\text{K}$, dependendo do intervalo de temperatura, na fase superfluida. Neste primeiro artigo introduzimos a nuvem de excitações térmicas através de uma densidade clássica $\rho_{n.t.}(\vec{x}, t)$, que é calculada de maneira auto-consistente. No artigo seguinte mostramos que é mais correto tratar a nuvem térmica por meio do segundo campo clássico, que condensa no estado de menor energia. Esse campo é um envelope coerente dos estados ligados constituintes da nuvem.

ABSTRACT

This paper and the next one present a ^4He liquid microscopic theory, based on the existence of planar solitons, which move in equilibrium on fluid's condensate. Inside every soliton, there is a cloud of bound states thermal excitations. The normal fluid is made of unbound states excitations, and the action of solitons and thermal clouds over them, is approximated by a mean field, which depends on the system's number of solitons. The bound state quasi-particles, that make up the thermal cloud, are in turn described through a self-consistent calculation. In thermal cloud dynamics, and owing to the motion of solitons, the lower energy state is an instantaneous wave packet, at rest in the laboratory frame. There is an energy gap between the instantaneous packet and the normal modes bound to the soliton. However, since the instantaneous packet is the ground state, then it condensates a second classical field, proportional to its wave function, that interacts with the condensate field, and is also a coherent envelope, which modulates the thermal cloud states, stabilizing it. In order to minimize the normal fluid free energy, it must occur the spontaneous formation of a defined number of solitons, so as to lower the mean field, till it levels with the instantaneous packet energy. The theory is based on Bogoliubov's many body theory, and leads to a very good description of liquid Helium. There is a thermal cloud saturation, that produces a λ point near 2°K . The condensate exists in both phases: in the superfluid, as well as in the normal liquid. Superfluidity, due to the non-dissipative motion of solitons, is significant only in the interval $\sim 1.3^{\circ} - 2^{\circ}\text{K}$. From first

principles, one gets a good description for the quasi-particle spectrum. The superfluid specific heat, that is microscopically computed, can be written in terms of an effective thermal gap, $C \sim e^{-\Delta_0/T}$, with $\Delta_0 \sim 6^\circ - 9^\circ\text{K}$, depending on the temperature interval in the superfluid phase. In this first paper, the thermal cloud is introduced through a self-consistent classical density $\rho_{n.t.}(\vec{x}, t)$. In the next paper we show the perfected approach of treating the thermal cloud by means of the second classical field, which condensates in the lowest energy state. This field is the coherent envelope of the cloud bound states.

I. INTRODUÇÃO

Relatamos aqui uma teoria microscópica, para tratar o Hélio líquido a temperatura finita, cuja essência é a existência de sólitons planares, que se movimentam no fluido em equilíbrio. A teoria produz resultados muito bons, possibilitando inclusive uma descrição da transição de fase superfluido/líquido normal.

Nesta introdução, iniciamos apresentando um breve resumo sobre contribuições anteriores para a teoria do superfluido. O resumo está longe de ser completo, e se limita apenas a mencionar alguns trabalhos teóricos, entre os que se relacionam mais de perto com o nosso método.

A teoria microscópica do Hélio superfluido surgiu na década de 30^{1,2,3}, antes da descoberta da própria superfluidez, por Kapitza, e Allen e Misener. Em pouco tempo já havia duas concepções diferentes para abordar o problema: a filosofia do condensado e a do gap.

Supondo que as propriedades do fluido fossem manifestações macroscópicas da mecânica quântica, London⁴ utilizou a teoria da condensação de Bose-Einstein⁵ para descrevê-lo. As propriedades estranhas do sistema eram então atribuídas à natureza quântica e macroscópica do condensado; enquanto que o ponto λ deveria corresponder ao ponto de condensação do gás de Bose-Einstein; inclusive por causa da proximidade entre a temperatura de condensação calculada, e a temperatura crítica do Hélio.

Diante da teoria de London, Tisza⁶ concluiu que, na prática, o sistema deveria comportar-se como se contivesse dois fluidos: o fluido normal, cujos constituintes eram átomos excita

dos termicamente; e o superfluido, que não tinha entropia, pois sua matéria estaria naquele estado condensado, com número de ocupação macroscópico. Com esse modelo, Tisza propôs uma explicação para os efeitos termomecânico e mecanocalórico, em termos de uma hidrodinâmica de dois fluidos; e também predisse a existência do segundo som.

Frölich⁷ e Bijl⁸ notaram que a variação do calor específico do ^4He , com a temperatura, exigia que houvesse um gap no espectro do líquido - um fenômeno que, à primeira vista, parecia não ser compatível com a condensação.

Então Landau⁹, para explicar o Hélio, introduziu uma entidade nova: a quasi-partícula. A idéia era que os modos normais de um sistema de muitos corpos em interação não poderiam ser os próprios átomos mas sim, excitações que, embora microscópicas, fossem contudo coletivas. Segundo sua teoria, além dos fônons, o líquido deveria ter também os rótons que seriam excitações com um gap no espectro de energia. A teoria era fenomenológica no sentido em que os parâmetros do rónon eram ajustados pela utilização dos dados de calor específico.

O trabalho de Landau⁹ e de seu grupo^{10,11}, que era feito em contato constante com físicos experimentais, produziu uma boa descrição para determinadas propriedades térmicas do sistema e para o segundo som, além de ter servido de motivo para um grande número de experiências importantes, entre elas as que, em linhas gerais, confirmaram o espectro por ele proposto.

A formulação do problema, a partir de primeiros princípios, não tardou a chegar. Em 1947, Bogoliubov¹² constrói a Hamiltoniana do líquido, a partir da interação atômica, utilizando o método da segunda quantização. Analisando então flutuações

linearizadas, em torno de um campo de fundo uniforme, que seria o condensado, Bogoliubov mostra qual é o mecanismo microscópico de formação no fluido das quasi-partículas do tipo fónon.

A teoria de Bogoliubov foi posteriormente desenvolvida e estendida em muitas direções.

Lee, Huang e Yang¹³ formularam o problema de um fluido, formado por átomos de caroço impenetrável.

Beliaev¹⁴ e Hugenholtz e Pines¹⁵ estudaram o problema dos muitos corpos bosônicos, conforme o método e a linguagem da teoria quântica de campos.

A teoria de Bogoliubov¹² é um aperfeiçoamento do método de Hartree-Fock¹⁶.

Em 1954, Feynman¹⁷ propôs uma teoria fenomenológica, que relacionava a função de estrutura estática do líquido à relação de dispersão das quasi-partículas da teoria de Landau.

Paralelamente ao esquema da teoria de muitos corpos, o estudo do Hélio líquido também pôde ser feito através do tratamento direto da Equação de Schrödinger, com formas realísticas de potencial. Nessa linha, o método variacional, que utiliza as funções tentativas de Jastrow, desenvolvido por Feenberg, Jackson, Woo, e muitos outros¹⁸, tem se mostrado muito eficiente e preciso para a determinação da energia e da densidade do estado fundamental, assim como também para o cálculo da função de estrutura estática.

O limite clássico da teoria de Bogoliubov é dado pela Equação de Gross-Pitaevskii¹⁹. Se formularmos o problema do superfluido como uma expansão semi-clássica em torno das soluções dessa equação, concluímos que, em princípio, não é necessário que o condensado seja uniforme.

Num trabalho em que descrevia o superfluido, por meio de um campo clássico complexo, Anderson²⁰ concluiu que o movimento superfluido da matéria num tubo estava associado à diferença entre os valores da fase do campo, nas extremidades do sistema. Segundo Anderson, a superfluidez se processa conjugada ao deslizamento da fase local.

Em 1976, Ginzburg e Sobaynin²¹ analisaram a função que sólitons estáticos poderiam ter no Hélio líquido, especialmente em conexão com a descrição da tensão superficial numa superfície livre.

Em 1979, Ventura^{22,23} analisou o papel que poderiam ter certos sólitons planares que resolvem a Equação de Gross-Pitaevskii, supondo que esses objetos existissem em equilíbrio no vácuo do Hélio líquido, a temperatura finita. Dessa análise, resultou uma estratégia para descrever o fluido, a partir da teoria de Bogoliubov, que unificava todos os pontos de vista, apresentados acima, em torno do sóliton.

Ventura concluiu que as quasi-partículas ligadas ao sóliton eram, em muitos aspectos, semelhantes aos rótons, tendo inclusive um gap²². Além disso, a estabilidade do movimento era garantida por uma defasagem que o próprio sóliton produzia no condensado, e o movimento não dissipativo daí resultante poderia ser a causa da superfluidez²². Dado que a corrente de matéria movia-se em sentido oposto ao do sóliton, também foi sugerida uma explicação microscópica para o modelo de Tisza^{6,22}.

Considerando ainda que o sóliton era uma parede de Bloch em movimento, então, por analogia com os sistemas de ferro magnetismo, foi possível estimar a temperatura da transição de fase a ele associada - a qual resultou em $T_{\lambda} \sim 2^{\circ}\text{K}$ ²². Observou-se

também que o condensado continuaria a existir, mesmo na fase de alta temperatura²².

Na Ref.(22), a quantização era feita conforme a doutrina da quantização semi-clássica de sólitons, introduzida por Dashen, Hasslacher e Neveu²⁴, cuja aplicação ao caso de sólitons tridimensionais foi discutida por Friedberg, Lee e Sirlin²⁵, e também por Ventura e Marques²⁶. Uma inovação a esse respeito foi que, na Ref. (22), se utilizou a extensão à teoria de campos da regra de Bohr-Sommerfeld, para quantizar as próprias quasi-partículas.

Uma indicação mais detalhada a respeito do mecanismo pelo qual o sóliton iria surgir no líquido resultou de um estudo sobre a termodinâmica da teoria ϕ^4 , do bóson escalar relativístico, com quebra espontânea de simetria²⁷. Ali, Ventura observou que, a despeito de terem energia infinita, sólitons planares podiam aparecer espontaneamente no vácuo do sistema, graças ao ganho de entropia que era devido à modificação no espectro de quasi-partículas, induzida pelo próprio sóliton. (Ver também Ref. (28)).

Num trabalho mais recente, Ventura e Vitiello²⁹ obtiveram as funções de estrutura estática e dinâmica de um condensado cheio de sólitons planares, na aproximação em que as quasi-partículas são puntiformes. Os resultados mostram o pico dos rótons assim como o pico dos fônons, nas energias mais altas; ambos muito semelhantes ao que se observa no Hélio, através do espalhamento de nêutrons³⁰.

O ingrediente principal da teoria do Hélio, proposta na Ref. (22), e cuja mecânica estatística apresentamos aqui, é o sóliton

$$\sqrt{\rho} \left[V - i \gamma t \operatorname{tgh} \gamma m \bar{c} (x - \bar{c} V t) \right]$$

que resolve a Equação de Gross-Pitaevskii. ρ é a densidade do fluido, \bar{c} a velocidade do som; V é um número real no intervalo $(-1, +1)$, enquanto que $\gamma = \sqrt{1 - V^2}$.

Esse sóliton já foi considerado por outros autores. Até onde sabemos, o primeiro autor a estudá-lo foi Tsuzuki³¹, num trabalho muito interessante, onde ele trata inclusive o espalhamento de sólitons em uma dimensão. Tsuzuki aventou a possibilidade de que aquele sóliton poderia mover-se num superfluido.

O sóliton surgiu também em conexão com problemas da Equação de Schrödinger não linear unidimensional. Zakharov e Shabat³² vieram a estudá-lo através do método do espalhamento *in* verso, problema esse cuja solução quântica foi apresentada por Kulish, Manakov e Faddeev³³. Makhankov e colaboradores^{34,35} analisaram esse mesmo campo clássico, em vários artigos sobre teorias unidimensionais.

Na física aplicada, Hasegawa e Tappert³⁶ ainda utilizaram esse mesmo sóliton, para descrever a propagação de pulsos, em meios óticos não lineares.

Aqui, e no artigo seguinte, nós partimos, como na Ref. (22), da teoria de Bogoliubov, e desenvolvemos a mecânica estatística do Hélio, considerando um condensado cheio de sólitons, e sua interdependência com o fluido normal.

Procedendo assim, obtemos uma descrição muito boa tanto para o Hélio superfluido, como também para o líquido normal. A Fig. (1) mostra o calor específico calculado como função da temperatura. Ali se vê que o calor específico diverge no ponto de

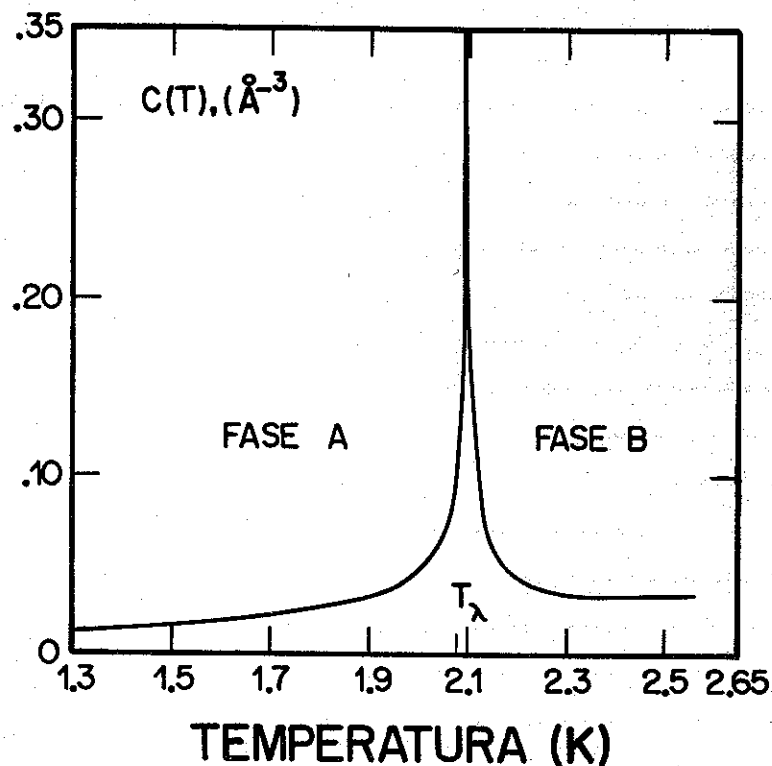


FIG. 1- CALOR ESPECÍFICO DO SISTEMA DE SÓLITONS SOMADO AO CALOR ESPECÍFICO DO FLUIDO NORMAL.

transição entre as duas fases, ponto λ , a 2.17°K , em concordância com o valor experimental $T_{\lambda} = 2.17^{\circ}\text{K}$.

Nosso objetivo é determinar, entre as configurações de sólitons planares que o sistema pode ter, aquela que, a cada temperatura, tem a menor energia livre. A mecânica estatística de cada configuração é feita conforme o seguinte esquema:

- (1) As quasi-partículas são flutuações quantizadas do campo do condensado. Há dois tipos de quasi-partículas, os estados ligados nos sólitons planares, e os estados não ligados.
- (2) Os estados não ligados, ou do contínuo, vão obedecer a uma dinâmica de campo médio, e formarão um fluido análogo ao fluido normal do gás de Bose-Einstein o qual, por sua vez, vai re-normalizar a densidade do condensado. Nosso tratamento do fluido normal tem muito em comum com o trabalho de London¹, tanto no aspecto computacional, como no que se refere à interpretação.
- (3) Do ponto de vista puramente mecânico, a tendência do sistema seria encher o sólito com as excitações do fluido normal. Veremos no entanto que na mecânica estatística dos estados ligados, esse enchimento não se completa, mas, contudo, aquela tendência ainda se manifesta, levando ao favorecimento de sólitons quase cheios, para os quais o número de ocupação dos estados ligados integrado é muito grande.
- (4) Assim, as excitações ligadas formam uma nuvem térmica que vai encher quase completamente o buraco do sólito. E essa nuvem então renormaliza o sólito, alterando sua largura e sua velocidade.

- (5) Cada quasi-partícula ligada vai interagir com o sólito (por causa de sua interação com o campo clássico), e também com a própria nuvem térmica, da qual ela é uma constituinte.
- (6) De início, supomos que a densidade da nuvem térmica é proporcional ao buraco do sólito. Depois, verificamos que essa proporcionalidade ocorre de fato e, então, determinamos o fator de proporcionalidade, ou fator de enchimento, de maneira auto-consistente.
- (7) Devido ao movimento do sólito, na equação dinâmica dos estados da nuvem térmica, o estado de menor energia média não é um estado ligado. É, a cada instante, um pacote de onda instantâneo que está em repouso com relação ao laboratório; o qual define o zero da energia, para a dinâmica das flutuações. Isto é, o pacote instantâneo define o nível do potencial químico. (Veremos no artigo seguinte que, na realidade, ocorre a condensação de um segundo campo clássico, proporcional à função de onda desse pacote instantâneo).
- (8) As quasi-partículas ligadas acompanham o movimento do sólito na direção x , mas podem se mover livremente nas direções transversais. Seu espectro tem um gap de energia que é dado, no esquema deste primeiro artigo, por duas energias cinéticas: a energia cinética de ponto zero que as excitações já têm, por serem estados ligados; mais a energia cinética que elas adquirem, por acompanharem o movimento do sólito. (O segundo artigo é um aperfeiçoamento deste. Lá, a energia cinética de ponto zero é absorvida no termo cinético do segundo campo condensado, e o gap passa a ser somente a energia, que cada excitação ligada ganha, por causa do movimento do sólito).

- (9) O campo médio depende do número de sólitons que o sistema tem. Além disso, a energia livre do fluido normal é um termo de volume (ao contrário da energia livre dos sólitons, que é proporcional à área total dos mesmos), que será tanto mais negativo, quanto menor for a diferença entre o valor do campo médio e o potencial químico. Então, para minimizar esse termo de volume, o sistema vai produzir sólitons, de forma a baixar o campo médio, até igualá-lo ao potencial químico. Esse nivelamento de cotas acaba determinando o número de sólitons do sistema, que dependerá do número γ (que aparece na fórmula do campo do sólito, e define o tipo de sólito que o fluido terá), e do fator de enchimento.
- (10) Da condição de auto-consistência para o fator de enchimento, e do fato de apenas a energia cinética concorrer para a formação do gap, resulta um par de equações acopladas, relacionando o gap, o fator de enchimento e o número γ .
- (11) A energia livre do sistema de sólitons pode, assim, ser escrita como uma função do gap Δ . Aí então, é possível, a cada temperatura, determinar o valor do gap, $\Delta(T)$, que minimiza a energia livre, e que portanto corresponde ao estado de equilíbrio. A seguir calculamos o fator de enchimento, o número γ , e todas as outras grandezas de interesse.
- (12) A transição de fase acontece em conexão com uma saturação do sólito. A partir de uma certa temperatura T_λ , começa a existir uma região de saturação no plano (Δ, T) , no interior da qual, o sólito ficaria tão cheio de quasi-partículas ligadas que, então, não seria possível satisfazer às equações do item (10). Justamente nessa temperatura, a linha de mí-

nimos $\Delta(T)$ tangencia a região de saturação, e aí acontece a transição superfluido/líquido normal.

As seções II e III são recapitulações sobre o método da Ref. (22), e sobre propriedades dos sólitons da teoria.

Na seção IV desenvolvemos a dinâmica de campo médio do fluido normal.

A nuvem térmica é introduzida no capítulo V. Nesse Capítulo nós mostramos, ao nível clássico, como é que a nuvem re-normaliza o sólito.

A dinâmica obedecida pelos estados ligados ao sólito, que formam a nuvem térmica, é tratada no capítulo VI. Ali já se observa que a nuvem pode, de fato, ser obtida de maneira auto-consistente.

A seção VII é dedicada ao estudo da condição de compatibilidade entre as duas dinâmicas do problema. Dessa condição resulta uma relação envolvendo o número de sólitons, o fator de enchimento, e o número γ .

Na seção VIII construímos a mecânica estatística do sistema completo: condensado, sólitons, nuvens térmicas e fluido normal. Resolvemos o sistema de equações que determina o número γ e o fator de enchimento, como funções do gap das quasi-partículas ligadas. Analisamos o aparecimento da região de saturação.

O capítulo IX é onde apresentamos e discutimos os resultados. Ali mostramos como o número γ , o "número de sólitons" e o fator de enchimento dependem da temperatura. Também apresentamos o calor específico do líquido, nas duas fases. Ali também se trata da parametrização do calor específico, em termos de um

gap térmico efetivo, em dois intervalos de temperatura da fase superfluida. Essa parametrização está em muito bom acordo com a que tradicionalmente é feita, na fenomenologia do Hélio.

II. FUNDAMENTOS

Discutimos aqui resumidamente os fundamentos da teoria de muitos corpos, em que nos baseamos, para construir a mecânica estatística do Hélio líquido.

Supõe-se em geral que as propriedades mais características do ^4He líquido, tais como a superfluidez, a existência da transição λ , a existência de rótons, etc., independem dos detalhes da interação entre dois átomos de Hélio. Sabe-se que esse potencial tem um caroço central muito intenso, e uma cauda atrativa de pequena intensidade e suave¹. Ao estudarmos, como o fazemos aqui, fenômenos cujo comprimento típico é bem maior que as dimensões do caroço do potencial, podemos substituí-lo por uma função delta repulsiva, $\lambda\delta(\vec{x})$. Considerando, além disso, que o principal papel da cauda atrativa seria o de aglutinar os átomos para formar o fluido, podemos também fazer a aproximação de ignorá-la, contanto que fixemos a densidade, por outros meios.

A dinâmica do sistema será então determinada pela Hamiltoniana

$$H_a^0 = \int d\vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \nabla \varphi^* \nabla \varphi + \frac{\lambda}{2} (\varphi^* \varphi)^2 \right\} \quad (1)$$

onde φ é o campo bosônico local e não relativístico, cujas flutuações, quando quantizadas em torno dos estados de densidade ze

ro, terão como quanta os átomos de Hélio.

O primeiro termo de H_a^0 é a energia cinética, e o segundo, a energia de interação, que corresponde ao acoplamento do tipo dois corpos produzido pelo potencial $\lambda\delta(\vec{x})$.

Como pretendemos estudar estados que têm a densidade do Hélio líquido ρ , então, sob o aspecto computacional, é conveniente subtrair de H_a^0 um termo do tipo $\lambda\rho\varphi^*\varphi$, definindo a Hamiltoniana auxiliar

$$H = \int d\vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \nabla \varphi^* \nabla \varphi - \lambda\rho\varphi^*\varphi + \frac{\lambda}{2} (\varphi^*\varphi)^2 \right\} \quad (2)$$

Tanto H_a^0 quanto H descrevem a mesma física. No entanto é mais prático trabalhar com H , pois, ao nível clássico, seus estados de menor energia já são tais que $\varphi^*\varphi = \rho$; ao contrário do que acontecia com H_a^0 , cuja configuração clássica de menor energia era $\varphi = 0$.

O vácuo clássico da Hamiltoniana H , é o condensado uniforme da teoria de Bogoliubov¹², que na descrição semi-clássica do sistema é representado por qualquer campo clássico da forma²²

$$\Omega_{\mathfrak{z}} = \sqrt{\rho} e^{i\mathfrak{z}} \quad (3)$$

\mathfrak{z} é um número real do intervalo $(0, 2\pi)$; e para cada \mathfrak{z} haverá um vácuo da teoria clássica. Essa degenerescência contínua do vácuo clássico é que permite que o sistema possa ter sólitons em movimento. Os sólitons vão formar as interfaces entre setores de fases \mathfrak{z} diferentes.

A equação de movimento clássica associada à Hamilto-

niana H é a Equação de Gross-Pitaevskii¹⁸:

$$i \partial_t \varphi_c = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi_c - \lambda \rho \varphi_c + \lambda \varphi_c^* \varphi_c^2 \quad (4)$$

da qual o condensado uniforme Ω_0 é evidentemente a solução não trivial mais simples.

Para reproduzir o espectro obtido por Bogoliubov¹² no caso do condensado uniforme, utilizando o método semi-clássico, soma-se a Ω_0 um pequeno campo de flutuação infinitesimal $e^{i\theta} \eta$, definindo²²

$$\varphi = \Omega_0 + e^{i\theta} \eta \quad (5)$$

Em seguida, substitui-se φ na equação de movimento clássica, retendo apenas os termos de primeira ordem na flutuação η :

$$i \partial_t \eta = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \eta + \lambda \rho (\eta^* + \eta) \quad (6)$$

A quantização do campo η pode ser feita quer pelo método canônico¹², quer pelo método semi-clássico, que utiliza uma extensão da Regra de Bohr-Sommerfeld para a teoria de campos²². Resulta daí um espectro de quasi-partículas com a seguinte relação de dispersão:

$$E(p) = cp \sqrt{1 + \left(\frac{p}{2mc}\right)^2} \quad (7)$$

sendo

$$c = \sqrt{\frac{\lambda \rho}{m}} \quad (8)$$

As quasi-partículas são portanto excitações do condensado.

Na região dos momentos pequenos, a Eq. (7) tem a forma típica da relação de dispersão dos fônons:

$$E(p) \approx cp \quad (9)$$

onde identificamos c como a velocidade do som no sistema, quando o mesmo está no zero absoluto.

Como o valor da constante de acoplamento λ não é conhecido diretamente, nós utilizamos o valor de c (247 m/seg) sempre que quisermos calcular qualquer quantidade dependente de λ . Por exemplo:

$$\lambda \rho = mc^2 \approx 29.6^\circ K \quad (10)$$

$$\left(\frac{m\lambda}{\rho}\right)^{3/2} = \frac{(mc)^3}{\rho} \approx 186 \quad (11)$$

etc..

Quando o momento é grande, a Eq. (7) assume a forma da relação de dispersão da partícula:

$$E(p) = \lambda \rho + \frac{p^2}{2m} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \quad (12)$$

Aqui o termo $\lambda \rho$ representa a energia de interação da quasi-partícula com o meio condensado, e $\frac{p^2}{2m}$ sua energia cinética.

A título de completeza apresentamos aqui a carga média transportada por uma quasi-partícula de momento \vec{p} que se move num condensado uniforme²⁹:

$$q(\vec{p}) = \frac{m^2 c^2 + \frac{p^2}{2}}{p \sqrt{m^2 c^2 + \frac{p^2}{4}}} \quad (13)$$

Esta equação foi utilizada na Ref. (29) juntamente com a aproximação de que as quasi-partículas são puntiformes, para determinar as funções de estrutura de um líquido cheio de sólitons, as quais resultaram muito semelhantes às funções de estrutura do Hélio líquido.

Discussões mais detalhadas sobre os fundamentos da teoria de muitos corpos, que se aplica ao caso do Hélio líquido, podem ser encontradas nas Refs. (22), e também nas Refs. (3), (13)-(15).

III. O SÓLITON

As paredes de Bloch que podem se movimentar no fluido, e que constituem o ingrediente fundamental desta teoria do Hélio líquido, são descritas por soluções da Eq. (4) com a seguinte forma²²:

$$W_V(x,t) = \sqrt{\rho} \left\{ V - i \gamma \operatorname{tgh} \left[\gamma mc(x - cVt) \right] \right\} \quad (14)$$

Nesta equação, x é uma particular coordenada, correspondente à direção do movimento da parede, V é um número real no intervalo $(-1, +1)$, e γ , dada por

$$\gamma = \sqrt{1 - V^2} \quad (15)$$

é um índice que caracteriza o sóliton. Temos aí portanto uma fa

mília contínua de sólitons.

Sendo uma fase δ definida por

$$\delta = \arccos \begin{cases} \operatorname{sen} \gamma \\ \cos V \end{cases} \quad (16)$$

então ocorre que assintoticamente, i.e., a grandes distâncias do centro do sóliton, a solução $W_V(x,t)$ tende a condensados do tipo uniforme, mas com fases diferentes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W_V(x,t) = \sqrt{\rho} e^{-i\delta} = \Omega_{-\delta} \quad (17a)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} W_V(x,t) = \sqrt{\rho} e^{i\delta} = \Omega_{+\delta} \quad (17b)$$

É isso que faz com que o sóliton seja como uma parede de Bloch, pois ele é a interface entre dois domínios de fase, entre os quais a defasagem é 2δ ²².

No caso de termos um único sóliton no sistema, e se o sistema for infinito, essa defasagem é um sinal topológico, uma marca indestrutível, que inclusive garante a estabilidade do sóliton²². Essa defasagem representa aquele deslizamento de fase proposto por Anderson²⁰.

Se agora analisarmos a densidade de matéria dada pelo quadrado da função $W_V(x,t)$:

$$|W_V(x,t)|^2 = \rho \left\{ 1 - \frac{\gamma^2}{\cosh^2[\gamma mc(x - cVt)]} \right\} \quad (18)$$

vemos que o sóliton corresponde também a uma rarefação no conden

sado, pois a densidade cai quando nos aproximamos da parede, e depois torna a subir do outro lado, para assintoticamente tender ao valor da densidade do condensado uniforme ρ .

À função que descreve essa variação de densidade,

$$Z(x,t) = \frac{\gamma^2 \rho}{\cosh^2[\gamma mc(x-cVt)]} \quad (19)$$

nós denominamos de "buraco do sóliton".

A função densidade é dada portanto pela diferença entre a densidade assintótica do condensado e a função "buraco do sóliton"

$$|W_V(x,t)|^2 = \rho - Z(x,t) \quad (20)$$

Pela substituição de $W_V(x,t)$ na Eq. (2) nós obtemos a energia do sóliton clássico por unidade de área²²:

$$\sigma(\gamma) = \frac{4}{3} c \rho \gamma^3, \quad (21)$$

que seria o valor clássico da tensão superficial, que foi estimada como alguma coisa no intervalo $0 < \sigma \leq 0.5^\circ \text{K}/\text{Å}^2$.

Podemos também calcular o momento que o sóliton carrega por unidade de área²²:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{i}{A} \int d\vec{x} W^* \vec{\nabla} W = \\ &= -2\rho V \sqrt{1-V^2} \end{aligned} \quad (22)$$

onde A é a área total do sóliton. O momento é oposto à veloci-

dade, justamente porque essa parede de Bloch é uma onda de rarefação, e a matéria flui em sentido contrário ao do movimento do sóliton.

À temperatura finita, nossa teoria vai descrever configurações de muitos sólitons. Devemos então imaginar que, a cada instante, o condensado do líquido é todo subdividido em domínios de fase, por sólitons de um certo tipo γ . Como os sólitons se movimentam, a configuração de fundo do sistema vai assim se alterando de instante a instante, mas mantendo sempre a área total de sólitons constante.

Há então uma grandeza importante, para definir com propriedade as possíveis configurações de fundo de cada estado: é o que denominamos "número de sólitons", e representamos pela letra \underline{a} ²⁹. Sendo A a área total dos sólitons contidos no volume Vol , então o "número de sólitons" é definido pela relação

$$A = \underline{a} \text{ Vol} \quad (23)$$

A dimensão de \underline{a} é portanto o inverso de comprimento.

Para ilustrar outro significado desse número, consideremos uma configuração de sólitons paralelos aos três eixos de coordenadas, e em que a distância média entre duas interfaces consecutivas é \underline{d} . Nesse caso, \underline{a} será dado por $1/3\underline{d}$. Ou seja, \underline{a} é o inverso do comprimento de correlação instantâneo, que representaria o tamanho típico de um domínio.

Esse par de números \underline{a} e γ definem então o que denominamos configuração (\underline{a}, γ) .

Como veremos ao resolver a mecânica estatística dos sólitons, para os estados de equilíbrio tanto \underline{a} como γ variam com a temperatura.

A validade da descrição do sistema através de pares independentes e bem definidas depende, é claro, do valor de a . Pois se a for muito grande, cada sóliton estará tão próximo de seus vizinhos, que as deformações do campo clássico daí resultantes acarretarão perturbações que não foram consideradas em nossos cálculos.

Considerando então: (1) a forma assintótica da função $\text{th} \gamma m c x$, que quando x é grande se comporta como

$$\sim 1 - 2e^{-2\gamma m c x} ;$$

e (2) que a distância média entre dois sólitons vizinhos (excluídas evidentemente as intersecções de interfaces) é dada aproximadamente por $1/a$; nós concluímos que a validade da desigualdade

$$e^{-2 \frac{\gamma m c}{a}} \ll 1 \quad (24)$$

já garantiria por si que, em média, os sólitons são suficientemente separados, para que possamos descartar as perturbações acima mencionadas.

Adiantamos aqui, que as funções $a(T)$ calculadas anteriormente neste trabalho (vide seção IX) satisfazem a desigualdade (24), em toda região de temperatura explorada, $0 < T \leq 2.5^\circ K$. Portanto, podemos considerar que o "número de sólitons" a é muito pequeno. a é inclusive muito menor que $\gamma m c$.

Suponhamos agora que $\varphi_c(\vec{x}, t)$ seja um campo clássico que descreve o condensado cheio de sólitons. Para deduzir a equação de movimento das quasi-partículas em torno desse campo de

fundo, procedemos como na dedução da Eq. (6), somando a $\varphi_c(\vec{x}, t)$ um campo de flutuação η , e, após substituição na Eq. (4), reten- do apenas os termos de primeira potência em η . Obtemos assim a seguinte equação para o campo η ²²:

$$i \partial_t \eta = - \frac{1}{2m} \nabla^2 \eta - \lambda(\rho - 2\varphi_c^* \varphi_c) \eta + \lambda \varphi_c^2 \eta^* \quad (25)$$

E, no caso de o sistema ter um único sóliton, tal equação se reduz a esta outra²²:

$$i \partial_t \eta = - \frac{1}{2m} \nabla^2 \eta + [\lambda \rho - 2\lambda Z(x, t)] \eta + [\lambda \rho(1-2\gamma^2) + \lambda Z(x, t) - 2iV\gamma\lambda\rho \text{th} \gamma\xi] \eta^* \quad (26)$$

sendo que:

$$\xi = mc(x - cVt) \quad (27)$$

A Eq. (26) tem dois tipos de soluções²²: estados do contínuo do tipo fônon; e estados ligados, que correspondem a quasi-partículas presas no sóliton, relativamente à direção de movimento do mesmo, mas que ainda são livres para se movimentar ao longo da interface.

Na Ref. (22), uma análise variacional dos estados ligados, mostrou que os mesmos são semelhantes aos rótons.

É interessante notar que se o campo η descrevesse partículas distinguíveis dos constituintes do condensado, então não haveria aquele fator 2 no potencial atrativo devido ao "buraco do sóliton" na Eq. (26), mas apenas um potencial da forma

- $\lambda Z(x,t)$, proveniente do acoplamento densidade-densidade. Tanto aquele fator 2, como o termo η^* inteiro, são efeitos decorrentes da indistinguibilidade das partículas.

IV. O FLUIDO NORMAL DO GÁS DE BOSE-EINSTEIN

A maior contribuição para a energia livre do sistema virá das quasi-partículas que não estão correlacionadas nem ligadas a nenhum sóliton. Elas estão em agitação térmica e, ocupando os estados do contínuo, formam um gás em repouso com relação ao laboratório, que é o fluido normal do gás de Bose-Einstein^{1,4,5}.

A densidade do condensado será então a diferença entre a densidade total e a densidade desse fluido normal.

Como o campo do condensado $\varphi_c(\vec{x},t)$ descreve todos os sólitons do sistema, então em cada ponto do espaço, por exemplo $\vec{x} = 0$, o módulo do campo ao quadrado, $\varphi^*(0,t)\varphi(0,t)$, vai flutuar com grande frequência em torno de um valor médio

$$\langle \varphi_c^*(0,t) \varphi_c(0,t) \rangle_{\text{tempo}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^*(0,t) \varphi(0,t) dt \quad (28)$$

Isto porque de tempo em tempo aquele ponto é agitado pela passagem de um sóliton. Os sólitons que ali incidem podem vir de qualquer direção, e além disso, o tempo transcorrido entre as passagens de dois sólitons consecutivos não é constante. Assim, podemos concluir que, em cada ponto, o valor de $\varphi_c^* \varphi_c$ será dado pelo valor médio da fórmula (28), mais um ruído.

Se agora somarmos, ao campo do condensado, uma pequena flutuação $\eta(\vec{x},t)$, a densidade local será alterada da seguinte

maneira

$$\rho(\vec{x},t) \longrightarrow \rho(\vec{x},t) + \delta\rho(\vec{x},t) \quad (29)$$

onde

$$\rho(\vec{x},t) = \varphi_c^*(\vec{x},t) \varphi_c(\vec{x},t) \quad (30)$$

enquanto que

$$\delta\rho(\vec{x},t) = \eta^*(\vec{x},t) \eta(\vec{x},t) + \varphi_c^*(\vec{x},t) \eta(\vec{x},t) + \varphi_c(\vec{x},t) \eta^*(\vec{x},t). \quad (31)$$

Mas suponhamos que, após a quantização de $\eta(\vec{x},t)$, nós venhamos a tratar apenas de quasi-partículas de baixíssima energia. Nesse caso, sua frequência característica será sempre muito pequena, quando comparada à frequência de variação local do campo do condensado $\varphi_c(\vec{x},t)$; que é devida à passagem intermitente de sólitons pelo ponto \vec{x} . De forma que aí, nós podemos fazer a aproximação de desprezar os termos $\varphi_c^* \eta$ e $\varphi_c \eta^*$ da equação acima, e aproximar $\delta\rho(\vec{x},t)$ por

$$\delta\rho(\vec{x},t) = \eta^*(\vec{x},t) \eta(\vec{x},t) \quad (32)$$

ou

$$(\varphi_c^* + \eta^*)(\varphi_c + \eta) = \varphi_c^* \varphi_c + \eta^* \eta \quad (33)$$

A grande maioria das quasi-partículas do fluido normal tem energia pequena, e portanto frequência baixa, e assim nós estamos supondo que elas se desacoplam daquelas rápidas alterações de fase local.

O mesmo argumento nos leva a aproximar o produto de

três campos $\varphi^* \varphi^2$ por:

$$\begin{aligned} (\varphi_c^* + \eta^*)(\varphi_c + \eta)^2 &= \varphi_c^* \varphi_c^2 + 2 \varphi_c^* \varphi_c \eta + \varphi_c^2 \eta + O(\eta^2) \\ &\approx \varphi_c^* \varphi_c^2 + 2 \varphi_c^* \varphi_c \eta + O(\eta^2) \end{aligned} \quad (34)$$

onde desprezamos o termo $\varphi_c^2 \eta^*$, por causa das oscilações de fase de φ_c^2 .

Colocando então $\varphi_c + \eta$ no lugar de φ_c , na equação de movimento (4), e considerando as aproximações aqui discutidas, nós deduzimos a equação de movimento das excitações pertencentes ao fluido normal:

$$i \partial_t \eta = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \eta + \lambda(2 \varphi_c^* \varphi_c - \rho) \eta \quad (35)$$

Outra vez, por causa da passagem dos sólitons, o termo $\varphi_c^* \varphi_c$ vai oscilar muito rápido em cada ponto, em torno do valor médio da Eq. (28). Logo, as quasi-partículas de baixas energias não vão se acoplar a essa oscilação. Além disso, essas mesmas excitações, por terem comprimentos de onda muito grandes, poderão "sentir" a presença de vários sólitons simultaneamente. De forma que será lícito, e natural, utilizarmos a aproximação de campo médio para descrever seu movimento.

Então, a dinâmica das quasi-partículas do fluido normal será determinada, em boa aproximação, pela equação:

$$i \partial_t \eta = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \eta + \bar{V}_1 \eta \quad (36)$$

onde o campo médio \bar{V}_1 é dado por

$$\bar{V}_1 = \lambda(2 \langle \varphi_c^* \varphi_c \rangle - \rho) \quad (37)$$

Segundo o critério de London⁽¹⁾, a condição para termos a fase condensada é que o potencial químico μ se iguale a \bar{V}_1 , de sorte que o número médio de ocupação tenha uma singularidade no "threshold" da energia, que é característica daquela fase. Logo, devemos ter

$$\mu = \bar{V}_1 = \lambda(2 \langle \varphi_c^* \varphi_c \rangle - \rho) \quad (38)$$

ou

$$\mu = \lambda \rho - \frac{4\gamma a}{mc} \lambda \rho \quad (39)$$

As fórmulas (37), (38) e (39) ainda não levam em conta a existência da nuvem térmica, nem a renormalização da densidade do condensado produzida pelo fluido normal. As expressões do campo médio e do potencial químico, corrigidas de maneira a considerar esses efeitos, são apresentadas na seção VII (ver Eqs. (77) e (79)).

Logo, se quantizarmos as excitações sob a ação do campo médio (37), o espectro do fluido normal será tal que:

$$E^{f.n.}(\vec{p}) - \mu = \frac{p^2}{2m} \quad (40)$$

A mecânica estatística dessas partículas vai produzir um fluido normal igual ao de Bose-Einstein⁽¹⁾. A temperatura T , sua densidade é

$$\rho_n(T) = \left(\frac{mT}{3 \cdot 31} \right)^{3/2} = \rho \tau^{3/2} \quad (41)$$

onde ρ é a densidade total do sistema e τ é a temperatura reescalada

$$\tau = \frac{m T}{3.31 \rho^{2/3}} \quad (42)$$

O fluido normal é um fluido de excitações térmicas que renormaliza a densidade do sistema. Para obter a densidade do superfluido a uma dada temperatura, nós subtraímos $\rho_n(T)$ da densidade total, obtendo

$$\rho_c(T) = \rho - \rho_n(T) = \rho(1-\tau^{3/2}) \quad (43)$$

O nosso superfluido é um condensado cheio de sólitons que carregam consigo suas nuvens térmicas. Logo, a densidade do superfluido é um pouquinho diferente da densidade do condensado. No entanto, como o "número de sólitons" é pequeno, e como o fator de enchimento (ver seção V) é próximo de 1, nós aproximaremos a densidade do condensado à temperatura T pela mesma fórmula da densidade do superfluido (Eq. (43)).

Então é $\rho_c(T)$ que vai substituir o parâmetro ρ nas fórmulas (2), (4), (14), (25), (38), etc..

Por razões práticas definimos a velocidade reescalada

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{\lambda \rho_c(T)}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_c(T)}{\rho_c(0)}} c = \sqrt{1-\tau^{3/2}} c \quad (44)$$

V. A NUVEM TÉRMICA - ASPECTOS MECÂNICOS

Se observarmos um determinado sóliton no seu referencial de repouso, veremos uma região plana onde a densidade é rarefeita, um "buraco" no fluido. Contudo, no espectro das excitações do fluido há uma família de estados ligados ao sóliton, que pode ser populada termicamente.

Isso vai formar o que denominamos nuvem térmica, e representamos preliminarmente pela densidade $\rho_{n.t.}(\vec{x}, t)$.

Nesta seção não nos ocuparemos ainda do mecanismo de formação da nuvem térmica, nem do cálculo da energia livre de suas quasi-partículas. $\rho_{n.t.}(\vec{x}, t)$ é por ora uma densidade clássica e estudaremos sua interação com o sóliton, assim como sua auto-interação.

A energia cinética da nuvem também não vai ser computada aqui. Ela será contada apenas quando deduzirmos a energia livre de suas quasi-partículas.

Ao nível clássico supomos que os átomos constituintes da nuvem térmica são distinguíveis dos do condensado.

Para descrever um sóliton isolado com sua nuvem térmica, nós introduzimos o acoplamento sóliton/nuvem térmica, mais a auto-interação da nuvem na energia clássica do sistema

$$E_c[\varphi_c(\vec{x}, t); \rho_{n.t.}(\vec{x}, t)] = \int d\vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \nabla \varphi_c^* \nabla \varphi_c - \lambda \rho_c \varphi_c^* \varphi_c + \frac{\lambda}{2} (\varphi_c^* \varphi_c)^2 + \lambda \varphi_c^* \varphi_c \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) + \frac{\lambda}{2} \rho_{n.t.}^2(\vec{x}, t) - \lambda \rho_c \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) \right\} \quad (45)$$

De imediato vemos que a nuvem térmica tem a tendência de encher o "buraco do sólito"; pois, se $\varphi_c(\vec{x}, t)$ for o campo clássico de um sólito,

$$\sqrt{\rho_c} \left\{ v - i \gamma \operatorname{tgh} [\gamma m \bar{c} (x - \bar{c} v t)] \right\} \quad (46)$$

então uma variação local em $\rho_{n.t.}(x, t)$

$$\frac{\delta E_c[\varphi_c(\vec{x}, t); \rho_{n.t.}(\vec{x}, t)]}{\delta \rho_{n.t.}(\vec{y}, t)} = \lambda \left[\rho_{n.t.}^0(\vec{y}, t) + \varphi_c^*(\vec{y}, t) \varphi_c(\vec{y}, t) - \rho_c \right] = 0 \quad (47)$$

mostra que o mínimo da energia do sistema é atingido quando a densidade da nuvem térmica se igualar à função "buraco do sólito":

$$\rho_{n.t.}^0(\vec{x}, t) = \rho_c - \varphi_c^* \varphi_c = z(\vec{x}, t) \quad (48)$$

(Formalmente, é a presença do último termo da Eq. (45), $-\lambda \rho_c \rho_{n.t.}(\vec{x}, t)$, que garante que a densidade da nuvem térmica vá a zero no infinito).

Logo, se a questão fosse minimizar a energia do sistema, a nuvem térmica encheria completamente o sólito. Contudo, é a energia livre que deve ser minimizada. Para obter a energia livre total é preciso ainda acrescentar à Eq. (45) a energia livre das quasi-partículas ligadas ao sólito, e ainda multiplicar o resultado pelo número de sólitons. E, é claro que, depois de tudo isso, a Eq. (48) perderá a validade.

No entanto, considerando que a energia típica do sistema é $\lambda \rho \approx 30^\circ \text{K}$, é razoável supor que, no intervalo $0 < T \lesssim 3^\circ \text{K}$,

a energia livre das quasi-partículas presas no sólito seja muito pequena, e que a Eq. (48) já seja uma boa indicação, sobre como se comportará a nuvem térmica, no final das contas.

Fazemos então a hipótese que a nuvem térmica é proporcional ao "buraco do sólito",

$$\rho_{n.t.}(\vec{x}, t) = b z(\vec{x}, t) = b(\rho_c - \varphi_c^* \varphi_c) \quad (49)$$

O fator de proporcionalidade b é denominado "fator de enchimento".

Tal hipótese será confirmada na seção seguinte, de maneira auto-consistente.

Agora nós acrescentamos à equação de movimento do sólito, o termo correspondente à sua interação com a nuvem térmica, $\lambda \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) \varphi_c$, para determinar a alteração provocada na forma do campo clássico, pela reação da nuvem:

$$i \partial_t \varphi_c = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi_c - \lambda \rho_c \varphi_c + \lambda \varphi_c^* \varphi_c^2 + \lambda \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) \varphi_c \quad (50)$$

Se a densidade da nuvem térmica for dada pelo ansatz da Eq. (49), obtemos então uma equação efetiva (renormalizada) para o movimento do campo clássico:

$$i \partial_t \varphi_c = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi_c - \bar{\lambda} \rho_c \varphi_c + \bar{\lambda} \varphi_c^* \varphi_c^2 \quad (51)$$

em que a constante de acoplamento efetiva é

$$\bar{\lambda} = \lambda(1-b) = \lambda X \quad (52)$$

sendo X o que denominamos índice de profundidade relativa

$$\chi = 1 - b \quad (53)$$

E o sólito renormalizado que resolve a Eq. (51) vai ser:

$$w_V^R(\vec{x}, t) = \sqrt{\rho_c} \left\{ V - i \gamma \operatorname{tgh}[\gamma m \bar{c}(x - \bar{c}Vt)] \right\} \quad (54)$$

onde \bar{c} é a velocidade reescalada

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{\lambda \rho_c}{m}} = \sqrt{\chi} \bar{c} = \sqrt{\chi} \sqrt{1 - \tau^{3/2}} c \quad (55)$$

A fórmula (54) mostra portanto que o efeito da nuvem térmica é fazer com que o sólito fique mais largo e mais lento.

Vê-se também que a Eq. (51) só terá solução tipo sólito se $b < 1$, ou $0 < \chi < 1$.

Antecipamos que, quando da minimização da energia livre do sistema, o cálculo auto-consistente do fator de enchimento mostrará que b é muito próximo de 1 ($b \lesssim 1$), e, em consequência, o índice de profundidade relativa é muito menor que 1.

Dado que o cálculo puramente mecânico do início desta seção (em que minimizávamos só a energia de interação do sistema sólito/nuvem térmica) resultava em $b = 1$, nós interpretamos o resultado final, $b \lesssim 1$, como uma indicação de que este sistema é em grande parte determinado por seus aspectos mecânicos.

E sendo $\chi \ll 1$, em algumas passagens deste artigo, nós desprezaremos χ , quando em confronto com a unidade.

VI. EXCITAÇÕES DA NUVEM TÉRMICA

As excitações que formam a nuvem térmica estão fortemente correlacionadas entre si. Nesta seção, nosso propósito é analisar a equação dinâmica dessas excitações ligadas, para a seguir compará-la à dinâmica de campo médio.

Passemos ao referencial em que o sólito está em repouso: o referencial $\bar{c}V$. A parede de domínio em consideração, sendo um plano muito grande, faz interseção com um número enorme de outros sólitons que se movimentam no sistema. Portanto, devido à passagem ligeira e intermitente dos demais sólitons, cada ponto nas proximidades dessa parede também estará sujeito àquela alternância rápida de fase que discutimos na seção IV. Logo, aqui também, as quasi-partículas da nuvem térmica não vão se acoplar às oscilações de fase local de alta frequência.

Para tratar a dinâmica das quasi-partículas ligadas nós somamos ao campo clássico uma flutuação, definindo o campo $\varphi_c + \eta$, que é a seguir introduzido na energia da fórmula (45), no lugar de φ_c .

Depois da quantização de η , a auto-consistência do sistema será garantida pela imposição da igualdade entre a densidade da nuvem térmica e a média térmica da densidade das flutuações:

$$\rho_{n.t.}(\vec{x}, t) = \langle n^* \eta \rangle_{\text{térmica}} \quad (56)$$

Então η passa a ser o campo composto apenas pelas excitações ligadas - não sendo portanto um campo local. Tudo o que falta para fazer de η um campo local já está contido no flui

do normal: são os modos do contínuo que já foram integrados e produziram aquela renormalização de densidade, de ρ para ρ_C .

A Hamiltoniana das excitações microscópicas será deduzida em concordância com as prescrições dos métodos semi-clássicos de quantização de campo. Assim nós expandimos a energia (45) até termos quadráticos nas flutuações, obtendo:

$$\int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \varphi_C^* \vec{\nabla} \varphi_C - \lambda \rho_C \varphi_C^* \varphi_C + \frac{\lambda}{2} (\varphi_C^* \varphi_C)^2 + \lambda (\varphi_C^* \varphi_C - \rho_C) \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) \right\} + H^0\{\eta\} + O(\eta^3) + \text{termos com oscilação de fase} \quad (57)$$

onde $H^0\{\eta\}$ é

$$H^0\{\eta\} = \int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \eta^* \vec{\nabla} \eta + \lambda \left[2\varphi_C^* \varphi_C - \rho_C + \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) \right] \eta^* \eta \right\} \quad (58)$$

Termos com oscilação de fase, do tipo $(\varphi_C^*)^2 \eta^2$, não serão considerados, por causa das razões já apresentadas; enquanto que termos de primeira potência em η inexistem, pois φ_C obedece à equação de movimento (50).

A expressão da Eq. (57) é para que possamos obter a dinâmica linear das quasi-partículas da nuvem. Ali, $\rho_{n.t.}(\vec{x}, t)$ entra ainda como uma fonte clássica externa - a mesma fonte que já foi utilizada nas equações clássicas (50) e (51), e que alterou a forma do sóliton. O termo de auto-interação da nuvem térmica, que formalmente seria de quarta ordem nas flutuações, não aparece na Hamiltoniana expandida (57), porque ele ainda não teve nenhum papel (o termo $\frac{\lambda}{2} \rho_{n.t.}^2(\vec{x}, t)$ não contribuiu em nada para a formação do sóliton clássico).

O passo seguinte será quantizar η , e trabalhar a energia interna associada à Hamiltoniana expandida (57), para que possamos identificar a Hamiltoniana das quasi-partículas.

Quando tivermos a energia interna das flutuações, devemos considerar a relação de auto-consistência (56), e ter o cuidado de notar que a interação da nuvem térmica com o campo clássico e com a fonte ρ_C já foi contada na Eq. (57).

Se agora quantizarmos o campo η , definindo

$$\eta = \sum_{\substack{i \\ \text{modos} \\ \text{ligados}}} a_i f_i(\vec{x}) \quad (59)$$

e

$$\eta^* = \sum_{\substack{i \\ \text{modos} \\ \text{ligados}}} a_i^* f_i^*(\vec{x}) \quad (60)$$

(onde a_i^* é o operador de criação do modo ligado $f_i(\vec{x})$), nós podemos utilizar a média térmica da Hamiltoniana (57) para explicitar a Hamiltoniana das quasi-partículas ligadas. Essa média térmica terá uma parte clássica, que só depende de φ_C e da nuvem térmica:

$$\int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \varphi_C^* \vec{\nabla} \varphi_C - \lambda \rho_C \varphi_C^* \varphi_C + \frac{\lambda}{2} (\varphi_C^* \varphi_C)^2 + \lambda (\varphi_C^* \varphi_C - \rho_C) \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) \right\} \quad (61)$$

e uma parte quântica, onde vão entrar as flutuações do condensado

$$\epsilon_{\text{interna}}\{\eta\} = \langle H^0\{\eta\} \rangle_{\text{térmica}} - \text{contratermos} \quad (62)$$

A subtração de contratermos é necessária porque a interação da nuvem térmica com o campo clássico, e com a fonte externa ρ_c , já foi contada na parte clássica (61), e portanto tem que ser descontada de $\epsilon_{\text{interna}}\{\eta\}$ na forma

$$\int d^3\vec{x} \lambda \langle (\varphi_c^* \varphi_c - \rho_c) \eta^* \eta \rangle_{\text{térmica}} \quad (63)$$

(ver definição (56)) caso contrário essa mesma energia estaria sendo contada uma segunda vez, no cálculo da média térmica de $H^0\{\eta\}$.

A energia interna das quasi-partículas será então a média térmica do operador

$$H_1\{\eta\} = H^0\{\eta\} - \int d^3\vec{x} \lambda (\varphi_c^* \varphi_c - \rho_c) \eta^* \eta \quad (64)$$

com $H_0\{\eta\}$ dada pela Eq. (58),

$$H_1\{\eta\} = \int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \eta^* \vec{\nabla} \eta + \lambda \left[\varphi_c^* \varphi_c + \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) \right] \eta^* \eta \right\} \quad (65)$$

Esta é a Hamiltoniana que descreve o movimento das quasi-partículas pertencentes à nuvem térmica. No capítulo VIII, vamos utilizar seu espectro para obter a energia livre das quasi-partículas.

Para voltarmos da expressão clássica (61) para a energia clássica (45), temos que nela recolocar a auto-interação clássica da nuvem térmica $\frac{\lambda}{2} \rho_{n.t.}^2(\vec{x}, t)$. Este termo que corresponde à interação das quasi-partículas entre si, estaria associado à média térmica do produto de quatro campos de flutuação.

A equação de movimento associada à Hamiltoniana (65) é

$$i \partial_t \eta = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \eta + U(x) \eta \quad (66)$$

em que o potencial $U(x)$ é dado por

$$U(x) = \lambda \left[\varphi_c^* \varphi_c + \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) \right] \\ = \lambda \rho_c - \frac{\lambda \rho_c (1-b) \gamma^2}{\cosh^2 \gamma m \bar{c} (x - \bar{c} V t)} \quad (67)$$

ou

$$U(x) = \lambda \rho_c - \frac{m \bar{c}^2 \gamma^2}{\cosh^2 \gamma m \bar{c} (x - \bar{c} V t)} \quad (68)$$

Por acompanhar o movimento do sóliton, o potencial vai mudando de posição conforme o tempo passa. Assim, a rigor, a quasi-partículas ligadas ao sóliton, que são modos normais da equação acima, não são auto-estados da energia. Podemos, no entanto, calcular suas respectivas energias médias, e desta maneira desenvolvemos a mecânica estatística do sóliton com valores médios da energia.

Aqui poderíamos nos perguntar por que ainda existe ação atrativa do sóliton sobre a quasi-partícula da nuvem térmica, como mostra o potencial acima, se supostamente a interação entre o sóliton e a nuvem já foi levada em conta na energia clássica. Ocorre que, na construção da energia clássica, nós procedíamos como se os átomos constituintes da nuvem térmica fossem distinguíveis dos do condensado (notar que o termo $\lambda \varphi_c^* \varphi_c \rho_{n.t.}(\vec{x}, t)$ da Eq. (45) é uma interação densidade-densidade). Logo, o potencial atrativo remanescente é um efeito da indistinguibilidade das partículas.

Mesmo assim, como veremos, a despeito da interação $U(x) = \lambda \rho_c$, o que restará para a quasi-partícula no final das contas será somente sua energia cinética.

Da quantização da Hamiltoniana (67) obtém-se o espectro das quasi-partículas ligadas, no referencial $\bar{c}V$:

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\vec{k}^2}{2m} + \lambda \rho_c + \epsilon_0 \quad (69)$$

onde \vec{k} é o momento transversal e ϵ_0 é o menor auto-valor (a energia do estado ligado) da equação

$$\epsilon \psi(x) = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) - \frac{m\bar{c}^2 \gamma^2}{\cosh^2 \gamma m \bar{c} x} \psi(x), \quad (70)$$

isto é:

$$\epsilon_0 = -\frac{1}{2} m \bar{c}^2 \gamma^2. \quad (71)$$

As funções de onda associadas respectivamente ao estado ϵ_0 , e aos estados de momento \vec{k} serão

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\gamma m \bar{c}}{2}} \frac{1}{\cosh \gamma m \bar{c} x} \quad (72)$$

e

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{z}}}{\sqrt{A}} \psi_0(x) \quad (73)$$

onde A é a área do sóliton, e \vec{z} é o vetor formado com as variáveis transversais.

Observando a forma das funções de onda (72) e (73),

nós já percebemos que a densidade da nuvem térmica, que vai ser proporcional a $|\psi_{\vec{k}}(\vec{x})|^2$, acabará sendo também proporcional ao "buraco do sóliton", em consistência completa com o ansatz (49).

No laboratório, os estados acima serão representados pelas funções

$$\psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{A}} \exp\left[i(\vec{k} \cdot \vec{z} + m \bar{c} V x)\right] \psi_0(x - \bar{c} V t) \quad (74)$$

e suas energias médias serão dadas por

$$\epsilon_{\text{Lab}}(\vec{k}) = \frac{\vec{k}^2}{2m} + \frac{1}{2} m (\bar{c} V)^2 + \lambda \rho_c + \epsilon_0. \quad (75)$$

É claro que são estas energias, do referencial de laboratório, que utilizaremos para construir a mecânica estatística da nuvem térmica.

VII. A COMPATIBILIDADE DAS DUAS DINÂMICAS

O sistema tem, então, dois tipos de excitações que, por causa da nossa aproximação de campo médio para descrever o fluido normal, seguem dinâmicas diferentes:

(1) As partículas do fluido normal não estão correlacionadas com o movimento de nenhum sóliton, e sentem um campo médio (ver Eq. (37)):

$$\tilde{v}_1 = \lambda \left\{ 2 \langle \varphi_c^* \varphi_c \rangle + \langle \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) \rangle - \rho_c \right\} \quad (76)$$

$$= \lambda \rho_c + \lambda \left\{ -\frac{4\gamma}{m\bar{c}} \rho_c + \frac{b 2\gamma}{m\bar{c}} \rho_c \right\} a$$

ou, considerando que o fator de enchimento é próximo da unidade,

$$\bar{V}_1 = \lambda \rho_c - \frac{2\gamma a}{m\bar{c}} \lambda \rho_c \quad (77)$$

Ao contrário de \bar{V}_1 da Eq. (37), o campo médio \bar{V}_1 já incorpora a contribuição da nuvem térmica. Além disso, nas Eqs. (76) e (77) a densidade do condensado ρ_c já está renormalizada pelo fluido normal, enquanto que ρ da Eq. (37) ainda não estava.

Na aproximação de campo médio, as quasi-partículas do fluido normal são "partículas livres" com energias tais que

$$E^{\text{f.n.}}(\vec{p}) - \bar{\mu} = \frac{p^2}{2m} \quad (78)$$

com o potencial químico $\bar{\mu}$ dado por

$$\bar{\mu} = \bar{V}_1 = \lambda \rho_c - \frac{2\gamma a}{m\bar{c}} \lambda \rho_c \quad (79)$$

Esta escolha do valor do potencial químico é consistente com o critério de London⁽¹⁾ de que ao estado de menor energia deve corresponder um número de ocupação divergente.

(2) As partículas da nuvem térmica de um dado sóliton, que estão totalmente correlacionadas entre si, obedecem a uma segunda dinâmica: são os estados ligados, tratados na seção anterior.

No entanto, uma análise do procedimento seguido, para definir e construir a nuvem térmica (especialmente tendo em vista o ansatz (49) e a Eq. (70)), mostra que a condição para que uma quasi-partícula participe da dinâmica da nuvem (submetida, portanto, à Hamiltoniana (67), e correlacionada com todas as demais quasi-partículas desse sistema) é que o quadrado do módulo de sua função de onda seja proporcional ao "buraco do sóliton" (ou pelo menos aproximadamente proporcional).

Contudo, além dos modos normais da Hamiltoniana (67), há outros estados (não estacionários!) que satisfazem a essa condição de proporcionalidade temporariamente.

Para exemplificar, consideremos o pacote de onda instantâneo $f_0(\vec{x})$, definido no referencial de laboratório em $t=0$, cuja densidade de probabilidade $|f_0(\vec{x})|^2$ é proporcional ao "buraco do sóliton" nesse instante,

$$f(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{A}} \psi_0(x) \quad (80)$$

onde $\psi_0(x)$ é dada pela Eq. (72).

Para a Hamiltoniana (65), $f_0(\vec{x}, t)$ é, no instante $t=0$, o estado de menor energia média. No entanto ele não é um modo normal daquela Hamiltoniana. Trata-se de um estado de espalhamento que, sob a dinâmica da equação de movimento (66), evoluiria de maneira complicada (a quasi-partícula descrita por $f_0(\vec{x}, t)$ se afastaria rapidamente do sóliton).

Na dinâmica de campo médio do fluido normal, a energia média do pacote instantâneo é

$$E_1\{f_0\} = \bar{V}_1 + \frac{1}{2m} \int d^3x \left[\bar{\nabla} f_0(\vec{x}, t=0) \right]^2 \quad (81)$$

ou

$$E_1\{f_0\} = \bar{V}_1 + \frac{1}{6} m\bar{c}^2 \gamma^2 \quad (82)$$

que corresponde à soma do campo médio com a energia cinética de $f_0(\vec{x}, t)$:

$$E_1\{f_0\} = \lambda \rho_c - \frac{2\gamma a}{m\bar{c}} \lambda \rho_c + \frac{1}{6} m\bar{c}^2 \gamma^2 \quad (83)$$

Por outro lado, na dinâmica da nuvem térmica, a energia média do pacote instantâneo, no instante $t=0$, será dada por:

$$E_2\{f_0; t=0\} = \int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \left[\vec{\nabla} f_0(\vec{x}, t=0) \right]^2 + U(x) \left[f_0(\vec{x}, t=0) \right]^2 \right\} \quad (84)$$

isto é

$$E_2\{f_0; t=0\} = \lambda \rho_c + \epsilon_0 \quad (85)$$

ou ainda

$$E_2\{f_0; t=0\} = \lambda \rho_c - \frac{1}{2} m\bar{c}^2 \gamma^2 \quad (86)$$

As quasi-partículas da nuvem são descritas pelos estados ligados da Hamiltoniana (65) (ver Eq. (74)):

$$\psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}} \exp \left[i(m\bar{c}Vx - \epsilon_{\text{Lab}}(k)t) \right] \psi_0(x - \bar{c}Vt) \quad (87)$$

Neste primeiro artigo, nosso critério para compatibilizar as duas dinâmicas será fazer com que o valor médio da energia do estado acima tenha o mesmo valor, tanto na dinâmica de campo médio, como na dinâmica da nuvem térmica. Isso equivale a di-

zer que as energias médias do pacote instantâneo das duas dinâmicas também são iguais:

$$E_1\{f_0\} = E_2\{f_0, t=0\} \quad (88)$$

Trata-se por enquanto (no contexto deste primeiro artigo) de um critério provisório para acertar as cotas de energia do problema. No entanto, no próximo artigo, nós justificaremos em detalhe o mecanismo que produz o nivelamento de cotas - na realidade ele ocorre para minimizar a energia livre do fluido normal.

Da Eq. (88) concluímos que

$$\begin{aligned} \lambda \rho_c - \frac{2\gamma a}{m\bar{c}} \lambda \rho_c + \frac{1}{6} m\bar{c}^2 \gamma^2 &= \\ &= \lambda \rho_c - \frac{1}{2} m\bar{c}^2 \gamma^2 \quad ; \quad (89) \end{aligned}$$

e esta equação estabelece uma relação entre o "número de sólitons" a , o número que determina o tipo de sólitons, γ , e o índice de profundidade χ :

$$\frac{a}{m\bar{c}} = \frac{1}{3} \sqrt{1 - \tau^{3/2}} \gamma \chi^{3/2} \quad (90)$$

Então as duas dinâmicas só serão compatíveis se o sistema produzir um número suficiente de sólitons de forma a satisfazer a equação acima.

Na discussão apresentada no artigo seguinte, nós primeiro ajustaremos o valor do potencial químico para zerar a ener-

gia do pacote instantâneo, e assim fazer com que ali condense um segundo campo clássico. Depois é a minimização da energia livre do fluido normal que vai garantir a validade das Eqs. (89) e (90).

Para esclarecer melhor porque o pacote instantâneo $f_0(\vec{x}, t)$ tem energia menor que os estados ligados $\psi_{\vec{k}=0}^{\text{Lab}}(\vec{x}, t)$, é interessante discorrer sobre duas situações de um sistema clássico bem simples, que mostram o que esses dois estados têm de semelhante e de diferente entre si. Considere um potencial atrativo de curto alcance, de profundidade máxima V_0 , que se move com velocidade v relativamente ao laboratório.

(i) No primeiro caso, ilustrado na fig. (2a), uma partícula clássica de massa m também se move com velocidade v , e está sentada no fundo do poço, ali permanecendo. No referencial de laboratório a energia da partícula é $-V_0 + \frac{1}{2}mv^2$, e a versão quântica desta situação seria o estado ligado $\psi_{\vec{k}=0}^{\text{Lab}}(\vec{x}, t)$.

(ii) O outro caso, o da fig. (2b), se refere apenas ao instante $t=0$. Ali a mesma partícula está no fundo do poço, só que agora com velocidade nula; e a sua energia em $t=0$ seria $-V_0$, que é menor que a do caso anterior! Mas é claro que, devido ao movimento do potencial, esta situação não perdura: a partícula sairá do fundo do poço, e sua energia aumentará. No problema quântico este segundo caso é representado pelo estado misto (não ligado) $f_0(\vec{x}, t)$.

A moral da história é que, quando potenciais atrati-

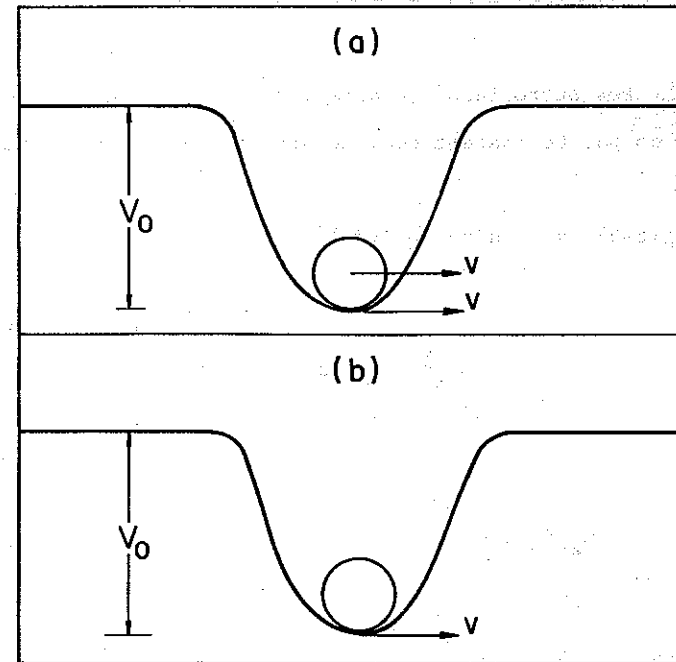


FIG. (2) - CONFIGURAÇÕES CLÁSSICAS ANÁLOGAS : (a) A PARTÍCULA SE MOVE JUNTO COM O POTENCIAL - SITUAÇÃO ANÁLOGA AO ESTADO LIGADO ψ_0 ; (b) A PARTÍCULA, NO INSTANTE $t=0$, ESTÁ EM REPOUSO COM RELAÇÃO AO LABORATÓRIO - SITUAÇÃO ANÁLOGA AO PACOTE INSTANTÂNEO f_0 .

vos se movimentam, estados de espalhamento podem ter energia menor que as dos estados ligados.

Outra consequência importante desse ajuste de cotas (o nivelamento entre a soma do campo médio com a energia cinética do pacote $f_0(\vec{x}, t)$, e a energia do estado ligado $\lambda \rho_c + \epsilon_0$) é que através das Eqs. (75), (79) e (86) nós podemos determinar, no referencial de laboratório, qual é a diferença entre a energia de uma quasi-partícula ligada $\epsilon_{\text{Lab}}(\vec{k})$ e o potencial químico $\bar{\mu}$ - diferença esta que é um dado essencial para construirmos a mecânica estatística da nuvem térmica:

$$\epsilon_{\text{Lab}}(\vec{k}) - \bar{\mu} = \frac{1}{2} m(\bar{c}V)^2 + \frac{1}{6} m(\bar{c}\gamma)^2 + \frac{\vec{k}^2}{2m} \quad (91)$$

que é justamente a energia cinética total do estado de quasi-partícula ligada $\psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}}(\vec{x}, t) \cdot \frac{1}{6} m(\bar{c}\gamma)^2$ é a energia cinética que a quasi-partícula já tem por ser um estado ligado - é a energia cinética de ponto zero. $\frac{1}{2} m(\bar{c}V)^2$ é a energia cinética que ela ganha como consequência do movimento do sóliton. E finalmente $\frac{\vec{k}^2}{2m}$ é a energia correspondente ao seu movimento transversal ao longo do plano do sóliton.

A energia clássica $E_c[\psi_c, \rho_{n.t.}(\vec{x}, t)]$ já continha a energia de auto-interação da nuvem térmica, além da de sua interação com o sóliton. Então, toda energia de interação (poten-

cial) que poderia pertencer a cada quasi-partícula ligada, que é uma constituinte da própria nuvem, já foi computada ao nível clássico; e lhe restou apenas e coerentemente, sua energia cinética.

Podemos assim reescrever a equação acima na forma seguinte:

$$\epsilon_{\text{Lab}}(\vec{k}) - \bar{\mu} = \Delta + \frac{\vec{k}^2}{2m}, \quad (92)$$

em que introduzimos o gap

$$\Delta = \frac{1}{2} m \bar{c}^2 (1 - \frac{2}{3} \gamma^2). \quad (93)$$

No artigo seguinte, representaremos a nuvem térmica, de maneira mais apropriada, através de um campo clássico, ao invés de uma densidade clássica, como foi feito aqui. Lá, vai ocorrer então, que a energia cinética de ponto zero, $\frac{1}{6} m(\bar{c}\gamma)^2$, também passará a pertencer ao termo cinético do campo clássico, e não mais a cada quasi-partícula individualmente. Esse efeito produz uma modificação no valor do gap, que passa assim a ser dado apenas pela energia cinética das excitações que é devida ao movimento do sóliton: $\frac{1}{2} m \bar{c}^2 (1 - \gamma^2)$. Esta outra fórmula para o gap estará portanto em completa consistência com a restrição $\gamma < 1$, que já era exigida pela equação de movimento clássica. Com a nova fórmula, γ precisa ser menor que um, também para garantir a positividade do gap.

Na literatura sobre o Hélio líquido, há vários modelos que introduzem um gap fenomenológico no espectro das excitações, para daí calcular propriedades termodinâmicas do fluido⁷⁻¹¹. É portanto muito interessante que esta teoria microscópica já pro

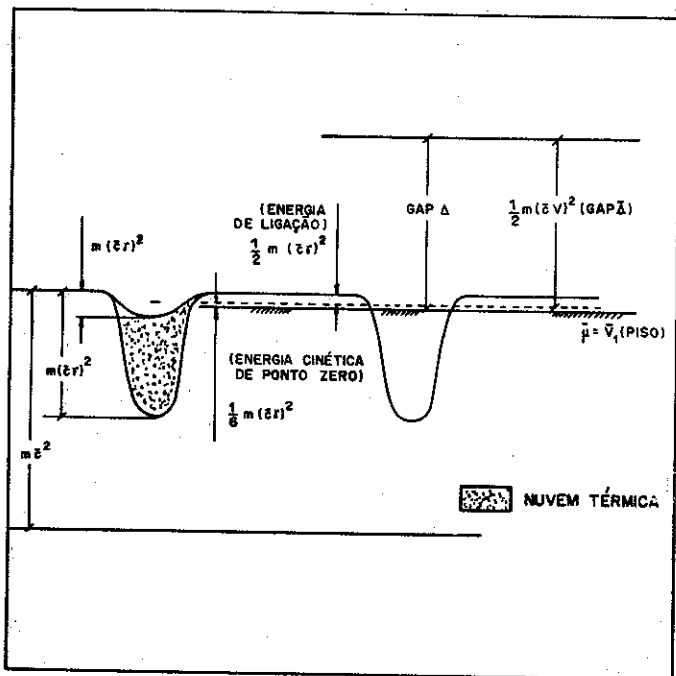


FIG. (3) - DISPOSIÇÃO DOS NÍVEIS DE ENERGIA DO PROBLEMA.

duza naturalmente um gap na energia das quasi-partículas ligadas.

A fig. (3) mostra esquematicamente a disposição das energias do problema, em comparação com as profundidades de um sóliton nu, e de outro, vestido pela nuvem térmica.

VIII. MECÂNICA ESTATÍSTICA

A energia livre de cada sóliton será a soma da energia clássica do sistema sóliton/nuvem térmica, mais a energia livre das quasi-partículas ligadas:

$$F_{\text{sóliton}}(T) = E_c[\varphi_c, \rho_{\text{n.t.}}(\vec{x}, t)] + F_{\text{q.p.}}(T) \quad (94)$$

onde $F_{\text{q.p.}}(T)$ é

$$F_{\text{q.p.}}(T) = \frac{A}{(2\pi)^2} T \int d^2 \vec{k} \ln \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{T} (\epsilon_{\text{Lab}}(\vec{k}) - \bar{\mu}) \right] \right\}, \quad (95)$$

sendo a energia de excitação do modo \vec{k} dada pela Eq. (92) da seção anterior. Na equação acima, A é a área do sóliton, e a integral é bidimensional porque a quasi-partícula se move presa no sóliton.

Dividindo essa energia livre pela área do sóliton, combinando as Eqs. (92) e (95), e após algum desenvolvimento de cálculo nós obtemos a energia livre das quasi-partículas ligadas por unidade de área:

$$h_{\text{q.p.}}(T) = -\frac{mT^2}{2\pi} G\left(\frac{\Lambda}{T}\right) \quad (96)$$

A função $G(u)$, que nesta equação depende da relação entre o gap e a temperatura, é definida pela integral

$$G(u) = - \int_u^{\infty} \ln(1 - e^{-s}) ds \quad (97)$$

e acaba sendo a própria função $F_2(u)$, que é analisada no Apêndice do livro de London⁽¹⁾,

$$G(u) = F_2(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nu} \quad (98)$$

O cálculo numérico dessa função foi feito conforme a expansão (1') daquele Apêndice.

Para obter a energia clássica por unidade de área do sóliton/nuvem térmica, nós utilizamos a Eq. (45), combinada com o ansatz (49), e a definição do índice de profundidade, Eq. (53).

O resultado é:

$$\sigma(\gamma, \chi) = \frac{2}{3} \bar{c} \rho_c \sqrt{\chi} \gamma^3 + O(\chi^{3/2}) \quad (99)$$

onde o termo de ordem $\chi^{3/2}$ será ignorado em comparação com $\sqrt{\chi}$, pois o índice de profundidade é muito pequeno.

Portanto a energia livre por unidade de área do sóliton será

$$f_{\text{sóliton}} = \frac{2}{3} \bar{c} \rho_c \sqrt{\chi} \gamma^3 - \frac{mT^2}{2\pi} G\left(\frac{\Delta}{T}\right) \quad (100)$$

e para obter a energia livre total por unidade de volume de todos os sósitons e nuvens térmicas do sistema (a qual não inclui evidentemente a energia livre do fluido normal), nós temos que

multiplicar a equação acima pelo "número de sósitons" a , dado pela Eq. (90):

$$F_{\text{total}} = \frac{1}{3} m \bar{c}^2 \rho_c \left\{ \frac{2}{3} \chi^2 \gamma^4 - \frac{mT^2}{2\pi \rho_c \bar{c}} \gamma \chi^{3/2} G\left(\frac{\Delta}{T}\right) \right\} \quad (101)$$

As Eqs. (43) e (44) relacionam \bar{c} e ρ_c respectivamente com c (velocidade do som no zero absoluto) e ρ (densidade total do sistema).

A cada temperatura, é a energia livre total que devemos minimizar, para obter as configurações (a, γ) de equilíbrio.

F_{total} depende de χ, γ e Δ . Mas na realidade, existem duas relações envolvendo essas três variáveis, de forma que χ e γ são funções do gap Δ , e assim o processo de minimização de F_{total} , envolve apenas a variação do gap.

A primeira dessas relações é a Eq. (93)

$$\frac{2\Delta}{mc} = \left(1 - \frac{2}{3}\gamma^2\right) \chi \quad (102)$$

enquanto que a outra, que vamos deduzir agora, surge quando impomos a auto-consistência do sistema, exigindo que a densidade da nuvem térmica seja dada simultaneamente pelas Eqs. (49) e (56).

Partindo da definição da densidade da nuvem térmica da Eq. (56), e considerando que η não é um campo local, sendo composto somente pelos modos de estado ligado, nós então concluímos que (ver Eqs. (59) e (60))

$$\rho_{n.t.}(\vec{x}, t) = \langle \eta^* \eta \rangle_{\text{térmica}} = \sum_m \langle a_m^* a_m \rangle_{\text{térmica}} f_m^*(\vec{x}) f_m(\vec{x}) \quad (103)$$

onde a média térmica do operador número $\langle a_m^* a_m \rangle_{\text{térmica}}$ é o núme-

ro de ocupação do m-ésimo estado ligado a temperatura T. Passando então para os estados de momento transversal bem definido (ver Eqs. (74) e (87),

$$\langle n^* \eta \rangle_{\text{térmica}} = \int \frac{A d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\frac{1}{T}(\epsilon_{\text{Lab}}(\vec{k}) - \bar{\mu})}}{1 - e^{-\frac{1}{T}(\epsilon_{\text{Lab}}(\vec{k}) - \bar{\mu})}} \left| \psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}}(\vec{x}, t) \right|^2, \quad (104)$$

ou ainda (ver Eqs. (19), (72) e (87)),

$$\begin{aligned} \langle n^* \eta \rangle_{\text{térmica}} &= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2 \vec{k} \frac{e^{-\frac{1}{T}\left(\Delta + \frac{\vec{k}^2}{2m}\right)}}{1 - e^{-\frac{1}{T}\left(\Delta + \frac{\vec{k}^2}{2m}\right)}} \frac{1}{A} \frac{\gamma m \bar{c}}{2 \cosh^2 \gamma m \bar{c}(x - \bar{c}vt)} \\ &= -\frac{m^2 \bar{c} \sqrt{\chi} T}{4\pi \rho_C \gamma} \ln \left(1 - e^{-\frac{\Delta}{T}} \right) Z(x, t). \end{aligned} \quad (105)$$

Deduzimos portanto que a densidade térmica $\rho_{n.t.}(\vec{x}, t)$

é dada por

$$\rho_{n.t.}(\vec{x}, t) = \frac{\sqrt{\chi}}{\gamma} S(\Delta, T) Z(z, t) \quad (106)$$

em que a função $S(\Delta, T)$ é a relação seguinte:

$$S(\Delta, T) = -\frac{m^2 \bar{c} T}{4\pi \rho_C} \ln \left(1 - e^{-\frac{\Delta}{T}} \right). \quad (107)$$

Logo, se compararmos a Eq. (106) com o ansatz da Eq. (49), vemos que a auto-consistência só será satisfeita se o fator de enchimento for:

$$b = \frac{\sqrt{\chi}}{\gamma} S(\Delta, T), \quad (108)$$

e é esta então a relação que faltava para que deduzíssemos as funções $\gamma(\Delta)$ e $\chi(\Delta)$.

Considerando outra vez que o fator de enchimento é muito próximo de um, podemos aproximar a equação acima por

$$\gamma = \sqrt{\chi} S(\Delta, T). \quad (109)$$

E se agora substituirmos γ , dado pela Eq. (109), na fórmula (102), resultará uma equação de segundo grau para o índice de profundidade, cujas raízes são

$$\chi_{\pm}(\Delta, T) = \frac{3}{4S^2} \left\{ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{16}{3} \frac{\Delta}{mc^2} S^2} \right\}. \quad (110)$$

Para encontrar a fase de equilíbrio, a cada temperatura, nós primeiro escolhemos uma das duas soluções acima como sendo a função $\chi(\Delta)$. A seguir utilizamos essa função para, com a Eq. (109), determinar $\gamma(\Delta)$.

χ e γ são então substituídas na energia livre total da fórmula (101), que passa a ser função do gap Δ e da temperatura, $F_{\text{total}}(\Delta, T)$.

Pela variação numérica do gap, nós então determinamos o valor $\Delta(T)$, que numa dada temperatura minimiza a energia livre, e que portanto corresponde a uma fase do sistema.

Uma vez conhecido o gap $\Delta(T)$, nós aí podemos determinar todos os valores das variáveis que caracterizam aquele estado termodinâmico ($\gamma(T)$, $\chi(T)$, $\underline{a}(T)$, etc.).

O índice de profundidade nunca ultrapassará o valor

0,21; e assim a aproximação $b \approx 1$, feita na passagem da Eq. (108) para a (109) é muito boa. Se essa aproximação não tivesse sido feita, o sistema formado pelas Eqs. (102) e (109) (que resultou na equação do segundo grau cujas raízes são dadas pela fórmula (110)) teria de ser resolvido numericamente.

O radicando das raízes χ_{\pm} pode ser colocado na forma

$$1 - D(T) H\left(\frac{\Delta}{T}\right) \quad (111)$$

sendo $D(T)$ uma função que cresce com a temperatura

$$D(T) = \frac{1}{3\pi^2} \frac{(mT)^3}{\rho_C^2(T)} ; \quad (112)$$

e $H(y)$ a função

$$H(y) = y |\ln(1 - e^{-y})|^2, \quad (113)$$

a qual se anula na origem e no infinito, e tem um valor máximo $H_{\max} = 0,5855$, no ponto $y_0 = 0,1748$.

Logo, nas temperaturas mais altas, em que $D(T)H_{\max} > 1$, o radicando acima passará a ser negativo, numa região de valores do gap, que contém o ponto de máximo de $H\left(\frac{\Delta}{T}\right)$, $\Delta_m = y_0 T$.

Nessa região não há raízes reais χ_{\pm} , e o sistema de equações, do qual determinamos γ e χ como funções de Δ , não tem soluções físicas.

O que ocorre é que para esses valores do gap, $S(\Delta, T)$ seria tão grande, e o sóliton ficaria tão cheio de quasi-partículas ligadas, que não seria possível satisfazer às equações (102) e (109) simultaneamente.

No presente caso, essa região começa a existir, a partir da temperatura de 2.073°K , e, se abre nas altas temperaturas, como mostra a fig. (4). Nós a denominamos região de saturação.

A transição de fase do superfluido para o líquido normal vai ocorrer justamente por causa da existência dessa região de saturação.

IX. AS FASES DO SISTEMA

O resultado da minimização da energia livre, através da variação do gap, é que o sistema tem duas fases líquidas: a fase A, que vai do zero absoluto até 2.1°K , e que por suas características, nós identificamos como sendo o Hélio II; e a fase B, que continua desse ponto para as temperaturas mais altas, e que descreve o líquido normal. Na transição de uma fase para outra o calor específico diverge, formando um ponto λ .

Passamos então a relatar em maiores detalhes o que foi observado.

Fase A: O SUPERFLUIDO

Escolhendo a raiz $\chi_-(\Delta, T)$, entre os valores possíveis para o índice de profundidade da fórmula (110), nós verificamos que existirá um mínimo da energia livre, para cada valor da temperatura no intervalo que vai do zero absoluto até $T_{\lambda} = 2.093^{\circ}\text{K}$.

O valor do gap onde ocorre esse mínimo é dado pela função $\Delta_S(T)$, mostrada na fig. (5).

.55a.

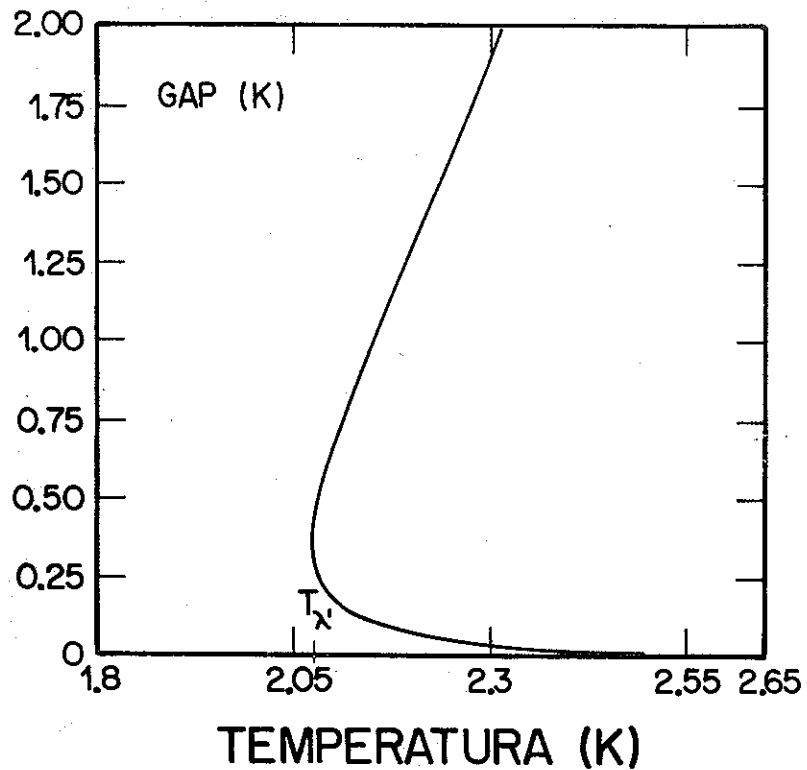


FIG. 4 - REGIÃO DE SATURAÇÃO NO PLANO $\Delta \times T$.

.55b.

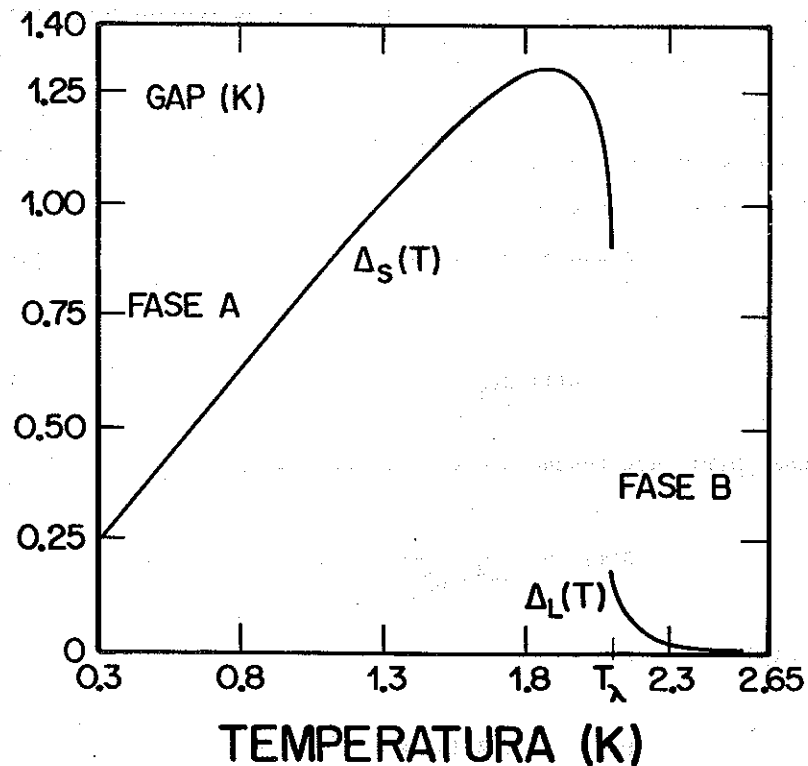


FIG. 5 - TRAJETÓRIAS DO GAP - FASE A: $\Delta_S(T)$; FASE B: $\Delta_L(T)$.

A função contínua $\Delta_S(T)$ é nula no zero absoluto, e sobe, a derivada quase constante, até a temperatura de 1.5°K , quando começa a subir mais lentamente, para atingir seu valor máximo de 1.31°K , a aproximadamente 1.8°K . Ela em seguida cai de forma abrupta, até o valor de 0.91°K , no ponto λ .

Acima do ponto 2.093°K , o mínimo associado à raiz $X_-(\Delta, T)$ deixa de existir, e ali termina a fase A. Portanto T_λ é um ponto crítico, que descreve o ponto λ do He líquido.

Fase B: O LÍQUIDO NORMAL

Se agora escolhemos o índice de profundidade correspondente à raiz $X_+(\Delta, T)$ da fórmula (110), encontramos uma outra linha de mínimos $\Delta_\ell(T)$, que também é mostrada na Fig. (5), e que se inicia quando $\Delta_S(T)$ termina, prosseguindo nas temperaturas mais altas, para valores cada vez menores do gap. Essa então é a fase do líquido normal, que denominamos fase B.

Logo, com o aumento progressivo da temperatura, o sistema, que nas temperaturas menores se encontrava na fase A, vai "saltar" para a fase B, quando T atingir a temperatura crítica T_λ , pois ali a fase A termina.

A linha de mínimos $\Delta_\ell(T)$ começa na mesma temperatura $T_\ell = 2.073^\circ\text{K}$ (que na realidade é ligeiramente menor que T_λ), e no mesmo valor do gap $\gamma_0 T_\ell$, em que se iniciava a região de saturação. No entanto, nossa análise numérica mostra que, com exceção desse ponto inicial, a linha $\Delta_\ell(T)$ estará sempre afastada da fronteira da região proibida, e localizada um pouco abaixo da mesma.

A pequena discrepância existente entre T_λ e T_ℓ , que

é apenas da ordem de 1%, nós atribuímos às aproximações feitas nas fórmulas (99) e (109), que eram compatíveis com o fato de X ser muito menor que um.

Verificamos que, no zero absoluto, todas as grandezas Δ , γ , X e a , assim como a velocidade dos sólitons $\tilde{c}V$, são nulas. Além disso, todas elas, como funções da temperatura, apresentam singularidade no ponto λ .

O número γ , que caracteriza o tipo de sóliton existente no sistema a cada temperatura, é mostrado na fig. (6). Notamos que, em quase toda extensão da fase A, $\gamma(T)$ é relativamente pequeno. Nas proximidades do ponto crítico, ele então cresce rapidamente, e continua crescendo já na região da fase B.

No entanto, como a fórmula do gap, deste artigo, não traz consigo a restrição $\gamma > 1$ (ver discussão na seqüência da Eq. (93)), acaba ocorrendo que, acima de $2,25^\circ\text{K}$, isto é, já na fase B, surgem mínimos que correspondem a valores de γ ligeiramente maiores que um.

Felizmente, quando introduzimos a nuvem térmica através de um campo clássico, como será feito no artigo seguinte, o mesmo problema não se repete. Naquele caso, a energia cinética devida ao movimento de ponto zero, $\frac{1}{6} m \tilde{c}^2 \gamma^2$, será absorvida pelo termo cinético do campo clássico, e portanto sairá do gap. Assim, a própria positividade do novo gap será suficiente para garantir que $\gamma > 1$, nos pontos de equilíbrio.

A fig.(7) é o gráfico do "número de sólitons" a , como função da temperatura. Esse número será realmente apreciável apenas no intervalo $1.5^\circ\text{K} \lesssim T \leq T_\lambda$, e, em comparação com seu valor nessa região, ele é muito pequeno, tanto quando a temperatura é muito baixa ($T \lesssim 0.7^\circ\text{K}$), assim como quando muito alta ($T \geq 2.6^\circ\text{K}$),

.57a.

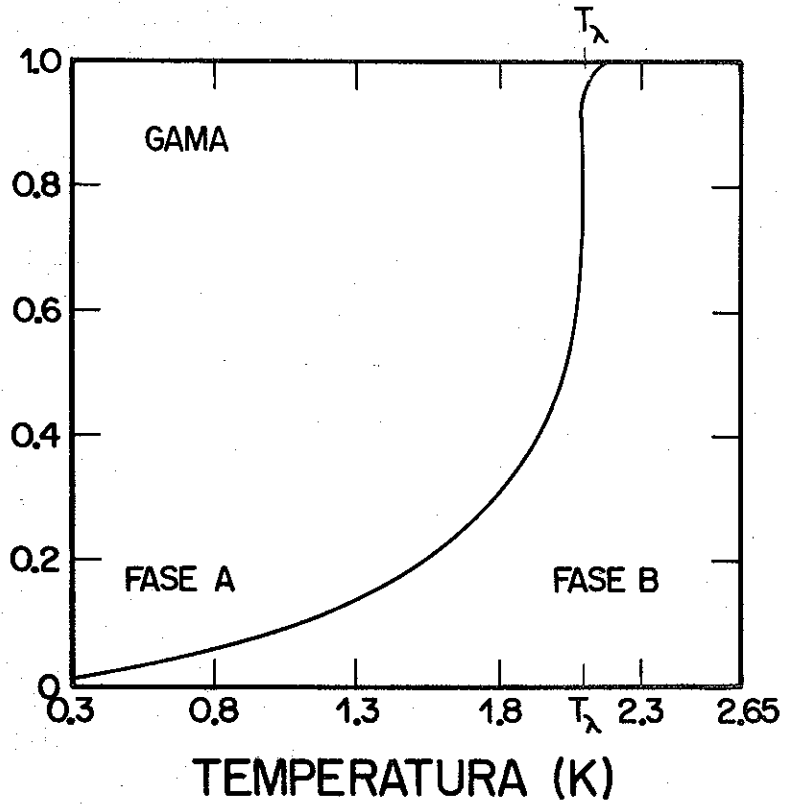


FIG. 6 - NÚMERO GAMA.

.57b.

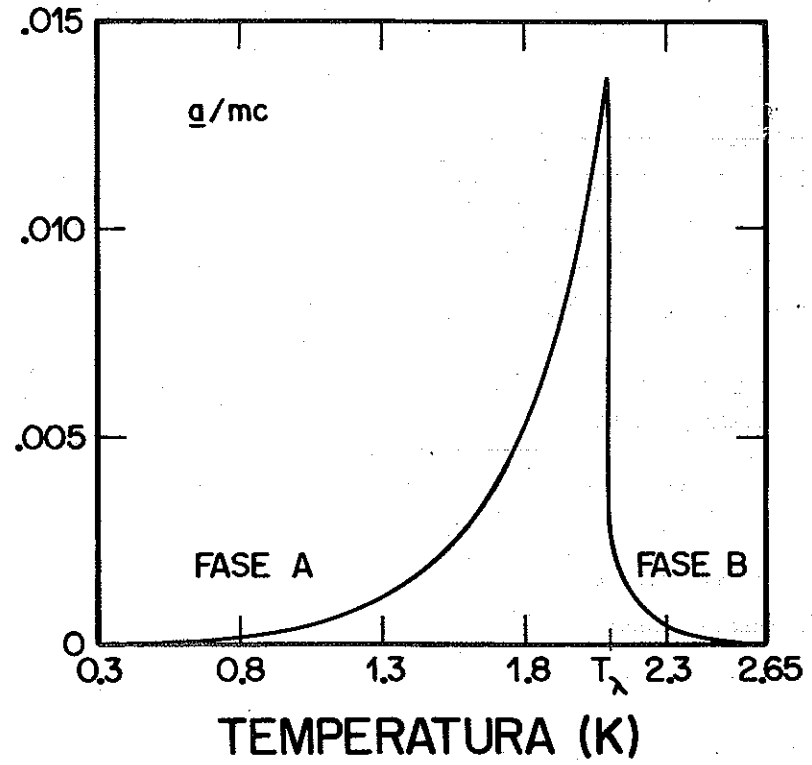


FIG. 7 - "NÚMERO DE SÓLITONS": g/mc .

a cai bruscamente na passagem pelo ponto λ .

Notamos que os valores de a nunca ultrapassam 0.015 m.c. Esse resultado então garante que, tratar cada sóliton como um objeto isolado, como fizemos, é uma aproximação excelente. Em particular, aquela exponencial, introduzida no Capítulo III, $\exp(-2m\bar{c}d) = \exp(-6m\bar{c}d/a)$, que dá uma idéia sobre a amplitude da interferência direta entre sólitons vizinhos, será, em qualquer das duas fases, sempre um número desprezível.

As paredes são importantes para a constituição de ambas as fases. Mesmo na fase B, onde os sólitons são menos numerosos, eles têm contudo muito maior profundidade, do que tinham na fase superfluida. E portanto terão ali muito maior entropia por unidade de área (inclusive porque o gap, na fase de alta temperatura, é muito pequeno).

A aproximação $b=1$, feita no Capítulo VIII também acaba sendo validada pelos resultados: o índice de profundidade X (ver fig. (8)), de fato, é sempre muito menor que um. Seu valor máximo, alcançado um pouco abaixo do ponto λ , é 0.21. Nota-se que a função $X(T)$ também sofre uma queda repentina, na transição de fase.

A fig. (9), por sua vez, mostra como a velocidade do sóliton, $\bar{c}V$, depende da temperatura. Também para essa grandeza, observamos uma queda abrupta na passagem pelo ponto crítico; que faz com que os sólitons da fase B tenham velocidade muito pequena. Entre 1.1°K e 2.0°K, a velocidade do sóliton é da ordem de 60 a 70 m/seg.

Concluimos assim que o superfluido é caracterizado por ter sólitons rasos, apenas parcialmente cheios, mas rápidos e numerosos; enquanto que, no líquido normal, as paredes são profun-

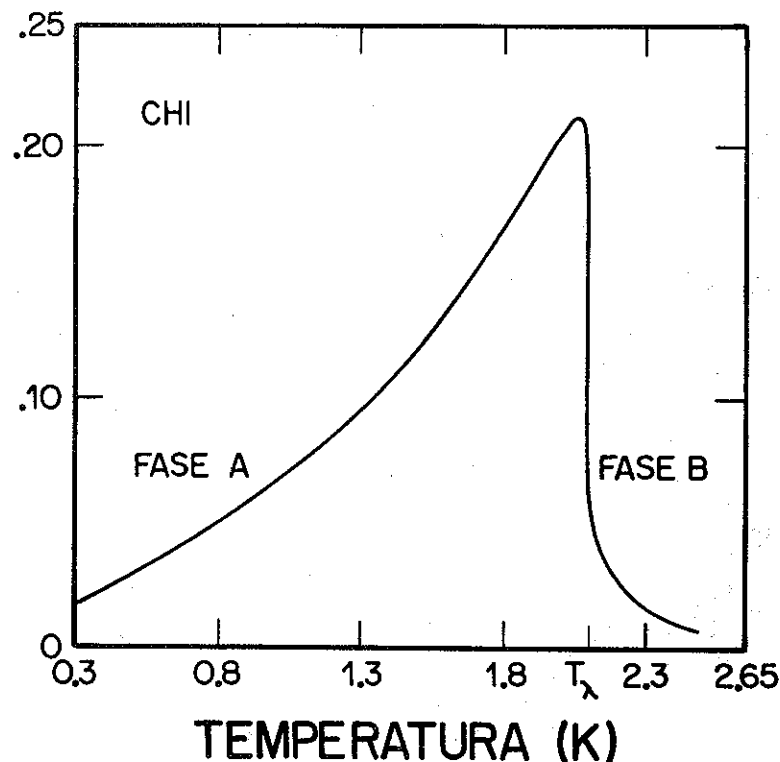


FIG. 8 - ÍNDICE DE PROFUNDIDADE.

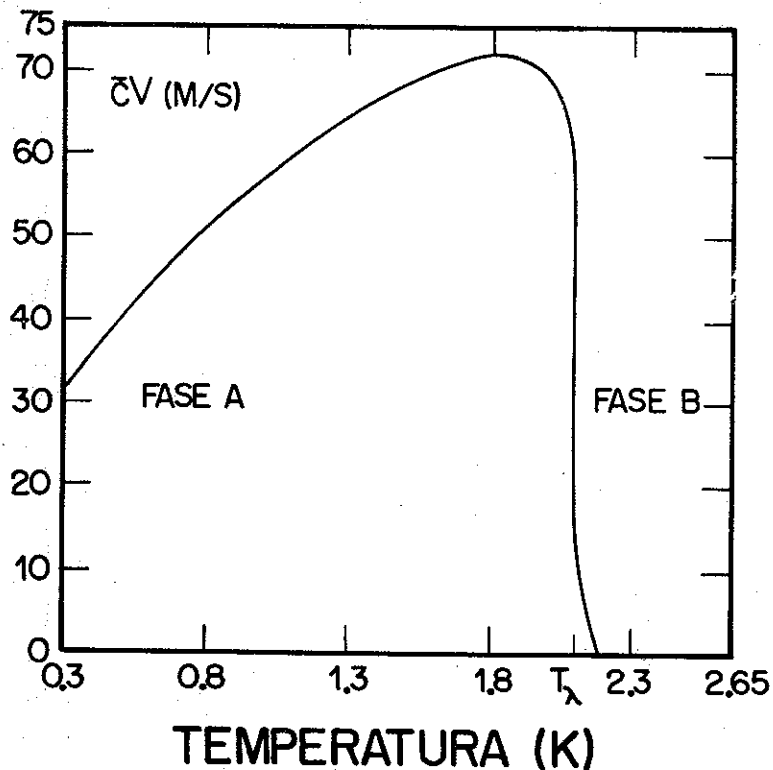


FIG. 9- VELOCIDADE DOS SÓLITONS EM M/S.

das, quase que completamente cheias, lentas e escassas.

No artigo seguinte nós introduzimos o índice de superfluidez, $s(T)$, que vai depender da velocidade, do "número de sólitons", e da massa faltante em cada um deles. $s(T)$ indica qual é o intervalo de temperatura, em que a superfluidez deve ser significativa.

Derivando numericamente a energia livre dos pontos de mínimo $F_0(T, A(T))$, com relação à temperatura,

$$C_\rho(T) = -T \frac{d^2 F_0}{dT^2} \quad (114)$$

nós determinamos o calor específico a ρ constante, que é apresentado nas figs. (1) e (10).

Na fig. (10) temos o calor específico associado aos sólitons do sistema. Ali vemos o ponto λ , onde $C_\rho(T)$ diverge, na temperatura de 2.093°K , que é bem próxima da temperatura de transição do Hélio líquido a pressão normal.

O calor específico total é a soma do calor específico dos sólitons, com o calor específico do fluido normal; sendo este último dado pelo calor específico do gás de Bose-Einstein. O resultado dessa soma já tinha sido mostrado na fig. (1).

Sabe-se que, na Região de Landau, que vai de aproximadamente 0.6°K a 1.8°K , o calor específico do Hélio superfluido pode ser bem parametrizado pela forma:

$$C \approx K e^{-\frac{\Delta_0}{T}} \quad (115)$$

onde K é constante, e o "gap térmico" Δ_0 é da ordem de 8°K^{9-11} . Vários modelos da fenomenologia do ^4He líquido introduzem esse

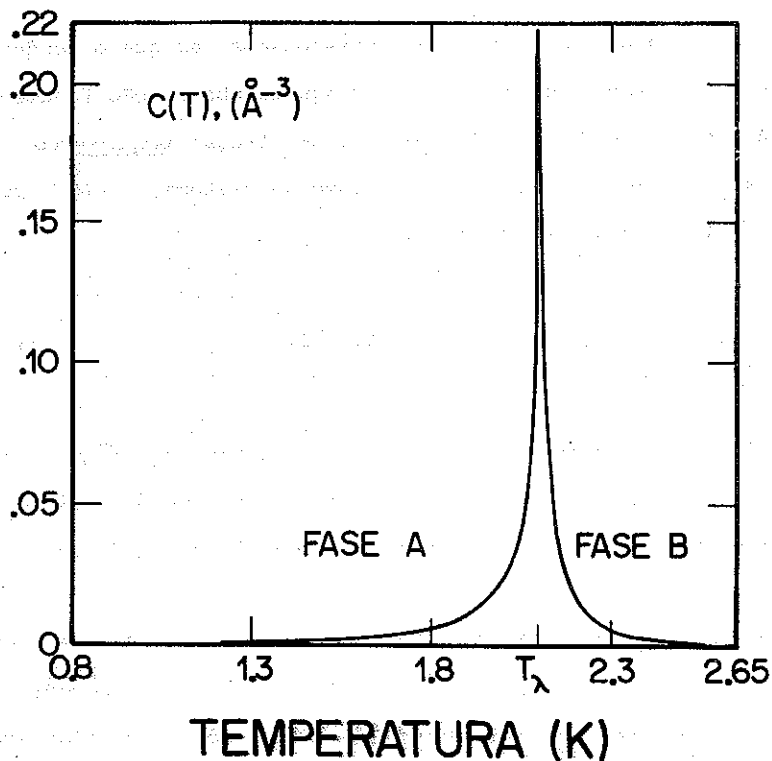


FIG. 10 - CALOR ESPECÍFICO DO SISTEMA DE SÓLITONS.

gap térmico^{7-9,11}, no espectro de excitações, para depois procurar explicar outros aspectos do sistema.

A parametrização acima pode também ser escrita como

$$\ln \frac{C}{K} \approx -\frac{\Delta_0}{T} \quad (116)$$

Na fig. (11) nós apresentamos o logaritmo do calor específico $C_p(T)$ (triângulos), como função da variável $\frac{1}{T}$, num intervalo que corresponde à Região de Landau. Observa-se então que nossos resultados também são bem parametrizados pela forma (116), com um "gap térmico" de 6.2°K ; fato esse que está em concordância com a parametrização dos dados experimentais. Se, por outro lado, parametrizarmos nosso calor específico no intervalo $1.2 - 1.5^\circ\text{K}$ (que foi o intervalo de temperatura originalmente utilizado por Landau⁹ para calcular o róton), é interessante observar que obtemos $\Delta_0 \approx 8.5^\circ\text{K}$.

Notar que o condensado, representado pelo campo clássico φ_c , continua a existir na fase de alta temperatura; ou seja, o líquido normal também tem um condensado. Esse fenômeno já tinha sido predito na Ref. (22), através do estudo semi-quantitativo do papel das paredes na transição de fase.

Na literatura da fenomenologia do Hélio, argumenta-se, com base em alguns resultados experimentais que, para o Hélio superfluido, o número de ocupação $n(0)$ do estado de momento zero deve ser muito pequeno, ou talvez nulo. Fica então muito difícil compreender esse fato no contexto da teoria do condensado uniforme, pois ali o condensado é formado justamente pelas partículas de momento zero; e se, por exemplo, não houver partículas de momento zero, não poderá, naquele contexto, haver condensado.

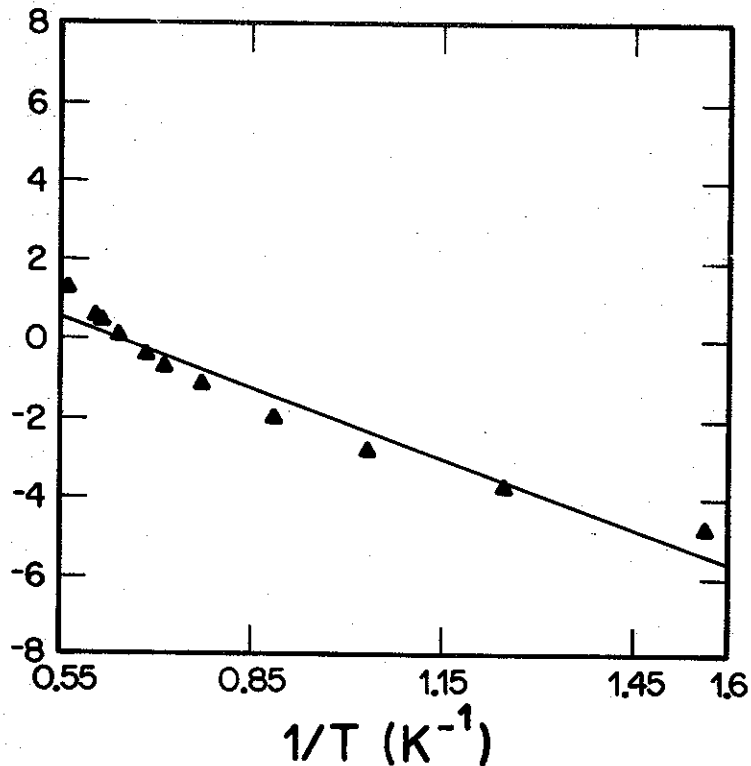


FIG. 11 - LOGARITMO DO CALOR ESPECÍFICO (▲) VS. O INVERSO DA TEMPERATURA, NO INTERVALO DE 0,6K - 1,8K. A RETA CONTÍNUA DÁ A DERIVADA MÉDIA, OU O GAP MÉDIO (-6,2K).

Já a teoria que aqui apresentamos, em que o condensado não é uniforme, permite conciliar aquela observação fenomenológica com o fato de o condensado ser uma fração preponderante do sistema. Vejamos: sendo Vol o volume do sistema, $n(0)$ pode ser calculado pela análise de Fourier

$$n(0) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}} \left| \int \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{\text{Vol}}} \varphi_c(\vec{x}) d^3\vec{x} \right|^2 \quad (117)$$

Se o condensado for uniforme, então $\varphi_c = \sqrt{\rho}$, e $n(0) = \rho$. Mas, no caso do condensado desta teoria, que é subdividido em domínios de fase, $n(0) = 0$, pois a integral dentro do quadrado se anula.

A aproximação de substituir o potencial de interação entre os átomos de Hélio por uma função $\lambda \delta(\vec{x})$ é um procedimento tradicional no estudo do Hélio líquido, e nós a consideramos uma boa aproximação. A esse respeito deve-se notar que o potencial de Slater e Kirkwood⁽¹⁾, assim como também os potenciais semi-fenomenológicos adotados por Yntema e Schneider¹, e por London¹, têm um caroço central repulsivo do tipo $g.e^{-r/\alpha}$, com uma largura característica muito estreita: $\alpha \sim 0,2 \text{ \AA}$.

Numa pesquisa ainda em andamento, nós estamos analisando o sistema a densidades maiores, introduzindo também o efeito do potencial largo de maneira fenomenológica, com o propósito de explorar a possibilidade de compreender alguns aspectos da fase sólida do Hélio.

Neste Artigo I nós introduzimos as idéias principais da teoria de maneira intuitiva, e mostramos o método de cálculo em detalhe. Mas é no Artigo II que apresentamos a fundamentação

correta do problema, e também onde interpretamos apropriadamente tanto os métodos como os resultados.

REFERÊNCIAS

- (1) F. London, Superfluids, vol. II, John Wiley, Nova York (1954).
- (2) W.H. Keesom, Helium, Elsevier, Amsterdam (1942).
- (3) K.R. Atkins, Liquid Helium, At the University Press, Cambridge (1959); J. Wilks, An Introduction to Liquid Helium, Clarendon Press, Oxford (1970); D. Pines, The Many-Body Problem, W.A. Benjamin, Nova York (1961).
- (4) F. London, Nature 141, 643 (1938); Phys. Rev. 54, 947 (1938); J. Phys. Chem. 43, 49 (1939).
- (5) A. Einstein, Sitzber. kgl. preuss. Akad. Wiss., 1924, p. 261; 1925, p. 3.
- (6) L. Tisza, Nature 141, 913 (1938); Compt. rend. 207, 1035, 1186 (1938); J. phys. et radium (8) 1, 164, 350 (1940); Phys. Rev. 72, 838 (1947).
- (7) H. Fröhlich, na Conferência "The Properties of Liquid Helium", realizada por iniciativa do International Institute of Refrigeration, 12 de julho de 1938, na Burlington House, Londres; citado na Ref. (2).
- (8) A. Bijl, Physica 7, 869 (1940); A. Michels, A. Bijl e J. de Boer, Nature 144, 594 (1939); Physica 8, 655 (1941).
- (9) L.D. Landau, J. Phys. USSR 5, 71 (1941); 11, 91 (1947); L. D. Landau e I.M. Khalatnikov, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 19, 637 (1949); 709 (1949).
- (10) E.M. Lifshitz e E.L. Andronikashvili, "A Supplement to Helium", Consultants Bureau, Nova York (1959); L. Landau e E.Lifshitz, "Physique Statistique", Editions Mir, Moscou (1967).
- (11) I.M. Khalatnikov, "An Introduction to the Theory of Superfluidity", W.A. Benjamin, Nova York (1965).

- (12) N.N. Bogoliubov, J. Phys. USSR 11, 23 (1947).
- (13) T.D. Lee, K. Huang e C.N. Yang, Phys. Rev. 106, 1135 (1957).
- (14) S.T. Beliaev, Sov. Phys. JETP 7, 289 (1958); 299 (1958).
- (15) N.M. Hugenholtz e D. Pines, Phys. Rev. 116, 489 (1959).
- (16) P. Nozieres, em "Quantum Fluids", ed. D.F. Brewer, North-Holland, Amsterdam (1966).
- (17) R.P. Feynman, Phys. Rev. 94, 264 (1954); em "Progress in Low Temperature Physics I", ed. C.J. Gorter, North-Holland, Amsterdam (1955); R.P. Feynman and M. Cohen, Phys. Rev. 102, 1189 (1956); *ibid* 107, 13 (1957).
- (18) R. Jastrow, Phys. Rev. 98, 1479 (1955); E. Feenberg, American J. of Physics 38, 684 (1970); "Theory of Quantum Fluids", Academic Press, Nova York (1969); H.W. Jackson e E. Feenberg, Rev. Mod. Physics 34, 686 (1962); E. Feenberg e C.W. Woo, Phys. Rev. 137, A391 (1965); C.W. Woo, Microscopic Calculations for Condensed Phases of Helium, em "The Physics of Liquid and Solid Helium", ed. K.H. Bennemann e J.B. Ketterson, John Wiley, Nova York (1976).
- (19) E.P. Gross, Nuovo Cimento 20, 454 (1961); L.P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP 13, 451 (1961).
- (20) P.W. Anderson, Rev. Mod. Phys. 38, 298 (1966).
- (21) V.L. Ginzburg e A.A. Sobaynin, Sov. Phys. Usp. 19, 773 (1976).
- (22) I. Ventura, Rev. Bras. Fís. 9, 375 (1979).
- (23) I. Ventura, "Theory of Superfluidity - Macroscopic Quantum Waves", Univ. S. Paulo preprint (1978); F.M.P. Chaves, J.W. Maluf e I. Ventura, Rev. Bras. Fís. 10, 561 (1980); I. Ventura, Proc. "I Encontro Nacional de Partículas e Campos", ed. pela Soc. Bras. Fís., Cambuquira (1979); I. Ventura, "Sólitos", em Proc. Escola J.A. Swieca, ed. por G.C. Marques

- et al., SBF, S. Paulo (1983), I. Ventura, "Macroscopic Quantum Waves in Boson Systems I", Univ. S. Paulo preprint (1979); E. Lopes, "Sólitos da Equação de Gross-Pitaevskii", Tese, Univ. S. Paulo (1985).
- (24) R.F. Dashen, B. Hasslacher e A. Neveu, Phys. Rev. D10, 4144 (1974); D10, 4130 (1974); R. Rajaraman, Phys. Lett. 21C, 227 (1975).
- (25) R. Friedberg, T.D. Lee e A. Sirlin, Phys. Rev. D13, 2739 (1976); Nucl. Phys. B115, 1, 32 (1976); T.D. Lee, "Particle Physics and Introduction to Field Theory", Harwood Academic Publishers (1981).
- (26) I. Ventura e G.C. Marques, J. Math. Phys. 19 (1978).
- (27) I. Ventura, Phys. Rev. B24, 2812 (1981).
- (28) D. Bazeia, G.C. Marques e I. Ventura, Rev. Bras. Fís. 13, 253 (1983); C.A. de Carvalho, G.C. Marques, A.J. da Silva e I. Ventura, Nucl. Phys. B; C.A. de Carvalho, D. Bazeia, O.P. Ebo li, G.C. Marques, A.J. da Silva e I. Ventura, Phys. Rev. D31, 1411 (1985).
- (29) I. Ventura e S. Vitiello, "Solitons as Liquid ⁴He Domain Walls: Quasi-Particle Spectrum", Univ. S. Paulo preprint (1986), submetido a Rev. Bras. Fís.; S. Vitiello, Tese, Univ. S. Paulo (1986).
- (30) A.D.B. Woods e R.A. Cowley, Rept. Prog. in Physics 36, 1135 (1973); R.A. Cowley e A.D.B. Woods, Can. J. Phys. 49, 177 (1971); R.A. Cowley, em "Quantum Liquids", ed. por J. Ruvalds e T. Regge, North-Holland, Amsterdam (1978); H. Palevsk, K. Otnes e K.E. Larsson; Phys. Rev. 112, 11 (1959); E.C. Svensson, V.F. Sears, A.D.B. Woods e P. Martel, Phys. Rev. B21, 3638 (1980); e outras referências citadas nestas.

- (31) T. Tsuzuki, J. Low Temp. Phys. 4, 441 (1971).
- (32) V.E. Zakharov e A.B. Shabat, Sov. Phys. JETP 37, 823 (1973).
- (33) P. Kulish, S. Manakov e L. Faddeev, Theor. Mat. Fiz. 28, 38 (1976).
- (34) V.G. Makhankov e V.K. Fedyanin, Physics Report 104 (1984); e referências ali citadas.
- (35) V.G. Makhankov, N.V. Makhaldiani, O.K. Pashaev, Phys. Lett. 81, 3 (1981).
- (36) A. Hasegawa e F. Tappert, Appl. Phys. Lett. 23, 142; 171 (1973).